GeoGebra como recurso didáctico en el análisis y solución de problemas que involucran a la función logística

Ingrid Quilantán Ortega [1]
Flor Monserrat Rodríguez Vásquez [2]

Resumen

La función logística modela el crecimiento de poblaciones, propagación de enfermedades, cultivo de bacterias, difusión de información, entre otros. Debido a su vasta aplicabilidad, es considerada como tema de enseñanza desde el nivel básico secundaria (12-14 años) en el curso de Biología de primer año para analizar las interacciones depredador-presa y el equilibrio de poblaciones. En este contexto, el objetivo de esta investigación es promover la comprensión de estudiantes sobre la función logística mediante la solución de problemas reales modelados por dicha función utilizando el software GeoGebra como recurso didáctico. La investigación se fundamenta bajo la modelización matemática considerada como la práctica de enseñanza que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje. La metodología tiene un enfoque cualitativo y el tipo es descriptivo, considerando la observación participante para la recolección y análisis de datos. Se aplicaron dos problemas a 15 estudiantes de secundaria. Los resultados indicaron que los estudiantes reconocieron propiedades y representaciones características de la función logística y establecieron vínculos de la función logística con otros conceptos matemáticos. Se concluye que los estudiantes realizan subprocesos de interpretación al predecir comportamientos respecto a la lectura de las gráficas en GeoGebra.

Palabras clave

Comprensión, Función logística, Modelización matemática, Recurso tecnológico.

[1] 21254443@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México
https://orcid.org/0009-0005-6198-065X

[2] flor.rodriguez@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México
https://orcid.org/0000-0002-9596-4253

Quilantán Ortega, I., & Rodríguez Vásquez, F. M. (2024). GeoGebra como recurso didáctico en el análisis y solución de problemas que involucran a la función logística. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2024* (pp. 151–170). Editorial SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/02-07

Introducción

La función logística aparece en diversos modelos de crecimiento de poblaciones, propagación de enfermedades, cultivo de bacterias, difusión de información, entre otros. Debido a su amplia aplicabilidad, se incluye en los diferentes niveles educativos, en el nivel superior por ejemplo, en el área de ciencias e ingeniería en la materia de Cálculo Diferencial y Ecuaciones Diferenciales cuando se aborda el tema de funciones trascendentales para indicar el crecimiento logístico y el decaimiento exponencial (Purcell et al., 2007; Spivak, 2014). Aunque en este nivel educativo la función logística reluce como solución de la ecuación diferencial logística, su representación gráfica llamada curva logística, aporta información para fortalecer otros conceptos matemáticos y característicos de las funciones como máximos y mínimos, límites y convergencia, concavidad y conexidad, entre otros.

En el nivel medio superior la función logística tiene relevancia entre otras cosas, para visualizar los aspectos variacionales del comportamiento de los datos. Algunos estudios como el de Valero y Lezama (2020) exploran la información producida a partir de la pandemia por COVID-19 desde una perspectiva del pensamiento variacional en Cálculo. En el nivel básico (secundaria), en el que se centra nuestro estudio, las nociones de función logística se introducen en la materia de Ciencias, correspondiente a Biología I, la cual se imparte en el primer año de estudios, en esta materia los estudiantes analizan las interacciones depredador-presa para el equilibrio de las poblaciones en un ecosistema (Limón et al., 2021; Petrich et al., 2018). Los aspectos matemáticos que se utilizan como apoyo para el estudio del equilibrio de poblaciones son, el llenado de tablas, la lectura de gráficas de funciones, los gráficos de barras para representar datos, los gráficos de pastel para representar porcentajes y la predicción de cantidades de población.

Se ha documentado que durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones (lineal, cuadrática y en ocasiones la función cúbica), se presentan ciertas dificultades en los estudiantes para lograr su comprensión (Alpízar et al., 2018; Bagni, 2004). Sin embargo, en la materia de matemáticas en secundaria, poco se dice en particular sobre la función logística (aun cuando la función logística se utiliza para temas de Biología I en primer año). El contenido del programa de estudios de Matemáticas III (para tercer año de secundaria) solo señala el tema de funciones lineales y cuadráticas. Por ello, es relevante analizar la función logística desde la perspectiva de la Educación Matemática en educación secundaria siguiendo el marco de la Nueva Escuela Mexicana (NEM) la cual vincula la escuela con el entorno.

Las investigaciones que se han realizado sobre las dificultades en la comprensión de la función logística en este nivel educativo, se estudian en áreas como la biología (Artola et al., 2016); sin embargo, en el nivel medio superior y superior, los reportes indican que las dificultades se presentan al interpretar el modelo gráfico de la función logística y al vincularlo con su representación algebraica, especialmente cuando se trata de representar problemas aplicados (Couoh & Cabañas-Sánchez, 2013; Ulloa & Rodríguez, 2010), esto último nos sugiere incidir en el diseño de actividades que promuevan la comprensión de tal función, con ítems que reduzcan las dificultades a manera de fortalecimiento desde los niveles anteriores.

No obstante, existen estudios que afirman que los recursos tecnológicos sirven de apoyo en la enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos y ayudan a disminuir algunas de las dificultades en la comprensión de estos. El utilizar software especializado en matemáticas facilita su enseñanza y motiva a los estudiantes a involucrarse en el aprendizaje de manera dinámica (Espinoza & Rodríguez, 2021; Pérez et al., 2023). En particular, autores como Domènech-Casal (2020) y Vergel-Ortega et al. (2020), aprovechan estos recursos tecnológicos para la enseñanza de la función logística en áreas como Biología y Física.

Existen diversas propuestas de software educativo para la enseñanza de las matemáticas, tales como, Graphmatica, Winplot, Mathematica, Matlab, Calc 3D Prof, K3DSurf, Derive e incluso calculadoras gráficas. Dichos softwares tienen algunas ventajas y desventajas al utilizarlos. Por ejemplo, para nuestro objetivo, Graphmatica, incluye elementos en su interfaz para captar la atención de los alumnos. Sin embargo, esto podría provocar que no haya un suficiente control o supervisión de calidad de los contenidos y que los alumnos se puedan distraer con facilidad. El software Winplot, ofrece facilidades en la solución de ecuaciones de una y dos variables, así como solución de sistemas de ecuaciones y muestra sus representaciones gráficas, sin embargo, al realizar los gráficos se "alenta" el programa y las imágenes quedan distorsionadas. Por su lado, Mathematica y Matlab, son softwares con una alta capacidad de cálculo numérico y con un gran número de instrucciones que nos permiten resolver problemas científicos avanzados, mediante el desarrollo de algoritmos; modelado, simulación; sin embargo, como menciona Fernández et al. (2017), son programas cuya arquitectura es de mucha complejidad y ocupan mucha memoria en el computador.

