Objetos mentales sobre números decimales: un estudio con alumnos de educación secundaria

Alejandro Esparza Godinez [1]
Carlos Valenzuela García [2]
Adrián Gómez Árciga [3]
Claudia Margarita Orozco Rodríguez [4]

Resumen

El estudio de los números decimales es fundamental en la educación básica, siendo un tema crucial para entender la matemática de ese nivel educativo y la de niveles más avanzados. Sin embargo, resultados de investigación también reconocen a los números decimales como una fuente de dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, por ello, es muy importante seguir indagando sobre esa problemática. En este capítulo se exponen los resultados de la construcción de la fase teórica de un Modelo Teórico Local sobre los números decimales, con énfasis en el componente de cognición. El objetivo es identificar los objetos mentales que un grupo de estudiantes de educación secundaria ha desarrollado sobre los números decimales, contrastándolos con lo ya documentado en la literatura. Entre los resultados, se han identificado ideas asociadas a dificultades para 1) comparar y ordenar números decimales, 2) para convertir números de su expresión decimal a su expresión fraccionaria, y viceversa, 3) perdura la confusión entre número y su notación decimal, 4) dificultades para operar con estos números, así como ideas erróneas sobre los resultados de las operaciones y sus procedimientos.

Palabras clave

Números decimales, Objetos mentales, Modelos Teóricos Locales, Educación secundaria.

---

[1] alejandro.esparza7678@alumnos.udg.mx
Universidad de Guadalajara, México
https://orcid.org/0009-0007-0153-0459

[2] carlos.valenzuela@academicos.udg.mx
Universidad de Guadalajara, México
https://orcid.org/0000-0002-0776-5757

[3] adrian.arciga@uabc.edu.mx
Universidad Autónoma de Baja California, México
https://orcid.org/0000-0002-4551-6372

[4] claudia.orozcor@academicos.udg.mx
Universidad de Guadalajara, México
https://orcid.org/0000-0002-7248-7810

Esparza Godinez, A., Valenzuela García, C., Gómez Árciga, A., & Orozco Rodríguez, C. M. (2024). Objetos mentales sobre números decimales: un estudio con alumnos de educación secundaria. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2024* (pp. 103–123). Editorial SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/02-05

Introducción

Diversas investigaciones reconocen que estudiar los números decimales es fundamental para el alumno de educación básica, debido a que son primordiales para su éxito académico (Astuti, 2014; Lortie-Forgues et al., 2015; Pramudiani et al., 2011). Los estudiantes se seguirán encontrando con los números decimales en su recorrido a través de la educación y los requerirán para sus cálculos; no únicamente en matemáticas, también en Biología, Física, Ingeniería, Economía, Psicología y Sociología, por mencionar algunas.

Por otra parte, en el área de las aplicaciones, el conocimiento de los números decimales aparecerá en una gran variedad de oficios, como la farmacéutica, herrería o carpintería. Más aún, los decimales forman parte de la vida diaria, se pueden encontrar en las recetas o en las mediciones. Además, una buena comprensión de los números decimales resulta importante para la interpretación de la información reportada en los medios de comunicación en forma de estadísticas o probabilidad, o para las finanzas personales en la adquisición de créditos hipotecarios o bancarios, que van más allá del conocimiento de los números naturales. Por otra parte, los números decimales son reconocidos en las investigaciones por su importancia, pero también por ser una fuente de dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Ávila & García, 2008; De Castro et al., 2014; Moreno et al., 2007; Tian & Siegler, 2018; Valencia & Ávila, 2015).

Son varios los problemas reportados en los estudiantes al trabajar con números decimales. Lortie-Forgues et al. (2015) identificaron siete dificultades, algunas inherentes de la aritmética de fracciones y decimales y otras dependientes de la cultura. Ciertas de estas dificultades son descritas con más detalle en trabajos como los de Tian y Siegler (2018), Valencia y Ávila (2015) y Ávila (2013), en ellos se explica la problemática del aprendizaje con los números decimales y se puntualiza en algunos aspectos que dificultan este aprendizaje, como:

1. Las dificultades para dotar de significado a los números decimales a partir de unidades de medición (km, m, cm, mm) que cambian para seguir utilizando números naturales.
2. Aquellas dificultades presentes en la comparación y el orden de los números decimales por considerar criterios o reglas que rigen a los números enteros.
3. Los inconvenientes relacionados a la propiedad de densidad, donde se percibe a los decimales como "falsos consecutivos".
4. Problemas que se manifiestan en el cálculo y el estudio de las operaciones con números decimales al verse reducidas solamente a los algoritmos.
5. La idea de que la multiplicación siempre "agranda" y la división siempre "achica".

En particular, la falsa idea de que la multiplicación siempre incrementa el valor y la división siempre lo disminuye es resaltada como síndrome MADA por Valencia y Ávila (2015); también fue descrito así por Alonzo y Reyes (2021) y por González-Forte et al. (2019).

Se observa que los problemas en la comprensión y la operación de los números decimales no es una problemática exclusiva de los estudiantes de educación básica, sino que estas dificultades persisten y continúan presentándose incluso en estudiantes de nivel superior, estudiantes de magisterio y posgrado (De Castro et al., 2014; Moreno et al., 2007).

A pesar de que muchos de estos problemas se presentan durante el aprendizaje de los estudiantes, las investigaciones mencionan que la forma de enseñanza de los números decimales y la perspectiva desde la que se abordan, también contribuyen a estos problemas. En ocasiones se asume que una explicación clara por parte del profesor es suficiente para que los estudiantes aprendan. Un ejemplo de esto es que los estudiantes pueden identificar con facilidad las columnas después del punto decimal y nombrarlas. No obstante, saber los nombres de las posiciones decimales, no indica que comprendan realmente el valor que representan, y esto repercute negativamente en el entendimiento del valor posicional de las cifras (Ávila & García, 2008).

Otro antecedente sobre la enseñanza y el aprendizaje de los números decimales es el trabajo realizado por Broitman et al. (2003), en el que se realiza una intervención educativa para abordar la aproximación a la propiedad de densidad de los números decimales en estudiantes del segundo ciclo de educación general básica. La propuesta que se diseñó permitió a los estudiantes pensar en subdivisiones cada vez más pequeñas de la unidad.

