El problema del árbol quebrado: la relación entre los dibujos generados por los estudiantes y sus respuestas

Martha Patricia Velasco Romero [1]
Josip Slisko Ignjatov [2]

Resumen

En las matemáticas hay problemas que continúan vigentes hasta nuestros días, tal es el caso del problema del bambú, el cual fue tomado para el presente estudio usando una variante cuyo actor principal es ahora un árbol quebrado. Las representaciones visuales como son los dibujos situacionales y matemáticos juegan un papel muy importante en la comprensión del problema, ya que para planear una solución es necesario integrar toda la información relevante en una estructura coherente que permita representar el problema de forma adecuada y completa. El objetivo de este estudio fue analizar la relación entre los dibujos y las respuestas que proporcionaron 54 estudiantes de bachillerato, quienes trabajaron de manera individual y grupal, con la sugerencia de que hicieran dibujos que consideraran necesarios. Después, se presentó la solución experta y una retroalimentación mediante una hoja reflexiva donde los estudiantes evaluaron sus experiencias de aprendizaje. En este estudio de corte cualitativo se reportan los dibujos más relevantes clasificados en: mixtos, situacionales y matemáticos. También se exponen y comentan los resultados obtenidos en la parte reflexiva. Finalmente, se encontró correspondencia significativa entre las respuestas correctas y los dibujos matemáticos y mixtos.

Palabras clave

Problema verbal, Dibujo situacional, Dibujo matemático, Solución experta

---

[1] martha.velasco@alumno.buap.mx
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México
https://orcid.org/0000-0003-0125-8823

[2] jslisko@fcfm.buap.mx
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México
https://orcid.org/0000-0002-5805-4808

Velasco Romero, M. P., & Slisko Ignjatov, J. (2024). El problema del árbol quebrado: la relación entre los dibujos generados por los estudiantes y sus respuestas. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2024* (pp. 125–147). Editorial SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/02-06

Introducción

Los problemas de matemáticas están en constante cambio, con diferentes formulaciones, distintos datos, e incluso en otras épocas de la humanidad. De la misma forma, a lo largo de nuestra historia, los acertijos y problemas de matemáticas han estado presentes con distintas contextualizaciones (Swetz, 2009) que trascienden incluso después de siglos. Tal es el caso de los problemas históricos, los cuales son un valioso recurso que pueden motivar al estudiante en el aula de matemáticas (Swetz, 2012).

El Jiuzhang es un libro sobre el arte matemático chino dividido en 9 capítulos, fue escrito entre los siglos II y I antes de nuestra era. En el capítulo 9 destacan 24 problemas los cuales usan el Teorema de Pitágoras. Existen dos problemas que resaltan: el del bambú roto y el de la caña en el estanque. Estos, se han encontrado con diferentes datos y peculiares versiones en distintas culturas a través de nuestra historia (Swetz, 2009). El problema del bambú roto (Figura 1) se describe a continuación:

Un brote de bambú de 10 metros de altura está roto cerca de la parte superior. La configuración del brote principal y su parte quebrada forma un triángulo. La parte superior toca el suelo a 3 metros del tallo. ¿Cuál es la longitud del tallo en pie? (Swetz, 2009, p. 78-79).

Figura 1

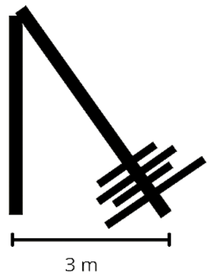
El problema del bambú, en el capítulo 9 del Jiuzhang

Nota. Figura retomada de Swetz (2012, p. 10)

Así mismo, en una pequeña incursión en los libros de matemáticas del tercer grado de educación secundaria del ciclo escolar 2022-2023, este problema se encuentra con dos formulaciones distintas. En la primera formulación (Figura 2), el problema menciona lo siguiente: "La compañía de electricidad se ha dado cuenta que, debido a la fuerza del viento en una tormenta, se han partido algunos postes de luz. Estos están rotos más o menos a la misma altura. Después de un estudio se ha decidido reforzar los otros postes a esta altura para que aguanten los vientos. Los postes miden 7 m de altura, y al romperse, la punta descansa a 3 metros de donde está clavado el poste" (Bosch y Meda, 2021).

Figura 2

El problema del poste de luz

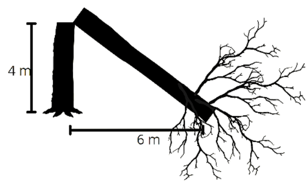


Nota. Figura retomada de Bosch y Meda (2021, p. 218)

En la segunda formulación (Figura 3), se menciona lo siguiente: “Un árbol se quebró a causa del viento. La punta del árbol cayó a 6 metros del pie de este. Se desea saber la altura total antes de quebrarse. Si se supone que entre el árbol y el suelo se forma un ángulo de 90°. Describa una estrategia para determinar la altura total del árbol antes de quebrarse”.

Figura 3

El problema del poste de luz



Nota. Figura retomada de Calderón (2021, p. 165)

En el presente trabajo se usó la segunda formulación del problema sin el dibujo. Además de ser un problema histórico, si se formula dentro del aula puede considerarse un problema verbal contextualizado, ya que, siguiendo a Verschaffel et al. (2000) un problema verbal es una situación problemática en la que se plantean una o más preguntas cuya respuesta se puede obtener mediante la aplicación de operaciones matemáticas a datos numéricos disponibles en el enunciado del problema. En este caso se usará el Teorema de Pitágoras y una suma.