Autores como Cenas-Chacón et al. (2021) y Moreno-Jiménez (2023), proponen utilizar el software interactivo de matemáticas GeoGebra para la mejora en su enseñanza-aprendizaje. El software GeoGebra es un software interactivo que relaciona conocimientos de cálculo, geometría, álgebra y estadística para la enseñanza de la matemática escolar en diversos niveles educativos. Fue creado por Markus Hohenwarter y lanzado en 2002 con el objetivo de facilitar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas mediante la integración de conceptos y herramientas interactivas. Dentro de las ventajas de utilizar dicho software destacan:

- Interfaz intuitiva: Fácil de usar y navegar, los usuarios se familiarizan rápidamente con la herramienta y aprovechan sus funcionalidades.
- Versatilidad: Ofrece una amplia gama de herramientas en diversas áreas de las matemáticas por lo que permite a los usuarios realizar diversas tareas en un solo programa.
- Integración de múltiples representaciones: Permite a los usuarios trabajar con diferentes representaciones matemáticas como gráficos, ecuaciones, construcciones geométricas en una sola ventana, por lo que facilita la visualización y comprensión de conceptos matemáticos.
- Uso gratuito y de código abierto: Está disponible de forma gratuita en diferentes plataformas, por lo que lo hace accesible para los estudiantes, profesores y entusiastas de las matemáticas.
- Comunidad activa: Cuenta con una gran comunidad de usuarios en línea donde se pueden encontrar recursos, tutoriales, material de apoyo, colaboraciones, etc.
- Interactividad: Permite al usuario crear construcciones matemáticas interactivas por medio de la manipulación de objetos, por ejemplo, cambiar parámetros y ver instantáneamente cómo esto afecta las representaciones gráficas.
- Recursos educativos disponibles: Cuenta con una amplia biblioteca de recursos educativos en línea, que incluye actividades, lecciones y materiales curriculares creados por otros usuarios.
- Actualizaciones constantes: Se lanzan regularmente actualizaciones que agregan nuevas características y corrigen errores.
- Compatibilidad con múltiples plataformas: Está disponible para Windows, macOS, Linux, iOS y Android, lo que permite utilizarlo en computadoras, tabletas y teléfonos móviles.

Una de las bondades de este software es que tiene una versión para teléfono celular, la cual es fácil de usar y no requiere conexión a internet (GeoGebra, 2024). Es por todas estas bondades que en este trabajo se optó por utilizar GeoGebra.

Aunado al uso de herramientas tecnológicas, existen estudios que confirman la importancia de la modelación matemática para la comprensión de diversos fenómenos de la vida real, naturales, sociales, físicos, etc. Con los modelos matemáticos se puede determinar la relación entre las variables involucradas y entender dichos fenómenos (Perin & Campos, 2020). En el nivel secundaria, los modelos matemáticos se utilizan en la materia Saberes y Pensamiento Científico, dentro del currículo de la Nueva Escuela Mexicana, que incluye Matemáticas con Biología, en primer año, Matemáticas con Física, en segundo año y Matemáticas con Química, en el tercero.

Fowler (1997) presentó a la modelación matemática (o modelización) como un proceso que se da al delimitar un problema que es relevante en determinada área del conocimiento, el cual transcurre en etapas como, por ejemplo, conocer el fenómeno de interés, la formulación de la hipótesis, la formulación del modelo, el análisis y la validación. Diez años después, la modelación no se reduce a la acción de modelar, representa un dominio de investigación en el que se ven involucradas perspectivas teóricas que presentan una intencionalidad (Blum et al., 2007). Por ejemplo, el proceso de modelización dado por Blomhøj (2008), en el que esta es vista como una teoría para la práctica, está descrito en seis subprocesos, a saber, formular el problema, realizar la sistematización, traducir los objetos al lenguaje matemático, usar métodos matemáticos para obtener resultados, interpretar los resultados para dar conclusiones y evaluar la validez del modelo. Coincidimos con Blomhøj sobre qué es la modelización matemática y las etapas de su proceso.

Por lo anterior, el objetivo de este trabajo es proponer una actividad basada en la modelación matemática, en el que se utilice el software GeoGebra como recurso didáctico, con la finalidad de promover la comprensión de la función logística en los estudiantes de nivel secundaria mediante la solución de problemas reales que la involucren. Para lograr el objetivo se tienen los siguientes objetivos particulares:

- Fomentar el uso de herramientas tecnológicas, en particular del software GeoGebra y de la modelación matemática como una teoría para la práctica en el estudio de las funciones.
- Destacar las distintas representaciones de la función logística que fortalezcan el concepto.
- Realzar la vinculación de las matemáticas con otras ciencias, en particular con la biología, a través del estudio de esta función.

Se espera que, con el uso de herramientas tecnológicas, de la modelación matemática, de las distintas representaciones y de la vinculación con otras disciplinas se generen conexiones matemáticas que incidan en la comprensión de la función antes mencionada.

Fundamentos teóricos

El desarrollo de las capacidades y competencias de un estudiante no se logran solo por el hecho de que el docente exponga el contenido sino también que estructure, organice y planee su clase. En este escenario se involucran actividades que los estudiantes realicen dentro y fuera del aula con objetivos de aprendizaje claros acerca del tema a abordar, he aquí la importancia del diseño de actividades y la planeación de la clase. En años recientes, el estudio de la visualización en el pensamiento matemático es objeto de numerosas investigaciones, debido a la constante evolución de los planes y programas educativos y al surgimiento de la cada vez más actualizada tecnología. Diversos autores manifiestan que el uso reflexivo, creativo y dinámico de las nuevas tecnologías permiten dar significado concreto a las nociones matemáticas, siendo necesario el diseño de nuevos materiales utilizando tecnologías que demuestren su uso en el aula de clases (Gatica & Ares, 2012; Villarreal, 2012).

