

# Dificultades que presentan los estudiantes cuando resuelven problemas de cálculo mental

Yesica Liliana Islas Arias <sup>1</sup> 

Marcos Campos Nava <sup>2</sup> 

Agustín Alfredo Torres Rodríguez <sup>3</sup> 

## Resumen

El cálculo mental es una de las competencias matemáticas que ha sido descrita por diversos autores, como un indicador del avance de los estudiantes de nivel básico. En el modelo educativo vigente, se encuentra considerado en el Sistema de Alerta Temprana (SisAT), que es un conjunto de indicadores y herramientas que permite a los docentes y autoridades educativas contar con información sistemática y oportuna sobre los riesgos de no alcanzar los aprendizajes esperados. Esta investigación gira en torno a las dificultades que presentan estudiantes de educación secundaria en México al resolver problemas en los que deben emplear el cálculo mental, este fenómeno se analiza desde la perspectiva del desarrollo del sentido numérico. La literatura sugiere que el desarrollo del sentido numérico puede dar significado a los conocimientos que los estudiantes elaboran en sus clases de aritmética. El enfoque metodológico es de tipo cualitativo y la estrategia utilizada fue el estudio de caso. Dentro de los resultados obtenidos se identificó que las dificultades que presentaron los estudiantes, estos se pueden dividir en dos tipos, el primero gira en torno a carencias del sentido numérico y el segundo al rezago educativo que presentan los estudiantes.

## Palabras clave

Cálculo mental, sentido numérico, estudiantes, problemas, dificultades

---

<sup>1</sup> is477758@uaeh.edu.mx

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Hidalgo, México

<sup>2</sup> mcampos@uaeh.edu.mx

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Hidalgo, México

<sup>3</sup> agustin\_torres@uaeh.edu.mx

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Hidalgo, México

## Introducción

Desarrollar y consolidar habilidades matemáticas es de suma importancia para todo individuo. En el mundo actual numerosos procesos giran en torno a esta disciplina, las matemáticas están en todas partes, en los lugares más inesperados, conduciendo la rutina del ser humano, y a menudo no se es consciente de ello (Álvarez, 2006). Asimismo, apoyan el desarrollo de estructuras cognitivas, es decir, proveen de herramientas que desarrollan una estructura mental lógica que permiten enfrentar diversas circunstancias cotidianas (Gómez & Mireles, 2019).

Las matemáticas forman parte de muchas situaciones cotidianas importantes para la vida, en este orden de ideas, las personas se enfrentan a la necesidad de tener una competencia matemática básica. Leer cantidades, enumerar y agrupar objetos, u operar con números son algunos ejemplos de situaciones que viven a diario las personas (Álvarez, 2006). En esta línea, organismos internacionales como la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), consideran relevante que los estudiantes desarrollen competencias matemáticas (OCDE, 2016).

Una de las competencias matemáticas utilizadas en la vida cotidiana de cualquier individuo es el cálculo mental, por lo que esta habilidad adquiere especial relevancia, ya que se emplea dentro como fuera del contexto escolar. Por ejemplo, al realizar compras, calcular cuotas y distancias, y planificar el gasto familiar, entre otras situaciones. En esta investigación, el interés se centra en la relevancia del cálculo mental dentro del contexto del aula, debido a que en este escenario se le considera como una herramienta básica del aprendizaje y un indicador que permite diagnosticar el nivel en el que se encuentran los estudiantes en esta habilidad matemática. Parra (1994) destaca que la enseñanza del cálculo mental en el contexto escolar se basa principalmente en la resolución de problemas de tipo aritmético (comprensión de los números y sus operaciones).

En este sentido, se adopta el concepto de cálculo mental de Parra (1994), quien lo define como un conjunto de procedimientos que permiten obtener resultados a través del análisis de los números involucrados, sin utilizar algoritmos, y haciendo uso de las particularidades del sistema de numeración, las operaciones y las relaciones existentes entre los números. A pesar de la relevancia del cálculo mental, dada su pertinencia para desarrollar habilidades en las operaciones con números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017), se han observado resultados poco favorables en el desarrollo de tales habilidades a través de la aplicación de la prueba SisAT (Sistema de Alerta Temprana). Esta evaluación se aplica en todos los niveles de educación secundaria en México a partir del año 2013. Su propósito es contribuir a la prevención y

atención del rezago y el abandono escolar mediante la identificación de los alumnos en riesgo, a través de la exploración de las habilidades básicas para el aprendizaje (lectura, escritura y cálculo mental).

Un área evaluada dentro de estas pruebas es la asociada con las operaciones aritméticas básicas, la cual está directamente relacionada con el desarrollo del sentido numérico de los estudiantes. Una posible explicación a este fenómeno la ofrece Berch (2005), quien señaló una relación entre el cálculo mental y el sentido numérico. La relación entre ambos conceptos no es simple, ya que algunos autores consideran que el cálculo mental forma parte del sentido numérico (Lemonidis, 2016), mientras que otros sugieren que están relacionados pero separados (Department for Education, 2010; Heirdsfield, 2002). Por último, otros investigadores proponen una relación bidireccional, al sostener que las habilidades de sentido numérico influyen en las habilidades de cálculo mental, pero, al mismo tiempo, la práctica del cálculo mental también fomenta el sentido numérico (Ruiz & Balbi, 2018).

La enseñanza del cálculo mental ha ganado relevancia, porque distintos autores sugieren una relación con varias otras habilidades matemáticas como la mejora en la resolución de problemas, el razonamiento, así como una relación en el rendimiento del álgebra (Watson et al., 2018; Parra, 1994; Ruiz & Balbi, 2018).

## **Antecedentes**

La literatura en torno al cálculo mental es amplia. Algunos estudios se enfocan en identificar las estrategias que utilizan los estudiantes al enfrentarse a problemas de cálculo, otros las relacionan con la habilidad para resolver problemas o con el desarrollo de otras destrezas, y algunos más analizan la enseñanza de esta habilidad como estrategia didáctica.

En un estudio de Rodríguez y Juárez (2019) con estudiantes de secundaria en México, se analizaron las estrategias mostradas por los estudiantes para el cálculo mental (CM en adelante) con sumas y restas. Asimismo el trabajo de Barrera et al. (2018), que tuvo como propósito identificar estrategias de CM utilizadas por los estudiantes en un contexto de juego (compra-venta), mostró que en un ambiente de juego y competencia se podía promover el aprendizaje. Gómez y Mireles (2019), también con estudiantes de secundaria en México, encontraron que los procesos de entrenamiento en CM resultan estrategias didácticas importantes para favorecer el aprendizaje.

En otros estudios realizados también en México, como los de Cortés (2004) y Mochón y Vázquez (1995), se encontraron varias dificultades al resolver pruebas de CM por parte de estudiantes de nivel primaria y secundaria. Se observó que hacía falta el diseño de estrategias instruccionales del docente, así como la falta de problemas o situaciones contextualizadas, para favorecer la comprensión de estos contenidos.

En el plano internacional, se revisaron trabajos como los de Reys et al. (1995) en Japón, que identificaron que las representaciones visuales incidían en la obtención de resultados más altos en el rendimiento en CM, o trabajos como el de Watson et al. (2018) en Portugal, quienes clasificaron algunos errores comunes de omisión y procedimiento en el CM de sumas y restas. Por su parte, Stauffer et al, (2020) implementaron en México actividades para la enseñanza del cálculo estimativo para el caso de las operaciones de multiplicación y división.

Otros estudios revisados se desarrollaron con futuros profesores de matemáticas, como el de Sengül (2013) en Turquía o el de Almeida et al (2014) en España, dónde se indagó acerca de la relación entre el sentido numérico y las estrategias para resolver problemas de CM, hallándose que, en general, no empleaban los componentes del sentido numérico en sus estrategias de solución.

Un tercer tipo de estudios abordan el diseño e implementación de programas de intervención, para que los docentes apliquen actividades para el desarrollo de las habilidades del CM, tenemos en este caso el trabajo de Ruiz y Balbi (2018) en Paraguay, o el de Pourdavood et al. (2020) en Estados Unidos, quienes investigaron la actividad del CM, y su relación con el pensamiento y razonamiento algebraicos, hallando que las estrategias de CM contribuyen al desarrollar el razonamiento superior y el pensamiento crítico, además de fortalecer el desarrollo del sentido numérico.

