Aprendizaje conceptual de las propiedades de contracción y traslación de la integral definida en profesores de matemáticas en formación

Eddie Aparicio-Landa [1]
Landy Sosa-Moguel [2]
Camila Magaña Flores [3]
Maleni Padilla Pérez [4]

Resumen

Las propiedades de contracción y traslación de la integral definida son importantes para el estudio de la invarianza de acumulaciones. Sin embargo, su enseñanza y tratamiento en libros de cálculo es mínima o nula. Por tal razón, se analizó la posibilidad de propiciar el aprendizaje conceptual de ambas propiedades en profesores de matemáticas en formación mediante la abstracción reflexiva a partir de la resolución de tareas geométrico-analíticas. Se contó con la participación de 19 estudiantes que ya habían acreditado sus cursos de cálculo diferencial e integral. El análisis de los datos se hizo con base en las fases cognitivas implicadas en la abstracción reflexiva. Los resultados muestran que los participantes logran aprender por abstracción reflexiva las propiedades, llegando en el caso de la traslación, a su generalización para cualquier tipo de funciones, hecho que no ocurre en el caso de la contracción. En consecuencia, se sugiere fomentar el análisis de la relación geométrica entre el coeficiente del argumento de las funciones y sus transformaciones gráficas en las tareas sobre la contracción.

Palabras clave

Aprendizaje conceptual, Profesores en formación, Propiedades de la Integral definida, Abstracción reflexiva.

---

[1] alanda@correo.uady.mx
Universidad Autónoma de Yucatán, México
https://orcid.org/0000-0003-4400-3919

[2] smoguel@correo.uady.mx
Universidad Autónoma de Yucatán, México
https://orcid.org/0000-0002-8771-0800

[3] magana.camila@hotmail.com
Universidad Autónoma de Yucatán, México
https://orcid.org/0009-0006-8912-6970

[4] padillamaleni@outlook.com
Universidad Autónoma de Yucatán, México
https://orcid.org/0009-0002-1357-0144

Aparicio-Landa, E., Sosa-Moguel, L., Magaña Flores, C., & Padilla Pérez, M. (2024). Aprendizaje conceptual de las propiedades de contracción y traslación de la integral definida en estudiantes para profesor de matemáticas. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2024* (pp. 81–99). Editorial SOMIDEM.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/02-04

Presentación

A menudo, en libros de cálculo y en prácticas de profesores de cálculo en educación media superior, está ausente el uso de la indagación o del razonamiento como una forma en la que los estudiantes pueden construir y significar los conceptos del cálculo, sus propiedades y métodos. Y, aunque el enfoque en el tratamiento del contenido sea procedimental, "tampoco se realiza un análisis del campo de validez de las técnicas, de su eficacia" (Contreras de la Fuente et al., 2010, p. 372). Así, resulta difícil lograr que los estudiantes transiten del pensamiento matemático elemental al pensamiento avanzado, lo cual es uno de los objetivos de la enseñanza del cálculo en el último año de estudios de educación media superior o en los primeros años de la educación superior. En general, es necesario que los estudiantes de estos niveles educativos desarrollen formas de pensamiento más sofisticadas porque en la educación matemática superior, "la progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, analizar, formalizar, representar, conceptualizar, inducir y visualizar" (Mateus-Nieves & Rojas, 2020, p. 69).

Reconocer, visualizar y aplicar las propiedades de la integral definida son tareas difíciles de realizar por la mayoría de los estudiantes universitarios que han cursado Cálculo. En el estudio de Zimmermann y Cunningham (1991) se muestra que la mayoría de los estudiantes egresados de un curso universitario de cálculo tienen dificultades para identificar propiedades de la integral de forma correcta, tal como la propiedad de traslación de la integral definida o, dicho de otro modo, la propiedad de invarianza por traslaciones de la integral definida. En uno de los ítems del cuestionario de este estudio (Figura 1), los estudiantes dieron respuestas erróneas al seleccionar una opción distinta al inciso c), en el que se establece la propiedad de traslación.

Figura 1

Ítem de un cuestionario sobre propiedades de la integral

Suponga que f es una función continua. ¿Cuál de las opciones siguientes es correcta?

a) $\int_a^b f(x-k)dx = \int_{a-k}^{b-k} f(x)dx$
b) $\int_a^b f(x-k)dx = \int_a^b f(x+k)dx$
c) $\int_a^b f(x-k)dx = \int_{a+k}^{b+k} f(x)dx$
d) $\int_a^b f(x-k)dx = \int_{a+k}^{b+k} f(x+k)dx$
e) Ninguna de las anteriores

Nota. Fuente: Zimmermann y Cunningham (1991)

Entre las explicaciones que proporcionan los autores sobre esta clase de dificultades en los estudiantes, se encuentra la falta de habilidad de visualización matemática. De este modo, quienes tienen dificultades para responder correctamente el ítem muestran dificultades de visualización y desconocimiento de dicha propiedad. Las dificultades reportadas por Zimmermann y

Cunningham (1991) además de ser relativas a los estudiantes, también acontecen en profesores de Cálculo. Por ejemplo, Aparicio et al. (2017) reportan que profesores de educación media superior enfrentan dificultades para realizar tareas relacionadas con la propiedad de dilatación o contracción de la integral definida como se muestra en la Figura 2.

Figura 2

Evaluación de una integral definida conociendo el valor de otra

$$\boxed{\text{Si } \int_0^4 f(x)dx = 8, \text{ determinar el valor de } \int_0^2 f(2x)dx}$$

Nota. Fuente: Fuente: Aparicio et al. (2017), p. 9

Los profesores manifestaron dificultades procedimentales y conceptuales para determinar el valor solicitado y eso se debe, entre otros factores, a una conceptualización inadecuada del cambio de variable con relación al concepto de función compuesta para el caso de la integral definida. Una forma alternativa de resolver la tarea planteada es precisamente usando la propiedad de dilatación o contracción de la integral definida, lo cual en símbolos se traduce en:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{k}\int_{ak}^{bk} f\left(\frac{x}{k}\right)\,dx$$

o equivalentemente:

$$k\int_a^b f(x)\,dx = \int_{ak}^{bk} f\left(\frac{x}{k}\right)\,dx$$

En efecto, si se usa el valor de $k = \frac{1}{2}$ se tiene que si,

$$\int_0^4 f(x)\,dx = 8$$

entonces,

$$2\int_0^2 f(2x)\,dx = \int_0^4 f(x)\,dx = 8$$

de donde,

$$\int_0^2 f(2x)\,dx = 4$$

Por tanto, de los resultados de ese estudio se puede concluir que los profesores tienen dificultades para reconocer lo que pasa cuando se alteran los límites de integración por dilataciones o contracciones.