Por lo anterior, los profesores de matemáticas se han visto en la necesidad de diseñar actividades que les permitan adaptarse a estos planes y programas educativos y a hacer su práctica docente diferente a lo tradicional. También los futuros profesores deben aprender a diseñar actividades adecuadas para una práctica profesional relevante en la docencia en todos los niveles educativos (Chamoso & Cáceres, 2019).

En secundaria, uno de los temas que se abordan en el curso de Biología I es el equilibrio de las poblaciones y las interacciones depredador-presa, ambos relacionados con el crecimiento de las poblaciones. La función logística es el modelo matemático que modela este crecimiento poblacional. Matemáticamente la función logística es una función de la forma:

$$p(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}} \qquad (1)$$

cuya gráfica es una curva sigmoidea. La dinámica inicial de este modelo es de tipo exponencial, y a partir de determinado tiempo este crecimiento se desacelera hasta una determinada cota.

Las variables de (1) son las tradicionales dadas por el modelo de Verhulst en 1838, a saber, p: población, e: constante de Euler y t: tiempo, pero podrían variar de acuerdo con lo que se requiera modelar.

A partir de las necesidades del diseño de actividades para una práctica docente que incida en el aprendizaje y del requerimiento de la función logística en el plan de estudios de este nivel educativo, se diseña una actividad conformada por dos problemas matemáticos para incidir en la comprensión de la función logística. Asimismo, la actividad tiene una intencionalidad matemática que se fortalece con la herramienta tecnológica GeoGebra.

El marco teórico en el que se fundamenta este trabajo es la modelización matemática como teoría para la práctica dado por Blomhøj (2008). Blomhøj afirma que con la modelación matemática los estudiantes encuentran motivador y relevante trabajar con problemas reales. Las actividades de modelización presuponen una comprensión de la matemática involucrada en ellas, por lo cual el estudiante es capaz de establecer raíces cognitivas sobre las cuáles pueda construir importantes conceptos matemáticos. La modelización matemática es la práctica de enseñanza que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje.

El proceso de modelización se describe en seis subprocesos:

(a) *Formulación del problema: formulación de una tarea que guíe la identificación de las características de la realidad a modelizar.* En nuestro trabajo se utilizan problemas reales sobre la función logística cuya aplicación se da en el contexto del estudiante a fin de identificar la realidad modelada.

(b) *Sistematización: selección de los objetos relevantes del dominio de investigación (contexto del problema) para hacer posible una representación matemática.* Consideramos que es de utilidad el uso y manejo de tablas de datos y representaciones algebraicas, principalmente los parámetros característicos de la función mencionada.

(c) *Traducción de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático*. En la actividad presentada, el modelo matemático que representa los datos ya está planteado.

(d) *Uso de métodos matemáticos para llegar a resultados matemáticos y conclusiones.* En este subproceso hacemos uso de ítems que indiquen el uso de la herramienta tecnológica en matemáticas (GeoGebra).

(e) *Interpretación de los resultados y conclusiones considerando el contexto.* La interpretación de los resultados en la actividad se da tanto de manera escrita como con preguntas orales durante la aplicación de esta en los ítems finales de cada situación problema.

(f) *Evaluación de la validez del modelo por comparación con datos* (*observados o predichos*). Este subproceso no fue considerado en este trabajo.

Método

Esta investigación es de tipo cualitativa, y se lleva a cabo de manera descriptiva a través de la observación participante, la cual nos indica que la información recogida suele ser verbal, asimilable, grabada, transcrita o escrita, es información con significado personal, el observador mira, escucha, pregunta, indaga mientras que el observado responde según la relación con el observador (Riba, 2017). Y del aprendizaje basado en problemas en matemáticas, ya que es una estrategia de enseñanza en la que los maestros presentan el contenido utilizando ejemplos y escenarios del mundo real, es útil en las clases de matemáticas, donde los estudiantes a menudo no logran ver las diversas aplicaciones de las matemáticas (Braintrust tutors [BT], 2024; Guamán & Espinoza, 2022; Sastre & Araújo, 2008). Las etapas que se siguieron fueron:

1. *Diseño la actividad.* La actividad está compuesta por dos situaciones problema que involucran el llenado de tablas, función logística, representaciones gráficas, modelación, predicción, e interpretación del problema asociado a la realidad. (Ver Anexo A).

La situación problema 1 se da en el contexto de una escuela secundaria de Chilpancingo en donde se difunde un rumor. Se pretende que los estudiantes se sientan parte de la situación por eso se les dice que esta situación pudo darse en su escuela. El objetivo principal es que los estudiantes, a través del manejo de datos, encuentren relaciones entre estos de tal manera que puedan ser descritos por una determinada función, así también que identifiquen relaciones entre la representación gráfica y la representación algebraica.

Los ítems son preguntas e instrucciones guiadas, en el primero se pide encontrar alguna relación entre los datos dados en la tabla, aunque no es trivial que se observe una relación exacta de la función logística, se espera que los estudiantes puedan reflexionar que no es una relación lineal ni cuadrática (usualmente conocidas en ese nivel educativo). Con eso dar pauta para mencionar que existen otros tipos de funciones que se relacionan con el crecimiento, recordarles de alguna manera, los modelos vistos en la clase de Biología de primer año. Los ítems, que están enfocados a utilizar la herramienta tecnológica dirigen al estudiante a una comprensión más visual de la situación problema. Los ítems finales se enmarcan en la predicción. La capacidad de predecir el comportamiento de la situación problema se asocia con la representación gráfica visualizada con GeoGebra, sin embargo, se espera que al manipular la representación algebraica en el software logren reflexionar sobre los cambios en la función.

En la situación problema 2, que se da un tanto más en el contexto científico, se les pide a los estudiantes que se coloquen en el papel de un laboratorista químico. El objetivo de esta situación es introducirlos en la construcción de la representación gráfica de la función logística por sí mismos, así como desarrollar (a través de las preguntas planteadas) su capacidad de predicción. A diferencia de la situación problema 1, los estudiantes deben ser capaces de realizar el llenado de tablas con la lectura de la gráfica.

Los ítems aquí presentados guían al estudiante a reflexionar sobre las características principales de la función logística por ejemplo, sus variables y su capacidad de carga (cota). Los ítems finales se enmarcan similarmente que en la situación 1, sobre la capacidad de predicción y de resolver el problema de contexto.

