

La resolución de un problema verbal mediante sistemas de ecuaciones lineales y la hoja de cálculo

Verónica Vargas Alejo ¹

Carlos Valenzuela García ²

Martha E. Aguiar Barrera ³

Resumen

La hoja de cálculo, si bien no se creó con un propósito educativo, actualmente es considerada como una herramienta cognitiva que se propone para la enseñanza de las matemáticas. Por ello, el objetivo de esta investigación es identificar las técnicas empleadas por un grupo de estudiantes de un posgrado en enseñanza de las matemáticas (futuros profesores) al resolver un problema verbal mediante la hoja de cálculo, así como conocer sus opiniones sobre su uso para la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales. Con esto, se busca responder a la pregunta: ¿cómo un grupo de futuros profesores resuelven un problema mediante la hoja de cálculo y qué potencial le atribuyen a su uso para el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales? El marco conceptual que sustenta esta investigación es conocido como Tarea-Técnica-Teoría (T-T-T) propuesto por Artigue. Es un estudio de caso instrumental conformado por cuatro estudiantes de posgrado. Como resultado, se identificaron diversas técnicas para resolver el problema. Todos los estudiantes iniciaron con una técnica de rutina que fue organizar datos, incógnitas, relaciones y, por ende, buscar reconocer la estructura del problema. Uno de los estudiantes ejecutó técnicas en lápiz y papel y los otros tres, de ensayo numérico.

Palabras clave

Sistemas de ecuaciones lineales, Hoja de cálculo, Génesis Instrumental.

¹ veronica.vargas@academicos.udg.mx
Universidad de Guadalajara, México
<http://orcid.org/0000-0002-7431-0568>

² carlos.valenzuela@academicos.udg.mx
Universidad de Guadalajara, México
<https://orcid.org/0000-0002-0776-5757>

³ martha.aguiar@academicos.udg.mx
Universidad de Guadalajara, México
<https://orcid.org/0000-0001-7902-3405>

Vargas Alejo, V., Valenzuela García, C., & Aguiar Barrera, M. E. (2024). La resolución de un problema verbal mediante sistemas de ecuaciones lineales y la hoja de cálculo. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2024* (pp. 171–191). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/02-08>

Introducción

De acuerdo con los principios básicos del National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000), la incorporación de la tecnología digital para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es fundamental. En México, la Secretaría de Educación Pública [SEP] (2011) ha promovido su uso en las aulas a lo largo de las distintas reformas educativas. Como evidencia pueden consultarse los libros de texto para la educación primaria derivados de esa reforma, en los que se proponen enlaces a aplicaciones y diversos materiales. Otro ejemplo son los recursos digitales diseñados para su uso en educación secundaria, como software y otras herramientas (SEP, 2000).

A pesar de la tendencia actual de integrar tecnologías digitales en las clases de matemáticas, esperando que los profesores las utilicen (Haspekian & Kieran, 2023), se han encontrado múltiples factores de resistencia. Entre ellos, de acuerdo con Hoyles et al. (2020) se pueden citar, la falta de fondos para mantener y darle continuidad a proyectos, la inercia escolar, la falta de programas de formación docente y el temor de los profesores para innovar en el aula ante la presión por terminar a tiempo un plan de estudios.

Por lo anterior, es necesario destacar que la incorporación de las tecnologías digitales en el aula no viene por sí sola, sino que conlleva varios desafíos. No solo se trata de encomendar a los profesores que hagan uso de ella para transformar su enseñanza, sino también para fomentar una visión sobre la importancia de su uso y el potencial que esto puede tener para el aprendizaje de las matemáticas. Al respecto, como menciona Drier (2001), un desafío es preparar a los profesores como usuarios de las tecnologías digitales, además de que ellos deben aprender sobre las tecnologías para ser capaces de diseñar actividades que promuevan el aprendizaje de los estudiantes, de tal manera que puedan hacer uso de la tecnología digital como una herramienta cognitiva.

Aun cuando la incorporación de la tecnología digital ha sido un desafío para la educación, son grandes los esfuerzos que se han hecho desde la investigación para mostrar su potencial para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En particular, el uso de la hoja electrónica de cálculo se ha empleado para la enseñanza de varios conceptos matemáticos, a pesar de que, como lo menciona Angel et al. (2023), este recurso no surgió para atender problemas específicos de la educación.

Para la enseñanza del álgebra, en SEP (2000) se propone una serie de actividades para desarrollarse haciendo uso de Excel. La intención es promover nuevas formas de enseñanza, en las que se contempla la manipulación directa de objetos o de representaciones de objetos matemáticos, como ecuaciones y la variación lineal. Por su parte, Drier (2001) resalta las

cualidades que tiene el uso de la hoja de cálculo. Es un medio que a través de sus herramientas promueve la interacción; vincula múltiples representaciones, como son la gráfica, tabular y algebraica; además, permite modelar problemas en distintos contextos, por ejemplo, los problemas de tasa.

En suma, el uso de la tecnología digital junto con nuevos marcos teóricos para describir los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha modificado la manera de cómo el álgebra es percibida en la educación matemática (Kieran, 2006; Haspekian & Kieran, 2023). La posibilidad de conectar el lenguaje algebraico con tablas de valores y gráficos, mediante la incorporación de la hoja de cálculo (Excel), permite a los estudiantes tratar a los objetos algebraicos de una manera dinámica, diferente de cómo se tratan en los ambientes de enseñanza de lápiz y papel (Rojano & Sutherland, 1993; Sutherland & Rojano, 1993; Vargas & Guzmán, 2007a). A partir de varias investigaciones (Dettori et al., 2001; Mochón et al., 2000; Rojano & Sutherland, 1993; Tabach & Friedlander, 2004; Tabach et al., 2006) se conoce el potencial y las limitaciones de estas herramientas para propiciar aprendizajes de matemáticas en los estudiantes.