A partir de la revisión de la literatura, se reconoció que la mayoría de los trabajos se han enfocado en investigaciones sobre la identificación de estrategias utilizadas por alumnos de primaria y en una minoría en alumnos de secundaria al realizar tareas de cálculo mental o cálculo estimativo, así como también en el mismo nivel educativo la implementación de la enseñanza del cálculo como estrategia didáctica. Otro hallazgo relevante es que los estudiantes de primaria y secundaria tienden a utilizar métodos algorítmicos para resolver situaciones de cálculo, sin reconocer de manera clara algunos componentes del sentido numérico. Por lo anteriormente expuesto, esta investigación se enfoca en analizar y clasificar las dificultades que presentan los estudiantes de secundaria en la resolución problemas de cálculo mental, así como en examinar la relación de tales dificultades con el empleo de algunos elementos del sentido numérico.

## **Referentes teóricos**

### *El sentido numérico y el cálculo mental*

Dos referentes conceptuales considerados en este trabajo son el del sentido numérico (SN) y el cálculo mental (CM). Para efectos de esta investigación se adopta la definición de SN propuesta por McIntosh et al. (1992), quienes lo describen como "... la comprensión general que una persona tiene

de los números y las operaciones, junto con la capacidad y la inclinación a utilizar esta comprensión de forma flexible para hacer juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles para manejar los números y las operaciones...” (p.3). El SN incluye diferentes elementos de los números, las operaciones y sus relaciones, lo que ha propiciado diversas investigaciones y debates entre profesores de matemáticas, investigadores y diseñadores de currículum en la disciplina (Sengül, 2013). Al respecto Almeida et al. (2014) señalan que la clasificación de componentes del SN con mayor influencia en la educación matemática, es la propuesta por la National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989) la cual fue posteriormente ampliada por McIntosh et al. (1992) quienes desglosaron algunos componentes y añadiendo otros. En la tabla siguiente (tabla 1), se describen los siete componentes clasificados.

**Tabla 1**  
*Descripción de los componentes del sentido numérico*

| Componente                                                                   | Descripción                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Comprender el significado de los números                                  | Implica la comprensión de la organización del sistema de numeración decimal y las numerosas relaciones existentes entre los números                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 2. Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números  | Se refiere a reconocer y estimar el tamaño absoluto o relativo de un número, de una cantidad o de una medida en comparación con otro número, cantidad o medida. Incluye la comparación y el orden de los números y la identificación de números entre otros dos dados                                                                                                                          |
| 3. Usar puntos de referencia                                                 | Estos puntos son valores que le resultan cómodos de manejar a un individuo en la realización de cálculos o comparaciones. Este componente incluye la habilidad para usar referentes mentales para usar números en la resolución de problemas                                                                                                                                                   |
| 4. Utilizar la composición y descomposición de los números                   | Se refiere a la habilidad de composición y descomposición de los números, de manera equivalente, con el propósito de realizar operaciones con mayor fluidez                                                                                                                                                                                                                                    |
| 5. Usar múltiples representaciones de los números y sus operaciones          | Este componente se manifiesta al utilizar diversas representaciones en la resolución de problemas numéricos de forma práctica y flexible                                                                                                                                                                                                                                                       |
| 6. Comprender el efecto relativo de las operaciones                          | Es la habilidad para identificar cómo las operaciones afectan al resultado final de problemas numéricos, normalmente se le nombra como “comprender el efecto relativo de las operaciones” y “saber relacionar las operaciones”. Incluye el empleo de propiedades aritméticas (conmutatividad-asociatividad-distributividad) para simplificar expresiones y desarrollar estrategias de solución |
| 7. Desarrollar estrategias adecuadas y evaluar lo razonable de una respuesta | Implica la selección de estrategias apropiadas en función de la tarea (método gráfico, cálculo escrito, estimación, cálculo mental, etc.), así mismo incluye la habilidad para valorar lo razonable de un resultado                                                                                                                                                                            |

*Nota.* Elaboración propia con datos de Almeida et al (2014)

El concepto de CM que para fines del presente trabajo se adopta, es el de Parra (1994), quien lo define como un conjunto de procedimientos que permiten obtener resultados a través del análisis de los números involucrados,

sin recurrir a algoritmos y haciendo uso de las particularidades del sistema de numeración y de las operaciones, así como de las relaciones existentes entre los números. La relación entre el SN y el CM no es sencilla, ya que algunos autores consideran que el CM forma parte del SN, mientras que otros sostienen que están relacionados pero son independientes. Por otro lado, otros autores apoyan una relación bidireccional, sugiriendo que las habilidades de SN influyen en las habilidades de CM, pero, al mismo tiempo, la práctica del CM también fomenta el desarrollo del SN (Ruiz & Balbi, 2018). Para los fines de esta investigación se considera el CM como parte del SN de acuerdo con lo planteado en diversos estudios (NCTM, 1989; McIntosh et al., 1992; Almeida et al., 2014).

## **Metodología**

### *Enfoque y diseño*

En este trabajo se adoptó el enfoque metodológico cualitativo, dado que el propósito es analizar, a partir de las voces de un grupo de estudiantes, las dificultades que presentan al enfrentarse a problemas de cálculo mental. Este tipo de metodología permite estudiar y entender el significado que le da un sujeto o grupo social a un fenómeno determinado, utiliza palabras, preguntas abiertas, e implica la recolección de datos a través de la observación del entorno del participante. El análisis de datos se construye de manera inductiva desde lo particular a lo general. Aunque ciertos datos pueden cuantificarse, la mayor parte del análisis es interpretativo (Strauss & Corbin, 2002).

El diseño de investigación seleccionado fue el estudio de caso, ya que permite analizar con mayor profundidad a un grupo de estudiantes sobre las dificultades que presentan en la solución de problemas de cálculo mental. Al respecto de este tipo de diseño, Stake (1999) señala que posibilita un acercamiento a la realidad a través de su descomposición y análisis en variables significativas, supone una descripción densa del problema a estudiar y se caracteriza por su naturaleza inductiva, descriptivo y específico.

### *Sujetos de estudio*

La investigación se realizó con nueve estudiantes de tercer grado de secundaria, cuyas edades oscilaban entre 14-15 años, pertenecientes a una escuela secundaria pública situada en la ciudad de Tulancingo en el estado de Hidalgo, México. El estudio se llevó a cabo durante la segunda mitad del ciclo escolar 2023-2024. Los sujetos de estudio fueron seleccionados de forma intencionada. Se eligieron en proporciones iguales con base en los resultados que estos obtuvieron en la aplicación de la prueba SisAT al inicio del ciclo escolar, es decir, alumnos en nivel esperado, en desarrollo y que requieren apoyo. Este criterio permitió contar con una visión más amplia de

los resultados obtenidos debido a que son alumnos con diferente nivel de resultado en una prueba previa. Asimismo, en la selección de los sujetos se consideraron los resultados obtenidos en ciclos escolares anteriores. Los tres alumnos elegidos en cada nivel habían mantenido el mismo resultado en las tres aplicaciones correspondientes a los dos ciclos previo. Otra característica de la elección fue que los participantes provenían de distintos grupos de tercer grado, con el fin de asegurar una mayor diversidad de características entre ellos. Previo a la aplicación de la actividad, se notificó a los estudiantes y padres de familia, que los resultados de esta tarea forman parte de un proyecto de tesis de maestría. Por esta razón, se solicitó autorización para grabar en vídeo la actividad y se informó y que para proteger su identidad a cada estudiante se les asignaría un seudónimo.

### *Técnicas e instrumentos para la recolección de la información*

Con relación a las técnicas de recolección de datos, se aplicó en primer lugar una prueba de cálculo mental diseñada expresamente para esta investigación, basada en la prueba SisAT, posteriormente se realizaron entrevistas semiestructuradas a los participantes, las cuales fueron videograbadas con el propósito de obtener información más precisa. Además se llevaron a cabo observaciones de campo durante la aplicación de la prueba y de las entrevistas. Las técnicas e instrumentos utilizadas en la recogida de datos fueron:

1. Aplicación de una prueba de CM. El instrumento consistió en el test y las hojas de anotación de respuesta de los estudiantes. La aplicación de esta prueba fue videograbada y posteriormente transcrita para el análisis de la información obtenida.
2. Observación. El instrumento fue una guía de observación que contenía elementos que permitieron al investigador centrar la atención en datos relevantes para la investigación.
3. Entrevistas. El instrumento fue una guía semiestructurada de preguntas que permitieron conocer las razones de las respuestas dadas a las situaciones de CM. Estas entrevistas fueron videograbadas con la finalidad de recabar información más detalladas. En los casos en que los participantes tuvieron dificultad para expresar de manera verbal los procedimientos realizados, se le solicitó realizarlos por escrito, utilizando lápiz y papel.