2. *Aplicación de la actividad*. Los participantes fueron 15 estudiantes de tercer grado de secundaria de una institución pública. Se solicitó a la profesora encargada de impartir el curso de Matemáticas III (dentro del campo formativo Saberes y Pensamiento Científico de la Nueva Escuela Mexicana), un espacio durante su clase. La profesora, solicitó previamente a los estudiantes instalar GeoGebra en su teléfono celular con la finalidad de que los estudiantes se fueran familiarizando con él. La actividad se aplicó en dos sesiones de 50 minutos cada una. Los estudiantes fueron codificados con la *letra* A_n *con* $n = 1, \ldots, 15$. La actividad se realizó de manera escrita y dinámica con el uso del software. Se llevó un registro de los comentarios o preguntas que hacían los estudiantes en el aula y que pudieran ser relevantes para nuestra investigación.

3. *Análisis de resultados*. Se analizaron las respuestas de cada uno de los participantes actividad por actividad. Dado que esta tuvo como base la modelación matemática y el uso del software GeoGebra como recurso didáctico con la finalidad de promover la comprensión de la función logística en los estudiantes de secundaria mediante la solución de problemas reales. En el análisis de datos se perciben manifestaciones del tránsito por los diferentes subprocesos mencionados en Fundamentos Teóricos y en consecuencia se identifican los conocimientos de los estudiantes durante la solución de la actividad de manera escrita y también mediante la observación participante.

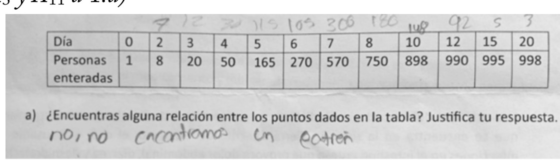
Análisis de datos y resultados

A continuación, se presentan los resultados analizados de manera descriptiva por cada situación problema. En la situación problema número 1, sobre la difusión de un rumor, se da una tabla de datos relacionados con la cantidad de personas que se enteran del rumor por cada día que transcurre. Estamos en la etapa de formulación de problema de Blomhøj. Se les pregunta a los estudiantes si pueden encontrar alguna relación entre los datos de la tabla. La mayoría de los estudiantes como A_3 y A_{11}, no lograron encontrar una relación entre los datos dados. Esto sugiere que el patrón de la difusión del rumor, el cual está dado por una función logística, no es fácil de describir a simple vista, posiblemente se necesite un "ojo entrenado" para reconocer alguna relación, o bien se requiera más información acerca de la función logística y todo lo que puede modelar para identificar si existe relación entre estos datos. Aun cuando los estudiantes no logran establecer una relación entre los datos, se esperaba que se consideraran qué tipo de relaciones no son, es decir al no ser lineal ni cuadrática, ¿pudiera haber otra relación? Se observa de la figura 1 que A_3 escribió números en la parte superior de la tabla de datos de los que puede observarse que intentó determinar una regla para una sucesión sin éxito de hallar algún patrón (ver figura 1).

Figura 1

Respuesta de A_3 y A_{11} a 1.a)

A_3



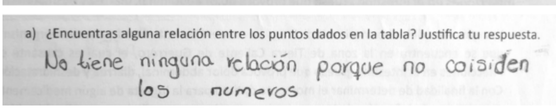
7 12 30 115 105 300 180 148 92 5 3

Día	0	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20
Personas enteradas	1	8	20	50	165	270	570	750	898	990	995	998

a) ¿Encuentras alguna relación entre los puntos dados en la tabla? Justifica tu respuesta.

no, no encontramos un patrón

A_{11}



a) ¿Encuentras alguna relación entre los puntos dados en la tabla? Justifica tu respuesta.

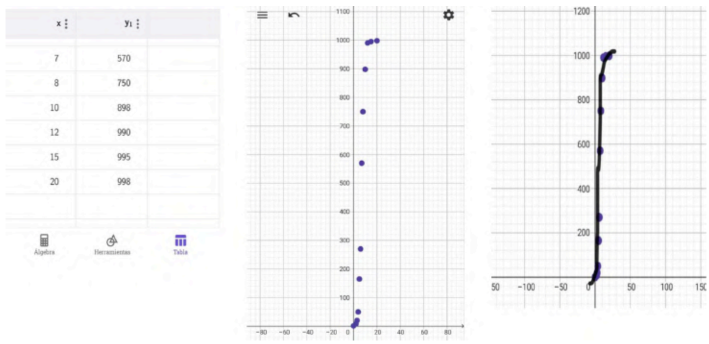
No tiene ninguna relación porque no coisiden los numeros

En los incisos b), c) y d) se les pide a los estudiantes que ubiquen los datos de la tabla en el plano coordenado utilizando el software GeoGebra y los una con la herramienta mano alzada. Aquí los estudiantes tienen el reto de trabajar con el modo Tabla de GeoGebra y posteriormente observar los puntos marcados en el plano. Los estudiantes manifestaron en comentarios durante la realización de la actividad, que les pareció "*sencillo y cómodo*" escribir los datos de la tabla en GeoGebra y ver luego los datos representados en el plano, cosa que no es fácil cuando lo realizan a lápiz y papel. En particular, el estudiante A_2 captura desde su teléfono paso a paso lo realizado en cada uno de los incisos (ver figura 2).

Figura 2

Uso de GeoGebra del estudiante A_2 en incisos b), c) y d) de la situación 1

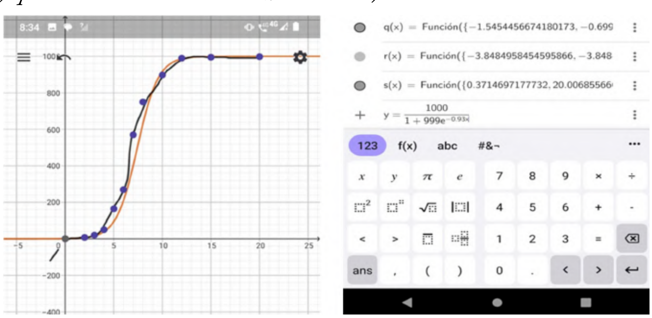
Tabla de datos en Geogebra *Datos en el plano coordenado* *Gráfica a mano alzada*



En el inciso e) se da la función $r(x)$, y se les pide que la escriban en la opción algebraica del software y posteriormente observen la gráfica de la función. El estudiante A_2 realiza lo indicado pero su gráfica no es tan fácil de observar debido a que se muestra "*delgada*" —según sus palabras- por lo que toma la iniciativa de querer ver la gráfica "*más grande*" y comienza a mover la pantalla de su teléfono con sus dedos. Uno de los aspectos interesantes es que, durante la realización de la actividad, manifiesta emoción de usar el software y aconseja a sus compañeros "*engrandecer la gráfica*" para visualizarla mejor (ver figura 3).