Por tanto, hay evidencia de que esta herramienta puede apoyar el entendimiento de conceptos relacionados con sistemas de ecuaciones lineales, específicamente al resolver problemas. Sin embargo, entre los profesores en servicio o en formación, persiste la incertidumbre sobre cómo podrían integrar la hoja de cálculo (Excel) tanto para resolver problemas y habilidades de resolución como para apoyar el desarrollo de conceptos algebraicos.

En dicho contexto, la investigación aquí reportada tiene como objetivo identificar las técnicas empleadas por un grupo de futuros profesores al resolver un problema verbal, en el que subyace un sistema de ecuaciones lineales y se hace uso de la hoja de cálculo (Excel), así como conocer sus opiniones sobre el uso de Excel para la enseñanza de sistemas lineales. Con esto, se busca responder la siguiente pregunta de investigación ¿Cómo abordan los estudiantes de posgrado en enseñanza de las matemáticas (futuros profesores) la resolución de problemas mediante el uso de hojas de cálculo y qué potencial le atribuyen a su uso para mejorar el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales? Para ello, se propone resolver un problema verbal de tasa, el cual puede ser modelado mediante un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. En este capítulo describimos el proceso mediante el cual cuatro estudiantes de posgrado resolvieron este problema y cómo describieron su experiencia. En esta descripción empleamos elementos teóricos de la génesis instrumental.

Marco conceptual

Como marco conceptual se retoman elementos de la génesis instrumental (Haspekian, 2005), en particular, el papel que juega la técnica en el aprendi-

zaje del álgebra (Artigue, 2002; Lagrange, 2000). El papel de la triada: *tarea, técnica y teoría* en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se ha discutido por autores como Artigue (2002) y Lagrange (2000). Chevallard (1999) argumenta que las *tareas*, en general son dadas en términos de verbos, por ejemplo, a) resolver una ecuación; b) factorizar una expresión algebraica, etc. La *técnica* es una manera de resolver una tarea, es un ensamble complejo de razonamiento y trabajo rutinario. Ésta puede ser evaluada y percibida en términos de su valor pragmático y su valor epistémico (Artigue, 2002, p. 248); es decir, su potencial productivo, y su contribución a la comprensión de los objetos involucrados. Las *teorías* tratan de un nivel superior de justificación-explicación-producción, retomando el discurso racional que justifica y explica el uso de las técnicas o bien generando nuevas técnicas para llevar a cabo una tarea.

Se incorporan, también, elementos de la contribución de Bednarz y Janvier (1996) y Bednarz et al. (2003), especialmente en relación con el tipo de problemas verbales de tasa, conocidos como problemas no conectados y denominados algebraicos. Estos problemas se caracterizan por requerir operaciones con varias cantidades desconocidas simultáneamente, lo que puede generar la necesidad de establecer ecuaciones para resolverlos.

En la investigación de Vargas-Alejo y Guzmán-Hernández (2012) se encontró que al resolver este tipo de problemas verbales de tasa con la hoja de cálculo de Excel pueden emerger varias técnicas, dependiendo del conocimiento de la herramienta y del conocimiento matemático. Entre las técnicas se encuentran las siguientes.

- *Calculadora*. Los alumnos usan la hoja de cálculo para identificar la o las incógnitas del problema, así como las cantidades conocidas y las relaciones establecidas entre estas. No escriben fórmulas que relacionen celdas entre sí o puedan ser arrastradas, sino que escriben expresiones aritméticas, por ejemplo, $= 300 + 800$. Utilizan cualquier celda para escribir las expresiones aritméticas o estas son ordenadas en columnas.
- *Fórmulas recursivas*. Los estudiantes escriben fórmulas recursivas e identifican que en las columnas de la tabla aparecen sucesiones numéricas, cuyo comportamiento se rige por cierto patrón, el cual escriben mediante fórmulas recursivas. El primer dato de la columna es tomado como el valor inicial y lo utilizan para generar el siguiente valor. Generan términos sucesivos en una columna añadiendo d , la constante de diferencia, a cada valor de las celdas de la columna.
- *Celda como variable*. Los estudiantes organizan la información en filas, de modo que no les posibilita arrastrar fórmulas en su hoja de cálculo, sino que la usan como contenedor de números. En ellas introducen varios valores, que están relacionados con otros datos

mediante fórmulas, las cuales generan valores y permiten resolver el problema.

- *Relación entre celdas de la misma fila, tomando una columna o varias de ellas como variables.* Los estudiantes identifican en la hoja de cálculo relaciones entre datos de diferentes columnas y escriben fórmulas, que relacionan celdas de distintas columnas y misma fila. Posteriormente, las arrastran a lo largo de las columnas. Los alumnos organizan la información de tal manera que logran manipular celdas referentes de manera general (todos los valores p se pueden meter en una columna). (Vargas-Alejo & Guzmán-Hernández, 2012, p. 96)

Las técnicas *fórmulas recursivas y celda como variable* se reconocen en la literatura de investigación como técnicas comúnmente usadas por los estudiantes al resolver un problema con hoja de cálculo de Excel (Ainley et al., 2005; Friedlander, 1999; Haspekian, 2005; Sutherland & Rojano, 1993; Rojano & Sutherland, 1993). El valor epistémico de las técnicas *Celda como variable* y *Relación entre celdas de la misma fila, tomando una columna o varias de ellas como variables* es alto ya que permiten abordar conceptos como variable, variación, ecuación, incógnita, función y solución, asociados a sistemas de ecuaciones lineales.