Lo anterior sugiere que en la enseñanza usual del Cálculo, se deja fuera el estudio e inferencia de algunas propiedades de la integral definida que son importantes para la comprensión de la invarianza de acumulaciones o bien, su aprendizaje carece de una base conceptual. Los símbolos en matemáticas presuponen una connotación dual de su uso, como procesos y como objetos. En el caso del cálculo integral, con la expresión simbólica $\int f(x)\,dx$, se hace referencia tanto al proceso de integración como al concepto de integral. Además, como afirman Tall et al. (2001), "Los símbolos ocupan una posición central entre los procesos que hay que realizar y los conceptos que hay que pensar. Nos permiten realizar tanto problemas matemáticos como pensar en relaciones matemáticas" (p. 81). Por consiguiente, es preciso que en la enseñanza y aprendizaje de la integral definida, así como de sus propiedades, el uso de los símbolos esté acompañada de una articulación adecuada entre el carácter procedimental y conceptual del conocimiento matemático. Si bien incorporar el uso de distintos registros de representación semiótica es muy útil para esto (Duval, 2006), también se requeriría implicar a los estudiantes en procesos de razonamiento matemático y argumentación. Pues al resolver tareas de integración no suelen ofrecer justificaciones matemáticas sobre los procedimientos y técnicas que utilizan, por ejemplo, las conversiones entre integrales y áreas (Nilsen & Knutsen, 2023).

Lograr compaginar comprensión y razonamiento en los cursos de Cálculo resulta complejo si la mayoría de los profesores que los imparten tienen objetivos de enseñanza que atañen a una visión mecanicista de esta área de las matemáticas. Es decir, "ven" al cálculo como un conjunto de reglas y procedimientos que precisan de ser memorizados para despupés aplicarlos en tareas rutinarias (Eichler & Erens, 2014). Por otro lado, es sabido que el aprendizaje del cálculo por parte de los estudiantes está estrechamente relacionado con la forma en que el profesor comunica los conceptos en el aula (Ely, 2021) y los materiales curriculares que emplea, tales como los libros de texto (Grossman & Thompson, 2008). Más aún, la comprensión y los conocimientos conceptuales de los profesores de cálculo son fundamentales para una educación matemática de calidad y una enseñanza centrada en lo conceptual no demerita el desarrollo de habilidades procedimentales en los estudiantes de educación media superior (Chappell & Killpatrick, 2003). Por tanto, el conocimiento que para la enseñanza del cálculo tenga el profesor o el futuro profesor es decisivo para que los estudiantes alcancen una comprensión profunda de sus conceptos, propiedades y métodos (Walshaw, 2012).

Es difícil concebir que los profesores de Cálculo favorezcan una comprensión profunda en sus estudiantes, si durante su formación profesional no disponen de experiencias de construcción de conocimiento que les permitan entender la naturaleza conceptual y operacional de los conceptos y símbolos del Cálculo, así como los procesos cognitivos que pueden apoyar el desarrollo de dicho conocimiento. En consecuencia, tal como sostiene Walshaw (2012, p. 185) "cuando los futuros profesores demuestran una comprensión limitada o confusa de los conocimientos de la asignatura relevantes para la clase, a menos que se rectifique, sus futuros estudiantes tendrán dificultades para dar sentido a los conceptos matemáticos relevantes".

Es precisamente en esta problemática sobre el aprendizaje y conocimiento del futuro profesor de matemáticas que este capítulo aboga por un cambio en la forma en que se les enseña y aprenden cálculo los profesores de matemáticas en formación. Más concretamente, se plantea la necesidad de explorar tratamientos alternativos de enseñanza que fomenten el aprendizaje conceptual por abstracción reflexiva de propiedades de la integral definida a partir de tareas que articulen algunas representaciones geométricas y analíticas de estas. De este modo, el objetivo fue analizar en qué medida profesores de matemáticas en formación evidencian aprendizaje conceptual de las propiedades de contracción y traslación de la integral definida.

Aprendizaje conceptual por abstracción reflexiva

En este trabajo se entiende que el aprendizaje conceptual en matemáticas por abstracción reflexiva es un proceso de desarrollo de abstracciones nuevas y más fuertes que se dan mediante la actividad matemática del sujeto. Piaget (2001) caracterizó a la abstracción reflexiva como el proceso mediante el cual las estructuras mentales de nivel superior podían desarrollarse a partir de estructuras de nivel inferior y consta de dos fases cognitivas, una fase de proyección en la que las acciones de un nivel se convierten en objetos de reflexión en el siguiente y una fase de reflexión en la que tiene lugar una reorganización. Este proceso no es necesariamente de modo consciente aun cuando incluya actividades cognitivas del sujeto tales como esquemas y coordinación de acciones.

Dubinsky (2002) refiere que la abstracción reflexiva de Piaget (2001) consiste en una coordinación general de acciones más que en coordinaciones específicas de acciones relativas a la conceptualización de ciertos "objetos" (en este caso, objetos matemáticos), por lo que él plantea un modelo instruccional-teórico para el aprendizaje matemático basado en el concepto de abstracción reflexiva de Piaget, conocido como teoría APOE (acrónimo de Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas). Este modelo conduce a desarrollar en los estudiantes un pensamiento matemático avanzado de conceptos matemáticos específicos tales como el de función, en donde el primer mecanismo de la abstracción reflexiva consiste en extraer propiedades de acciones mentales o físicas en un determinado nivel de pensamiento para posteriormente ser interiorizadas como procesos a partir de la reflexión. A su vez, son transformados por la acción en objetos y así sucesivamente, este proceso es cíclico en forma de espiral y puede iniciarse en cualquier parte de este. Para fines de este estudio, se situó a los participantes en un proceso de abstracción reflexiva de las propiedades de la integral definida.