Figura 3

Gráfica de r(x) que realiza el estudiante A_2 en inciso e) de la situación 1



En f) se les pregunta sobre las similitudes y diferencias entre la gráfica a mano alzada y la gráfica de la función $r(x)$ a fin de que reflexionen sobre lo realizado. Los estudiantes A_2, A_8 y A_{15} observan similitud entre la gráfica de los datos a mano alzada y la gráfica de $r(x)$. Como mencionamos anteriormente, A_2 manipula el software a lo que él llama "*engrandeciendo*" (agranda y encoge los ejes, amplia y disminuye la pantalla) a fin de observar dicha similitud y lo manifiesta en su respuesta escrita (ver figura 4).

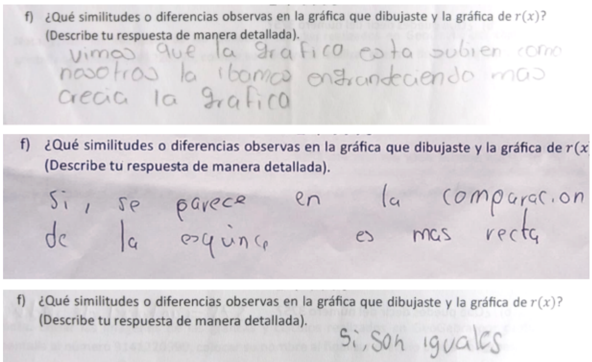
Figura 4

Respuesta de A_2, A_8 y A_{15} a 1.f)

A_2

A_8

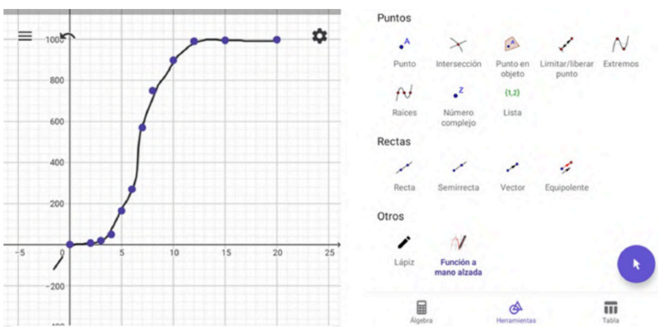
A_{15}



La estudiante A_4 realiza la gráfica de la función $r(x)$ en el software GeoGebra desde su teléfono celular, esto le permite responder a los incisos siguientes de manera acertada. En la figura 5 se pueden observar algunas herramientas que utilizó al realizar el gráfico.

Figura 5

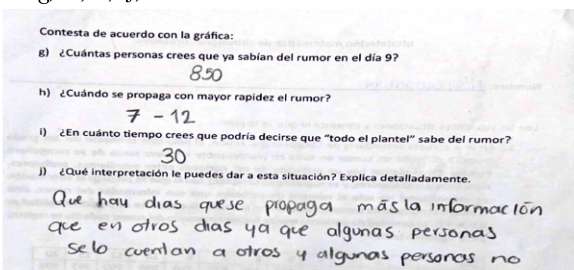
Uso de GeoGebra de la estudiante A_4 en inciso f) de la situación 1



La estudiante A_4 es quien contesta de manera acertada los incisos g), h), i), j), debido a sus observaciones con respecto a lo realizado con GeoGebra. De sus respuestas se nota primero que logra realizar una estimación de la cantidad de personas que saben el rumor en el día 9. A_4 describió en la conversación durante la realización de la actividad, que esto lo logró identificando el punto en la gráfica en GeoGebra dado por (9, 850) ya que sabía que 9 representa el día y 850 representa las personas enteradas del rumor como en la tabla. Cuando se le pregunta en qué momento el rumor se propaga con mayor rapidez, ella logra identificar un intervalo de mayor crecimiento en la gráfica, dado justo en el momento donde hay un cambio de concavidad en la gráfica. Aun cuando ella no menciona este cambio de concavidad (cosa que es natural debido a que estos estudiantes no han visto ese tema), al dar su interpretación, manifiesta el intervalo de mayor crecimiento como velocidad o "*días en que se propaga más*". (Ver figura 6).

Figura 6

Respuesta de A_4 a 1.g), h), i), j)

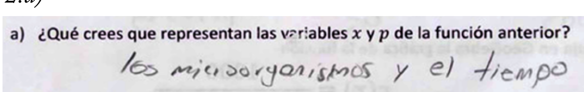

Contesta de acuerdo con la gráfica:
g) ¿Cuántas personas crees que ya sabían del rumor en el día 9?
850
h) ¿Cuándo se propaga con mayor rapidez el rumor?
7 - 12
i) ¿En cuánto tiempo crees que podría decirse que "todo el plantel" sabe del rumor?
30
j) ¿Qué interpretación le puedes dar a esta situación? Explica detalladamente.
Que hay dias quese propaga mās la informacIón
que en otros dias ya que algunas personas
se lo cuentan a otros y algunas personas no

A diferencia de la situación 1 en la cual se dan primero datos en una tabla, en la situación problema número 2 se da primero una función que modela un crecimiento poblacional de bacterias. Asimismo, con esta situación se pretende fortalecer lo desarrollado en la situación problema 1 acerca de la función logística.

Aquí se les solicita a los estudiantes (en 2.a) la representación de las variables en la función, con la intención de establecer la interpretación requerida en el modelo. Cabe mencionar que ahora los estudiantes ya tienen cierta información sobre la función logística, su gráfica y una función algebraica que la representa (que es lo dado en la situación 1), así también tienen datos en una tabla que relaciona tiempo en días con cantidad de personas. Este argumento (es decir, fijarse de la situación 1 la relación entre días y cantidad de personas) hace que el estudiante A_7, identifique de manera correcta las variables, es decir, da sentido a lo planteado en la situación problema —dicho con sus propias palabras mientras realizaba la actividad cuando se le preguntó ¿Cómo lo supiste? -. (Ver figura 7).