Cuando las técnicas mencionadas previamente se emplean para resolver problemas de tasa no conectados, fomentan la realización de una gran cantidad de operaciones o ensayos numéricos. De acuerdo con Wilson et al. (2005), algunas de estas técnicas, con la orientación del docente, se pueden llevar a la formulación de un sistema de ecuaciones lineales en su representación algebraica. Sin embargo, varios investigadores (Mochón et al., 2000; Rojano & Sutherland, 1993; Sutherland & Rojano, 1993) coinciden en que el mundo algebraico que se experimenta en las hojas de cálculo en comparación con el lápiz y papel (donde surgen variables y fórmulas, desaparecen incógnitas y ecuaciones, y se adquiere nuevo conocimiento instrumental a medida que se utiliza la función de copia...), es bastante diferente. (Haspekian & Kieran, 2023, p. 6)

Por consiguiente, el potencial atribuido a la hoja de cálculo, como señalan Haspekian y Kieran (2023) se relaciona con su capacidad como herramienta de generalización u optimización que permite abordar problemas de generalización/patrones, de optimización o modelo, donde se fomentan procesos aritméticos de ensayo numérico. Las soluciones suelen ser aproximadas y uno de los objetos matemáticos explorados es la variable, la cual puede ser representada en forma de columnas, celdas o filas.

Metodología

Esta investigación es cualitativa y se desarrolla desde un estudio de caso instrumental (Yin, 1984) para indagar sobre las técnicas que sigue un grupo

de estudiantes de posgrado en enseñanza de las matemáticas al resolver un problema mediante la hoja de cálculo, así como indagar sobre sus opiniones sobre el potencial que podría atribuirse a este recurso para potenciar el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales.

El caso se compone de un grupo de cuatro estudiantes de posgrado de formación de profesores de matemáticas de una universidad pública en México, a quienes se han codificado como $E1$, $E2$, $E3$, $E4$. Estos estudiantes de posgrado estaban tomando un curso sobre Teorías de Enseñanza de las Matemáticas, y el problema se implementó antes de revisar el tema del potencial del uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Todos los estudiantes de posgrado tenían experiencia en la enseñanza, habiendo impartido asesorías o al menos un curso de matemáticas en secundaria, bachillerato o universidad.

La tarea, en este caso particular, fue resolver el problema verbal siguiente:

PROBLEMA 1. Una fábrica tiene dos tipos de objetos A y B. El objeto A necesita 2.4 kg de acero y 3 horas de fabricación. El objeto B necesita 4 kg de acero y 2 horas de fabricación. Calcule el número de objetos de cada clase, sabiendo que se utilizó para producirlos 80 kg de acero y 67 horas de trabajo. (Bednarz et al., 2003, p. 14)

El problema puede resolverse mediante el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 2.4a + 4b = 80 \\ 3a + 2b = 67 \end{cases}$$

Donde a es la cantidad de objetos tipo A y b la cantidad de objetos tipo B.

El PROBLEMA 1 se implementó durante una sesión síncrona en Meet de una hora, siguiendo las siguientes fases.

1. Entrega del problema a cada estudiante de posgrado.
2. Resolución individual del problema utilizando la hoja de cálculo.
3. Presentación de técnicas utilizadas para resolver el problema.
4. Discusión e interacción grupal dirigida por el profesor.
5. Presentación de investigaciones relacionadas con el uso de la hoja de cálculo y su uso en el bachillerato para resolver este tipo de problemas.
6. Finalmente, se generó un espacio de discusión sobre el potencial de la hoja de cálculo.

El ambiente de resolución del problema fue virtual, síncrono, mediante la plataforma de Meet. Cada estudiante de posgrado se encontraba en su casa atendiendo la clase. El papel de la investigadora consistió en propiciar un ambiente en el que los estudiantes de posgrado fueran alentados a explorar, formular y validar hipótesis relacionadas con el problema, con expresar y discutir ideas, con tomar decisiones y evaluar sus técnicas.

Se utilizaron los siguientes instrumentos de recolección de datos: video-grabación de la sesión, archivos de Excel de los estudiantes de posgrado, hojas de papel con procedimientos y la bitácora del docente. Así, tomando en cuenta las ideas de Sampieri et al. (2014) se hace el análisis del contenido que aparece en el discurso y producciones de los estudiantes que conforman el caso de estudio. La unidad de análisis consiste en las técnicas que emplearon los estudiantes para resolver el PROBLEMA 1. Las categorías de análisis son, por un lado, el valor epistémico de dichas técnicas en términos de su conexión con los significados del álgebra, para esto, algunas subcategorías que se identificaron son por ejemplo, la síntesis en la hoja de cálculo, uso de la celda como variable, y otras. Por otro lado, las opiniones de los estudiantes de posgrado, en las cuales se contemplan como subcategorías, el potencial y las limitantes del uso de la hoja de cálculo para resolver un problema del tipo que se estudia en esta investigación.