Desde la teoría APOE, un estudiante evidencia aprendizaje de las propiedades de la integral definida en la medida que este logre transitar entre las diversas etapas mentales consideradas en dicha teoría. Este tránsito ocurre por medio de mecanismos mentales que forman parte de la abstracción reflexiva: Interiorización, Coordinación, Encapsulación y Generalización. En la interiorización se realizan pasos de un procedimiento y se reflexiona sobre el procedimiento. En la coordinación se examinan dos procesos diferentes y se integran en uno coordinado. En la encapsulación se encapsula un concepto construyendo un significado individual de este. La generalización consiste en ampliar y aplicar lo encapsulado a una colección más amplia de problemas matemáticos.

En el aprendizaje de un objeto matemático también se precisa de una asociación entre elementos semióticos y conceptuales del mismo objeto (Fischbein, 1993), tal asociación se favorece usando representaciones semióticas diferentes de un mismo objeto matemático, ya que ello obliga a explicitar las características comunes o no del objeto representado mediante procesos cognitivos. Como menciona Duval (2017, p. 22) "la asociación entre las representaciones y el objeto en sí, las palabras y las cosas designadas, una obra y su modelo, etc., aparece como el proceso cognitivo fundamental para 'dar sentido' y verificar y, por tanto, adquirir nuevos conocimientos".

Se decidió usar tareas basadas en representaciones semióticas por su relación de complementariedad con la abstracción en el aprendizaje matemático. En palabras de Dreyfus (2002): "Por un lado, un concepto a menudo se abstrae de varias de sus representaciones; por otro lado, las representaciones son siempre representaciones de algún concepto más abstracto" (p. 38). Según este autor, la abstracción de un concepto en el aprendizaje requiere la integración y cambio flexible entre representaciones. En particular, en las tareas se consideraron representaciones geométrico-analíticas para la generalización y abstracción de los aspectos conceptuales asociados a la integral definida y las propiedades tratadas. Estas incluyen la relación entre la variación de una variable y la conservación o transformación que produce en la acumulación de los valores o cantidades de otra variable (función) que depende de esta, a través de su representación como área bajo una curva. Se partió del hecho de que la mayoría de los estudiantes que han estudiado cálculo, conciben a la expresión:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

como la representación de una forma espacial cerrada (usualmente delimitada por las rectas $x = a$, $x = b$ con $a, b \in \mathbb{Z}$), el eje de las abscisas en el plano cartesiano y la función $f(x)$, cuya medida de área es el valor de la integral (Jones, 2015). Es decir, hay una imagen prototipo geométrico-analítica en la mente de los estudiantes que hace corresponder al área bajo una curva con el concepto de integral definida (Jones, 2018).

Método de estudio

El estudio es cualitativo exploratorio ya que se carece de investigaciones relacionadas con el aprendizaje de las propiedades de contracción y traslación de la integral definida en profesores de matemáticas en formación. Los estudios de alcance exploratorio indagan en temas o problemas de investigación poco estudiados o que no han sido abordados con anterioridad e identifican relaciones potenciales entre variables y establecen rumbo para investigaciones posteriores más rigurosas (Salinas y Cárdenas, 2009). En particular, se exploró el aprendizaje conceptual de las propiedades referidas mediante la abstracción reflexiva y el uso de tareas geométrico-analíticas como una forma de promover tal abstracción.

Los participantes en este trabajo fueron 19 profesores de matemáticas en formación con un rango de edad de 20 a 24 años e inscritos en su último año de estudios de su carrera profesional y disponían de conocimientos de cálculo diferencial e integral. No obstante, previamente a la implementación de las tareas no conocían las propiedades de contracción y traslación de la integral definida, eso se determinó con base en una entrevista a una parte del mismo grupo de estudiantes.

Diseño de las tareas

Para analizar en qué medida los profesores de matemáticas en formación logran aprender conceptualmente las propiedades de contracción y traslación de la integral definida se diseñaron secuencias de tareas que detonen procesos de abstracción reflexiva. Kieran et al. (2021) sugieren que favorecer el desarrollo de conceptos como parte de una abstracción reflexiva, no necesariamente está asociado con que los estudiantes "hagan un salto" en la resolución de algún problema, sino con el hecho de que una determinada secuencia de tareas provea la oportunidad de construir una abstracción a través de una actividad ya disponible. Por ende, las secuencias de tareas se diseñaron siguiendo los dos principios de Kieran et al. (2021) para propiciar el aprendizaje conceptual por abstracción reflexiva:

1. Identificar una actividad potencial que ya esté disponible para el estudiante y pueda servir de referencia para la abstracción esperada (el objetivo de aprendizaje identificado).

   Este principio se consideró en el diseño de las tareas a partir de la representación y comparación geométrica de las áreas de pares de trapecios definidos por la región delimitaba bajo la gráfica de funciones lineales, el eje de las x y rectas de la forma $x = a$ y $x = b$ con $a, b \in \mathbb{Z}$. En la secuencia de tareas sobre la propiedad de contracción, la actividad consistió en establecer que, en cada par de trapecios, uno tiene la mitad del área que el otro, y esta misma relación se cumple para las alturas (límites de integración) de los trapecios de cada par. Analíticamente, esta relación se representa como

$$\int_{6}^{8} x\,dx = \int_{3(2)}^{4(2)} x\,dx = \int_{3}^{4} 2x\,dx$$

para el caso particular en que $f(x) = 2x$, $a = 3$, $b = 4$ y $k = 2$. Esto serviría de base para abstraer que, en general,

$$k\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{ak}^{bk} f\left(\frac{x}{k}\right) dx$$

En la secuencia sobre la propiedad de traslación, la actividad potencial consistió en establecer relaciones de conservación de áreas entre pares de trapecios. Los primeros trapecios estaban formados por la gráfica de funciones lineales de la forma $y = f(x) = 2x$, el eje de las x y distintos segmentos comprendidos por rectas de la forma $x = a$ y $x = b$ con $a, b \in \mathbb{Z}$. los segundos trapecios resultaban de trasladar horizontalmente unidades a la izquierda o a la derecha tanto la gráfica de la función lineal como las rectas $x = a$ y $x = b$. De allí, se esperaba que analíticamente se abstrajera la relación de conservación entre las áreas para establecer en general que:

$$\int_{a}^{b} f(x-k)\,dx = \int_{a+k}^{b+k} f(x)\,dx$$

2. Diseñar tareas que susciten la actividad disponible y favorezcan la abstracción reflexiva (una anticipación aprendida soportada por actividades con representaciones externas a ejecuciones mentales) (Kieran et al., 2021, p. 51).