Los problemas verbales por su complejidad se pueden clasificar en rutinarios, donde ya hay un patrón de solución u operaciones determinadas, y los problemas no rutinarios donde no hay un algoritmo o un conjunto de pasos preestablecidos para llegar a su solución, además requieren de un pensamiento creativo y de la aplicación de una estrategia heurística (Elia et al., 2009; Pantziara et al., 2009). Es importante recalcar que un resolutor exitoso involucra más actividades cognitivas con cantidad de información no trivial relacionada, ya que tiene distintas estrategias desarrolladas, además de un comportamiento autorregulado efectivo (Krawec, 2010; Lewis & Mayer, 1987).

Para resolver un problema en la educación matemática, Polya (1965) describe sus famosos cuatro pasos: entender el problema, diseñar un plan, llevar a cabo el plan y verificar la solución. Sin embargo, para llegar a la solución de un problema verbal se depende de dos fases principalmente, la comprensión del problema, donde se identifica y se representa correctamente las relaciones entre la información relevante del problema, y la solución del problema, en donde se determinan los cálculos necesarios para resolver el problema (Krawec, 2010; Lewis & Mayer, 1987). Se cree que una representación visual externa puede ayudar en la comprensión del problema, ya que la construcción mental pasa a ser representada por medio de un dibujo o un modelo matemático.

Para Polya (1965), los diagramas son representaciones visuales que presentan información distribuida en espacios. Por otra parte, De Bock et al. (1998), encontraron que los dibujos generados por los mismos estudiantes, los cuales eran completos y correctos, conducían a soluciones más precisas. Además, la representación visual debería aclarar la estructura del problema, ya que hace visibles las relaciones numéricas, lingüísticas y espaciales entre los elementos relevantes para la solución, lo que en consecuencia facilita la comprensión del problema y la identificación de los cálculos a realizar (Boonen et al., 2014; Krawec, 2010; 2014).

Hegarty y Kozhevnikov (1999) usaron en su estudio distintos problemas verbales, reportaron que las representaciones esquemáticas están correlacionadas con el éxito en la solución de un problema. Por otro lado, las representaciones pictóricas se relacionaron con respuestas erróneas, debido a los detalles superficiales que no representan las relaciones entre las variables del problema a pesar de ser una representación visual. Estas representaciones esquemáticas se acercan a la caracterización de dibujo matemático, mientras que las representaciones pictóricas se aproximan a un dibujo situacional.

Por otro lado, Rellensmann et al. (2017) mencionan que en el planteamiento de un problema verbal el resolutor se puede apoyar en un dibujo situacional, que se puede pulir hasta llegar a un dibujo matemático, mediante el cual es más claro el plan que se llevará a cabo para llegar a una respuesta correcta, así como los procesos matemáticos a seguir.

Por lo anterior, el objetivo general de esta investigación es contribuir a los estudios de problemas verbales que requieren de una representación visual para favorecer la comprensión del problema y la planeación matemática de su solución. Para ello, se plantearon los siguientes objetivos específicos:

- Analizar las respuestas de los estudiantes, mediante la clasificación de los dibujos generados tanto en la etapa individual y grupal, buscando una correlación entre ellas.

- Examinar e interpretar diferentes aspectos de las propuestas estudiantiles para determinar la relación entre los tipos de dibujos y las respuestas matemáticamente correctas al problema.

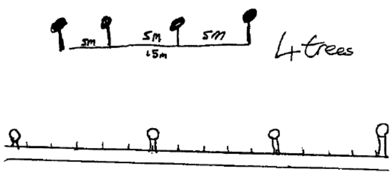
Marco conceptual

Los problemas verbales están presentes dentro del aula de matemáticas y en exámenes estandarizados que forman parte de evaluaciones nacionales e internaciones (Verschaffel et al., 2000; 2020). Generalmente la solución no es trivial, debido a que la información presentada aparentemente no está relacionada entre sí (Bonnen, 2015). Como se mencionaba al principio de este capítulo, dentro del planteamiento de un problema se puede recurrir a las representaciones visuales, estas no son exclusivas para un solo tipo de problema. Su uso suele mejorar la comprensión del problema y generar nuevos datos o sugerencias que permitan alcanzar la respuesta correcta. A continuación, se presentan los distintos tipos de representaciones en problemas verbales.

Hegarty y Kozhevnikov (1999), describen dos tipos de representaciones visuales-espaciales: las representaciones esquemáticas (Figura 4) que plasman las relaciones entre las variables del problema sin detalles superficiales captando la estructura matemática de la situación, y las representaciones pictóricas (Figura 5), que son más similares a dibujos sin establecer relaciones matemáticas entre las componentes de la situación a la que se refiere el problema.