Resultados y Discusión

Se analizaron las técnicas utilizadas por los cuatro estudiantes de posgrado para resolver el PROBLEMA 1. Tras completar las dos primeras etapas (entrega del problema a cada estudiante y resolución individual del mismo utilizando una hoja de cálculo), los estudiantes de posgrado (*E1*, *E2*, *E3* y *E4*) notaron al analizar el PROBLEMA 1 que podría ser resuelto mediante un sistema de ecuaciones lineales. Todos identificaron los datos, las incógnitas y las condiciones. Sin embargo, dada la instrucción de utilizar la hoja de cálculo, los estudiantes de posgrado expresaron que el desafío consistió en implementar esta indicación. A continuación, se presentan extractos de las descripciones proporcionadas por los estudiantes de posgrado sobre su proceso de resolución, a modo de ilustración.

Estudiante 1: *El chiste es usar Excel y Excel es bueno para calcular en tablas.*

Estudiante 2: *Yo dije: pues es un sistema de ecuaciones. Puedo programar Excel para resolver el sistema de ecuaciones, pero probablemente es muy obvio. Entonces lo vi como un reto y pensé vamos a ver cómo sale con tanteo.*

Estudiante 3: *Lo iba a resolver en papel, pero como pidió que utilizáramos una herramienta, me fui a GeoGebra... Puse las dos ecuaciones y se intersecan en 15, 11... En Excel puse las cantidades que nos dijeron [describió las fórmulas utilizadas]*

Estudiante 4: *Abrí Excel y dije: no sé qué hacer. Mejor lo resuelvo primero a mano y ya que tenga una respuesta entonces analizo qué es lo que tengo que hacer en Excel.*

El desafío que enfrentaron los estudiantes de posgrado al recibir la instrucción de “usar la hoja de cálculo de Excel” se debió a su falta de experiencia previa en la utilización de esta herramienta para resolver problemas. Este hallazgo está en línea con la idea de Haspekian y Kieran

(2023), quienes plantean que el entorno tradicional de lápiz y papel sigue siendo dominante en la enseñanza de las matemáticas en las escuelas.

A partir de las fases 2 y 3, se identificaron las siguientes técnicas utilizadas por los estudiantes de posgrado.

Técnica de E1, sintetizando relaciones en la hoja de cálculo

E1 escribió los datos y relaciones identificadas en el PROBLEMA 1 en las columnas A, B y C (Figura 1). Su técnica mostró el trabajo de rutina de escritura de datos, acompañado de un razonamiento para resolver el problema, el cual se detalla a continuación.

Basándose en las relaciones identificadas, comenzó suponiendo valores para la cantidad de objetos tipo B (columna M), empezando con la cantidad de cero. Luego, escribió fórmulas en las columnas H-K que, mediante ensayo numérico, le permitieron obtener la solución (Figura 2).

Estudiante 1: *Lo que hice fue sacar esta fórmula (celda H2, Figura 1), que es el total del tiempo. Le voy a restar este contador (celda M1), multiplicado por el tiempo del objeto B. Lo que estoy haciendo es asumir que esto es la cantidad del objeto B (columna M) y aquí estoy expresando la cantidad de objetos del tipo A (columna H).*

Figura 1

Técnica inicial de E1 para resolver el PROBLEMA 1

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|----|-------|--------|----------|-----|---|---|---|----------|-------|--------|----------|---|----|
| 1 | | Tiempo | Material | | | | | | | | | | 0 |
| 2 | A | | 3 | 2.4 | | | | 22.33333 | 53.6 | -49.6 | 22.33333 | | 1 |
| 3 | B | | 2 | 4 | | | | 21.66667 | 56 | -52 | 22.66667 | | 2 |
| 4 | Total | | 67 | 80 | | | | 21 | 58.4 | -54.4 | 23 | | 3 |
| 5 | | | | | | | | 20.33333 | 60.8 | -56.8 | 23.33333 | | 4 |
| 6 | | | | | | | | 19.66667 | 63.2 | -59.2 | 23.66667 | | 5 |
| 7 | | | | | | | | 19 | 65.6 | -61.6 | 24 | | 6 |
| 8 | | | | | | | | 18.33333 | 68 | -64 | 24.33333 | | 7 |
| 9 | | | | | | | | 17.66667 | 70.4 | -66.4 | 24.66667 | | 8 |
| 10 | | | | | | | | 17 | 72.8 | -68.8 | 25 | | 9 |
| 11 | | | | | | | | 16.33333 | 75.2 | -71.2 | 25.33333 | | 10 |
| 12 | | | | | | | | 15.66667 | 77.6 | -73.6 | 25.66667 | | 11 |
| 13 | | | | | | | | 15 | 80 | -76 | 26 | | 12 |
| 14 | | | | | | | | 14.33333 | 82.4 | -78.4 | 26.33333 | | 13 |
| 15 | | | | | | | | 13.66667 | 84.8 | -80.8 | 26.66667 | | 14 |
| 16 | | | | | | | | 13 | 87.2 | -83.2 | 27 | | 15 |
| 17 | | | | | | | | 12.33333 | 89.6 | -85.6 | 27.33333 | | 16 |
| 18 | | | | | | | | 11.66667 | 92 | -88 | 27.66667 | | 17 |
| 19 | | | | | | | | 11 | 94.4 | -90.4 | 28 | | 18 |
| 20 | | | | | | | | 10.33333 | 96.8 | -92.8 | 28.33333 | | 19 |
| 21 | | | | | | | | 9.66667 | 99.2 | -95.2 | 28.66667 | | 20 |
| 22 | | | | | | | | 9 | 101.6 | -97.6 | 29 | | 21 |
| 23 | | | | | | | | 8.33333 | 104 | -100 | 29.33333 | | 22 |
| 24 | | | | | | | | 7.66667 | 106.4 | -102.4 | 29.66667 | | 23 |
| 25 | | | | | | | | 7 | 108.8 | -104.8 | 30 | | 24 |
| 26 | | | | | | | | 6.33333 | 111.2 | -107.2 | 30.33333 | | 25 |
| 27 | | | | | | | | 5.66667 | 113.6 | -109.6 | 30.66667 | | 26 |
| 28 | | | | | | | | 5 | 116 | -112 | 31 | | 27 |
| 29 | | | | | | | | 4.33333 | 118.4 | -114.4 | 31.33333 | | 28 |
| 30 | | | | | | | | 3.66667 | 120.8 | -116.8 | 31.66667 | | 29 |
| 31 | | | | | | | | 3 | 123.2 | -119.2 | 32 | | 30 |
| 32 | | | | | | | | 2.33333 | 125.6 | -121.6 | 32.33333 | | 31 |
| 33 | | | | | | | | 1.66667 | 128 | -124 | 32.66667 | | 32 |
| 34 | | | | | | | | 1 | 130.4 | -126.4 | 33 | | 33 |
| 35 | | | | | | | | 0.33333 | 132.8 | -128.8 | 33.33333 | | 34 |