Por su parte, Vamvakoussi y Vosniadou (2010) también investigaron la propiedad de densidad de los racionales. Determinaron que muchos estudiantes tienen dificultades para comprender que existen infinitos decimales entre dos fracciones, revelando a su vez confusiones sobre la notación decimal de las fracciones y una tendencia a percibir a las fracciones como enteros en lugar de partes de un todo. En este estudio se señala que la enseñanza de los números racionales debe considerar que los intentos de los estudiantes para dar sentido a estos números: sus propiedades, notación y operaciones, están fuertemente influenciados por su conocimiento previo sobre los números naturales (p. 205).

Debido a las implicaciones que tiene el uso de los números decimales, tanto en el ámbito académico como fuera de este, es importante ampliar la investigación relacionada con este concepto, debido a que los problemas persisten con niños y adultos, a pesar de la prolongada instrucción y a los esfuerzos dedicados para mejorar su enseñanza (Lortie-Forgues et al., 2015).

Por lo anterior, los resultados que aquí se reportan forman parte de una investigación más amplia en la que se construye un Modelo Teórico Local (MTL), de acuerdo con Filloy et al. (1999), sobre los números decimales y su enseñanza. En este capítulo, se presentan los resultados de la fase teórica del MTL, centrándose especialmente en el componente de cognición del MTL. El objetivo es identificar los objetos mentales (en el sentido de Freudenthal, 1983) que un grupo de estudiantes de educación secundaria ha desarrollado sobre los números decimales, contrastándolos con lo documentado en la literatura. Esto permitirá responder a la pregunta de investigación ¿cuáles objetos mentales sobre los números decimales han construido estudiantes de educación secundaria?

Los Modelos Teóricos Locales como un marco teórico y metodológico

Para llevar a cabo esta investigación se usa el marco teórico y metodológico, desarrollado para el estudio experimental de la didáctica de las matemáticas, denominado Modelos Teóricos Locales, propuestos por Filloy et al. (1999). Se eligió el desarrollo de un MTL porque permite al investigador centrar el estudio de un objeto matemático desde sujetos específicos y en situaciones específicas adecuadas a los de los fenómenos que son objeto de estudio (Puig & Fernández, 2002).

Un MTL ofrece a la investigación un aspecto teórico y otro metodológico. Así, la construcción de un MTL permite al investigador primeramente establecer la base teórica sobre la cual ha de basar su investigación, y en una segunda fase ofrece una metodología a desarrollar para la parte experimental.

Desde el aspecto teórico, como lo menciona Filloy et al. (1999), un objeto matemático se estudia a través de cuatro componentes o modelos que comúnmente se denominan como 1) el modelo de competencia formal, 2) el modelo de enseñanza, 3) el modelo de comunicación y 4) el modelo de cognición. Estos se interrelacionan para observar y explicar los fenómenos que se presentan en el estudio de un objeto matemático y su enseñanza, que para el caso de esta investigación son los números decimales. Los fenómenos observados permiten fundamentar hipótesis, las cuales se evalúan durante un proceso de experimentación posterior.

En la fase experimental se diseñan e implementan actividades o secuencias de enseñanza a fin de complementar y contrastar lo observado durante la fase teórica. La organización de ambas fases de un MTL se muestra en el esquema de la Figura 1.

Como ya se mencionó, en este capítulo se exponen los resultados de la fase teórica de un MTL para la enseñanza y aprendizaje de los números decimales, es decir, la construcción de los componentes del MTL. Se pone énfasis en la construcción del componente modelo de cognición para identificar los objetos mentales que un grupo de estudiantes de educación secundaria ha formado sobre los números decimales, y así, dar respuesta a la pregunta de investigación. Además, los resultados de esta fase teórica pueden ser una guía para la enseñanza de los números decimales.

Figura 1
Esquema de la investigación, basado en Filloy et al. (1999)

Modelo de competencia formal

Para construir el modelo de competencia formal, Filloy et al. (1999) mencionan la necesidad de tomar en cuenta los fenómenos que se organizan alrededor del objeto matemático a estudiar, visualizados por el observador desde un sistema matemático de signos más abstracto que el de aquellos que están siendo observados. Desde la interpretación de Valenzuela (2018), al tener el observador un sistema matemático de signos más abstracto, el modelo de competencia formal permite al investigador decodificar las situaciones que se presentarán durante la observación y la comunicación entre estudiantes y estudiantes e instructores.

Lo anterior se conecta con las ideas de Freudenthal (1983), quien define la fenomenología de un concepto matemático como la descripción de éste en relación con los fenómenos, tanto matemáticos como no matemáticos, de los que es un medio de organización. Además, indica qué fenómenos organiza y cómo actúa sobre ellos. Para qué fenómenos puede extenderse y con qué poder sobre estos fenómenos dota. Así, un análisis fenomenológico proporciona al instructor la posibilidad de decodificar las actuaciones de los estudiantes que son observados. En este sentido, para elaborar el modelo de competencia formal del MTL descrito en esta investigación se hace un tipo de análisis fenomenológico de las situaciones/fenómenos que involucran a los números decimales.

Primeramente, es necesario comenzar por describir el objeto matemático del que trata esta investigación: los números decimales o simplemente decimales. Estos números van más allá de los números con punto decimal, son más que una forma de notación. Piénsese primero en los números racionales ($\mathbb{Q}$), de los que se sabe que son un subconjunto del conjunto real ($\mathbb{R}$), es decir, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Los números racionales se pueden definir como el conjunto ($\mathbb{Q}$) de todos los números que pueden expresarse como el cociente de dos números enteros:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