   Para favorecer la abstracción de las propiedades de contracción y traslación, en el diseño de las tareas se usaron representaciones geométrico-analíticas de la integral definida como una forma de promover el reconocimiento de los aspectos conceptuales inmersos en las propiedades. Esto bajo el supuesto de que tratar en paralelo con dos representaciones diferentes de un mismo objeto matemático posibilita la actividad cognitiva de reconocimiento y abstracción de tal objeto, es decir, la conexión y cambio entre su representación matemática y mental (Dreyfus, 2002; Duval, 2017). Así, desde un punto de vista semiótico, se consideraron tareas que impliquen coordinar la representación geométrica de la integral definida como área bajo una curva y su representación analítica. Específicamente, en las tareas se trabajó con la representación geométrica del área bajo la curva de pares de trapecios definidos como se describió en el principio 1), y el tránsito a la representación analítica de las relaciones invariantes entre las áreas de los trapecios al variar la función lineal o los valores de a y b. De este modo, se esperaba que los participantes abstrajeran las propiedades de la integral definida mediante el análisis y generalización de casos particulares de tales relaciones con apoyo cognitivo en su representación geométrico-analítica.

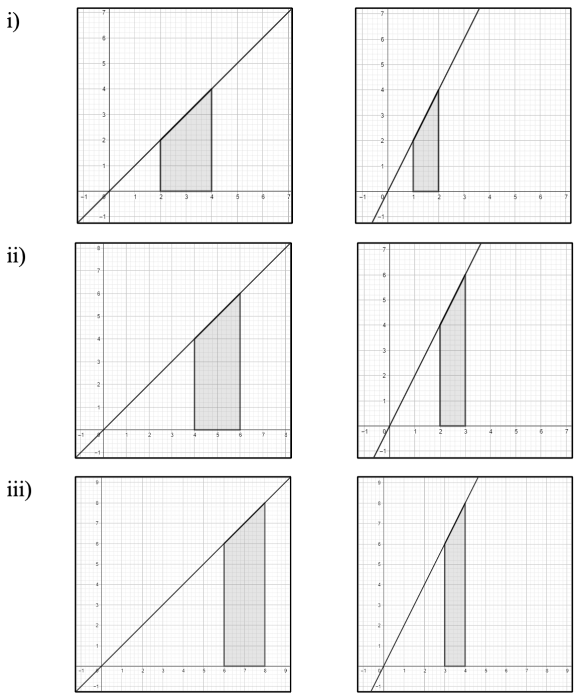
A continuación, se presenta y describe la secuencia de tareas empleadas para el caso de la propiedad de contracción. El caso de la propiedad de traslación se presenta posteriormente y, en su estructura, es equivalente a la secuencia de contracción.

Secuencia de tareas para la propiedad de contracción

Tarea 1. En la Figura 3 se muestran tres pares de trapecios sombreados en color gris. Analiza cada par, posteriormente indica si identificas alguna relación y explícala. En caso contrario, también indícalo.

Figura 3

Tres pares de trapecios dispuestos sobre el eje para el caso de contracción



Tarea 2. Considerando que un trapecio como los de la Tarea 1 se ubica en el intervalo [100, 102] del eje horizontal, determina el intervalo en el cual se ubica el otro trapecio. Además, indica las medidas de sus respectivas áreas.

Tarea 3. Considerando que las medidas de las áreas del primer par de trapecios en la Tarea 1 están dadas respectivamente por:

$$\int_2^4 x\,dx \text{ y } \int_1^2 2x\,dx$$

Determina las integrales definidas que estarían representando las medidas de las áreas de los pares de trapecios dados en ii) y iii) de la Tarea 1.

Tarea 4. Determina las integrales definidas para el par de trapecios referidos en la Tarea 2.

Secuencia de tareas para la propiedad de contracción

En la Tarea 1 se muestran tres pares de trapecios dispuestos en forma horizontal. Los de la izquierda están formados por la gráfica de la función $y = f(x) = x$, el eje de las x y distintos segmentos comprendidos entre rectas de la forma $x = a$ y $x = b$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ (Figura 3), además puede observarse que sus alturas miden dos unidades. Los de la columna de la derecha están formados de manera similar a los de la izquierda, pero cambia la función lineal a $y = f(x) = 2x$, y las alturas de los trapecios miden una unidad. En esta tarea se esperaba que los participantes llevaran a cabo acciones de comparación de las formas y áreas de los trapecios para reconocer similitudes y diferencias entre estas, al variar tanto la función $f(x)$ como los valores de a y b (límites de integración). Las Tareas 2 a 4 se diseñaron de tal forma que detonaran los procesos de la abstracción reflexiva.

En la Tarea 2 se buscaba propiciar la *interiorización* de la relación invariante entre las áreas de los tres pares de trapecios dados en la Tarea 1, a saber, los trapecios de la derecha tienen la mitad de las áreas que los de la izquierda. Para ello, se solicitó calcular las medidas de un nuevo par de trapecios a partir de información relacionada con el hecho de que uno de ellos se encuentra comprendido entre las rectas $x = 100$ y $x = 102$. Se proporcionaron valores grandes para a y b, a fin de hacer necesario analizar y reflexionar sobre la relación invariante entre las áreas de los trapecios presentados en la tarea previa, ante la insuficiencia de alguna acción concreta para responder la tarea. Asimismo, con la Tarea 2 se buscó facilitar el paso a la coordinación de dos procesos para integrarlos en uno que sirviera de base en el análisis de la propiedad de contracción, lo cual se requeriría en la tarea siguiente.