Durante su presentación al grupo y discusión grupal, E1 notó un par de errores en el ingreso de datos en su procedimiento. Sin embargo, debido a su comprensión clara del proceso, pudo corregirlos y encontrar la solución

en las filas 12 y 13. Su técnica implicó la creación de una columna variable (cantidad de objetos tipo B), la escritura de las relaciones identificadas en el problema, de manera sintetizada utilizando el lenguaje de la hoja de cálculo, y la búsqueda de la solución mediante el arrastre de fórmulas por columna en Excel, basadas en los valores de la columna M.

Figura 2
Fórmulas utilizadas en la técnica de E1 para resolver el PROBLEMA 1

| | A | B | C | D | H | I | J | K | L |
|----|-------|--------|----------|---|-------------------------|----------------------|-----------|----------|----|
| 1 | | Tiempo | Material | | | | | | 0 |
| 2 | A | 3 | 2.4 | | =(\$B4-M1*\$B53)/\$B52 | =H2*\$C52+\$C53*M1 | =5C53-I2 | =M1+H2 | 1 |
| 3 | B | 2 | 4 | | =(\$B4-M2*\$B53)/\$B52 | =H3*\$C52+\$C53*M2 | =5C53-I3 | =M2+H3 | 2 |
| 4 | Total | 67 | 80 | | =(\$B4-M3*\$B53)/\$B52 | =H4*\$C52+\$C53*M3 | =5C53-I4 | =M3+H4 | 3 |
| 5 | | | | | =(\$B4-M4*\$B53)/\$B52 | =H5*\$C52+\$C53*M4 | =5C53-I5 | =M4+H5 | 4 |
| 6 | | | | | =(\$B4-M5*\$B53)/\$B52 | =H6*\$C52+\$C53*M5 | =5C53-I6 | =M5+H6 | 5 |
| 7 | | | | | =(\$B4-M6*\$B53)/\$B52 | =H7*\$C52+\$C53*M6 | =5C53-I7 | =M6+H7 | 6 |
| 8 | | | | | =(\$B4-M7*\$B53)/\$B52 | =H8*\$C52+\$C53*M7 | =5C53-I8 | =M7+H8 | 7 |
| 9 | | | | | =(\$B4-M8*\$B53)/\$B52 | =H9*\$C52+\$C53*M8 | =5C53-I9 | =M8+H9 | 8 |
| 10 | | | | | =(\$B4-M9*\$B53)/\$B52 | =H10*\$C52+\$C53*M9 | =5C53-I10 | =M9+H10 | 9 |
| 11 | | | | | =(\$B4-M10*\$B53)/\$B52 | =H11*\$C52+\$C53*M10 | =5C53-I11 | =M10+H11 | 10 |
| 12 | | | | | =(\$B4-M11*\$B53)/\$B52 | =H12*\$C52+\$C53*M11 | =5C53-I12 | =M11+H12 | 11 |
| 13 | | | | | =(\$B4-M12*\$B53)/\$B52 | =H13*\$C52+\$C53*M12 | =5C53-I13 | =M12+H13 | 12 |
| 14 | | | | | =(\$B4-M13*\$B53)/\$B52 | =H14*\$C52+\$C53*M13 | =5C53-I14 | =M13+H14 | 13 |
| 15 | | | | | =(\$B4-M14*\$B53)/\$B52 | =H15*\$C52+\$C53*M14 | =5C53-I15 | =M14+H15 | 14 |

Técnica de E2, celdas como variables

La técnica de E2 se basó en el uso de celdas como variables (Figura 3). Comenzó escribiendo los datos del problema de manera similar a E1 (celdas A, B y C, filas 1, 2 y 3) pero luego los borró. Su organización de datos y operaciones fue diferente y tuvo como propósito facilitar la resolución del problema con la hoja de cálculo. Su técnica inicial implicó un trabajo de rutina al escribir los datos una vez identificados. A continuación se describe su razonamiento.