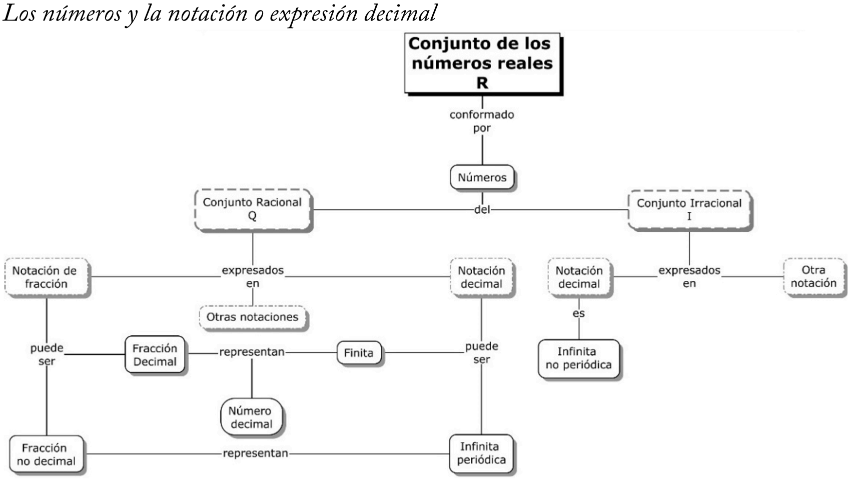
Ahora, para definir a los números decimales se recurre a lo presentado por Ávila y García (2008); "los números decimales son aquellos que pueden representarse en forma de fracción decimal" (p. 27), a esto es necesario agregar que las fracciones decimales son aquellas que pueden expresarse con un numerador entero y un denominador que es una potencia de diez, esto es:

$$D = \left\{ \frac{a}{10^n} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$$

Los números decimales, por lo tanto, son un subconjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$), puede decirse que todos los números decimales son números racionales, es decir, pueden expresarse en forma de fracción, pero no todas las fracciones son decimales. Por ello, es necesario hacer una distinción entre la expresión o notación decimal de un número y un número decimal. La notación decimal con punto históricamente surgió como una forma de simplificar los cálculos con números reales (Ávila & García, 2008), pero no todos los números reales a pesar de que puedan expresarse con esta notación son números decimales. La distinción que acaba de hacerse entre los números y la notación decimal de un número real se explica en la Figura 2.

Figura 2

Los números y la notación o expresión decimal



La relación que tienen los números decimales con los números racionales hace necesario que los alumnos enfrenten situaciones o fenómenos en los que deban representar a un número decimal, ya sea como fracción decimal o en notación decimal. Asimismo, siguiendo las ideas de Freudenthal (1983), los estudiantes deben experimentar procesos que les permita pasar a los números de una notación a otra, ya sea en un contexto meramente numérico, por ejemplo, para ubicarlos en la recta numérica o usarlos en contextos variados, como en problemas de finanzas, conversión de unidades, problemas de medición, relaciones de proporcionalidad, dimensiones de figuras geométricas, problemas de escala y otros.

Modelos de enseñanza y de comunicación

Con el modelo de enseñanza del MTL se pretende explicar cómo y qué se enseña sobre el objeto matemático en juego, en este caso los números decimales, por lo que es necesario revisar el modelo educativo que se sigue para comunicar ese concepto a los estudiantes que están siendo observados (Filloy et al., 1999). Así, para la elaboración del modelo de enseñanza de la presente investigación se hace una revisión del contenido propuesto para primero y segundo año de secundaria, tanto en los planes y programas de estudio, como en los libros de texto propuestos por la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (CONALITEG).

En los planes y programas propuestos por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017), los Aprendizajes Clave para la Educación Integral proponen el estudio de los números decimales tanto en primero como en segundo grado de secundaria. En ambos grados los aprendizajes esperados que involucran a estos números se encuentran en el eje Número, Álgebra y Variación (SEP, 2017, pp. 178-179), y corresponde a lo siguiente:

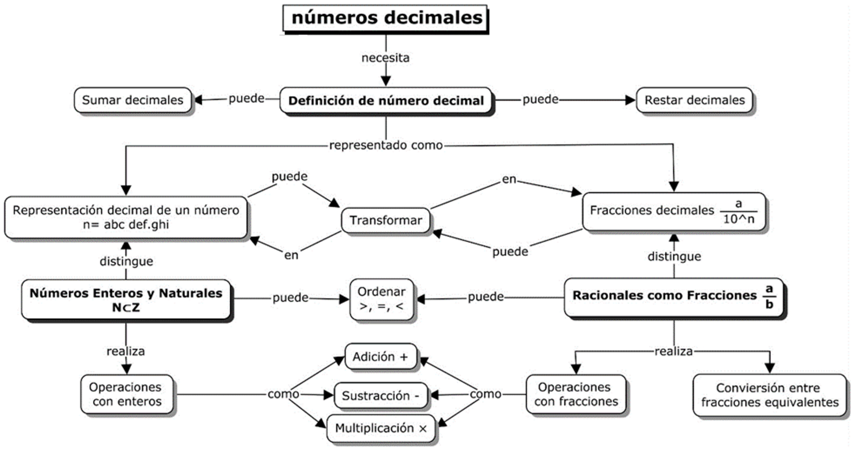
- Primer grado
    - Convierte fracciones decimales a notación decimal y viceversa. Aproxima algunas fracciones no decimales usando la notación decimal. Ordena fracciones y números decimales.
    - Resuelve problemas de suma y resta con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
    - Resuelve problemas de multiplicación con fracciones y decimales y de división con decimales.
- Segundo grado
    - Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.
    - Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

De manera general, en los libros de texto revisados, por ejemplo, el de Editorial Pearson (Mancera & Basurto, 2019) y Ediciones Castillo (Alberro,

2016) se proponen actividades que promueven el uso de algoritmos para pasar de notación decimal a fracción decimal y viceversa, otras actividades para realizar operaciones con números en distintas notaciones. Además, se plantean problemas en diversos contextos y se formulan algunas preguntas para que los estudiantes elaboren sus propios modelos y símbolos. Asimismo, un modelo que se emplea para la enseñanza de estos números en los libros de texto es la recta numérica. A manera de síntesis, en la Figura 3 se encuentra un esquema que relaciona los contenidos que se proponen en el modelo educativo para los dos primeros años de educación secundaria.

Figura 3

Contenido sobre los números decimales que se propone en el modelo educativo



En cuanto al modelo de comunicación, se establece que, a través de los libros de texto es como se comunican ideas o información que busca constituir objetos mentales en los estudiantes. En los propios libros de texto se promueve el trabajo colaborativo entre estudiantes y entre estudiantes y profesor para comunicar ideas. Eso además de la propia interacción que propicia el profesor en el aula. Para la construcción de ese componente se busca explicar cómo se establece esa comunicación. Sin embargo, por el carácter de este trabajo, el énfasis está en el componente modelo de cognición del MTL, mismo que se expone a continuación.