Figura 4

Ejemplo de una representación esquemática



Nota. Figura tomada de Hegarty y Kozhevnikov (1999, p. 686)

Figura 5

Ejemplo de una representación pictórica

Nota. Figura tomada de Boonen (2015, p. 80)

Posteriormente, Boonen et al. (2014) mencionan que las distinciones entre las representaciones pictóricas y esquemáticas no son suficientes como lo menciona Hegarty y Kozhevnikov (1999), y proponen dos tipos de representaciones esquemáticas, las primeras, llamadas representaciones esquemáticas precisas, son aquellas que representan las relaciones entre los datos completos y correctos, y las representaciones esquemáticas inexactas a aquellas que están mal dibujadas o faltan algunas relaciones entre los datos del problema.

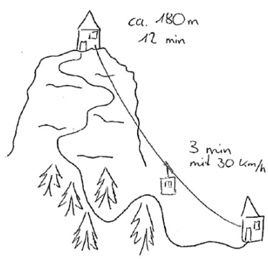
Rellensmann et al. (2017) distinguen dos tipos de dibujos:

> …un dibujo situacional es una representación exteriorizada del modelo de situación que representa gráficamente los objetos descritos en la situación problemática de acuerdo con su apariencia visual, mientras que un dibujo matemático es un dibujo abstracto porque proporciona una representación externa del modelo matemático. (Rellensmann et al., 2017, p. 57).

Un dibujo situacional se refiere a un dibujo de bajo nivel de abstracción, que también suelen llamar dibujo pictórico (Figura 6). En contraste, un dibujo matemático muestra solamente los objetos relevantes para la solución de la situación del problema (Figura 7).

Figura 6

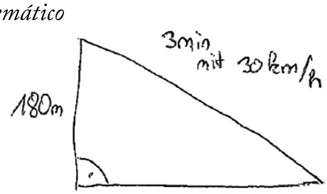
Ejemplo de un dibujo situacional



Nota. Figura tomada de Rellensmann et al. (2017, p. 75)

Figura 7

Ejemplo de un dibujo matemático



Nota. Figura tomada de Rellensmann et al. (2017, p. 75)

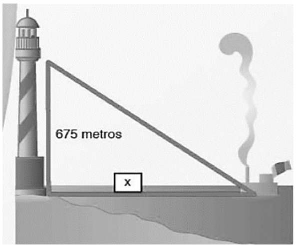
La construcción del dibujo matemático se conforma de seleccionar los datos relevantes del problema simplificando al máximo el dibujo situacional y estructurando las relaciones del problema, buscando una figura o modelo matemático en donde se pueda planificar la solución (Borromeo Ferri, 2006). Es necesario resaltar que la transición entre el dibujo situacional (o real) y el dibujo matemático es complejo, en ocasiones, requiere de una instrucción directa para que el estudiante pueda usar dibujos de manera eficiente que se verá reflejado en su rendimiento al modelar problemas. Además, se deben mejorar las habilidades de dibujo de los estudiantes proporcionándoles apoyo instructivo y práctica suficiente en la generación de dibujos (Rellensmann et al., 2017).

Comprender el problema y construir una representación de la situación adecuada (dibujo matemático o esquemático) es de gran importancia para la resolución exitosa del problema (Leiss et al., 2010), ya que el estudiante puede detectar la estructura matemática implícita en el enunciado, reduciendo los objetos situacionales a sus características matemáticas relevantes. Es por ello que se promueve la comprensión a través de la gestión de la transición de la realidad a los conceptos matemáticos inertes (Blum & Leiss, 2007).

Es necesario mencionar que existen representaciones propuestas por autores de libros de texto mexicanos para el ciclo escolar 2021-2022 donde se combinan las dos representaciones una encima de la otra (Figura 8) similares a los que muestra Contreras et al. (2019).

Figura 8

Ejemplo de una representación que mezcla los dos dibujos: situacional y matemático



Nota. Figura tomada de Contreras et al. (2019, p. 5)

Considerando todos los constructos que se usan para una representación visual y sus características en la presente investigación, se tomarán los términos dibujo situacional y dibujo matemático de Rellensmann et al. (2017), debido a que la palabra modelo puede ser pensada de manera más abstracta.

Por otro lado, Smith y Stein (2018) proponen que para dirigir discusiones productivas en el aula de matemáticas se requieren los siguientes elementos:

- Anticipar. Es cuando se diseña, escogiendo el problema persiguiendo objetivos claros y se deben anticipar soluciones tanto exitosas como no exitosas, considerando que puede haber más de un camino para la respuesta correcta.

- Monitorear. El docente en tiempo real observa a distancia sin dar ningún tipo de juicio. Además, se busca discutir las soluciones de los estudiantes.
- Seleccionar. Se escogen las respuestas considerando diversidad, tanto correctas como erróneas de tal forma que se pueda redirigir los procedimientos hacia la respuesta correcta.
- Secuenciar. Se seleccionan las respuestas de los estudiantes para que ellos describan las soluciones frente al grupo.
- Conectar. En esta última etapa el docente, con ayuda de las respuestas de los estudiantes, conecta los conceptos y soluciones que son interesantes para llegar a una solución exitosa del problema.

Metodología

El estudio es de tipo descriptivo y exploratorio, de corte cualitativo (Hernández et al., 2016). Se examinaron los dibujos generados en la aplicación del problema del árbol quebrado. La aplicación tenía cuatro etapas de 10 minutos basándose en las cinco prácticas de Smith y Stein (2018): solución individual, solución grupal, la solución experta del problema y una reflexión evaluativa.