Figura 3
Técnica de E2 para resolver el PROBLEMA 1

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|----|--|----|------|----|----|-----|-------|----|----|------|-------|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | Una fábrica tiene dos tipos de objetos A y B. El objeto A necesita 2.4kg de acero y 3 hrs de fabricación. El objeto B necesita 4kg de acero y 2hrs de fabricación. Calcule | | | | | | | | | | | |
| 3 | A | kg | hrs | B | kg | hrs | TOTAL | A | B | 80kg | 67hrs | |
| 4 | | 1 | 2.4 | 3 | 1 | 4 | Opc.1 | 15 | 11 | 80 | 67 | |
| 5 | | 2 | 4.8 | 6 | 2 | 8 | Opc.2 | 10 | 14 | 80 | 58 | |
| 6 | | 3 | 7.2 | 9 | 3 | 12 | 6 | | | 0 | 0 | |
| 7 | | 4 | 9.6 | 12 | 4 | 16 | 8 | | | 0 | 0 | |
| 8 | | 5 | 12 | 15 | 5 | 20 | 10 | | | 0 | 0 | |
| 9 | | 6 | 14.4 | 18 | 6 | 24 | 12 | | | 0 | 0 | |
| 10 | | 7 | 16.8 | 21 | 7 | 28 | 14 | | | 0 | 0 | |
| 11 | | 8 | 19.2 | 24 | 8 | 32 | 16 | | | | | |
| 12 | | 9 | 21.6 | 27 | 9 | 36 | 18 | | | | | |
| 13 | | 10 | 24 | 30 | 10 | 40 | 20 | | | | | |
| 14 | | 11 | 26.4 | 33 | 11 | 44 | 22 | | | | | |
| 15 | | 12 | 28.8 | 36 | 12 | 48 | 24 | | | | | |
| 16 | | 13 | 31.2 | 39 | 13 | 52 | 26 | | | | | |
| 17 | | 14 | 33.6 | 42 | 14 | 56 | 28 | | | | | |
| 18 | | 15 | 36 | 45 | 15 | 60 | 30 | | | | | |
| 19 | | 16 | 38.4 | 48 | 16 | 64 | 32 | | | | | |
| 20 | | 17 | 40.8 | 51 | 17 | 68 | 34 | | | | | |
| 21 | | 18 | 43.2 | 54 | 18 | 72 | 36 | | | | | |
| 22 | | 19 | 45.6 | 57 | 19 | 76 | 38 | | | | | |
| 23 | | 20 | 48 | 60 | 20 | 80 | 40 | | | | | |

Utilizó tres columnas para calcular la cantidad de acero y horas requeridas para fabricar los objetos tipo A (columnas B, C y D), seguidas de otras tres columnas para calcular la cantidad de acero y horas requeridas para fabricar los objetos tipo B (columnas E, F y G).

Luego, incluyó fórmulas en K4 y L4 (Figura 4) para realizar ensayos numéricos en las columnas I y J, buscando la solución mediante ensayo numérico. E2 se apoyó en anotaciones en su cuaderno para registrar algunos de sus ensayos numéricos hasta encontrar la solución (celdas I4, J4). Parte de la explicación de su procedimiento se observa en el siguiente fragmento.

Estudiante 2: *Básicamente lo que hacía era... opción 2 [señaló la celda H5] ¿qué pasa cuando tengo 10 objetos del A? [señaló la celda I5]. Este [señaló la celda K5], lo que hace es calcular cuánto material me da los 10 kilogramos.*

Las fórmulas que escribió en K5 y L5 se muestran en la Figura 3. Estas se relacionan con el SEL que subyace en el problema.

$$\begin{cases} 2.4a + 4b = 80 \\ 3a + 2b = 67 \end{cases}$$

Donde *a*, cantidad de objetos tipo A, corresponde a la celda I5, y *b*, la cantidad de objetos tipo B, corresponde a la celda J5.

Figura 4

Fórmulas utilizadas en la técnica de E2 para resolver el PROBLEMA 1

| | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|----|------------|-----------|-----------|----|-----------|-----------|-------|----|----|--------------------|--------------------|
| 2 | Una fabric | | | | | | | | | | |
| 3 | A | kg | hrs | B | kg | hrs | TOTAL | A | B | 80kg | 67hrs |
| 4 | 1 | 2.4 | 3 | 1 | 4 | 2 | Opc.1 | 15 | 11 | =I4*SC54+J4*SF54 | =I4*SD54+J4*SG54 |
| 5 | 2 | =SC54*B5 | =SD54*B5 | 2 | =SF54*E5 | =SG54*E5 | Opc.2 | 10 | 14 | =I5*SC54+J5*SF54 | =I5*SD54+J5*SG54 |
| 6 | 3 | =SC54*B6 | =SD54*B6 | 3 | =SF54*E6 | =SG54*E6 | | | | =I6*SC54+J6*SF54 | =I6*SD54+J6*SG54 |
| 7 | 4 | =SC54*B7 | =SD54*B7 | 4 | =SF54*E7 | =SG54*E7 | | | | =I7*SC54+J7*SF54 | =I7*SD54+J7*SG54 |
| 8 | 5 | =SC54*B8 | =SD54*B8 | 5 | =SF54*E8 | =SG54*E8 | | | | =I8*SC54+J8*SF54 | =I8*SD54+J8*SG54 |
| 9 | 6 | =SC54*B9 | =SD54*B9 | 6 | =SF54*E9 | =SG54*E9 | | | | =I9*SC54+J9*SF54 | =I9*SD54+J9*SG54 |
| 10 | 7 | =SC54*B10 | =SD54*B10 | 7 | =SF54*E10 | =SG54*E10 | | | | =I10*SC54+J10*SF54 | =I10*SD54+J10*SG54 |
| 11 | 8 | =SC54*B11 | =SD54*B11 | 8 | =SF54*E11 | =SG54*E11 | | | | | |
| 12 | 9 | =SC54*B12 | =SD54*B12 | 9 | =SF54*E12 | =SG54*E12 | | | | | |
| 13 | 10 | =SC54*B13 | =SD54*B13 | 10 | =SF54*E13 | =SG54*E13 | | | | | |