En la Tarea 3, se pretendía suscitar la *coordinación* de dos procesos, uno geométrico y el otro analítico, del cálculo de áreas de los trapecios en uno solo (integración), apoyado por representaciones externas. Con este propósito, se solicitó determinar las integrales definidas que representen las medidas de las áreas de dos pares de los trapecios presentados en la Tarea 1. En esto se esperaba que la solicitud de calcular las medidas de áreas fuera de ayuda, pues si bien dicho cálculo puede hacerse con la fórmula conocida en geometría:

$$A = \frac{(B+b)h}{2}$$

las representaciones utilizadas en las tareas también sugieren pensar en la integral definida como una alternativa del cálculo de la medida de un área, sobre todo si está definida bajo una curva (Jones, 2015). Con la Tarea 3, también se buscó dar lugar a la *encapsulación* indicada en la teoría APOE de modo que, al determinar las integrales definidas solicitadas y articular sus representaciones con lo realizado en las tareas previas, la propiedad de contracción emergiera como resultado de la abstracción reflexiva. Para verificar si esto último se lograba, se diseñó la cuarta y última tarea.

En la Tarea 4 se esperaba que los participantes dieran significado a la contracción no sólo en términos geométricos de la reducción o ampliación del área de los trapecios, sino analíticamente como efecto (gráfico) de la varianza de los coeficientes de x en la expresión algebraica de la función $f(x)$ y de los límites de integración. Esto les permitiría *encapsular* sus procesos geométrico-analíticos de cálculo y el establecimiento de relaciones de áreas como un objeto: la propiedad de contracción de la integral definida, la cual podrían expresar como una relación de igualdad entre integrales definidas. De esta encapsulación y lo realizado anteriormente con casos particulares de trapecios e integrales definidas, con lo que se pedía en esta tarea, se pretendía que los participantes llegaran a una *generalización* de dicha relación para cualquier función y límites de integración. Esto es, la personalización de la propiedad de contracción y su expresión algebraica general. Este proceso cognitivo estaría respaldo por las "transformaciones" perceptibles de las representaciones geométrico-analíticas implicadas en cada tarea.

Secuencia de tareas para la propiedad de traslación

Tarea 1. En la Figura 4 se muestran tres pares de trapecios sombreados en color gris. Analiza cada par, posteriormente indica si identificas alguna relación y explícala. En caso contrario, también indícalo.

Tarea 2. Considerando que un trapecio como los de la Tarea 1 se ubica en el intervalo [100, 102] del eje horizontal, determina el intervalo en el cual se ubica el otro trapecio. Además, indica las medidas de sus respectivas áreas.

Tarea 3. Considerando que las medidas de las áreas del primer par de trapecios en la Tarea 1 están dadas por:

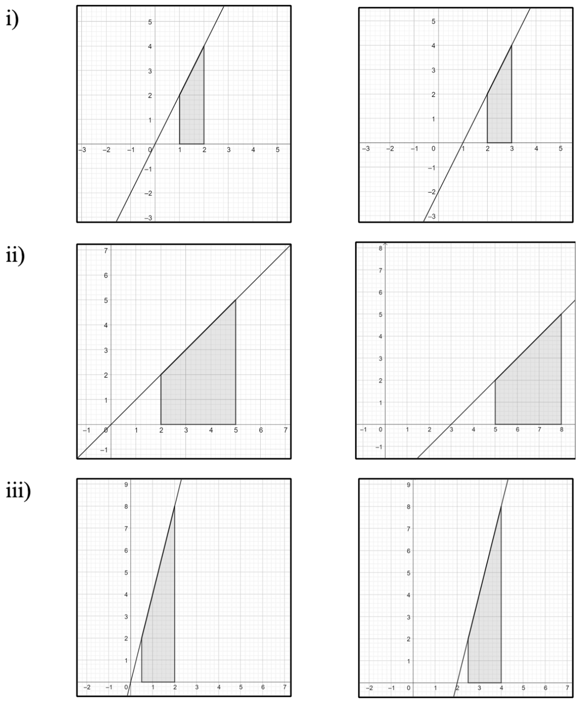
$$\int_1^2 2x\,dx \text{ y } \int_2^3 2(x-1)\,dx$$

y , respectivamente. Determina las integrales definidas que estarían representando las medidas de las áreas de los pares de trapecios dados en ii) y iii) de la Tarea 1.

Tarea 4. Determina las integrales definidas para el par de trapecios referidos en la Tarea 2.

Figura 4

Tres pares de trapecios dispuestos sobre el eje x para el caso de la traslación



Recolección de datos

Las tareas fueron resueltas individualmente y por escrito en un tiempo máximo de dos horas. Los datos se recabaron mediante las hojas de respuestas de los participantes. En cada secuencia de tareas los procesos de resolución fueron analizados para establecer quienes habían logrado abstraer la respectiva propiedad de la integral definida y las características que la componen. Por tanto, las respuestas fueron clasificadas en dos grupos, las que sí mostraban la abstracción de la propiedad y las que no.

Análisis e interpretación de los datos

Para determinar en qué medida se lograba un aprendizaje conceptual por abstracción reflexiva, se analizaron los datos en términos de los procesos cognitivos de interiorización, coordinación, encapsulación y generalización que, de acuerdo con Dubinsky y McDonald (2001), son algunas de las formas en que puede darse la construcción de conceptos matemáticos avanzados mediante la abstracción reflexiva. De este modo, en las resoluciones de cada una de las tareas se buscaron indicios de interiorización, coordinación, encapsulación e incluso, de generalización por parte de los participantes.