La población analizada fue de 54 estudiantes de Educación Media Superior de un Bachillerato privado de la Ciudad de Puebla, los cuales fueron: 17 de quinto semestre, 18 de tercer semestre y 19 de primer semestre, cuyas edades variaban entre los 15 a 17 años.

El instrumento para este estudio está compuesto de cuatro secciones con un tiempo de resolución de 10 minutos cada una. La primera hoja de trabajo individual tiene la formulación del problema del árbol quebrado (Anexo 1):

> Un árbol se quebró a causa del viento y cayó de tal forma que la punta del árbol toca el suelo a seis metros del tronco. El tronco que aún se mantiene en pie mide 4 metros.

Se pide realizar el dibujo que representa la situación del problema y anotar el procedimiento que se siguió para calcular la altura del árbol antes de que se quebrara. Sin embargo, no se pide el dibujo matemático, por lo que se espera que el informante pueda desarrollarlo y aplicar el Teorema de Pitágoras.

Posteriormente, en la segunda hoja se pide trabajar en equipos para fomentar el diálogo entre pares, de dos y tres integrantes, para intercambiar soluciones para el problema del árbol roto pidiendo nuevamente el dibujo situacional (Anexo2).

En la tercera etapa del instrumento se presenta la solución experta del problema con la ayuda de la hoja de solución enfatizando el uso de los dibujos situacionales y matemáticos (Anexo 3).

Finalmente, en la hoja de reflexión evaluativa se presenta un cuestionario que recopila, si hubo palabras que fueron difíciles de entender, si el problema fue entendible, si el contenido de la solución experta fue clara y entendible, así como si fue entendible el uso de dibujos en el problema. También se evalúa la hoja de solución experta, se pregunta si había elementos por mejorar, además de expresar la utilidad de los dibujos matemáticos y los situacionales, así como sí se pudo generar los dibujos, según sea el caso (Anexo 4).

La aplicación del instrumento se realizó de forma presencial en el bachillerato durante un módulo de 50 minutos, donde los 54 estudiantes participaron contestando en hojas impresas en su grupo correspondiente. En la etapa de análisis de respuestas se realizó la comparación entre las soluciones obtenidas en las fases individual y grupal, cuyo fin fue conocer la percepción de los estudiantes del papel que desempeña el uso de los dibujos situacionales y matemáticos para problemas verbales, mediante la evaluación de la solución de un experto.

En cuanto a la clasificación de las respuestas, se usaron distintas categorías considerando la justificación textual del estudiante, el tipo de representación visual y la respuesta final al problema de forma individual y grupal, así mismo, se analizaron las respuestas de la hoja de reflexión evaluativa.

Resultados

La respuesta correcta del problema es 11.21 metros, se obtiene considerando que el árbol forma un triángulo rectángulo con la punta de la rama alejado del tronco que se mantiene en pie. Posteriormente, se calcula la hipotenusa mediante el uso del Teorema de Pitágoras. Además, es un problema que requiere de un segundo cálculo ya que debe contemplar que la altura del árbol completo se calcula teniendo en cuenta el tronco que se mantiene en pie sumado con la hipotenusa encontrada.

A pesar de que el procedimiento para resolver el problema parece sencillo, hacer el dibujo situacional que contenga los datos del problema y considerar datos que no aparecen directamente en el enunciado o que se realice el dibujo matemático que contenga todos los datos relevantes implementando un plan de acción exitoso va a depender de que los estudiantes estén familiarizados con el uso de representaciones y de su práctica (Rellensmann et al., 2017).

En la Tabla 1 se muestra la distribución de respuestas de los tres grados, distribuidas en correctas e incorrectas.

Los resultados para la respuesta de 7.2 metros, son respuestas parcialmente correctas porque hizo falta sumar el tronco que quedó de pie. Lo que no permitió responder a la pregunta del problema, sino que solo se ocuparon de la parte operacional al cumplir con el Teorema de Pitágoras. En el caso de las respuestas grupales (Tabla 2), las respuestas incorrectas disminuyeron.

Sin embargo, las respuestas parcialmente correctas aumentaron, pero no alcanzaron la contundencia necesaria para ser correctas.

Tabla 1

Concentrado de respuestas individuales

Grupo	11.21 m	7.2 m	10 m	20 m	Otra	Ninguna	Total
5to	1	3	7	2	2	2	17
3ro	5	3	6	0	2	2	18
1ro	8	6	0	0	0	5	19
Total	14	12	13	2	4	9	54

Nota. La columna 2 muestra la respuesta correcta, la columna 3 muestra una respuesta parcialmente correcta, las columnas: 4, 5 y 6 muestran respuestas incorrectas. Elaboración propia

Tabla 2

Concentrado de respuestas grupales

Grupo	11.21 m	7.2 m	10 m	20 m	Otra	Ninguna	Total
5to	1	3	0	2	0	0	6
3ro	4	1	0	0	0	1	6
1ro	4	3	0	0	0	0	7
Total	9	7	0	2	0	1	19