El acomodo en las celdas I4-L4 se parece a la técnica celdas como variable (Vargas & Guzmán, 2007a), ya que el E2 organizó la información en las filas 4 y 5, columnas H-L de modo que usaron las celdas I4, J4 como contenedoras de números. En ellas introdujeron varios valores, que estaban relacionados con otros datos mediante fórmulas (celdas K4, L4), las cuales generaron valores y permitieron resolver el problema.

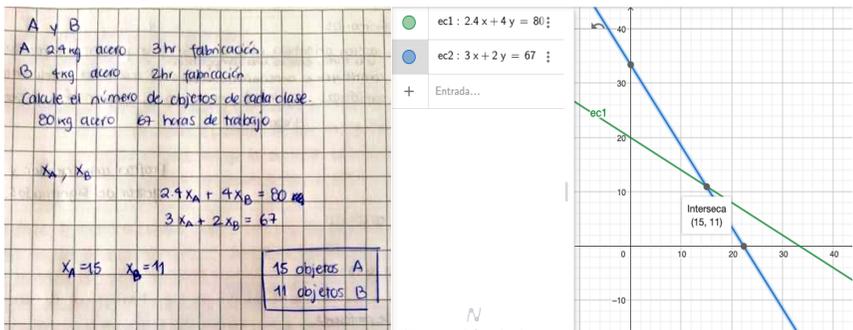
Técnica de E3, integración de diferentes herramientas

La técnica de E3 consistió en identificar datos y escribir el sistema de ecuaciones en lápiz y papel (Figura 5), tal como lo menciona en la siguiente transcripción.

Estudiante 3: *Primero anoté los datos y me fijé que el problema se podía resolver con un sistema de ecuaciones. Le puse las variables X_A , X_B e hice la ecuación referente a la cantidad de acero utilizado y otra ecuación referente al tiempo de trabajo. Lo iba a hacer en papel, pero como pidió que utilizáramos una herramienta, me fui a GeoGebra.*

La técnica de E3 mostró un proceso de rutina al escribir los datos, incógnitas y ecuaciones en papel. El razonamiento que llevó a cabo para resolver el problema, una vez identificadas las ecuaciones, se describe a continuación.

Figura 5
Técnica de E3 para resolver el PROBLEMA 1



E3 graficó en GeoGebra y encontró la solución (15, 11). Esta solución le permitió recurrir a la hoja de cálculo de Excel (Figura 6) donde encontró de nuevo las soluciones mediante ensayo numérico, tomando la cantidad de objetos tipo A como variable. Es decir, despejó X_B de la ecuación:

$$2.4 X_A + 4 X_B = 80$$

(Figura 5) y capturó el resultado en F3, utilizando el lenguaje de la hoja de cálculo. Esto se observa en el siguiente extracto.

Estudiante 3: *En Excel puse las cantidades que nos dijeron. Para el objeto A se ocupan 2.4 kilos y tres horas de tiempo [señaló las celdas A2, B2 y C2]. Para el objeto B, cuatro kilos y dos horas de tiempo [señaló las celdas A3, B3 y C3], y el total [señaló las celdas B5 y C5]. Entonces me fui al objeto A, si tengo cero cantidades [señaló la celda E3], pues del objeto B tendría 20 [señaló la celda F3], ¿no?, considerando los kilos que tengo en total [señaló la celda B5]. Aquí está la operación [señaló la fórmula de la celda F3].*

La organización de la información y las operaciones realizadas en la hoja de cálculo en las celdas F3 y G3 ($=-B2/B3*E3+B5/B3$, $=C2*E3+C3*F3$) estuvieron influenciadas por su trabajo previo en lápiz y papel y en GeoGebra, como se refleja a continuación en el siguiente extracto.

Estudiante 3: *La verdad, a mí, pues se me hizo más rápido con GeoGebra, pero como pidió que usáramos Excel, pues es lo que se me ocurrió.*