Modelos de cognición

Con el modelo de cognición se busca entender y explicar los procesos cognitivos de los estudiantes sobre un determinado objeto matemático, para ello se debe asumir alguna perspectiva teórica o teoría (Filloy et al., 1999). Así, la elaboración del modelo de cognición para esta investigación se hace a través de las ideas desarrolladas por Freudenthal (1983), en las que explica la diferencia entre los objetos mentales de un individuo y los conceptos matemáticos.

Para Freudenthal los objetos mentales preceden a los conceptos u objetos matemáticos, y pueden ser interpretados de manera similar a como lo hizo Valenzuela (2018) y Valenzuela et al. (2019), como un conjunto de ideas que los estudiantes elaboran sobre el objeto matemático y la relación que guarda ese objeto con los fenómenos que organiza. Así, puede distinguirse a los conceptos de los objetos mentales. Los conceptos provienen de un consenso de expertos en la materia de la que forma parte el concepto, mientras que los objetos mentales son lo que cada individuo entiende de ese concepto. La constitución de objetos mentales puede ser muy profunda incluso si no está seguida de la obtención de conceptos, y mientras más experiencias tenga un individuo con los diversos fenómenos asociados al concepto, mejores objetos mentales pueden construir.

Además de los elementos teóricos descritos, que permiten explicar los procesos cognitivos de los estudiantes a través de la constitución de objetos mentales, para la elaboración del modelo de cognición de este MTL, se juzga importante tomar en cuenta algunos de los problemas cognitivos comunes reportados en la literatura, de manera que ofrezcan una visión más completa de la forma en la que los estudiantes comprenden el objeto matemático en estudio. Fueron expuestas algunas problemáticas en la literatura (Ávila, 2008; Lortie-Forgues et al., 2015; Tian & Siegler, 2018; Valencia & Ávila, 2015), y para el propósito de este documento, entre las dificultades a considerar se hace la clasificación de las siguientes:

- **Confusión entre número y su notación**: Confundir el número con su notación o formas de escribirlo. En el caso específico de los números decimales se trata de considerar que son decimales todos aquellos números con punto, pasando por alto su naturaleza racional y centrándose en su representación. Un ejemplo es considerar las representaciones decimales de fracciones no decimales como números decimales, como puede ser $\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$.
- **Magnitud (comparación y orden)**: Se refieren a las dificultades para comparar y ordenar números decimales, resultado de considerarlos números naturales separados por un punto, centrándose en comparar la parte decimal como si fuesen naturales. Un ejemplo es pensar que $1.15 > 1.2$ porque $15 > 2$.
- **Aritmética (efecto de las operaciones)**: Aquí se reportan dificultades para sumar y restar decimales por emplear una perspectiva y reglas de los números naturales para operarlos, resultado de alinear las cifras con respecto al punto decimal. Del mismo modo se integran aquí las dificultades para comprender los efectos de la multiplicación y división con números decimales que dan lugar al síndrome MADA.

- **Densidad**: Al no reconocer la naturaleza racional de los decimales no se considera que entre cualquier par de números decimales es posible encontrar otro número decimal, percibiendo a los naturales como falsos consecutivos. Por ejemplo, al considerar que 2.9 precede a 2.10.
- **Conversión**: En esta categoría se encuentran las dificultades para convertir números de su expresión decimal a su expresión fraccionaria y viceversa.

Una vez reconocidos y considerados aquellos problemas previamente reportados, como medio para complementar el modelo de cognición de este MTL se consideró necesario identificar los objetos mentales que poseen estudiantes de educación secundaria, de manera que se pueda reconocer la presencia de las dificultades descritas en la literatura o dar cuenta de otras. En otras palabras, es importante integrar el estado de los objetos mentales de los estudiantes al componente de cognición, para que los instrumentos y materiales que se elaboren para la fase experimental del MTL atiendan en mayor medida a las necesidades de los estudiantes.

Para lograr lo anterior se elaboró un instrumento de exploración, basado en otros estudios, que fue aplicado a un grupo de 42 estudiantes de segundo año de secundaria. En adelante, se presentan tanto el diseño del instrumento como los resultados de su implementación.

Identificación de objetos mentales de los estudiantes

La identificación de los objetos mentales de los estudiantes comenzó con el diseño de una prueba que sirve como instrumento de exploración y para la recopilación de datos. Por ello, antes de exponer los resultados, se muestra a continuación el diseño de la prueba.

Diseño y aplicación de la prueba

La prueba está constituida por seis actividades, cada una diseñada para identificar objetos mentales específicos sobre los números decimales, que se detallan a continuación. La prueba se diseñó para ser resuelta de forma individual y a lápiz y papel en un tiempo límite de 45 minutos. En la descripción de las actividades sólo se presentan los propósitos de cada una, pero en las imágenes de la exposición de resultados, podrá observarse cómo fueron presentadas las actividades en la prueba que respondieron los 42 alumnos de segundo año de secundaria.

Actividad 1: Clasificación de los números

Esta actividad tiene como propósito identificar si el estudiante es capaz de clasificar un número en el conjunto al que pertenece, distinguiendo entre el conjunto de los números enteros (llamados así porque en este nivel los alumnos no distinguen entre naturales y enteros), los números racionales (llamados números fraccionarios por el nivel en el que se está trabajando), y el conjunto de los números decimales. Con esta actividad se determina si los objetos mentales que los estudiantes han construido les permite reconocer la diferencia entre un número y su notación, así como características que definen a los números en un determinado conjunto numérico.

La actividad es una adaptación de la tarea presentada por Moreno et al. (2007), la cual fue aplicada con estudiantes de licenciatura y graduados con la intención de "recoger información acerca del objeto número decimal y analizar el tipo de relaciones que los alumnos establecen entre el número decimal y los otros conjuntos numéricos" (p. 254).

Para el caso de este estudio, la actividad consiste en observar un número en la primera columna de una tabla, y marcar a qué conjunto o conjuntos pertenece. Se eligieron distintos números para clasificar, y su presencia tiene un propósito específico.