### *Diseño de la actividad a implementar*

De acuerdo con el documento de orientaciones para el establecimiento del sistema de alerta temprana en escuelas de educación básica, de la Secretaría de Educación Pública en México (SEP), “El Sistema de Alerta Temprana (SisAT) es un conjunto de indicadores, herramientas y procedimientos que permite a los colectivos docentes, a los supervisores y a la autoridad educativa

local contar con información sistemática y oportuna acerca de los alumnos que están en riesgo de no alcanzar los aprendizajes clave o incluso de abandonar sus estudios” (SEP 2018, p. 6). El propósito de este sistema es contribuir a la prevención de rezago y la deserción escolar, mediante la identificación de los alumnos en riesgo. Dentro de los siete indicadores del SisAT, se localiza el de CM, denominado como un indicador de las habilidades básicas para el aprendizaje. Cada una de las pruebas de CM para secundaria consta de 2 ejemplos y 10 ítems. Para los fines de esta investigación, se diseñó una prueba original, basada en la estructura de la prueba SisAT. La prueba correspondiente al tercer grado de secundaria que se diseñó y aplicó para este estudio se presentan en la tabla 2.

**Tabla 2**

*Prueba de CM para tercer grado (Fuente: Elaboración Propia)*

| No.   | Pregunta                                                                                                                                          | Respuesta       |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| Ej. 1 | 20 más 18                                                                                                                                         | 38              |
| Ej. 2 | ¿Qué número multiplicado por 5 da 40?                                                                                                             | 8               |
| 1     | 800 más 409                                                                                                                                       | 1209            |
| 2     | 220 menos 60                                                                                                                                      | 160             |
| 3     | 31 por 400                                                                                                                                        | 12,400          |
| 4     | 5 por 12 entre 2                                                                                                                                  | 30              |
| 5     | 10 al cuadrado, menos 9                                                                                                                           | 91              |
| 6     | ¿cuánto es $9 \times 2$ más $12 \times 2$ ?                                                                                                       | $21 \times 2$   |
| 7     | 2 enteros menos $\frac{1}{5}$                                                                                                                     | $\frac{9}{5}$   |
| 8     | $3.75$ más $\frac{1}{4}$                                                                                                                          | 4               |
| 9     | ¿Qué fracciones siguen en esta serie: $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, -, -, -$ ?                                                          | $27/2$ y $81/2$ |
| 10    | Dos de los ángulos interiores de un triángulo miden 89 y 42 grados respectivamente, ¿cuánto mide el tercer ángulo para que su suma de 180 grados? | $49^\circ$      |

Según el manual exploración de habilidades básicas en lectura, producción de textos escritos y cálculo mental, herramienta para la escuela, de la SEP (2018), la prueba se aplica a un estudiante a la vez, se plantea cada pregunta en el orden establecido, iniciando con los ejemplos, si el estudiante lo requiere se le repite una vez más la pregunta. Se muestra la tarjeta de apoyo visual (cada pregunta está escrita en una tarjeta) en caso de que el estudiante dé una respuesta equivocada o se tarde más de 20 segundos en responder, en caso de que aun así no haya respuesta por parte del estudiante se debe pasar a la siguiente pregunta y así sucesivamente hasta culminar los 10 reactivos. En ningún caso se permite al estudiante el uso de apoyo externo y la aplicación



solo se interrumpe cuando el estudiante comete seis errores consecutivos. Las preguntas se evalúan con 1 en caso de ser correcta, con 1v cuando se le presenta el apoyo visual y con 0 cuando la respuesta es incorrecta o no hay respuesta. Al finalizar la aplicación, a cada estudiante se le debe asignar un nivel correspondiente al puntaje obtenido: (i) nivel esperado: de 8 a 10 puntos; (ii) en desarrollo: de 5 a 7 puntos y (iii) requiere apoyo: de 0 a 4 puntos.

Dado que esta prueba constituye la base de la presente investigación, en la tabla 3 se muestra la relación de cada ítem con el marco utilizado de los componentes del sentido numérico (Tabla 1. componentes del sentido numérico). Con el propósito de poder comprender con mayor profundidad la relación del SM y el CM a través de esta prueba, en la tabla 3 también vincula la estructura de las preguntas con la clasificación elaborada por Jiménez (2010) en un material titulado Las tablas de cálculo: un método para trabajar el cálculo mental.

1. Cálculo directo (CD): están presentes distintas operaciones y hay que operar con ellas (sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y potencias)
2. Completar (COM): en estas, los estudiantes tienen que completar los espacios vacíos para que sea válida la expresión.
3. Interpretar (INT): aquí es necesario que los estudiantes identifiquen elementos, sustituyan un valor en una expresión, interpreten un texto o un símbolo, etc.

**Tabla 3**  
*Relación entre ítems de la prueba de CM y los componentes del SN*

| Ítem | Componente del SN | Tipo de pregunta |
|------|-------------------|------------------|
| 1    | 3, 4              | CD               |
| 2    | 3, 4              | CD               |
| 3    | 2, 3, 4           | CD               |
| 4    | 3, 4, 6           | CD               |
| 5    | 5, 6              | CD               |
| 6    | 1, 5              | INT              |
| 7    | 4, 5              | CD               |
| 8    | 4, 5              | CD               |
| 9    | 2, 4, 6, 7        | COM              |
| 10   | 1, 4              | COM              |

**Resultados**

Para interpretar los resultados de la prueba aplicada a los estudiantes, se empleó un sistema de codificación que permitió clasificar el tipo de razonamiento que fue usado para cada una de las respuestas: si usaron algún

componente del sentido numérico (SN), si recurrieron únicamente a reglas o algoritmos (BR), si presentaron argumentos matemáticamente incorrectos o no ofrecieron justificación o argumentación alguna (OT), y si dejaron en blanco su respuesta (SR). Para dar inicio al análisis de las respuestas, en la tabla 4 se presentan los resultados de cada ítem y el tipo de razonamiento llevado a cabo para dar solución a la prueba por parte del segundo grupo de estudiantes, tal como se mencionó previamente.

**Tabla 4**  
*Resultados de éxitos y estrategias de los ítems*

| Ítem                                                                                                                                                        | Éxito         | Tipo de razonamiento |   |    |   |    |   |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|----------------------|---|----|---|----|---|----|
|                                                                                                                                                             |               | SN                   |   | BR |   | OT |   | SR |
|                                                                                                                                                             |               | C                    | I | C  | I | C  | I | I  |
| 1                                                                                                                                                           | $\frac{8}{9}$ | 5                    | 0 | 0  | 1 | 3  | 0 | 0  |
| 2                                                                                                                                                           | $\frac{7}{9}$ | 4                    | 1 | 0  | 1 | 3  | 0 | 0  |
| 3                                                                                                                                                           | $\frac{1}{9}$ | 0                    | 3 | 1  | 5 | 0  | 0 | 0  |
| 4                                                                                                                                                           | $\frac{5}{9}$ | 3                    | 0 | 1  | 2 | 1  | 2 | 0  |
| 5                                                                                                                                                           | $\frac{5}{9}$ | 5                    | 0 | 0  | 0 | 0  | 1 | 3  |
| 6                                                                                                                                                           | $\frac{4}{9}$ | 4                    | 0 | 0  | 0 | 0  | 1 | 4  |
| 7                                                                                                                                                           | $\frac{4}{9}$ | 4                    | 0 | 0  | 0 | 0  | 2 | 3  |
| 8                                                                                                                                                           | $\frac{3}{9}$ | 3                    | 0 | 0  | 0 | 0  | 1 | 5  |
| 9                                                                                                                                                           | $\frac{1}{9}$ | 1                    | 0 | 0  | 3 | 0  | 4 | 1  |
| 10                                                                                                                                                          | $\frac{4}{9}$ | 4                    | 2 | 0  | 0 | 0  | 1 | 2  |
| C: correcto, I: incorrecto<br>SN: sentido numérico<br>BR: basado en reglas<br>OT: otros: incorrectos, incompletos, sin justificación;<br>SR: sin respuesta. |               |                      |   |    |   |    |   |    |

En relación con la tabla anterior, se puede observar que el éxito varía en función de los ítems. Evaluar cada uno como correctos o incorrectos permite identificar cuántos estudiantes contestaron de manera correcta a un determinado ítem lo que pudiera permitir también llegar a ciertas conclusiones o dar por cierto algunos resultados. Otro aspecto relevante es que, ningún estudiante contestó de manera correcta la prueba en su totalidad, así como también el mínimo de aciertos por pregunta es uno. En el análisis de cada

ítem, se presentan algunos diálogos que se consideraron de interés, los cuales fueron transcritos a partir de las videograbaciones de las entrevistas semiestructuradas, realizadas después de la aplicación de la prueba. Estos fragmentos permiten al lector comprender con mayor claridad sobre lo ocurrido durante la aplicación de los instrumentos de recolección de datos.