Figura 7

Respuesta de A_7 a 2.a)

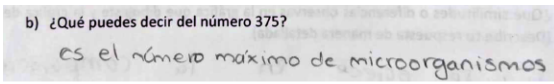

a) ¿Qué crees que representan las variables x y p de la función anterior?
los microorganismos y el tiempo

En el inciso b) se les pregunta a los estudiantes sobre el número 375 que aparece en la función dada $p\ (x)$ el cual es un parámetro específico de la función logística, a saber, la capacidad de carga o capacidad de sustento del hábitat o espacio.

El estudiante A_{10}, coloca como respuesta una de las palabras con las que se identifica una característica propia de la función logística, el acotamiento, dicho como "*el número máximo*" (ver figura 8). Para el modelo, la constante que representa la capacidad de sustento.

Figura 8

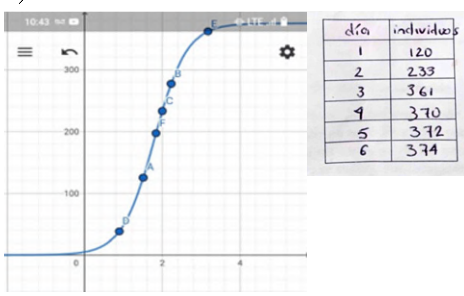
Respuesta de A_{10} a 2.b)


b) ¿Qué puedes decir del número 375?
es el número máximo de microorganismos

Como se mencionó anteriormente, para motivar la participación de los estudiantes e involucrarlos en la situación problema se les dice que tomen el papel de laboratoristas químicos. Como en esta situación se realiza un cultivo de microorganismos, se le pide el llenado de una tabla correspondiente a 6 días de observación utilizando GeoGebra. La estudiante A_5, utiliza de manera correcta la herramienta tecnológica para realizar el llenado de la tabla y logra hacer una buena aproximación sobre la cantidad de individuos por día a partir de la gráfica. (Ver figura 9).

Figura 9

Respuesta de A_{10} a 2.b)

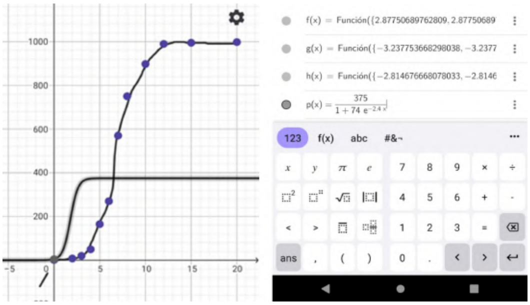


día	individuos
1	120
2	233
3	361
4	370
5	372
6	374

Es oportuno mencionar que, una vez realizada la gráfica de la función $p\ (x)$ la estudiante A_4, logró contestar correctamente 2.b), pero además, en los comentarios que se hicieron mientras se realizaba la actividad, ella dice que la gráfica de la situación 1 y de la situación 2 se "*estacionan*" en el "*número máximo*". Muestra la gráfica de la situación 2 la cuál realizó sin borrar antes la gráfica de la situación 1, por lo que esto le permitió realizar tan importante observación, ya que el parámetro dado por las constantes 1000 y 375 en cada una de las respectivas situaciones problema, a lo que ella llama "*número máximo*" es la cota o capacidad de sustento del modelo logístico (ver figura 10).

Figura 10

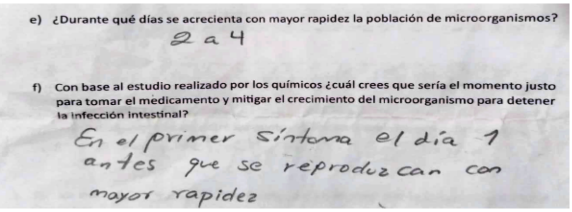
Gráficas en GeoGebra de la estudiante A_4 a la situación 1 y 2 superpuestas



El estudiante A_9 presenta un nivel alto de coherencia respecto a las respuestas dadas en 2.e) y f). Notamos de la Figura 11 que identifica el intervalo de mayor crecimiento en la población de microorganismos de manera correcta, y cuando da su interpretación, concluye que se debe dar la medicación justo antes de que se dé esa "*mayor rapidez*". Cabe mencionar que, de los comentarios realizados al momento de realizar la actividad, algunos estudiantes relacionaron esta mayor rapidez como un cambio, mencionando "*empezó lento, luego avanzó mucho y luego se alentó otra vez*". Inferimos que la lectura del gráfico nos introduce a la idea de razón de cambio previo a la construcción de derivada que se da en el nivel medio superior.

Figura 11

Respuesta de A_9 a 2.e) y f)



e) ¿Durante qué días se acrecienta con mayor rapidez la población de microorganismos?

2 a 4

f) Con base al estudio realizado por los químicos ¿cuál crees que sería el momento justo para tomar el medicamento y mitigar el crecimiento del microorganismo para detener la infección intestinal?

En el primer síntoma el día 1 antes que se reproduzcan con mayor rapidez

Conclusiones y discusión

Los resultados indicaron que los estudiantes reconocieron propiedades y representaciones características de la función logística, como, por ejemplo, la constante de capacidad de carga o de sustento del modelo matemático dado en cada situación problema y manifestado por ellos como el "*acotamiento*" o "*número máximo*". Es interesante ver que la gráfica de la función que realizaron en GeoGebra, tanto a mano alzada como con la instrucción del gráfico de datos de la tabla, permitió a los estudiantes manipular y "jugar" con la gráfica sin necesidad de cambiar su forma principal (forma sigmoidea), la cual también es una característica de la función logística.

Otro aspecto importante es que los estudiantes lograron establecer vínculos de la función logística con otros conceptos matemáticos relacionados como la variación, precedente de una idea intuitiva de razón de cambio y derivada, conceptos matemáticos que se estudian a profundidad en niveles educativos más avanzados como el medio superior y superior. Dichos conceptos son base para carreras profesionales de ciencias e ingenierías por lo que es relevante que se desarrollen estas ideas en el nivel educativo básico (secundaria) para fortalecer las bases conceptuales donde se construirán conceptos matemáticos especializados.