El número 2 está presentado en una notación muy común al estudiante, está representado como número natural, por ello a pesar de ser racional y decimal, si la distinción entre el número y su notación no se ha estudiado o aprendido, se prevé que el estudiante solamente marque la casilla que lo identifica como número entero. Se eligió también, representar a un número equivalente a 2, escrito en fracción, en este caso $\frac{6}{3}$, esto con la finalidad de observar si los alumnos reconocen que estos números son equivalentes y por tanto pertenecen tanto a los racionales como a los enteros, además de pertenecer al conjunto de los decimales.

De manera similar se colocaron las fracciones $\frac{1}{6}$ y $\frac{2}{3}$ con sus respectivos equivalentes $0.1\overline{6}$ y $0.\overline{6}$ para representar una fracción no decimal tanto en forma de fracción como en notación decimal. También se agregó el 3.00 con la intención de identificar la relación que pudieran establecer los estudiantes entre el número y su representación. Si bien 3.00 es un número decimal, también es entero y además puede escribirse como fracción, lo que lo hace racional. Otros números elegidos con ese propósito son las fracciones restantes, $\frac{8}{2}$ y $\frac{1}{5}$. En este caso, $\frac{8}{2}$ es una representación del entero 4 y, a su vez, $\frac{1}{5}$ es la representación del número decimal 0.2. Los números restantes, 1.4, 1.22 y 0.4, son todos números decimales presentados en notación decimal, aunque pueden ser representados también como fracciones decimales.

Actividad 2: La recta numérica

El propósito de esta actividad es identificar los objetos mentales que el estudiante ha construido en relación con la equivalencia, el orden y la magnitud de los números, mostrando si es capaz de ordenarlos en una recta numérica en la que se coloca el 0 y la unidad de referencia, 1.

Los números elegidos fueron los presentados en la actividad 1 de esta prueba, con el fin de identificar si reconocen la equivalencia entre los números, así como si son capaces de ordenar números que están expresados en distintas notaciones, e identificar si requieren transformar los números a otras notaciones para establecer el orden o poder ubicarlos en la recta numérica.

Actividad 3: Propiedad de densidad

La actividad 3 tiene como propósito identificar los objetos mentales que los estudiantes han construido en torno a la propiedad de densidad de los números decimales. En la actividad se les propone anotar tres números que se encuentren entre 5.1 y 5.4, nótese que se puede pensar que uno de ellos es 5.2 y otro 5.3. Completar la tarea con éxito supone que los alumnos han desarrollado la idea de que los decimales no cuentan con un antecesor y un sucesor, ubicando decimales entre otros decimales como lo describió Ávila (2008). Aunque, los estudios reportados (Ávila, 2008; Tian & Siegler, 2018) dan cuenta de la dificultad de los estudiantes para reconocer esta propiedad de densidad de los decimales.

Actividad 4 y actividad 5

En estas actividades se tiene como propósito identificar los objetos mentales que los estudiantes han construido con respecto a la conversión de números representados en su forma decimal a fracciones y viceversa.

En la actividad 4 los estudiantes deben convertir los números representados como decimales a alguna de sus representaciones fraccionarias. Los números propuestos son 1.4, $0.\overline{3}$, 5.0 y 0.07. Nótese que 1.4 estuvo presente en la tabla de la actividad 1, su presencia en esta actividad puede sugerir al estudiante que 1.4 puede representarse como fracción además de como decimal. De manera similar, $0.\overline{3}$ y 5.0 pueden sugerir al estudiante que un decimal periódico o un entero pueden escribirse como fracción, respectivamente. Por su parte, 0.07 permitirá observar el tratamiento que le dan los estudiantes a la conversión de decimales que no son tan reconocidos como fracciones y que tienen más de una cifra decimal.

En la actividad 5 los estudiantes deben convertir las fracciones que se les presentan a expresiones decimales. Las fracciones propuestas son $\frac{1}{3}, \frac{16}{4}, \frac{7}{5}$ y $\frac{6}{100}$. El número $\frac{1}{3}$ es racional, pero no es una fracción decimal, y su notación decimal periódica es $0.\overline{3}$. Este número se presentó en la actividad 4, y su presencia en esta actividad busca identificar si existe alguna discrepancia entre la conversión de decimal a fracción y de fracción a decimal.

Una representación fraccionaria del número 4 es $\frac{16}{4}$, su presencia puede sugerir al estudiante que las fracciones pueden representar números enteros, y permitirá observar si los estudiantes los reconocen como tal. $\frac{7}{5}$ es una representación del número que en formato decimal se puede escribir como 1.4, nótese que este número también aparece en la actividad 4. Por último,

$\frac{6}{100}$ es una fracción que se asemeja a la fracción que podría representar al decimal 0.07 que apareció en la actividad anterior, su presencia permite identificar si se presentan dificultades en la conversión y si esta se da en específico en alguno de los sentidos.

Actividad 6: Laberinto de los decimales

Esta actividad tiene como propósito identificar los objetos mentales que los estudiantes han construido en relación con la aritmética de los números decimales. Esta actividad, adaptada de la presentada por Valencia y Ávila (2015), permite identificar el sentido que los estudiantes le dan al efecto de las operaciones con números decimales, lo cual podría estar asociado al síndrome MADA.

Resultados de la exploración

Para identificar los objetos mentales sobre los números decimales que han construido los estudiantes, primeramente, se hizo un análisis general del éxito obtenido en las actividades que se propusieron en la prueba, asociadas a distintas ideas sobre esos números. Para esto, se asignó un valor de un punto por actividad contestada correctamente y cero puntos por haber contestado incorrectamente o no haber contestado. La actividad 6 no tiene puntaje, puesto que no hay un "camino correcto".

Como se observa en la Tabla 1, los alumnos no muestran ideas que les permita distinguir los conjuntos numéricos, en particular parece que no reconocen que un número puede pertenecer a más de un conjunto. Es necesario seguir desarrollando la idea de que un número puede expresarse en diferentes formas, así como explicar cómo puede pasarse de una forma a otra. Los objetos mentales de los estudiantes también están limitados en cuanto a sus ideas desarrolladas para ubicar números en la recta numérica. El mayor éxito obtenido por los estudiantes se tuvo en la actividad 3, en la cual se evaluó la idea que los estudiantes han construido en torno a la propiedad de densidad de los números decimales. El mayor puntaje obtenido por un solo estudiante en la prueba fue de 3 puntos.