Es el ítem 1 consisten en realizar una suma en el orden de las centenas en ambos sumandos y donde se espera que utilicen la descomposición del segundo sumando para realizar el cálculo de manera más sencilla y rápida o bien cualquier otra descomposición que les facilite el cálculo. Asimismo pueden emplear como punto de referencia de la suma de los dígitos ocho y cuatro y agregar los ceros correspondientes más la unidad nueve. Este ítem es el de mayor éxito para los estudiantes, ocho de los nueve respondieron correctamente. De los cuales ninguno hizo consulta del apoyo visual. De los cinco estudiantes cuya respuesta está clasificada en SN, todas se basaron en la composición y descomposición de los números.

Estudiante 1: *Abhh, pues lo primero que hice fue sumar  $800+400$ , y luego le sumé el 9*

Estudiante 3: *Bueno, pues primero este pues solo es algo básico no, de  $800 + 400$  se suman 1200 y luego sumé 9*

Estudiante 6: *Primero sumé los números enteros (refiriéndose al 8 y 4), y luego agregué el número, el número como se llama el dígito unitario que es el 9*

Para el segundo ítem corresponde a una resta en la que el minuendo se encuentra en el orden de las centenas y el sustraendo en el orden de las decenas. En esta operación los estudiantes al intentar resolverla pueden recurrir a la descomposición del 220 en 200 y 20 o en la descomposición del 60 en 40 y 20 o cualquier otra que le pueda facilitar el cálculo al estudiante. También pueden utilizar como referencia que el doble de 60 es 120 y que 200 es igual a 100 más 120.

Este ítem fue el segundo con mayor éxito, al haber sido contestado correctamente por siete de los nueve participantes. Seis estudiantes hicieron uso del apoyo visual, incluidas las dos respuestas incorrectas. Este hecho podría interpretarse como una evidencia de que esta operación generó mayor dificultad en comparación con la del primer ítem, probablemente debido a la naturaleza de la operación o de los números involucrados.

De las cuatro respuestas clasificadas en SN, tres se basaron en la composición y descomposición de las cantidades y el restante se basó en puntos de referencia. Las respuestas incorrectas se ubicaron dentro de las clasificaciones de SN y BR. En el caso del SN (E2), se observa que este componente está presente, sin embargo, la estudiante tiene dificultades para llevar completar el proceso con éxito, al intentar realizar composiciones y descomposiciones de los números de manera equivalente. Por su parte, en la respuesta BR (E4), la estudiante intentó efectuar mentalmente el algoritmo de la resta, aunque sin éxito.

Estudiante 2: *Abhh, este pues primero haga de cuenta este conté cuanto era del 20 al 60, y ya después por ejemplo se lo resté al 260 y me dio 140, y pues según yo eso está bien, y eso fue lo que hice este del 20 conté cuanto era para 60 y eso se lo resté a 260*

Estudiante 4: *Una resta está empezando por este lado (señalando el lado izquierdo), o sea, si era un número mayor arriba bueno se le sumaba y este bueno, pero este cuando el número era mayor y el número de abajo era menor le prestaba al otro y este hasta que mediera como resultado todo eso y bueno así más o menos lo hice*

Las dos respuestas incorrectas fueron dadas por las estudiantes 2 y 4 cuyas respuestas fueron 140 y 180, respectivamente. La estudiante correspondiente a la respuesta BR manifestó durante la entrevista semiestructurada que, si la operación la hubiera hecho en papel y lápiz, podría haberla resuelto sin dificultad, ya que durante el proceso “se le fueron perdían los números en su mente” porque es de tipo visual. Este hecho permite interpretar que domina los algoritmos cuando cuenta con apoyos materiales. Con base a lo anterior, las dificultades observadas podrían atribuirse a una comprensión limitada de ciertos componentes del SN, como composición y descomposición de los números de manera equivalente, así como al uso de referentes mentales (matemáticos o reales) para usar números en la resolución de problemas.

El ítem 3 correspondió a la realización de una multiplicación donde uno de los factores está en el orden de las decenas mientras el otro factor en el orden de las centenas, siendo este último múltiplo de diez. Los estudiantes pudieron hacer uso de algunos componentes del SN para darle respuesta, una forma es considerar el 3 y el 4 para realizar la multiplicación y tener en consideración el valor posicional de los números, e incluir la unidad. Otra forma es considerar el punto de referencia de “tres por cien”, repitiendo la suma o multiplicación las veces necesarias y considerando nuevamente el valor relativo o posicional de los números y la unidad. Otra alternativa de solución es descomponer el 31 en  $10 + 10 + 10 + 1$  o en cualquier otra que pueda facilitarles el cálculo y utilizar la propiedad distributiva. Así mismo pueden hacer uso de más de uno de estos componentes en conjunto, por ejemplo descomponer al 31 en 30 y 1 y solo considerar el valor absoluto del 4 para llevar a efecto la multiplicación utilizando la propiedad distributiva para que posteriormente considerar el valor posicional del mismo, es decir agregar los ceros correspondientes. O cualquier otra mezcla de estos componentes que les permitan realizar la operación mentalmente.

Este reactivo es uno de los que tuvo un menor número de respuestas correctas, solo uno de los nueve estudiantes (E6) lo resolvió con éxito. La totalidad de los estudiantes hicieron uso del apoyo visual. Estos resultados permiten inferir que realizar multiplicaciones mentales con las características de este ítem generó una mayor dificultad para el grupo de estudiantes. La

respuesta correcta dada por el estudiante E6 se clasificó en la categoría de BR. El propio estudiante comentó que una de las dificultades que tuvo para realizar el algoritmo mentalmente fue el espacio que debía dejar entre el resultado del primer producto y el segundo para realizar la suma.

*Estudiante 6: Estaba acomodando los números, porque eso era lo que se me dificultaba la multiplicación, en sí nada más la manera de acomodarlos porque es más fácil escribirlo en el papel porque ahí no se te olvida, tienes los dígitos ordenados y mentalmente como que se me dificulta acomodar los números para que se sumen al final de la multiplicación*

Entre de las respuestas incorrectas, tres se clasificaron en la categoría correspondiente al uso del SN. En ellas se observa que los estudiantes aplicaron este conocimiento, es decir, no estuvo ausente, sin embargo, presentan dificultades para terminar el proceso con éxito. Los cuales hicieron uso del valor absoluto de un dígito de uno de los factores (es decir, del factor 400 solo utilizaron el 4) para facilitar el cálculo. No obstante, la dificultad radicó en reconocer el valor relativo del mismo factor y en estimar correctamente el resultado, hecho se puede sustentar considerando a partir de los resultados obtenidos.

*Estudiante1: Pues primeramente fue porque como son mentales y son no sé, y es un número algo grande ¿no? Y pues la cantidad o resultado iba a ser como que medio no muy complicado, pero si iba a estar medio complicado hacer el resultado, y para yo poderlo resolver lo que hice fue multiplicar  $31 \times 4$  y luego le sume los dos ceros, y fue el resultado que me dio*

*Estudiante 7: Primero quería multiplicar  $40 \times 3$ , y el resultado bueno  $400 \times 3$  y al resultado se le agrega el otro cero del 30 y después sumarle la multiplicación del  $400 \times 1$  pero se me dificultó poquito*

La respuesta que el Estudiante 1 dio para este ítem, fue 1240. Durante la entrevista semiestructurada, al explicar el procedimiento que siguió, proporcionó el resultado correcto, sin embargo, éste ya no fue considerado válido por haberse obtenido fuera del tiempo de aplicación de la prueba. Este hecho permite deducir que el Estudiante1 posee un desarrollo considerable del SN, lo cual se corroborar con el resto de sus resultados. No obstante, puede inferirse, que bajo condiciones de tiempo limitado y en situaciones similares a este ítem, podría presentar conflictos en su desempeño.