Un foco de atención que se da como resultado del uso de la herramienta tecnológica GeoGebra fue que los estudiantes lograron relacionar la representación algebraica de la función logística con su representación gráfica. Es decir, identificaron la forma característica de esta función como una forma cociente con exponencial, con potencia negativa en el denominador y en el numerador siempre la capacidad de carga, esto debido a la practicidad a la hora de realizar los cálculos necesarios en el llenado de tablas de datos. Al observar las representaciones gráficas y poderlas visualizar en GeoGebra, daban sentido a lo planteado en la situación problema. De acuerdo con el análisis de datos, los estudiantes fueron capaces de predecir el comportamiento de cada una de las situaciones problema respecto a la lectura de las gráficas. Es importante destacar, las respuestas de los estudiantes a las preguntas sobre lo que pasa en un futuro para cada situación, es decir, que la capacidad de predicción matemática permite entender el problema modelado.

Para finalizar queremos destacar que, los comentarios y las observaciones que los estudiantes realizaron, abonan sustancialmente hacia nuevas estrategias para el rediseño de las actividades (lo que de manera fortuita y casi sin planificar se dio), como por ejemplo, al realizar la gráfica $r(x)$ de la situación 1 y $p(x)$ de la situación 2 en el mismo plano coordenado (es decir, hacer la segunda sin borrar la primera), permitió que una estudiante observara que las gráficas se "*estacionan*" en sus respectivos "*números máximos*". Rápidamente notó que estos "*números máximos*" aparecen en la parte del denominador de las funciones dadas en su representación algebraica y representan una cota. Si se requiere replicar la actividad del Anexo A, se recomienda incluir un ítem 3 —a manera de reflexión- en el que se les indique a los estudiantes realizar las gráficas de las situaciones 1 y 2 en el mismo plano y observar con detenimiento sus representaciones gráficas y algebraicas para encontrar similitudes y preguntar a los estudiantes ¿qué pueden observar? Más particularmente, proponer al estudiante variar las capacidades de cargas de las funciones y visualizar su efecto en la gráfica.

De todo lo anterior podemos concluir que el uso de GeoGebra promueve la comprensión de la función logística en escenarios contextualizados al ser vista de manera dinámica en el software, relacionando sus distintas representaciones y generando las conexiones necesarias para dicha comprensión. Resaltamos la importancia de incorporar herramientas digitales en el currículo matemático y con ello enriquecer la experiencia educativa. Hacer uso de este recurso didáctico prepara mejor a los estudiantes para el uso de matemáticas en contextos reales y multidisciplinarios. Este estudio también sugiere la necesidad de continuar explorando y ampliando el uso de recursos tecnológicos en la educación matemática para abordar una variedad más amplia de conceptos y competencias matemáticas por lo que es relevante e importante la difusión de este.

Recomendamos que, las situaciones aquí planteadas podrían servir de apoyo al profesor de matemáticas en su práctica docente para la enseñanza de las funciones en general y muy particularmente como apoyo el profesor de ciencias con las herramientas matemáticas necesarias para su estudio, como lo es la función logística, para fortalecer lo visto en la materia de Biología (también dentro del campo formativo Saberes y Pensamiento Científico de la Nueva Escuela Mexicana). Se invita a realizar esta actividad en colaboración entre el profesor de matemáticas y el profesor de Ciencias, justo antes de que este último imparta el tema sobre las interacciones depredador-presa para el equilibrio de las poblaciones en un ecosistema. Así mismo se recomienda fomentar el uso de modelos matemáticos y herramientas tecnológicas como GeoGebra en el aula de clases.

Agradecimientos

Se agradece al comité organizador del X Taller Internacional Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación y a la Comunidad GeoGebra Latinoamericana por su apoyo para presentar esta investigación.

Referencias

Alpízar, M., Fernández, H., Morales, J. L., & Quesada, S. (2018). Dificultades y errores presentes en estudiantes de educación secundaria en el aprendizaje de la función lineal. *Revista de investigación y divulgación en matemática educativa, 9*(1), 6–19.

Artola, E. C., Mayoral, L. E., & Benarroch-Benarroch, A. (2016). Dificultades de aprendizaje de las representaciones gráficas cartesianas asociadas a biología de poblaciones en estudiantes de educación secundaria. Un estudio semiótico. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 13*(1), 36–52.

Bagni, G. T. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 7(1), 5–23.

Blomhøj, M. (2008). Modelización matemática-una teoría para la práctica. *Revista de Educación Matemática, RevEM, 23*(2), 2. https://doi.org/10.33044/revem.10419

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study*. Springer.

Braintrust tutors [BT] (2024). *Aprendizaje basado en problemas en matemáticas.* https://braintrusttutors.com/es/problem-based-learning-in-math/

Cenas-Chacón, F. Y., Gamboa-Ferrer, L. R., Blaz-Fernández, F. E., & Castro-Mendocilla, W. E. (2021). GeoGebra: herramienta tecnológica para el aprendizaje significativo de las matemáticas en universitarios. *Horizontes Revista de Investigación en Ciencias de la Educación, 5*(18), 382–390.

Chamoso, J. M., & Cáceres, M. J. (2019). Creación de tareas por futuros docentes de matemáticas a partir de contextos reales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 18*, 59–69.

Couoh, J. R. & Cabañas-Sánchez, G. (2013). Un estudio del límite al infinito en el nivel superior bajo el contexto de la resolución de problemas que involucran la función logística. En L. Sosa, J. Hernández, & E. Aparicio (Eds.), *Memoria de la XVI EIME* (pp. 316– 323). Red de Cimates. https://core.ac.uk/download/pdf/322888113.pdf

Domènech-Casal, J. (2020). Diseñando un simulador de ecosistemas. Una experiencia STEM de enseñanza de dinámica de los ecosistemas, funciones matemáticas y programación. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 17*(3), 320201–320217.

Espinoza, L. A. V., & Rodríguez, M. A. Y. (2021). La importancia de las TIC en la asignatura Matemática. *Cuadernos de Educación y Desarrollo, 13*(2).

Fernández, I., Riveros, V., & Montiel, G. (2017). Software educativo y las funciones matemáticas. Una estrategia de apropiación. *Omnia, 23*(1), 9–19.

Fowler, A. C. (1997). *Mathematical models in the applied sciences* (Vol. 17). Cambridge University Press.

Gatica, S. N., & Ares, O. E. (2012). La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. *Edmetic, 1*(2), 88–107.

GeoGebra. (2024). *Herramientas de GeoGebra y recursos.* GeoGebra GmbH https://www.geogebra.org/

Guamán, G. V. J., & Espinoza, F. E. E. (2022). Aprendizaje basado en problemas para el proceso de enseñanza-aprendizaje. *Revista Universidad y Sociedad, 14*(2), 124–131.