Tabla 1

Resultados generales de éxito en la prueba

Actividades	Frecuencia
1. Clasificación de los números	0/42
2. Ubicación en la recta numérica	4/42
3. Propiedad de densidad	18/42
4. Conversión de decimales a fracciones	2/42
5. Conversión de fracciones a decimales	9/42
Total	33/210

Para conocer con mayor detalle las ideas de los estudiantes y así caracterizar sus objetos mentales, a continuación, se presenta un análisis por cada actividad.

Actividad 1: Clasificación de los números

En esta actividad se observaron respuestas similares y frecuentes por parte de los estudiantes. De entre todos los estudiantes que resolvieron la prueba de diagnóstico, ninguno marcó más de una casilla por fila, a pesar de que en la instrucción fue: "marca con X a cuáles números pertenece cada uno de los números de la columna de la izquierda". Se interpreta que ninguno considera que un número pueda pertenecer a más de un conjunto a la vez. Ciertamente, nueve de ellos dudaron en la clasificación de algunos de los números, pero al final ninguno se decidió a marcar un número como perteneciente a más de un conjunto.

La Figura 4 muestra una de las respuestas típicas a esta actividad. En ellas es posible notar que los estudiantes no distinguen el número y su notación decimal, en su mayoría reconocen como decimal a cualquier número expresado con punto y solamente a aquellos escritos en ese formato. El caso de 3.00 es una excepción, puesto que veinte de los estudiantes lo reconocieron como número entero a pesar de tener punto. Esto indica que para clasificar a un número como decimal, este debe tener cifras distintas de cero después del punto.

Figura 4

Respuesta de un estudiante a la actividad 1

Número	Número Entero	Número Fraccionario	Número Decimal
2	X		
$\frac{1}{5}$		X	
1.4			X
3.00			X
$\frac{1}{6}$		X	
1.22			X
$\frac{8}{2}$		X	
$\frac{2}{3}$		X	
0.4			X
$0.1\overline{6}$			X
$\frac{6}{3}$		X	
$0.\overline{6}$			X

A pesar de que $\frac{6}{3} = 2$, los estudiantes clasifican a estos números en categorías distintas, $\frac{6}{3}$ como fracción y 2 como entero, si bien eso es cierto, las ideas de los alumnos en esta actividad no dejan ver si reconocen o no la equivalencia y por tanto la pertenencia a ambos conjuntos. Sin embargo, para ubicar a estos mismos números en la recta numérica (actividad 2), hay evidencia de que no reconocen su equivalencia. Ninguno de los números decimales expresados en notación decimal fue clasificado como fracción, mientras que las expresiones decimales periódicas fueron clasificadas como números decimales a pesar de representar a fracciones no decimales. En la mayor parte de las respuestas, los números fueron clasificados de acuerdo con la forma en que estaban expresados, por ello, es necesario profundizar para determinar si reconocen equivalencias entre números. Lo que es claro es que, persiste la idea de que un número decimal es un número con punto y con cifras distintas de cero después del punto.

Actividad 2: Ubicación en la recta numérica

En la segunda actividad los estudiantes ubicaron los números presentados en la actividad 1 en una recta numérica. Al respecto, se presentaron errores correspondientes al orden y la magnitud de los decimales. Una de las ideas de los estudiantes para ordenar números en su expresión decimal es comparar los números escritos antes del punto decimal y después del punto decimal, considerándolos enteros separados por puntos, como puede observarse en la Figura 5 al ubicar los números 1.4 y 1.22. También persiste la idea de ver a las fracciones como dos números separados, así, a las fracciones las ubican después del número entero que está en el numerador, pero antes de la fracción decimal equivalente al número entero que está en el denominador, tal como se observa la fracción $\frac{2}{3}$ en la Figura 5. Lo anterior corresponde a una mala extensión de las propiedades de los naturales para los decimales, natural *number bias*, como fue descrito por González-Forte et al. (2019), Tian y Seigler (2018) y Lortie-Forges et al. (2015).

Otra idea que está relacionada con ver a la fracción como dos números, y asociada a la conversión de las fracciones en expresiones decimales, es aquella en la que interpretan al numerador como la parte entera y al denominador como la parte decimal de un número, por ejemplo, ubicando a $\frac{2}{3}$ en la posición que ocuparía 2.3. En las actividades 4 y 5 hay más evidencia sobre esta idea.

Figura 5

Respuesta de un estudiante a la actividad 2

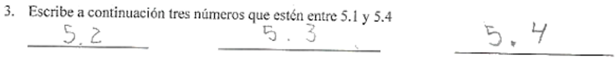
Por último, puede observarse en la Figura 5 que no hay una representación de la fracción $\frac{6}{3}$ en la recta numérica, esto contribuye al resultado de que los alumnos no reconocen la equivalencia entre números, en este caso el 2 y $\frac{6}{3}$. Incluso, siguiendo la idea de este alumno, esta fracción estaría después del 6, pero por el espacio, quizá ya no continuó iterando hasta ese valor.

Actividad 3: Propiedad de densidad

La actividad 3 fue la mejor contestada por los estudiantes con 18 respuestas correctas, no obstante, más de la mitad de ellos no logró contestar correctamente. Entre los que contestaron de manera equivocada, la mayoría identificó a 5.2 y 5.3 como números entre 5.1 y 5.4, pero no encontraron otro número que pudiera estar entre ellos, por eso utilizaron alguno de los límites, ya sea 5.1 o 5.4. La Figura 6 muestra una respuesta típica a esta actividad.

Figura 6

Respuesta de un estudiante a la actividad 3



Actividades 4 y 5: Conversión de decimales a fracciones y de fracciones a decimales

Las ideas que han desarrollado los estudiantes visibilizan dificultades en la conversión de números fraccionarios a su expresión decimal y viceversa. Para pasar números de sus expresiones decimales a fracciones, 22 de los estudiantes colocaron la parte entera de la expresión decimal como numerador y la parte decimal como denominador (ver Figura 7). 18 de ellos aplicaron el mismo criterio para pasar de números fraccionarios a expresión decimal (ver Figura 8). De manera similar a como algunos de ellos habían intentado ubicar números en la recta numérica (Actividad 2).