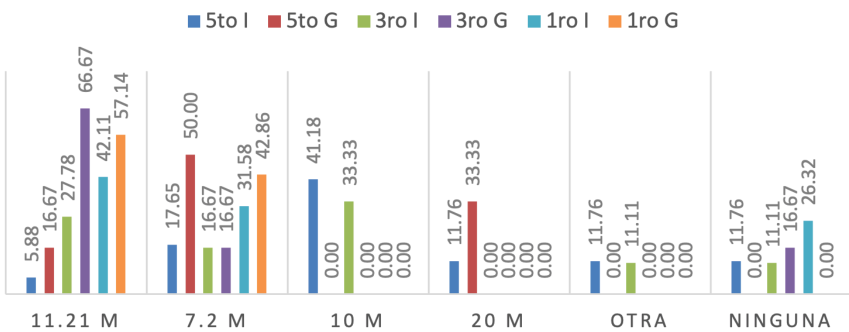
Nota. La segunda columna muestra la respuesta correcta, la columna 3 muestra una respuesta parcialmente correcta, las columnas 4, 5 y 6 muestran respuestas incorrectas. Elaboración propia

La comparación entre las respuestas individuales y grupales se hizo mediante porcentajes, que se pueden apreciar en la Figura 9. Se distingue un incremento de respuestas correctas, así como una disminución de las respuestas incorrectas en la fase grupal donde esta disminución favoreció la respuesta parcialmente correcta de 7.2 metros. Las respuestas correctas individuales fueron 14 de 54, que representa el 25% de la población, mientras que, en la segunda etapa de la aplicación las respuestas grupales fueron 9 de 19 que expresa el 47%.

Es necesario aclarar que, al formar los equipos se realizaron por conveniencia dentro del salón de clases entre las personas más cercanas, fueron conformados de dos y tres personas. La comparación entre tipos de respuesta individual y respuesta grupal se muestra en la Tabla 3. Donde los equipos formados por respuestas correctas continuaron con la misma respuesta de forma grupal. En equipos donde algún integrante tuvo una respuesta correcta en la hoja individual la respuesta grupal fue correcta. Solo un equipo que tenía un integrante cuya respuesta fue 7.2 pasó a ser una respuesta grupal correcta.

Figura 9

Respuestas presentadas por grupos y tipo de respuesta



Nota. Comparación de respuestas individuales y grupales en porcentajes. Elaboración propia

Es necesario aclarar que, al formar los equipos se realizaron por conveniencia dentro del salón de clases entre las personas más cercanas, fueron conformados de dos y tres personas. La comparación entre tipos de respuesta individual y respuesta grupal se muestra en la Tabla 3. Donde los equipos formados por respuestas correctas continuaron con la misma respuesta de forma grupal. En equipos donde algún integrante tuvo una respuesta correcta en la hoja individual la respuesta grupal fue correcta. Solo un equipo que tenía un integrante cuya respuesta fue 7.2 pasó a ser una respuesta grupal correcta.

En los otros casos, las respuestas individuales parcialmente correctas, cuya respuesta fue de 7.2, predominaron en la forma grupal, mientras que los que tenían respuestas como 10 metros, combinadas con otras respuestas incorrectas pudieron llegar a la respuesta de 7.2.

Sin embargo, hay un caso grupal donde una respuesta individual parcialmente correcta de 7.2, dio como resultado una respuesta incorrecta después de la interacción y discusión del equipo. También, en los dos últimos casos, dos equipos con respuestas incorrectas individualmente continuaron con una respuesta grupal incorrecta.

Por otra parte, dentro de las representaciones pictóricas que originan la respuesta incorrecta de 10 metros se debe a que consideran que el árbol fue completamente partido y que este pedazo de árbol cayó totalmente al suelo (Figura 10).

Tabla 3

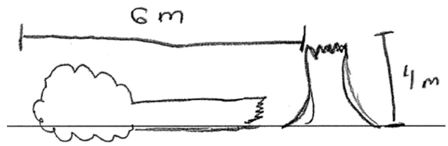
Comparación de respuestas individuales y por equipo

Número de equipos	Tipo de respuesta individual	Tipo de respuesta grupal
5	Equipos conformados con respuesta correcta	Respuesta correcta
2	Equipos formados con una respuesta correcta y las demás incorrectas	Respuesta correcta
1	Equipos formados con una respuesta correcta y parcialmente correcta	Respuesta correcta
1	Equipos formados con una respuesta parcialmente correcta y las demás incorrectas	Respuesta correcta
1	Equipos formados con una respuesta parcialmente correcta	Respuesta parcialmente correcta
3	Equipos formados con una respuesta parcialmente correcta y las demás incorrectas o sin respuesta	Respuesta parcialmente correcta
3	Equipos formados con al menos una respuesta de 10 metros	Respuesta parcialmente correcta
1	Equipos formados con una respuesta parcialmente correcta y las demás incorrectas	Respuesta incorrecta
2	Equipos formados con respuestas incorrectas	Respuesta incorrecta

Nota. Elaboración propia

Figura 10

Árbol partido completamente



Por lo cual, se asume que ese segmento de árbol mide 6 metros y con el tronco que se mantiene aún de pie se deben sumar ambos pedazos para calcular la altura del árbol original (Figura 11).