Tabla 1

Análisis proceso cognitivo de la abstracción reflexiva por tarea y estudiante en la contracción

E1	E2	E3
Tarea 1. Actividad Potencial: invarianza en la relación de áreas		
Los primeros trapecios poseen el doble de área respecto de los segundos.	El trapecio T1 tiene el doble del área del trapecio T2.	Las áreas de los trapecios de la izquierda siempre son el doble que los de la derecha. Así, $A_{T_1} = \frac{(4+2)\cdot 2}{2} = 6$ y $A_{T_2} = \frac{(4+2)\cdot 1}{2} = 3$
Tarea 2. Interiorización – Coordinación		
Los primeros tres trapecios se generan por la función $f(x) = x$. Los intervalos son de la forma $[2n, 2n+2]$ para cualquier n- ésimo intervalo. El área para la posición n será: $AT_n = 4n + 2$. Los segundos tres trapecios se generan con la función $f(x) = 2x$. El intervalo será de la forma $[n, n+1]$. El área para la posición n será: $AT_n = 4n + 1$. Si un trapecio está en $[100, 102]$ entonces, $2n = 100$ por tanto, $n = 50$. Y el otro trapecio estará en $[50, 51]$ y su área es 101. El área del otro será: $4(50) + 2 = 202$	T1 es una figura delimitada por $y = x$ entre x_i y $x_j \in [a, b]$. T2 es delimitada por $y = 2x$, x_l y $x_j \in [c, d]$, donde $a = 2c$ y $b = 2d$. Si uno de los trapecios se ubica en $[100, 102]$, entonces el otro estará en $[50, 51]$. Sus áreas estarán dadas por: $\int_a^b x\,dx = 2\int_c^d 2x\,dx$ Es decir, el área del primero es 101 u^2 y del segundo será 202 u^2.	Si $P(0, 0)$ y $Q(2, 2)$ son puntos de la recta en el trapecio 1 de la Tarea 1, así $m_{PQ} = 1$ y $y - 0 = 1(x - 0)$, de modo que $y = x$. Análogamente para su trapecio par, se tiene $y = 2x$. Las rectas de la izquierda son $y = x$ y de la derecha son $y = 2x$. Así, para $[100, 102]$ se tiene que $\int_{100}^{102} x\,dx = A = 202$ Por tanto, el intervalo del trapecio de la derecha será $[50, 51]$ dado que el del primero es $[100, 102]$ y su área será 101
Tarea 3. Coordinación – Encapsulación		
Se tiene que: $f(x) = x$ y $g(x) = 2x$ Por lo que: $\int_{2n}^{2n+2} f(x)\,dx = 4n + 2$ y $\int_n^{n+1} g(x)\,dx = 2n + 1$ para un inciso n.	ii) $\int_4^6 x\,dx$ y $\int_2^3 2x\,dx$ iii) $\int_6^8 x\,dx$ y $\int_3^4 2x\,dx$	ii) $\int_4^6 x\,dx$ y $\int_2^3 2x\,dx$ iii) $\int_6^8 x\,dx$ y $\int_3^4 2x\,dx$
Tarea 4. Encapsulación – "Generalización"		
Lo que se está "generalizando es" $g(x) = 2f(x)$, donde $f(x) = x$. $\int_{2n}^{2n+2} f(x)\,dx = 2\int_n^{n+1} g(x)\,dx$ para los casos donde los intervalos de $f(x)$ son el doble a los de $g(x)$	$\int_{100}^{102} x\,dx$ y $\int_{50}^{51} 2x\,dx$ De lo realizado se puede concluir que: $\int_a^b f(x)\,dx = 2\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} 2f(x)\,dx$	$\int_{100}^{102} x\,dx$ y $\int_{50}^{51} 2x\,dx$ Se satisface que: $\int_a^b x\,dx = 2\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} 2x\,dx$ En general, ¿se cumple la regla de sustitución? Como se acomoda más rápido en los segundos trapecios (el doble), el intervalo se reduce a la mitad

Con relación con la actividad potencial de la Tarea 1, se detectó que la totalidad de los estudiantes lograron establecer que los trapecios de la derecha tienen la mitad de las áreas que los de la izquierda, sus expresiones fueron como las mostradas en la Tabla 1. En cuanto a la Tarea 2 y el proceso de interiorización, se identificó que la mayoría de los estudiantes se situaron en un tránsito entre la interiorización (realización de procesos internos para dar sentido a la actividad previa, en este caso, la reflexión que es evidenciada en el uso consistente de representaciones semióticas) y la coordinación (interrelación entre acciones o procesos de cálculo de medidas de áreas para configurarlos en una acción o proceso para realizar otra acción o proceso). La coordinación inicia con una relación entre lo geométrico y lo numérico o algebraico mediado por el cálculo geométrico de las medidas de áreas y el cálculo algebraico-analítico de las mismas.

Con relación con la Tarea 3, puede verse en la Tabla 1 que, mientras la mayoría de los estudiantes se situaron en un tránsito entre la coordinación y encapsulación, solo algunos (ejemplificado con E1), iniciaron un proceso de encapsulación de la propiedad de contracción de la integral definida. Fueron estudiantes como E1 quienes empezaron a personificar la noción de contracción al darle un significado a sus operaciones (mentales y semióticas) mediante el cálculo de medidas de áreas de los trapecios en relación con las integrales definidas (entendidas como áreas bajo las curvas, en este caso: $y = f(x) = x$ y $y = f(x) = 2x$. También empezaron a encapsular sus procesos en un objeto como es la propiedad de contracción de la integral definida. En las representaciones de E1 puede observarse cómo el estudiante inicia sin llegar a concretar la encapsulación de la propiedad de contracción, al poner en estrecha relación la varianza de los límites de integración con las medidas de las áreas. Es así como se inicia, sin concluirse, la encapsulación de la propiedad de contracción.