Por otro lado, las respuestas clasificadas en BR, los estudiantes explican el algoritmo que intentaron aplicar sin éxito para resolver al reactivo. Con estos hechos se puede suponer que estos estudiantes tienen carencia de algunos componentes del SN, como el uno y el cuatro que dicen respectivamente: comprender el significado de los números, composición y descomposición de los números de manera equivalente. También se evidencian dificultades en subcomponentes como el reconocimiento y la estimación del tamaño absoluto o relativo de un número, el uso de referentes

mentales (matemáticos o reales) para resolver problemas y la aplicación de propiedades aritméticas (conmutativa-asociativa-distributiva).

El ítem 4 fue el primero de la prueba que requirió dos operaciones para su solución. Por un lado, un producto de dos factores uno de ellos en el orden de las unidades y el otro factor en el orden de las decenas y después un cociente. En este ítem, los estudiantes pudieron emplear diversos componentes del SN como, usar puntos de referencia, por ejemplo, el resultado de diez por cinco y el de cinco por dos; utilizar la composición y descomposición de los números, una forma es descomponer al 12 en diez más dos, otra forma es descomponerlo en seis más seis o cualquier otra que al estudiante pudiera facilitar el cálculo. También intervino el componente relacionado con la comprensión del efecto de las operaciones, en este caso la comprensión del cociente que puede interpretarse como, obtener la mitad de la cantidad involucrada, así como también el uso de propiedades aritméticas como la propiedad distributiva.

Este ítem tuvo éxito con seis de los nueve participantes, al ser contestado correctamente. Muy pocos estudiantes solicitaron el apoyo visual para responder. Las respuestas correctas se ubican dentro de las tres clasificaciones. Por una parte, los tres estudiantes que hicieron uso del SN para resolver, se observa que hacen uso de los componentes: uso de puntos de referencia, composición y descomposición de los números, y comprensión del efecto relativo de las operaciones.

Estudiante 1: *Bueno, sabemos que  $5 \times 10$  son 50 y  $5 \times 2$  son 10 y luego pues este, bueno sumé 50 más 10 y medió 60, y la mitad de 60 son 30*

Estudiante 3: *Pues primero multipliqué  $5 \times 10$  y ya después por 2 y ya lo sumé y lo dividí*

Estudiante 7: *Primero multipliqué  $5 \times 10$  y los 2 pues serían otros  $5 \times 2$  entonces serían  $50 + 10$  y serían 60 y ya nada más lo divide entre 2 y dio 30*

Por otro lado, el Estudiante 4 no proporcionó suficientes elementos para conocer su proceso, sin embargo, lo que realizó lo hizo con éxito. En el caso del estudiante 6, su procedimiento consistió en la aplicación del algoritmo de la multiplicación.

Mientras que las respuestas incorrectas se ubicaron en las clasificaciones BR y en OT. En ambos casos puede asumirse que estos estudiantes presentaron dificultades en la comprensión de componentes del SN como el uso de puntos de referencia, la composición y descomposición de los números, y la comprensión del efecto relativo de las operaciones. Un aspecto importante en este ítem es que dadas las respuestas de los estudiantes cuyas respuestas están en la clasificación OT, puede inferirse que presentan una carencia significativa de diferentes componentes del SN, como los antes mencionados y también de algunos subcomponentes como, comprensión de las relaciones existentes entre los números, y el de valorar lo razonable de un resultado, estos aspectos se sustentan en las respuestas observadas.

Estudiante 8: *5x12 son.....mmmm son 56 y dividiéndole sería y darían 116*

Estudiante 9: *5x12 son mmm 110 y entre 2 es cuando se me dificultan las cosas*

En el caso del quinto reactivo, fue el primero de la prueba el cual tiene involucrado un exponente y también implica dos operaciones en su solución. Para este punto los estudiantes ya habían resuelto sumas, restas productos y cocientes. Para responder a este reactivo, se espera que los estudiantes transiten de la representación del  $10^2$  al 100 y viceversa, al mismo tiempo que comprendan el efecto relativo de las operaciones, es decir, que cobre sentido en ellos. Este ítem fue contestado de manera correcta por cinco de los nueve estudiantes. Los mismos cinco estudiantes que dieron respuesta correcta al ítem anterior. De ellos, cuatro no requirieron apoyo visual, el resto sí lo utilizó, incluidos los estudiantes que respondieron de manera incorrecta.

Todas las respuestas correctas se clasificaron dentro del SN. En este reactivo, los estudiantes emplearon componentes como el uso de múltiples representaciones de los números, al reconocer que  $10^2$  es igual a 100, y la comprensión del efecto relativo de las operaciones, al resolver de manera correcta la operación  $10^2$ .

Estudiante 3: *10 al cuadrado menos 9, pues lo primero es ahora sí multiplicar diez x diez porque es 10 al cuadrado son 100 y ya 100 pues ya resté*

Estudiante 6: *Abí primero al cuadrado significa que se multiplica por ese mismo número así que 10x10 es igual a 100, menos 9, 91*

Dentro de las respuestas incorrectas, tres están dentro de la clasificación de SR, es el primer reactivo de la prueba con el hecho de que un estudiante no da una respuesta o intenta realizar cálculos. Y en los tres casos la argumentación fue la misma, no sabían cómo operar el exponente.

Estudiante 2: *No, abí si no tengo ni idea no puedo decir me puse nerviosa, abí no tenía ni idea de qué hacer*

Estudiante 5: *mm...bueno no recuerdo bien como hacerla al cuadrado*

Estudiante 9: *mmm pues qué pues no, bueno por ejemplo en esas operaciones...no sé elevar las cosas al cuadrado y así y entonces por eso se me dificultan las cosas*

Por su parte, el Estudiante 8 cuya respuesta se clasificó en OT, tanto durante la aplicación como en la entrevista, basó sus respuestas en restar la base de la potencia con el sustraendo de distintas formas. Dentro de las respuestas que dio el estudiante, estuvieron  $8^2$ ,  $9^2$  y  $1^2$ . Al solicitarle que repitiera de nuevo su respuesta, ésta fue cambiando, en la última, explicó que restó 10 menos 9 y conservó el exponente. También manifestó que la dificultad estuvo en resolver el exponente.

Con base en los hechos arriba descritos puede asumirse que tres de los cuatro estudiantes que no respondieron el ítem, presentan una carencia muy puntual en el componente 5 del sentido numérico, que se describe cómo utilizar diversas representaciones de los números, así como también en el

componente 6 que se refiere a comprender el efecto relativo de las operaciones. En el caso del estudiante 8, con base en sus respuestas, también puede inferirse una carencia en el componente 1, referido a comprender el significado de los números, así como también en los componentes arriba mencionados.

El ítem 6, para su solución implica sólo una suma de coeficientes puesto que se trata de términos semejantes. Lo interesante aquí es ver cómo para los alumnos esto cobra sentido. Para ello, se esperaba que comprendieran componentes del SN como la comprensión del significado de los números y el uso de múltiples representaciones de los números y de las operaciones.. Este ítem tuvo éxito por cuatro de los nueve participantes, lo que indica que casi la mitad del grupo logró resolverlo y la otra mitad no. En las respuestas correctas se observa para los estudiantes comprenden el sentido la literal ( $x$ ) elevada al cuadrado y saben cómo operar con ella al menos en casos como este.

Estudiante 1:  $9+12$  ¿verdad? Pues nada más que nada sabemos que  $x$  al cuadrado es digamos, sería lo mismo, entonces pues no tiene caso como que sumarlos ¿no? Entonces lo que hice fue nada más sumar  $9 + 12$  dándome un resultado de 21 y como tienen las dos están elevadas al cuadrado nada más sería 21 equis al cuadrado

Estudiante 3: pues solo sume  $9 + 12$  y ya lo pasé  $x$  al cuadrado

Nuevamente en este ítem se repite el hecho de que algunos estudiantes no pudieron dar una respuesta al mismo, los argumentos fueron en dirección al no saber cómo operar la literal  $\text{equis}(x)$  al cuadrado.

Estudiante 2: pues o sea no, no encuentro cómo, no tengo idea de cómo multiplicar 9 equis al cuadrado más 12  $x$  al cuadrado no sé si tenga que verla, no sé que tenga que ver la  $x$  y lo del cuadrado fue lo que le dije que no, que me cuesta trabajo elevar al cuadrado o sea no entiendo

Estudiante 5: emm...pues por el procedimiento igual no recuerdo cómo, cómo se llama, elevar al cuadrado

Por su parte, el Estudiante 4 intentó responder, pero no tuvo éxito en su proceso; trató de elevar al cuadrado tanto el doce como el nueve y, al final, sumar los resultados. En este reactivo de los cinco alumnos que no la respondieron de manera correcta, cuatro incluso ni siquiera pudieron dar una respuesta. Estos hechos nos permiten suponer presentan carencias en los componentes del SN 1 y 5, que corresponden respectivamente a la comprensión del significado de los números y al uso de múltiples representaciones de los números y las operaciones.