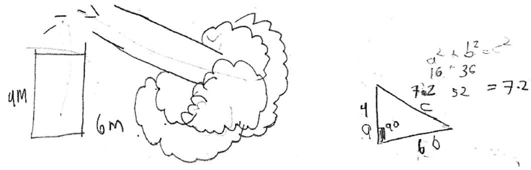
Figura 11

Justificación de la respuesta de 10 metros

Dentro de las representaciones se tiene el caso de la Figura 12. En esta figura se presenta un dibujo pictórico del árbol quebrado con los datos numéricos, después se presenta un triángulo rectángulo también con datos numéricos. Se identifican los catetos e hipotenusa del triángulo que resultó como dibujo matemático y se procedió a determinar la hipotenusa. A este tipo de representaciones que contienen tanto dibujos matemáticos como pictóricos los llamaremos "dobles".

Figura 12

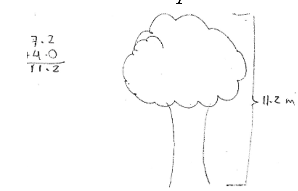
Dibujo situacional y dibujo matemático para el problema del árbol quebrado



Para este estudiante de quinto semestre, al preguntar la altura del árbol antes de que se quebrara, se presenta el dibujo de un árbol completo y se considera tanto el tronco como la parte quebrada, ambas cantidades se suman y da la altura total del árbol (Figura 13).

Figura 13

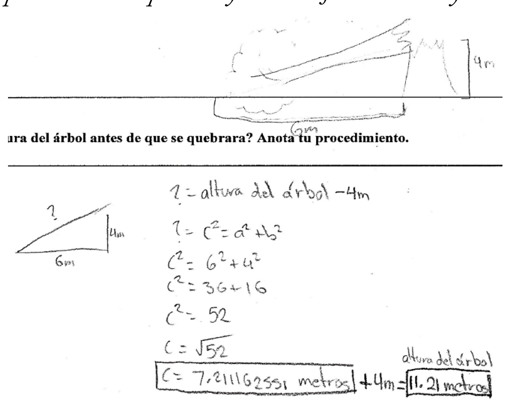
Se presenta un dibujo pictórico sumando ambas partes del árbol



De manera similar, en la Figura 14 se presenta un dibujo menos pictórico y enseguida se coloca el triángulo rectángulo, se procede a calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo y se le añaden los 4 m del tronco. En este caso no se requiere de una ilustración adicional y se hace directamente la suma.

Figura 14

Se presenta una respuesta correcta que incluye un dibujo situacional y un dibujo matemático



Las principales representaciones que se usaron en respuestas correctas del problema del árbol quebrado fueron: un triángulo (dibujo matemático), una representación doble (dibujo situacional y dibujo matemático) y una representación mixta (un dibujo matemático encima de un dibujo situacional) (Tabla 4).

Tabla 4

Concentrado de respuestas correctas por dibujo

Grupo	Triángulo	Doble	Mixto	S/dibujo	Pictórico
5to I	0	0	1	0	0
5to G	0	0	1	0	0
3ro I	1	3	1	0	0
3ro G	1	1	2	0	0
1ro I	1	5	2	0	0
1ro G	2	0	1	1	0
Total: I/G	2/3	8/1	4/4	0/1	0/0

Nota. La letra I representa las respuestas individuales, mientras que la G es para las respuestas grupales. Elaboración propia.

Además, se puede apreciar que las representaciones más usadas fueron las mixtas y las dobles, mientras que las representaciones completamente matemáticas están en segundo lugar y solo hay una respuesta grupal que no requirió dibujo debido a que en ese grupo de estudiantes ya habían planteado de forma individual un modelo mixto.

Posteriormente, se mostró la hoja de solución que señalaba las palabras importantes del problema, así como un posible dibujo situacional hecho en Canva. Se describió el proceso para abstraer las líneas que formaban el triángulo, así como el plan de solución y los cálculos necesarios para la respuesta final, cuestionando en todo momento la veracidad de la respuesta y su justificación. En consecuencia, en la cuarta etapa de la aplicación se presentaron preguntas relacionadas con la hoja de solución de un experto como se mencionó en la metodología.

En cuanto a las preguntas abiertas, es importante señalar que algunos estudiantes mencionaron tener dificultades en el planteamiento del problema por la posición del árbol, ya que no sabían si este estaba completamente en el piso o quedaba pegada una parte al tronco haciendo el triángulo, lo cual se refleja en los siguientes comentarios:

- *Me confundí en la posición del árbol*
- *No entendí si se quebró por completo o no*
- *La punta quedó a 6 metros*
- *Cuando dice que está a una distancia de 6 metros*

Así mismo, la mitad de los estudiantes aclaran que sí es útil el generar el dibujo situacional y matemático después de la hoja de solución en comparación a los dibujos generados de forma individual y grupal.