Limón, S., Mejía, J., Aguilera, J., Valero, A., & Malpica, J. (2021). *Biología 1. Infinita Secundaria* (3era ed.). Castillo.

Moreno-Jiménez, L. A. (2023). *Propuesta didáctica basada en las metodologías activas a través del uso del software GeoGebra para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas* [Tesis Doctoral, Ecuador-Pucese-Maestría en Pedagogía con Mención en Educación Técnica y Tecnológica].

Pérez, J. S. N., Garcés, M. F. L., Zurita, C. A. C., Enríquez, V. A. N., & Núñez, R. E. L. (2023). Software informático y su incidencia en el aprendizaje significativo de la geometría en los estudiantes de noveno año de educación general básica del colegio nacional picaihua. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, 7*(3), 4626–4644.

Perin, A. P., & Campos, C. R. (2020). Reflexiones sobre la importancia de la modelación matemática como estrategia inductora de competencias estadísticas. *Paradigma, 2*, 331–355.

Petrich, M., Gómez, A., Funes, S., López, J.L., & Tomasini, P. (2018). *Biología 1. Ciencias y Tecnología*. Ediciones Castillo.

Purcell, E.J., Varberg, D., & Rigdon, S.E. (2007). *Cálculo Diferencial e Integral* (9a ed.). Pearson.

Riba, C. C. E. (2017). La observación participante y no participante en perspectiva cualitativa. En Padró-Solanet, A., & Riba, C. C. E. (Eds.), *Análisis de datos en la administración pública II* (pp. 5–22). Universitat Oberta de Catalunya.

Sastre, G., & Araújo, U. F. (2008). *El aprendizaje basado en problemas, Una nueva perspectiva de la enseñanza en la universidad.* Editorial Gedisa.

Spivak, M. (2014). *Calculus* (3a ed.). Editorial Reverté.

Ulloa, I. J. T., & Rodríguez, C. J. A. (2010). *El modelo logístico: Una alternativa para el estudio del crecimiento poblacional de organismos.* CONACYT.

Valero, C. M. del S., & Lezama, A. J. (2020). Una experiencia didáctica con estudiantes de bachillerato en torno a la modelación de los datos del COVID19 en México. *El cálculo y su enseñanza, 15*(1), 1–19. https://doi.org/10.61174/recacym.v15i1.57

Vergel-Ortega, M., De Jesús Gallardo-Pérez, H., & Portal-Domingo, R. (2020). Las tecnologías de la información y las comunicaciones en el fortalecimiento del pensamiento físico matemático. *AIBI Revista de investigación, administración e ingeniería, 8*(S1), 83–89.

Villarreal, M. E. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Virtualidad, Educación y Ciencia, 3*(5), 73.

Vidal, M., Guinovart, R., Baldoquín, W., Valdivia, N. C., & Morales, W. (2020). Modelos matemáticos para el control epidemiológico. *Educación Médica Superior, 34*(2).

Zill, D., Cullen, M. (2008). *Matemáticas avanzadas para ingeniería, Ecuaciones Diferenciales* (vol. 1), McGraw-Hill/Interamericana.

Anexo

A continuación, se presenta la Actividad aplicada para este trabajo de investigación. Las situaciones problema planteadas fueron construidas y adaptadas por las autoras al contexto del estudiante, pero su fundamentación matemática es tomada de ejemplos dados en Vidal et al. (2020) y Zill (2008).

Lee las siguientes situaciones y contesta lo que se te pide.

1. En una escuela secundaria de Chilpancingo, Timón, el niño más chismoso del 3er grado grupo X difundió un rumor en todo en plantel sobre la nueva novia de su compañero Pumba. En el plantel hay un estimado de mil personas entre estudiantes, profesores, directivos y trabajadores, y se supone que la rapidez con la que se propaga la información es proporcional no solo al número de personas que son informadas del rumor, sino también al número de personas que aún no lo saben (la constante de proporcionalidad es 0.00093). La cantidad de personas que se fueron enterando del rumor cada día se registró en la siguiente tabla.

Día	0	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20
Personas enteradas	1	8	20	50	165	270	570	750	898	990	995	998

a) ¿Encuentras alguna relación entre los puntos dados en la tabla? Justifica tu respuesta.
b) Con los datos de la tabla, localiza los puntos en el plano coordenado utilizando el software GeoGebra.
c) Realiza la gráfica que represente los datos de la tabla dada.
d) ¿Crees que exista alguna función que se ajuste a los datos determinados?, ¿por qué?
e) Dibuja en GeoGebra la gráfica de la función

$$r(x) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0.93x}}$$

f) ¿Qué similitudes o diferencias observas en la gráfica que dibujaste y la gráfica de *r*? (Describe tu respuesta de manera detallada).

Contesta de acuerdo con la gráfica:

g) ¿Cuántas personas crees que ya sabían del rumor en el día 9?
h) ¿Cuándo se propaga con mayor rapidez el rumor?
i) ¿En cuánto tiempo crees que podría decirse que “todo el plantel” sabe del rumor?
j) ¿Qué interpretación le puedes dar a esta situación? Explica detalladamente.

2. Los químicos del laboratorio MedicKing, se encuentran estudiando un microorganismo que se encuentra en la zona de Tierra Caliente de Guerrero, el cuál es causante de infecciones en el intestino grueso que provoca dolor abdominal, diarrea y deshidratación. Con la finalidad de determinar el momento óptimo para la ingesta de algún medicamento que detenga la infección dada por el microorganismo, se realizó un estudio de cultivo. Para el estudio se colocaron cinco ejemplares en un tubo de ensayo y se contó el número diario de individuos durante seis días. Se encontró que la función logística que modela este crecimiento poblacional es:

$$p(x) = \frac{375}{1 + 74e^{-2.4x}}$$

a) ¿Qué crees que representan las variables x y p de la función anterior?
b) ¿Qué puedes decir del número 375?
c) En GeoGebra, dibuja la gráfica de la función p.
d) Realiza una tabla de los datos tomados durante los 6 días de observación, y marca los puntos de esta tabla sobre la gráfica del inciso c).
e) ¿Durante qué días se acrecienta con mayor rapidez la población de microorganismos?
f) Con base al estudio realizado por los químicos ¿cuál crees que sería el momento justo para tomar el medicamento y mitigar el crecimiento del microorganismo para detener la infección intestinal?