Figura 7

Respuesta con interpretación del punto decimal como línea fraccionaria en actividad 4

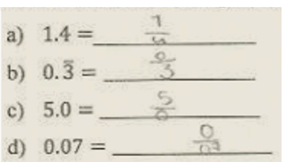
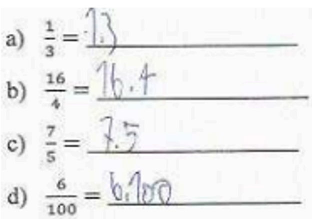


Figura 8

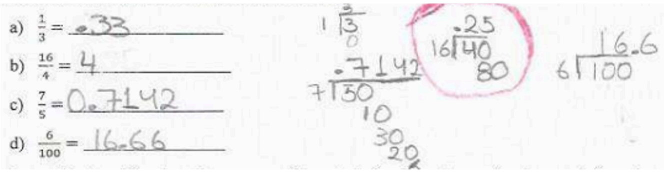
Interpretación de la línea fraccionaria como punto decimal en actividad 5



Dos estudiantes reconocieron que para hacer la conversión de expresiones fraccionarias a decimales debían hacer la división de los números de la fracción (cociente), sin embargo, en lugar de dividir el numerador entre el denominador lo hicieron dividiendo el denominador entre el numerador. Esto puede apreciarse en la Figura 9. Este error podría asociarse a una cuestión de lenguaje y escritura, la forma en que se escribe es de izquierda a derecha. Dado que debe hacerse "16 entre 4", al escribir de izquierda a derecha se comienza colocando el 16, después se dibuja la galera y finalmente se coloca el 4 equivocadamente dentro de la galera. Cabe señalar que, a pesar de que las divisiones las hizo siguiendo el mismo criterio para las fracciones de todos los incisos, el alumno identificó $\frac{16}{4}$ como equivalente a 4, por ello encierra con rojo la división que hizo para $\frac{16}{4}$, indicando que eso es un error que no quiere que se considere en sus procedimientos.

Figura 9

Ejemplo de división invertida y omisión de periodicidad en actividad 5



En esta actividad, también fue posible identificar que algunos estudiantes no reconocen la notación de periodicidad con el periodo con vinculum en la expresión decimal, por lo que escribieron $0.\overline{3} = \frac{33}{100}$ o $\frac{1}{3} = 0.33$, tal como se observa en el inciso a de la Figura 9.

Actividad 6: Laberinto de los decimales

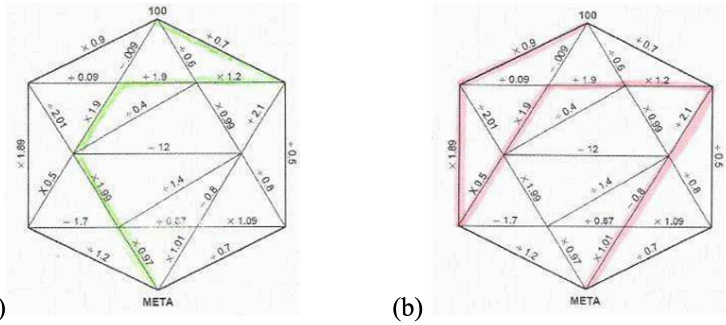
En la última actividad de la prueba, que consistió en trazar el camino que consideran que les haría ganar más puntos en el Laberinto de los decimales (Valencia & Ávila, 2015) se pudieron identificar algunos comportamientos peculiares.

De manera similar a como fue reportado por Valencia y Ávila (2015), los estudiantes tienden a dos estrategias: 1) Recorrer la mayor cantidad de sumas y multiplicaciones posibles. Por ejemplo, en la Figura 10 (a) se observa que el estudiante elige un camino compuesto sólo por sumas y multiplicaciones. 2) Evitar siempre que sea posible las divisiones y las restas, en caso de verse forzado a elegir, seleccionan las restas por sobre las divisiones. Por ejemplo, en la Figura 10 (b) se observa cómo, en su penúltimo segmento antes de llegar a la meta, el estudiante elige la menor de las restas en lugar de cualquiera de las divisiones.

Estos resultados visibilizan que los alumnos evitan las divisiones, quizá tengan la idea antes reportada, esto es, al dividir dos números, el cociente será menor que el dividendo; mientras que procuran realizar la mayor cantidad de multiplicaciones posibles porque el producto será siempre mayor que cualquiera de los factores. Estas estrategias revelan la existencia de objetos mentales erróneos respecto a la multiplicación con números decimales, y confirman la presencia del síndrome MADA (Valencia & Ávila, 2015).

Figura 10

Ejemplos de dos estrategias seguidas por los estudiantes en la actividad 6



(a) (b)

Conclusiones

Para dar respuesta a la pregunta de investigación, a manera de síntesis, en la Tabla 2 se describen las ideas asociadas a los objetos mentales que han desarrollado los alumnos de segundo grado de secundaria sobre los números decimales, así como la frecuencia con la que aparecen esas ideas.

A partir de los resultados de la exploración, que permiten complementar el modelo de cognición del MTL que en esta investigación se construye, puede concluirse que los estudiantes deben mejorar sus objetos mentales sobre los números decimales, ya que sus ideas distan de los conceptos previstos en el modelo de competencia formal y en el modelo de enseñanza del MTL considerado para este nivel educativo. Se observa la presencia de ideas que han sido reportadas como errores y dificultades en otras investigaciones, y algunas otras más, como la división invertida para pasar de un número fraccionario a su notación decimal.

El estudio exploratorio sobre los objetos mentales de los estudiantes reveló la posible existencia de una confusión entre el número y su representación. Los estudiantes no dejaron evidencia sobre el reconocimiento de que un número pueda pertenecer a más de un conjunto, sino que aparece la idea de que cada número pertenece al conjunto que coincide con su representación.

Se identificaron ideas erróneas para la ubicación de los números en una recta numérica, como comparar las cifras decimales de dos números como enteros, o al ubicar fracciones, colocarlas después del número entero del numerador. También, fue posible detectar que los estudiantes siguen procesos incorrectos para la conversión entre fracciones y decimales, como interpretar a la línea fraccionaria como punto decimal al convertir fracciones en decimales, y viceversa. Aquí se incluye la idea de dividir el denominador entre el numerador para convertir fracciones a decimales.