En el caso del ítem 7, fue el primero de la prueba que involucra números no enteros, por un lado una fracción y por otro una cantidad entera, cuya solución implicaba una resta. Se espera que los estudiantes hicieran uso de componentes del SN, como la composición y descomposición de los números, así como el uso de múltiples representaciones de los números y sus operaciones.



Este ítem fue respondido correctamente solo por cuatro de los nueve estudiantes, de los cuales sólo uno hizo uso del apoyo visual, y cinco de los que respondieron de forma incorrecta o no dieron respuesta también hicieron uso del apoyo visual, lo cual puede representar que no fue de utilidad para realizar el proceso de solución, ya que los estudiantes carecen puntualmente de componentes del SN antes mencionados. Entre las respuestas correctas clasificadas en la categoría SN se observa que estos estudiantes muestran cierto nivel de desarrollo de estos componentes del SN.

Estudiante1: *bueno pues dos enteros menos un quinto, lo que hice fue quitar un entero, pero para poder resolverlo pues el entero lo dividí en cinco y le quité un quinto dándome un resultado de un entero cuatro quintos*

Estudiante3: *pues un entero lo dividí en quintos y a esos son 5 quintos le quité 1 y ya un entero cuatro quintos*

Dentro de las cinco respuestas consideradas incorrectas, dos se clasificaron como SR y tres como OT. En ambos casos es notoria la carencia de ciertos componentes del SN. Puesto que los estudiantes pudieron hacer uso de la composición y descomposición de cantidades, por ejemplo, descomponer los dos enteros en uno más uno o en cualquier otra que les pudiera facilitar el cálculo, o bien también utilizar múltiples representaciones de los números, como transitar de los dos enteros o representarlos de otra manera que les permitiera responder al ítem; asimismo, pudieron combinar ambos componentes.

Los estudiantes 2 y 5, que no dieron respuesta, manifestaron que su confusión radicó en la conversión de la fracción a número decimal, es decir, no comprendieron otra forma de resolver el problema más que mediante esa conversión, la cual no lograron realizar con éxito.

A partir de estas respuestas, puede interpretarse que el componente del SN referente al uso de múltiples representaciones de los números y las operaciones no estuvo complementemente ausente, pues los estudiantes lograron percibir otra forma de representar a la fracción, sin embargo, no tuvieron los elementos suficientes para poder continuar con el proceso. Dentro de las tres respuestas clasificadas en OT llama la atención que dos estudiantes siguieron el mismo razonamiento al intentar restar los dos enteros menos el denominador. Y aunque el estudiante E9, dio una respuesta casi de manera inmediata, al final comentó que no sabía cómo hacerlo, retractándose de su respuesta.

Estudiante 4: *mm....como que restar el número, bueno el número entero por el más grande de la fracción*

Estudiante 8: *emm.....se me dificulta restarle los dos enteros se me dificulta restarle al 2, un quinto*

La solución para el ítem 8 implica una suma de números no enteros en diferentes representaciones, por un lado una fracción y por otro un número

decimal. Para este momento los estudiantes ya fueron enfrentados a un ítem similar. En este caso se espera que los estudiantes al darle solución usen componentes del SN como utilizar composición y descomposición de los números, una forma sería separar al entero tres de la parte fraccionaria, y el de usar múltiples representaciones de los números y las operaciones. En este sentido, se podría representar el número decimal como fracción o viceversa, para para trabajar con un mismo tipo de número y facilitar la operación, o bien combinar ambos componentes. Este ítem es uno de tres, con menos éxito en toda la prueba, respondido por sólo tres de los nueve estudiantes de manera correcta. En este ítem, la totalidad de estudiantes requirieron apoyo visual. En las tres respuestas correctas clasificadas dentro del SN, se observa que los estudiantes hicieron uso de múltiples representaciones de los números al transitar del número decimal a la fracción y viceversa.

*Estudiante 1: bueno vemos que no se suman, digamos dos fracciones entonces tuve que hacer la conversión de 3.75 a fracción que más que nada, este 3.75 es 3 enteros tres cuartos, porque 75 es como digamos  $25+25+25$  da 100 entonces son  $3 \times 25$  da 75 y luego me di cuenta que eran 3 enteros tres cuartos y ya 3 enteros 3 cuartos le sumé 1 cuarto.*

*Estudiante 6: amm... lo que quise especificar es que en teoría un cuarto en esas fracciones podría ser igual a 25, bueno a 25 milésimas 0.25 para así decir y ya sumando le simplifiqué quitando el cuarto, dándole entender cómo 0.25 y sumándolo a 3.75 dan el 4*

Hasta el momento, este ítem es el que tiene un mayor número de estudiantes que no dieron una respuesta. Al ser cinco de los nueve estudiantes al hacerlo. Dentro de las entrevistas realizadas los estudiantes explicaron que su dificultad está en la realización de las conversiones. Por otra parte, la respuesta clasificada en OT el Estudiante 8, para dar su respuesta sumó la parte entera del número decimal con el denominador de la fracción. lo que puede asumirse como una carencia marcada en la comprensión del significado de los números.

El ítem 9 es único por sus características dentro de la prueba. Se trata de una sucesión geométrica Se espera que puedan identificar el patrón de la serie para poder así dar los dos términos faltantes, para esto se necesita que los estudiantes tengan el desarrollo de subcomponentes del SN como: comparar y ordenar números; emplear propiedades de las operaciones aritméticas (conmutatividad - asociatividad - distributividad), y valorar lo razonable de un resultado. También se relaciona con componentes como la composición y descomposición de los números. Y al igual que el reactivo tres, este es otro ítem que causó mayor dificultad al ser un reactivo con menos respuestas correctas, al ser un solo alumno que lo contestó con éxito. Todos los participantes necesitaron apoyo visual para responder, incluso aquel que lo resolvió correctamente.

La respuesta correcta cae dentro de la clasificación de SN, el estudiante utilizó la comparación de las cantidades involucradas, composición y descomposición de números para efectuar las multiplicaciones necesarias de forma más sencilla, así como el uso de la propiedad distributiva.

Estudiante 1: *es que más que nada me dijo un medio, tres medios y nueve medios, pero como me pongo nervioso ehh no las puedo digamos contener bien en mi mente entonces lo que hice fue verlas para poder ver que o por que se multiplicaban para poder seguir la sucesión vi que  $3 \times 1$  era 3,  $3 \times 3$  eran 9 y entonces así seguía la sucesión lo que iba a multiplicar  $9 \times 3$  era 27 y luego  $27 \times 3$  igual... a 81 y así supe cómo iba la sucesión*

De las respuestas incorrectas, tres se ubicaron en la clasificación de BR; cuatro en OT y una en SR. En todos los casos se puede asumir que las dificultades que se tuvieron para poder dar la respuesta correcta es la carencia de subcomponentes del SN tales como: comparar y ordenar números; emplear propiedades aritméticas (conmutatividad - asociatividad - distributividad); y valorar lo razonable de un resultado. También se asocian con componentes como la composición y descomposición de los números.

A partir de las explicaciones proporcionadas en las entrevistas semiestructuradas, se observa que una de las dificultades más marcadas fue la incapacidad para efectuar un producto entre dos factores; es decir, los estudiantes mostraron limitaciones en el componente de composición y descomposición de los números y en el uso de la propiedad distributiva. Si estos componentes del SN estuvieran más desarrollados, los participantes habrían tenido la posibilidad de resolver este ítem correctamente.

Estudiante 2: *según yo este...lo que se tenía que hacer era multiplicar 3 este o sea era todo multiplicado por 3 por ejemplo  $3 \times 1$  daba 3 que era lo que según yo era y luego  $3 \times 3$  que era 9 que daba y ya después multipliqué  $9 \times 3$  que era pero este, ya al momento de multiplicar  $27 \times 3$  fue lo que me costó trabajo la multiplicación.*

Estudiante 3: *se me dificultó pues porque lo que yo pienso que era una sucesión de multiplicando por 3 y se me dificultó así multiplicar el  $9 \times 3$  y luego se me dificultó  $27 \times 3$*

En el último ítem de la prueba se implicaron dos operaciones para su resolución. Por un lado, una suma y por otro una resta. Para llevar a cabo este reactivo se espera que los estudiantes puedan hacer uso de componentes del SN como: composición y descomposición de los números, por ejemplo, al descomponer la cantidad de 89 lo pueden hacer en  $(80 + 9)$  o bien en  $(90 - 1)$  y la cantidad de 42 en  $(40 + 2)$  o en cualquier otra que les pudiera facilitar el cálculo a los estudiantes. Posteriormente, pueden realizar la resta de 180 menos 131 mediante la misma estrategia de composición y descomposición de los números. Este ítem fue respondido de manera exitosa por cuatro de los nueve participantes. ninguno de los cuales requirió apoyo visual. En cambio, los estudiantes que no lograron resolverlo sí lo utilizaron. En las cuatro respuestas correctas clasificadas dentro del SN, los estudiantes

emplearon la composición y descomposición de los números para llevar a cabo las operaciones de una manera más conveniente para ellos.