La generalización podía haberse producido en el sentido de extender la noción de invarianza observada entre las áreas de los trapecios. Es decir, invariantemente unas áreas son el doble de las otras, ya sea en los trapecios o en las integrales definidas. Respecto de la Tarea 4, es perceptible que, al no lograrse una adecuada encapsulación de la propiedad de contracción, los pocos estudiantes que mostraron algún tipo de intento de generalización no lograron extender la idea o propiedad de contracción para ser aplicada a otros tipos de funciones distintas a las tratadas en las tareas. Particularmente se observa que los estudiantes no analizaron la transformación en el argumento de la función, esto puede deberse a que en las tareas se usaron funciones lineales y en ellas se verifica la linealidad (propiedad de homogeneidad o escalamiento: $f(ax) = af(x)$. Dicho de otro modo, en las funciones empleadas se cumple que si $f(x) = x$, entonces, $2f(x) = f(2x)$. Ejemplo de ello está en lo dicho por E1: “lo que se está generalizando es $g(x) = 2f(2x)$, donde $f(x) = x$", sin atender el argumento. Esto mismo se observa en E2. Solo en el caso de E3 se identifica un intento de análisis más general al plantearse si: "¿en general, se cumple la regla de sustitución?" y su intento de análisis lo lleva a prestar atención en las acumulaciones y las formas en que éstas tienen lugar: "como se acomoda (se refiere a las áreas) más rápido en los segundos trapecios (el doble), el intervalo (se refiere a los límites de integración) se reduce a la mitad".

Tabla 2

Análisis proceso cognitivo de la abstracción reflexiva por tarea y estudiante en la traslación

E1	E2	E3
Tarea 1. Actividad Potencial: invarianza de áreas		
El área de ambos trapecios para cada caso es el mismo	Las áreas son iguales. Los trapecios tienen las mismas alturas (es el mismo tamaño del intervalo)	El área es la misma en cada caso
Tarea 2. Interiorización – Coordinación		
El otro trapecio se ubica en $[104, 106]$ y las medidas de sus áreas son iguales: 606 u^2	El otro trapecio está en $[101, 103]$. Ambos tienen la misma área:404	Está en $[103, 105]$ y tienen la misma área: 202
Tarea 3. Coordinación – Encapsulación		
ii) $\int_2^5 x\,dx;\ \int_5^8 (x-3)\,dx$ iii) $\int_{0.5}^2 4x\,dx;\ \int_{2.5}^4 4(x-2)\,dx$	ii) $\int_2^5 x\,dx;\ \int_5^8 (x-3)\,dx$ iii) $\int_{0.5}^2 4x\,dx;\ \int_{2.5}^4 4(x-2)\,dx$	ii) $\int_2^5 x\,dx;\ \int_5^8 (x-3)\,dx$ iii) $\int_{0.5}^2 4x\,dx;\ \int_{2.5}^4 4(x-2)\,dx$
Tarea 4. Encapsulación – "Generalización"		
$\int_{100}^{102} 3x\,dx$ y $\int_{104}^{106} 3(x-4)\,dx$ Al sumar o restar una cantidad c al valor de x en una función $f(x) = kx$, de modo que se transforme en: $f(x) = k(x + c)$ y al realizar la operación inversa en los límites de la integral definida (sumar si $c < 0$, restar si $c > 0$), entonces la nueva integral definida es equivalente a la original	$\int_{100}^{102} 2x\,dx$ y $\int_{101}^{103} 2(x-1)\,dx$ En general observo que: $\int_a^b x\,dx = \int_{a+c}^{b+c} (x-d)\,dx$ donde c y d son números reales y lo mismo ocurre con múltiplos: $\int_a^b e(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} e(x-d)\,dx$ Las funciones sufren una traslación que ocasiona que las áreas sean las mismas. Las integrales son equivalentes	$\int_{100}^{102} x\,dx$ y $\int_{103}^{105} (x-3)\,dx$ Puedo concluir que: $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$ Ya que los nuevos vértices de la base del trapecio son la suma del valor del valor del desplazamiento

Con relación con la actividad potencial de la Tarea 1, se encontró que la totalidad de los estudiantes lograron establecer que los trapecios de la derecha tienen las mismas medidas de áreas que los de la izquierda, ello lo expresaron como se muestra en la Tabla 2. Respecto de la Tarea 2 y el proceso de interiorización, se identificó que la mayoría de los estudiantes se situaron en un tránsito entre la interiorización (reflexión apoyada en el uso consistente de representaciones semióticas) y la coordinación (interrelación entre acciones o procesos de cálculo de medidas de áreas para configurarlos en una acción o proceso para realizar otra acción o proceso). Lo dicho se puede inferir de la diversidad de funciones empleadas en la tarea, generando así, diversos intervalos y medidas de áreas (ver Tabla 2) que conservan la relación invariante en la medida de las áreas de los trapecios considerados. De este modo, la coordinación inicia con una relación entre lo geométrico y lo numérico o algebraico mediado por el cálculo geométrico de las medidas de áreas y el cálculo algebraico-analítico de las mismas.

En lo concerniente a la Tarea 3, puede verse en la Tabla 2 que, si bien la mayoría de los estudiantes se situaron en un tránsito entre la coordinación y encapsulación al dar respuestas satisfactorias, prácticamente nadie hace un intento de ir más allá de lo solicitado en la tarea. Es así como la encapsulación no tiene lugar en este momento de la tarea y es hasta la última en donde se identifican expresiones lingüísticas que hacen suponer un proceso de encapsulación y generalización de la propiedad tratada en la secuencia de tareas.

Las respuestas dadas a la Tarea 4 muestran que los estudiantes encapsularon la propiedad de traslación de la integral definida e incluso, hubo quienes no tuvieron problemas en expresar de manera algebraica y general dicha propiedad, tal es el caso de E3 o E1 en la Tabla 2. Sin embargo, también se detectaron casos como E2 que, a pesar de tener claridad sobre la propiedad, ésta no es correctamente expresada de manera algebraica, pues no hay consistencia entre los parámetros empleados para denotar las transformaciones en los límites de integración en relación con las transformaciones en los argumentos de las funciones.

Resultados

El presente trabajo consistió en analizar en qué medida profesores de matemáticas en formación logran aprender conceptualmente las propiedades de contracción y traslación de la integral definida por abstracción reflexiva a partir de un tratamiento alternativo de enseñanza de dichas propiedades basado en una secuencia de tareas que articulen el uso de distintas representaciones semióticas para el cálculo de medidas de áreas de trapecios situados en el plano cartesiano.