Tabla 2

Ideas que definen los objetos mentales de estudiantes de segundo grado de secundaria

Ideas	Descripción	Frecuencia
Actividad 1: Reconoce la diferencia entre un número y su notación		0/42
Conjuntos disjuntos	Los números sólo pueden clasificarse como Enteros, Fraccionarios o Decimales.	42/42
Decimales son números con punto	Los números decimales son todos los números que se encuentran escritos en notación decimal con punto	42/42
Actividad 2: Establece el orden y la magnitud de los números a partir de su ubicación en la recta numérica		4/42
Interpreta a la línea fraccionaria como punto decimal	Ubica fracciones en la recta numérica considerando que el numerador expresa la parte entera y el denominador expresa la parte decimal de un número	15/42
Enteros separados por punto	Ordena números decimales expresados en formato decimal con punto, considerando que estos son números enteros separados por el punto decimal.	13/42
Actividad 3: Reconoce la propiedad de densidad de los números decimales		18/42
Falsos consecutivos	Los números decimales son percibidos como falsos consecutivos que no tienen otros números entre ellos.	13/42
Actividad 4: Convierte de números en formato decimal a formato fraccionario		2/42
Interpreta al punto decimal como línea fraccionaria	Convierte expresiones decimales en fracciones escribiendo la parte entera como numerador y la parte decimal como denominador	22/42
No identifica periodicidad	No identifica la notación de periodicidad y hace aproximaciones	9/42
Actividad 5: Convierte de números en formato fraccionario a formato decimal		9/42
Interpreta a la línea fraccionaria como punto decimal	Convierte fracciones en expresiones decimales reescribiendo el numerador antes del punto y el denominador después del punto decimal	18/42
No expresa periodicidad	No expresa la periodicidad de un número con infinitos decimales periódicos, trunca y deja aproximaciones	18/42
Hace división invertida	Convierte fracciones en expresiones decimales dividiendo el denominador entre el numerador	2/42
Actividad 6: Objetos mentales que los estudiantes han construido en relación con la aritmética de los números decimales.		-
Síndrome MADA	Considera que en la multiplicación el producto siempre es mayor que cualquiera de los factores y, por el contrario, en la división el cociente siempre es menor que el dividendo. Selecciona rutas que no tienen divisiones ni restas o las esquiva en la medida de lo posible. También procura seleccionar la mayor cantidad de multiplicaciones posibles.	-

Adicionalmente, se constata la presencia del síndrome MADA, ya que los estudiantes atribuyen propiedades de las operaciones con números enteros a las operaciones con decimales. En la actividad 6 -el laberinto de los decimales- muestran recorridos que buscan utilizar en mayor medida sumas y multiplicaciones, puesto que los estudiantes asocian a estas operaciones con incrementos, mientras que evitan las restas y las divisiones ya que las asocian con decrementos.

Agradecimientos

Se agradece a la Escuela Secundaria Técnica 100 de Zapotlán el Grande, Jalisco, por su apertura y facilidades para la implementación de los instrumentos.

Referencias

Alberro, A. (2016). *Travesías: Matemáticas 2*. Ediciones Castillo.

Alonzo, C., & Reyes, A. (2021). La multiplicación con números decimales: el diseño de una situación didáctica en el escenario de la ingeniería didáctica. En Consejo Mexicano de Investigación Educativa (Ed.), XVI *Congreso Nacional de Investigación Educativa.* COMIE.

Astuti, P. (2014). Learning one-digit decimal numbers by measurement and game predicting length. *Journal on Mathematics Education, 5*(1), 35–46.

Ávila, A. (2008). Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber cuasi invisible. *Educación Matemática, 20*(2), 5–33.

Ávila, A. (2013). Conocimientos en construcción sobre los números decimales: los resultados de un acercamiento conceptual. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 18*, 29–59.

Ávila, A., & García, S. (2008). *Los decimales: más que una escritura* (1ª. ed.). Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Broitman, C. I. (2003). La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime, 6*(1), 5–26.

De Castro, C., Castro, E., & Segovia, I. (2014). Estimación en cálculo multiplicativo con números decimales. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(2), 171–190. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1018

Filloy, E., Rojano, T., Puig, L., & Rubio, G. (1999). *Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47235-X

González-Forte, J., Fernández, C., & Llinares, S. (2019). El fenómeno natural number bias: un estudio sobre los razonamientos de los estudiantes en la multiplicación de números racionales. *Quadrante, 28*, 32–50.

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review, 38,* 201–221. https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008

Mancera, E., & Basulto, E. (2019). *Interacciones. Matemáticas 2* (1ª. ed.). Pearson Educación de México.

Moreno, M., Hernández, V., & Socas, M. (2007). Dificultades y errores sobre números decimales de alumnos con una buena formación en Matemáticas. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 8*, 251–272.

Pramudiani, P., Hartono, Y., & van Amerom, B. (2011). A Concrete Situation for Learning Decimals. I*ndonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education, 2*(2), 215–230. http://dx.doi.org/10.22342/jme.2.2.750.215-230

Puig, L., & Fernández, A. (2002). Una actividad matemática organizada en el marco de los modelos teóricos locales: razón y proporción en la escuela primaria. En J. Murillo, P. M. Arnal, R. Escolano, J. M. Gairín, & L. Blanco, (Eds.), *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (pp. 29–46). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2017). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Matemáticas. Educación Secundaria.* SEP.

Tian, J., & Siegler, R. (2018). Which Type of Rational Numbers Should Students Learn First? *Educational Psychology Review, 30*(2), 351–372. https://doi.org/10.1007/s10648-017-9417-3

Valencia, E., & Ávila, A. (2015). Ideas previas sobre la multiplicación y división con decimales: su evolución a partir de una experiencia con el Laberinto de decimales. *Educación Matemática, 27*(3), 81–110.

Valenzuela, C. (2018). *Modelo de enseñanza para fracciones basado en la recta numérica y el uso de applets: Estudio en comunidades marginadas.* [Tesis doctoral, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional]

Valenzuela, C., Garcia, M., & Nájera, A. (2019). Diseño de actividades para iniciar el estudio de las fracciones en educación primaria. En L. Hernández, H. Borja, J. Slisko, & J. Juárez (Eds.), *Aportes a la educación matemática basados en la investigación* (pp. 162–184). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction, 28*(2), 181–209.