Estudiante 2: *89 y 42...sumé los 80 más los 40 ya después este 80, 90, 100, fueron....dan 120 y ya después esos, a esos 120 les sumé los 9 y eran 129 y ya después les sumé los otros dos que eran 131, entonces si eran 131 pues yo encontré un número que al sumarlo diera 180 el cual fue 49*

Estudiante 3: *pues primero al 89 lo convertí en 90 y así ya luego le sumé 42 y ya al resultado le resté 1 y ya el resultado pensé más o menos en cuanto era el número que sumándolo me diera 180*

Estudiante 7: *le sumé al 180, le sumé los 40 que daban 120 y luego  $9 + 2$  eran 11 y entonces  $120 + 11$  eran 131, nada más ese valor restarle los 180. Al 180 le quité 130 y sobran 50 y le quité 1 y entonces eran....49*

Mientras que, para las otras dos respuestas erróneas, que también se ubican en la clasificación SN, se puede suponer que el componente de composición y descomposición de los números, está presente en los estudiantes sin embargo, no se encuentra lo suficientemente consolidado para llevar a cabo con éxito todo el proceso.

Estudiante 1: *bueno primero sumé  $80 + 40$  dándome 120, más 9 más 2 me daba 131, y ese fue, bueno, fue el resultado de la suma y luego a 31 le quité bueno, a 180 le quité 131, 80 le quité 31 dándome el resultado de 59 no digo 49, 49 y ya luego le sumé 100*

El resto de las respuestas erróneas caen en las otras clasificaciones, uno en OT y dos más en SR. En el caso del estudiante 4, clasificado en OT, no proporcionó elementos suficientes para conocer qué realizó en su proceso de solución. Mientras que los estudiantes que su respuesta está en la clasificación SR, durante la entrevista semiestructurada explicaron que su dificultad estuvo en la palabra ángulos ya que no saben cómo medirlos u operarlos. Para ambos casos se puede deducir que no tienen desarrollado el componente de composición y descomposición de los números, así como una carencia en la comprensión de las relaciones existentes entre ellos.

## Discusiones y reflexiones

El cálculo mental ha sido una actividad evaluada en México en educación básica desde 2013 y se mantiene en los planes y programas de 2022 como un propósito en educación secundaria, García (2014) menciona que existen carencias significativas en la comprensión, el uso y manejo de los números en educación básica. Cabe recordar que para efectos de esta investigación se consideró el CM como parte del SN. Como resultados finales de esta investigación y con base en la forma de evaluarlos, se obtuvo que cinco de los nueve estudiantes a los que se les aplicó el test están en el nivel de requiere apoyo, es decir, que no cuentan con elementos suficientes para llevar a cabo actividades de CM, esto, a su vez, sugiere que el desarrollo del SN en estos estudiantes es limitado.

En la literatura se identificó que al realizar preguntas de cálculo mental, la presentación visual de los ítems (mostrar el ítem produjo resultados más altos en estudios similares al realizado), como el de Reys et al. (1995), sin embargo en esta investigación se obtuvieron resultados opuestos, en ítems como el tres, ocho y nueve a pesar de mostrar el apoyo visual en la totalidad de los estudiantes fueron ítems con menor número de respuestas correctas, aunque en algunos casos el apoyo visual ayudó a los estudiantes a encontrar la respuesta, no representó una diferencia significativa en los resultados generales.

Por otro lado, dos estudiantes en dos ocasiones distintas, fuera de la aplicación de la prueba, es decir, durante la entrevista semiestructurada al explicar el proceso que llevaron a cabo para responder un ítem determinado el cual habían respondido de manera errónea, dieron la respuesta correcta, este hecho lo podemos entender en dos sentidos, por un lado que el tiempo que tuvieron para dar la respuesta influye en los resultados, cabe recordar que para cada ítem se tuvo un aproximado de 20 segundos, en otros estudios similares como el de Reys et al. (1995) mencionan que sus pruebas pilotos demostraron que 20 segundos eran suficientes para que casi todos los estudiantes llevarán a cabo los procesos mentales para dar respuesta, sin embargo, este hecho da elementos para suponer que si el tiempo hubiera sido mayor, estos estudiantes hubieran estado en posibilidades de responder acertadamente desde el principio. Por otro lado, este hecho puede entenderse como una evidencia de que el nivel de SN que poseen estos estudiantes aún se encuentra en proceso de desarrollo.

Otro punto importante a resaltar es que hubo un mayor número de reactivos que fueron respondidos con base en los componentes del SN ya sea de manera correcta o incorrecta esto en comparación únicamente con los reactivos que fueron respondidos basados en algoritmos, este hallazgo se podría explicar al considerar que estos estudiantes tienen dentro de su bagaje de conocimientos matemáticos componentes del SN que aplicaron en situaciones de CM (pensamiento aditivo), que en una minoría se podrían valorar que están consolidados y en otros que el SN es deficiente o nulo. En este orden de ideas, estos resultados son opuestos a los obtenidos en investigaciones como la de Almeida et al (2014) quienes señalan que los estudiantes suelen preferir procedimientos estándar de cálculo en actividades que podrían resolverse mediante el SN. Por otro lado, también resulta interesante rescatar que se está en posición de asumir que estos estudiantes comprenden que los algoritmos no son la única forma de dar respuesta a operaciones aritméticas mentales. Sin embargo si se considera únicamente las respuestas incorrectas en la clasificación de SN y las comparamos con las de las clasificaciones de OT y SR estas están muy por debajo, es decir, la mayoría de los estudiantes no pudo responder o no proporcionó elementos suficientes para

conocer su procedimiento. Este hecho ayuda a reafirmar lo antes mencionado que el SN de estos estudiantes es deficiente o nulo. Entre los componentes utilizados con éxito destaca el uso de la composición y descomposición de los números.

Esta investigación reafirma lo que investigadores como Garcia (2014) señalan, de que si la enseñanza aritmética que reciben los estudiantes se centra en el uso de algoritmos, carece de sentido y genera deficiencias notorias en el manejo de los números y sus operaciones. En la misma línea, Almeida et al. (2014) exhortan a la reflexión sobre la enseñanza aritmética que reciben los estudiantes en la educación obligatoria. Por su parte, Pourdavood et al. (2020) señalan la importancia de que los estudiantes tengan oportunidades de trabajar las habilidades y estrategias relacionadas al CM.

## Conclusiones

### *En referencia a las preguntas que guiaron esta investigación*

Respecto a la pregunta central de esta investigación ¿cuáles son las dificultades que presentan estudiantes de secundaria al resolver problemas de cálculo mental?, con base en las evidencias obtenidas, la respuesta que se puede dar está en torno a los componentes del SN, que son los siguientes:

- a) Comprender el significado de los números;
- b) Utilizar la composición y descomposición de los números;
- c) Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones; y
- d) Comprender el efecto relativo de las operaciones.