Tabla 5

Concentrado de respuestas correctas por dibujo

Pregunta	Poco /Es inútil	Normal /No sé qué decir	Suficiente /Es útil	Mucho /Es muy útil
El planteamiento del problema fue claro	0	18	21	15
Fue entendible la hoja de solución	1	12	21	20
Es útil generar dos dibujos	1	7	20	26

Nota. Elaboración propia

En el caso del uso de dibujos, los estudiantes aclaran que los dibujos son muy útiles o útiles con los siguientes argumentos:

- *Ya que con dibujos es una mejor representación del problema*
- *Es más fácil saber qué tiene que hacer cuando ves el problema que tienes que resolver*
- *Crear una imagen para hallar solución con mayor facilidad*
- *Me ayuda a observar el problema*
- *Para poder resolver el problema es necesario los dibujos para comprender mejor*
- *Así puedes ver la figura que forma y hacer el procedimiento*
- *Yo creo que ilustrar el problema, hace que su resolución sea más fácil*
- *No es sumamente necesario, pero, interpretarlo y representarlo gráficamente te permite tener una mejor aproximación al problema*

En el último comentario, el alumno menciona que tal vez no en todos siempre harás un dibujo, sin embargo, en su hoja de trabajo individual se muestra el uso de un triángulo, por lo cual, él está saltando al dibujo matemático sin pasar por el dibujo situacional, pero llega solo a la respuesta de 7.2 metros, tanto de forma individual como grupal.

Conclusiones

En esta investigación hay un progreso en cuanto a las respuestas grupales con respecto a las respuestas individuales, ya que hay un incremento de las respuestas correctas y parcialmente correctas como se mostró en las tablas, la cual fue de casi el doble. Además, la colaboración en los grupos apoyó al uso de los dibujos matemáticos en las respuestas parcialmente correctas y completamente correctas.

Las representaciones que se encontraron fueron dibujos situacionales, dibujos matemáticos, y dibujos mixtos, tal como lo reportan Rellensmann et al. (2017) y Contreras et al. (2019). Además, se hallaron dibujos dobles. Estos últimos son dos representaciones separadas, primero colocan el dibujo situacional y posteriormente usan un dibujo matemático, que difiere de los primeros, los cuales son una única representación. Los dibujos matemáticos más usados fueron los triángulos rectángulos.

Asimismo, se ve evidenciado en las respuestas de la hoja de reflexión evaluativa que los estudiantes reconocen la importancia del uso de los dibujos situacionales y matemáticos para poder resolver un problema. Los dibujos les permite saber qué camino tomar para hallar una solución con mayor facilidad porque les permite comprender mejor que cuando no se usan, tal como lo menciona Krawec (2010), debido a que muestran una estructura coherente de la relación de los datos del problema alcanzando una mejor comprensión del mismo.

Es importante resaltar el uso de ambos dibujos tanto situacionales como matemáticos para interpretar la altura del árbol. El tronco completo se puede considerar como una línea recta compuesta por dos partes, la primera, el tronco que aún está de pie y la parte quebrada que corresponde a la hipotenusa del triángulo. Se encontró en este estudio que los dibujos matemáticos, los dibujos dobles y mixtos predominaron con respecto a los dibujos situacionales en las respuestas correctas tanto en la fase individual como en la grupal. Por otro lado, los dibujos situacionales predominaron en las respuestas incorrectas que coincide con los resultados que reportaron Hegarty y Kozhevnikov (1999).

En las investigaciones futuras se debería aumentar el número de estudiantes involucrados haciendo uso de la instrucción directa para el dibujo situacional proponiendo problemas con base en su contexto o situaciones con las que estén familiarizados los estudiantes y explorar la comprensión lectora como factor para poder llegar al dibujo matemático. Además de favorecer la importancia de utilizar dibujos matemáticos en el planteamiento de problemas verbales aun cuando no se cuente con una representación inicial

Referencias

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling* (pp. 222–231). Woodhead Publishing. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Boonen, A. J. H., van Wesel, F., Jolles, J., & van der Schoot, M. (2014). The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children. *International Journal of Educational Research, 68*, 15–26. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2014.08.001

Boonen, A. J. H. (2015). *Comprehend, Visualize & Calculate: Solving mathematical word problems in contemporary math education.* Hogeschool Windesheim.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM, 38*(2), 86–95. https://doi.org/10.1007/BF02655883

Bosch, C., & Meda, A., (2021) *Matemáticas 3. Serie infinita*. Ediciones Castillo.

Calderón, C. F. A. (2021). *Matemáticas 3. Sin fronteras*. Ediciones Castillo.

Contreras, E. H., Slisko, J., & Rebollar, L. A. H. (2019). Presence of situational and mathematical and models in mexican mathematics textbooks for middle school: an initial categorization and quantification. *Journal of European Education, 8*(2), 1–13.

Elia, I., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM, 41*(5), 605–618. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0184-6

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in Secundary school student's solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics, 35*(1), 65–83. https://doi.org/10.1023/A:1003151011999

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual–spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 91*(4), 684–689. https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.4.684

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2016). Metodología de la investigación (6ta Ed.). McGraw-Hill.

Krawec, J. L. (2010). *Problem representation and mathematical problem solving of students with varying abilities.* [Tesis Doctoral, University of Miami]. University of Miami Research Portal. https://bit.ly/3AlB01u

Krawec, J. L. (2014). Problem Representation and Mathematical Problem Solving of Students of Varying Math Ability. *Journal of Learning Disabilities, 47*(2), 103-115. https://doi.org/10.1177/0022219412436976

Leiss, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R., & Pekrun, R. (2010). The Role of the Situation Model in mathematical Modelling-Task analyses, student competencies and teacher interventions. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(1), 119-141. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0006-y

Lewis, A. B., & Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 79*(4), 363–371. https://doi.org/10.1037/0022-0663.79.4.363

Pantziara, M., Gagatsis, A., & Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics, 72*(1), 39–60. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9181-5

Polya, G., (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas.

Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics, 95*(1), 53–78. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-016-9736-1

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2018). *5 Practices for orchestrating productive mathematics discussion.* NCTM.

Swetz, F. J. (2009). Word problems: Footprints from the history of mathematics. En L.Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and Worlds* (pp. 71–91). Brill. https://doi.org/10.1163/9789087909383

Swetz, F. J. (2012). *Mathematical expeditions: Exploring word problems across the ages*. JHU Press.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems.* CRC Press.

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: a survey. *ZDM, 52*(1), 1–16. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4

Anexos

Anexo 1

HOJA DE TRABAJO INDIVIDUAL

Nombre: ____

Grado y grupo: ___________ **Tiempo de la actividad (10 minutos): ________**

Instrucciones. Resuelve el siguiente problema. Contesta según corresponde.

Problema

Un árbol se quebró a causa del viento y cayó de tal forma que la punta del árbol toca el suelo a seis metros del tronco. El tronco que aún se mantiene en pie mide 4 metros.

Realiza el dibujo que representa la situación a la que se refiere el problema.

¿Cuál era la altura del árbol antes de que se quebrara? Anota tu procedimiento.

Anexo 2

HOJA DE TRABAJO GRUPAL

Nombres: ____

____

Grado y grupo: ____________ **Tiempo de la actividad (10 minutos):** ________

Instrucciones. Reúnete en equipos de tres personas, discute el problema que se resolvió de manera individual. Intercambien ideas, procedimientos y representaciones. Contesta según corresponde.

Problema

Un árbol se quebró a causa del viento y cayó de tal forma que la punta del árbol toca el suelo a seis metros del tronco. El tronco que aún se mantiene en pie mide 4 metros.

Realiza el dibujo que representa la situación a la que se refiere el problema.

¿Cuál era la altura del árbol antes de que se quebrara? Anota tu procedimiento.

Anexo 3

HOJA DE SOLUCIÓN DE UN EXPERTO

Grado y grupo: ____________ **Tiempo de la actividad (10 minutos):** ________

Instrucciones. Lee la siguiente solución del problema.

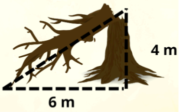
Problema

Un árbol se quebró a causa del viento y cayó de tal forma que la punta del árbol toca el suelo a seis metros del tronco. El tronco que aún se mantiene en pie mide 4 metros. ¿Cuál era la altura del árbol antes de que se quebrara?

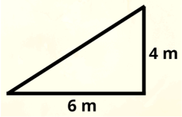
Realiza el dibujo que representa la situación a la que se refiere el problema

Se debe dibujar primero un árbol que se quebró en un punto de su tronco. Este dibujo se llama el "dibujo situacional".

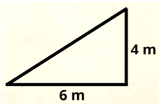
Se colocan los datos numéricos de la situación del problema: El tronco que aún está en pie mide 4 metros. La distancia entre el troco a la punta del árbol es de 6 metros. Para poder plantear la solución, se considera que se está formando un triángulo rectángulo.



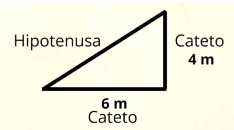
Se desprecia el grosor del árbol. El tronco que está de pie y la parte caída se convierten en las líneas que forman el triángulo rectángulo.



El dibujo situacional poco a poco se transforma con todos los datos del problema en un triángulo rectángulo. Este triángulo se llama el "dibujo matemático".



Se consideran las medidas del triángulo rectángulo que corresponden a los catetos. El lado faltante es la hipotenusa.



Usando el teorema de Pitágoras, entones los datos quedarían:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a = 6\,m$$

$$b = 4\,m$$

$$c = x$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{(6m)^2 + (4m)^2} \rightarrow \quad c = \sqrt{36m^2 + 16m^2} \rightarrow \quad c = \sqrt{52m^2} \rightarrow \quad c = 7.21\,m$$

Ahora se tiene la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo. Se necesita calcular la altura del árbol antes de que se rompiera. Es decir, se debe de sumar el tronco que aun esta de forma vertical y el tronco inclinado. Esto es:

$$4\ m + 7.21m = 11.21\ m$$

Anexo 4

HOJA DE REFLEXIÓN EVALUATIVA

Grado y grupo: ____________ **Tiempo de la actividad (10 minutos): ________**

Instrucciones. Marca con una X la respuesta que se adecua a tu percepción. En las preguntas abiertas, escribe tus sugerencias.

1. ¿El planteamiento del problema fue claro en la hoja personal?
   Nada Poco Normal Suficiente Mucho

   Justifica tu selección

2. ¿Los pasos de la solución fueron entendible en la hoja de solución de un experto?

   Nada Poco Normal Suficiente Mucho

   Justifica tu selección

3. ¿Qué agregarías a la hoja de resolución de un experto?

4. ¿Qué palabras no te permitieron entender el problema?

5. ¿Para comprender mejor los pasos en la solución del problema qué tan útil es generar dos dibujos: el dibujo de la situación y el dibujo matemático?

   Es muy útil. Es útil. No sé qué decir. Es inútil. Es muy inútil.

   Justifica tu selección