El aprendizaje conceptual de la propiedad de contracción por abstracción reflexiva se puede decir que sólo se logró para el caso de las funciones empleadas en las tareas, sin llegar a una generalización de la propiedad para otro tipo de funciones, es decir, sin llegar a una extensión para cualquier función en general. Es posible afirmar que el aprendizaje de la propiedad de contracción para los casos particulares abordados tuvo lugar toda vez que los estudiantes coordinaron sus diferentes acciones y procesos durante su actividad matemática situada en la medición y relación de áreas a partir de distintas representaciones semióticas de trapecios e integrales definidas. No obstante, se observa la necesidad de incorporar una tarea que promueva el análisis de la relación geométrica entre el coeficiente del argumento de las funciones y sus transformaciones gráficas.

El aprendizaje conceptual de la propiedad de traslación se logró en su totalidad y fue más allá de los casos particulares abordados en las tareas. Esta propiedad al parecer fue más notoria -visualmente hablando- para los estudiantes y pudieron establecer una adecuada relación entre la conservación de medidas de las áreas de los trapecios y las transformaciones en el argumento de las funciones, así como en los límites de integración en el caso de las respectivas integrales definidas. Con base en este hecho, es posible afirmar que la propiedad de traslación es más fácil de abstraer y generalizar por parte de los estudiantes al tratarse "únicamente de un aparente movimiento rígido en el plano" de una forma geométrica y, por tanto, la conservación de áreas es "fácilmente generalizable".

Conclusiones

Considerando que los participantes en este estudio no conocían a priori las propiedades de contracción y traslación de la integral definida, los resultados sugieren que la secuencia de tareas empleada favorece su aprendizaje conceptual por abstracción reflexiva. Sin embargo, como puede verse en el caso particular de la contracción, es necesario pensar en cómo tratar el tema de la linealidad de las funciones (propiedad de homogeneidad o escalamiento) de modo que los cambios en los argumentos de las funciones sean también un elemento de análisis por parte los estudiantes. Adicionalmente, se detectó que la mayoría de los estudiantes no suelen reflexionar o cuestionar sus propias acciones más allá de lo indicado en las tareas, este dato es importante si se desea modificar las tareas con la intención de mejorar la experiencia de aprendizaje, particularmente en el caso de la propiedad de contracción.

Los resultados sugieren la posibilidad de enriquecer la comprensión de las propiedades abordadas en este trabajo si se promueve que los estudiantes analicen lo que permanece invariante cuando se transforman ciertas representaciones geométricas y algebraicas de un mismo objeto matemático, en este caso, la integral definida entendida como la medida de un acumulado. En particular, se concluye que el registro geométrico apoya la observación y el análisis de los elementos cambiantes en procesos de acumulación al proporcionar una conexión tangible para comprender cómo se comportan las funciones bajo operaciones geométricas y cómo estas modifican a la integral definida, y viceversa. Este tipo de comprensión precisa, entre otras cosas, poder establecer relaciones variacionales sin descuidar qué es lo que cambia y cómo cambia, como lo hicieron los participantes en este estudio, pero también, prestar atención a aquello que se mantiene invariante de lo que se desea cuantificar bajo ciertas condiciones o transformaciones.

Referencias

Aparicio, E., Cabañas, G., & Sosa, L. (2017). Reconceptualización de saberes y pensamiento didáctico en matemáticas. *Revista Ciencias Básicas CIIDET,* (9), 6–12. https://sites.google.com/site/eaecbpublicaciones/revista-09

Chappell, K., & Killpatrick, K. (2003). Effects of concept-based instruction on students' conceptual understanding and procedural knowledge of calculus. *PRIMUS, 13*(1), 17–37. https://doi.org/10.1080/10511970308984043

Contreras de la Fuente, Á., Ordóñez, L., & Wilhelmi, M. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la Universidad en la Enseñanza de la integral definida en el Bachillerato. Enseñanza de las Ciencias, 28(3), 367–384. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v28n3.63

Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25–41). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_2

Dubinsky, E. (2002). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–126). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 275–282). Springer.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103–131.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Eichler, A., & Erens, R. (2014). Teachers' beliefs towards teaching calculus. *ZDM, 46*(4), 647–659. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0606-y

Ely, R. (2021). Teaching calculus with infinitesimals and differentials. *ZDM, 53*(3), 591–604. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01194-2

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concept. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139–162. https://doi.org/10.1007/BF01273689

Grossman, P., & Thompson, C. (2008). Learning from curriculum materials: Scaffolds for new teachers? *Teaching and Teacher Education, 24*(8), 2014–2026. https://doi.org/10.1016/j.tate.2008.05.002

Jones, S. R. (2015). The prevalence of area-under-a-curve and anti-derivative conceptions over Riemann-sum based conceptions in students' explanations of definite integrals. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 46*(5), 721–736. https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.1001454

Jones, S.R. (2018). Prototype Images in Mathematics Education: The Case of The Graphical Representation of The Definite Integral. *Educational Studies in Mathematics, 97*(3), 215–234. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9794-z

Kieran, C., Doorman, M., & Ohtani, M. (2021). Frameworks and Principles for Task Design. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design in Mathematics Education: An ICMI study 22* (pp. 19–81). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_2

Mateus-Nieves, E., & Rojas, C. (2020). Mathematical generalization from the articulation of advanced mathematical thinking and knot theory. *Acta Scientiae, 22*(3), 65–81. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5667

Nilsen, H.K., & Knutsen, K.H. (2023). First-Year Engineering Students' Interpretations of Differentials and Definite Integrals. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 9*, 173–200. https://doi.org/10.1007/s40753-022-00208-6

Piaget, J. (2001). *Studies in reflecting abstraction*. Psychology Press. https://doi.org/10.4324/9781315800509

Salinas, P., & Cárdenas, M. (2009). *Métodos de investigación social.* Editorial Quipus CIESPAL

Tall, D., Gray, E., Bin Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M., & Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 1*(1), 81–104. https://doi.org/10.1080/14926150109556452

Walshaw, M. (2012). Teacher knowledge as fundamental to effective teaching practice. *Journal Mathematics Teacher Education, 15*(3), 181–185. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9217-0

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editor´s introduction: What is mathematical visualization? En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1–8). Mathematical Association of America.