Mientras que para la pregunta, ¿cómo se clasifican las dificultades que presentan los estudiantes de secundaria al resolver problemas de cálculo mental? con base en los resultados pueden definirse dos clasificaciones:

1. Carencias del SN. Se presume que esto pudiera ser originado porque los estudiantes están habituados al trabajo con lápiz y papel y al uso de algunas herramientas tecnológicas.
2. Rezago educativo. Esto debido a los tres casos de estudiantes que han obtenido el nivel de requiere apoyo, es decir muestran insuficiencia en sus resultados en la totalidad de las aplicaciones que hasta el momento de la prueba tenían, esto es un total de ocho aplicaciones. De este modo se puede suponer que la instrucción aritmética recibida por estos estudiantes no les ha permitido tener un avance relevante en la construcción de aprendizajes matemáticos requeridos para resolver preguntas de CM. En este punto, conviene enfatizar la relevancia de construir aprendizajes, en este caso matemáticos, a partir de los elementos con los que cuenta cada estudiante, es decir, de sus saberes previos, para que de esta forma se construyan aprendizajes significativos que les permitan a los estudiantes hacer uso de ellos y a su vez generar nuevos aprendizajes. Cuanto mayor sea la conexión

entre los conocimientos previos y los nuevos, el aprendizaje será más significativo y duradero, al formar parte de una estructura mental y de la memoria a largo plazo (Ausubel, 1980)

Otro punto de interés es la importancia de que los estudiantes cuenten con un espacio en el aula para la socialización de estrategias utilizadas, ya que esto puede permitir que estudiantes con deficiencias matemáticas o no, conozcan y pongan en práctica otras estrategias usadas por sus pares e incluso por el docente. En este sentido, García (2014) menciona que las confrontaciones o puestas en común que se proponen hacer a posteriori de que los estudiantes resuelvan un problema, es un atributo del enfoque de resolución de problemas que fomenta el desarrollo del SN. En esta línea de ideas, trabajar en el desarrollo del SN puede repercutir en las habilidades que el estudiante desarrolle para la resolución de problemas, y viceversa, trabajando en la solución de problemas se beneficia en el desarrollo del SN. Por su parte, Parra (1994) menciona que la capacidad gradual de resolución de problemas requiere de un progresivo dominio de recursos de cálculo. Desde esta investigación, se considera que la resolución de problemas, entendida como una perspectiva didáctica, posibilita crear y consolidar aprendizajes matemáticos, además de coadyuvar en la reducción del rezago educativo.

Por la naturaleza de esta investigación los resultados no pueden ser generalizados a gran escala, sin embargo, ofrecen a los profesionales de la educación matemática un panorama sobre las dificultades que enfrentan los estudiantes del nivel en que se desarrolló esta investigación al resolver situaciones de CM. A su vez, estos hallazgos aportan elementos e ideas sobre aspectos esenciales para trabajar en el aula y favorecer un desarrollo más sólido del SN en los estudiantes.

### *Alcances, limitaciones y propuestas a futuro*

Una posible línea de investigación que podría derivarse de los resultados aquí presentados es el diseño y aplicación de estrategias para trabajar en el aula que contribuyan a reducir las dificultades identificadas, es decir, que posibiliten el fortalecimiento del desarrollo del SN a través de actividades que permitan, la comprensión de la organización del sistema de numeración decimal y las diferentes relaciones existentes entre los números, el reconocimiento y estimación del valor absoluto y relativo de los números, fortalecer la composición y descomposición de los números, representar a los números de maneras diversas de acuerdo al contexto que se esté abordando, identificar el efecto de una operación así como el uso de propiedades aritméticas como la conmutatividad, la asociatividad y la distributividad.

Otra línea de trabajo posible consiste en aplicar pruebas similares en los otros dos grados de secundaria, con el fin de identificar similitudes o diferencias

en las dificultades observadas, en función del grado escolar. Así como también se sugiere trabajar con más estudiantes para que los resultados aporten más datos y los hallazgos sean más robustos.

### *Reflexiones finales*

La aplicación de la prueba permitió indagar cómo los estudiantes ponen en práctica el sentido que le otorgan a los números y las operaciones realizando los cálculos de forma flexible y en diversas ocasiones fuera de los algoritmos convencionales.

Por otro lado, este trabajo permitió conocer a los autores los procesos que llevan a cabo los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones de CM y tener un panorama sobre lo que se puede trabajar en el aula de manera transversal como lo sugieren algunas investigaciones (García 2014; Almeida et al 2014). En este sentido, los resultados de esta investigación pueden contribuir a una mejor comprensión de las dificultades que presentan los estudiantes, y servir como base para posteriores estudios sobre el desarrollo del SN y su relación con el CM.

En otro sentido, resulta relevante citar la importancia que tiene para los profesores el generar espacios en el aula para que los estudiantes puedan poner en práctica sus habilidades de comunicación sobre los procesos que llevan a cabo en la solución de problemas matemáticos y que a través de la práctica estas se vayan fortaleciendo.

### **Referencias**

- Almeida, R., Bruno, A. & Perdomo, J. (2014). Estrategias de sentido numérico en estudiantes del grado en Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(2), 9–34.
- Álvarez, Y. (2006). ¡Auxilio. No Puedo Con la Matemática!. Revista Iberoamericana de Educación *Matemática Equisangulo*, 2(1), 4–16.
- Ausubel, D. (1980). *Psicología Educativa, un punto de vista cognoscitivo*. Editorial Trillas.
- Barrera, F., Reyes, A. & Mendoza, J. (2018). Estrategias de cálculo mental para sumas y restas desarrolladas por estudiante4s de secundaria. *Educación Matemática*, 30(3), 122–150.
- Berch, D.B. (2005). Making sense of number sense. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 333–339.
- Cortés, J., Backhoff, E. & Organista, J. (2004). Estrategias de cálculo mental utilizadas por estudiantes de nivel secundaria. *Educación Matemática*, 16(1), 149–168.
- Department for Education. (2010). *Teaching children to calculate mentally*. DFE, Department for Education UK.



- García, S. (2014). *Sentido numérico, materiales para apoyar la práctica educativa*. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.
- Gómez, M., & Mireles, A. (2019). Cálculo mental como estrategia para el aprendizaje de los contenidos matemáticos en la educación primaria. *Revista de Ciencias de la Educación*, 3(10), 8–19.
- Heirdsfield, A. (2002). Mental methods moving along. *APMC*, 7(1), 4–8.
- Jiménez, J. (2010). Las tablas de cálculo: un método para trabajar el cálculo mental. *Revista de Matemáticas*, 11–21.
- Lemonidis, C. (2016). *Mental computation and Estimation: implications for mathematics, education research, teaching and learning*. Routledge.
- McIntosh, A., Reys, B.J., & Reys, R.E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2–8.
- Mochón, S., & Vázquez, J. (1995). Cálculo mental y estimación: métodos, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza. *Educación Matemática*, 7(3), 93–105.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards*. National Council of Teachers of Mathematics. NCTM.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2016). *Panorama de la educación 2016: indicadores de la OCDE*. OCDE. <https://doi.org/10.1787/eag-2016-es>
- Parra, C. (1994). Cálculo mental en la escuela primaria. En C. Parra, & I. Sainz, (Comps.), *Didáctica de Matemáticas, aportes y reflexiones*. Paidós.
- Pourdavood, R., McCarthy, K., & McCafferty, T. (2020). The Impact of Mental Computation on Children's Mathematical Communication, Problem Solving, Reasoning and Algebraic Thinking. *Athens Journal of Education*, 7(3), 241–254.
- Reys, R., Reys, B., Nohda, N., & Emori, H. (1995) Mental Computation Performance and Strategy, use in japanese students in grades 2, 4, 6 and 8. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(4), 304–326.
- Rodríguez, T., & Juárez, L. (2019) estrategias de cálculo mental empleadas por una alumna de segundo grado de primaria, el caso de Luisa. *Revista Números*, 102, 67–81.
- Ruiz, C., & Balbi, A. (2018). The effects of teaching mental calculation in the development of mathematical abilities. *The Journal of Educational Research* 112(3), 315–326. <https://doi.org/10.1080/00220671.2018.1519689>
- Sengül, S. (2013). Identification of Number Sense Strategies used by Pre-service Elementary Teachers. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 13(3), 1965–1974.
- Secretaría de Educación Pública. (2017). *Plan y programas de estudio de educación Básica*. SEP.
- Secretaría de Educación Pública. (2018, febrero 20). *Manual de exploración de habilidades básicas en lectura, producción de textos escritos y cálculo mental. Herramienta para la escuela. Educación secundaria*. SEP. <https://bit.ly/4hm5HEI>

- Stauffer, S., Solares, D., & Broitman, C. (2020). Cálculo estimativo: un estudio con alumnos de 5to año de primaria. *Educación Matemática*, 32(2), 151–171
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Morata.
- Steen, L.A. (1988). The Science of Patterns. *Science*, 240(4852), 611–616.
- Strauss, A., & Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación Cualitativa, Técnicas y Procedimientos para desarrollar la Teoría Fundamentada*. Editorial Universidad de Antioquía.
- Watson, S., Lopes, J., Oliveira, C., & Judge, S. (2018). Error patterns in portuguese students addition and subtraction calculation tasks: implications for teaching. *Journal for Multicultural Education*, 12(1), 67–82.  
<https://doi.org/10.1108/JME-01-2017-0002>