Figura 6

Técnica de E3 en Excel para resolver el PROBLEMA 1

| | A | B | C | D | E | F | G | | A | B | C | D | E | F | G |
|----|-------|-------------|-----------|---|----------|----------|----------------------------|----|-------|-------------|-----------|---|----------|-----------------------|----------------------------|
| 1 | | cantidad/kg | tiempo/hr | | Objeto A | Objeto B | Tiempo total de producción | 1 | | cantidad/kg | tiempo/hr | | Objeto A | Objeto B | Tiempo total de producción |
| 2 | A | 2.4 | 3 | | 0 | 20 | 40 | 2 | A | 2.4 | 3 | | 0 | cantidad | Cantidad |
| 3 | B | 4 | 2 | | 1 | 19.4 | 41.8 | 3 | B | 4 | 2 | | 8 | =B2/B3*E4+(B5/B3) | =C2*E3+C3*E3 |
| 4 | Total | 80 | 67 | | 2 | 18.8 | 43.6 | 4 | Total | 80 | 67 | | 1 | =(-B2/B3)*E4+(B5/B3) | =3*E4+2*F4 |
| 5 | | | | | 3 | 18.2 | 45.4 | 5 | | | | | 2 | =(-B2/B3)*E5+(B5/B3) | =3*E5+2*F5 |
| 6 | | | | | 4 | 17.6 | 47.2 | 6 | | | | | 3 | =(-B2/B3)*E6+(B5/B3) | =3*E6+2*F6 |
| 7 | | | | | 5 | 17 | 49 | 7 | | | | | 4 | =(-B2/B3)*E7+(B5/B3) | =3*E7+2*F7 |
| 8 | | | | | 6 | 16.4 | 50.8 | 8 | | | | | 5 | =(-B2/B3)*E8+(B5/B3) | =3*E8+2*F8 |
| 9 | | | | | 7 | 15.8 | 52.6 | 9 | | | | | 6 | =(-B2/B3)*E9+(B5/B3) | =3*E9+2*F9 |
| 10 | | | | | 8 | 15.2 | 54.4 | 10 | | | | | 7 | =(-B2/B3)*E10+(B5/B3) | =3*E10+2*F10 |
| 11 | | | | | 9 | 14.6 | 56.2 | 11 | | | | | 8 | =(-B2/B3)*E11+(B5/B3) | =3*E11+2*F11 |
| 12 | | | | | 10 | 14 | 58 | 12 | | | | | 9 | =(-B2/B3)*E12+(B5/B3) | =3*E12+2*F12 |
| 13 | | | | | 11 | 13.4 | 59.8 | 13 | | | | | 10 | =(-B2/B3)*E13+(B5/B3) | =3*E13+2*F13 |
| 14 | | | | | 12 | 12.8 | 61.6 | 14 | | | | | 11 | =(-B2/B3)*E14+(B5/B3) | =3*E14+2*F14 |
| 15 | | | | | 13 | 12.2 | 63.4 | 15 | | | | | 12 | =(-B2/B3)*E15+(B5/B3) | =3*E15+2*F15 |
| 16 | | | | | 14 | 11.6 | 65.2 | 16 | | | | | 13 | =(-B2/B3)*E16+(B5/B3) | =3*E16+2*F16 |
| 17 | | | | | 15 | 11 | 67 | 17 | | | | | 14 | =(-B2/B3)*E17+(B5/B3) | =3*E17+2*F17 |
| 18 | | | | | 16 | 10.4 | 68.8 | 18 | | | | | 15 | =(-B2/B3)*E18+(B5/B3) | =3*E18+2*F18 |
| 19 | | | | | 17 | 9.8 | 70.6 | 19 | | | | | 16 | =(-B2/B3)*E19+(B5/B3) | =3*E19+2*F19 |
| 20 | | | | | 18 | 9.2 | 72.4 | 20 | | | | | 17 | =(-B2/B3)*E20+(B5/B3) | =3*E20+2*F20 |
| 21 | | | | | 19 | 8.6 | 74.2 | 21 | | | | | 18 | =(-B2/B3)*E21+(B5/B3) | =3*E21+2*F21 |
| 22 | | | | | 20 | 8 | 76 | 22 | | | | | 19 | =(-B2/B3)*E22+(B5/B3) | =3*E22+2*F22 |
| 23 | | | | | 21 | 7.4 | 77.8 | 23 | | | | | 20 | =(-B2/B3)*E23+(B5/B3) | =3*E23+2*F23 |
| 24 | | | | | 22 | 6.8 | 79.6 | 24 | | | | | 21 | =(-B2/B3)*E24+(B5/B3) | =3*E24+2*F24 |
| 25 | | | | | 22 | 6.8 | 79.6 | 25 | | | | | 22 | =(-B2/B3)*E25+(B5/B3) | =3*E25+2*F25 |

Técnica de E4, hoja de cálculo como herramienta para hacer operaciones

La técnica de E4 consistió en identificar los datos, construir el sistema de ecuaciones en su cuaderno y resolverlo mediante el método de eliminación (Figura 7, izquierda). Posteriormente, usó la hoja de cálculo y escribió nuevamente los datos mediante un acomodo que permitiera resolver el problema usando determinantes. En las celdas E5, E8, E11 (Figura 7, derecha) escribió las fórmulas =MDETERM(B5:C6), =MDETERM(B8:C9), =MDETERM(B11:C12), respectivamente. En las celdas F8 y F11 escribió =E8/E5, =E11/E5, respectivamente.

El estudiante de posgrado E4 mostró un trabajo de rutina en lápiz y papel, reflejando su experiencia como profesor que enseña este tema, como él mismo expresó. A continuación, se describe el razonamiento que llevó a cabo para resolver el problema.

Estudiante 4: *Lo resolví por sistemas de ecuaciones. Ya que me dio los valores, pues dije, ah ya sé, lo más fácil: determinantes. Es decir, ya que resolví en papel, me fui a Excel y resolví por determinantes.*

Figura 7

Técnica de E4 para resolver el PROBLEMA 1

F11 fx =E11/E5

| | A | B | C | D | E | F |
|----|---|-----|----|---|-------|----|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | 2.4 | 4 | | 80 | |
| 3 | | 3 | 2 | | 67 | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | 2.4 | 4 | | -7.2 | |
| 6 | | 3 | 2 | | | |
| 7 | | | | | | |
| 8 | A | 80 | 4 | | -108 | 15 |
| 9 | | 67 | 2 | | | |
| 10 | | | | | | |
| 11 | B | 2.4 | 80 | | -79.2 | 11 |
| 12 | | 3 | 67 | | | |

El potencial de las técnicas usadas por los estudiantes de posgrado

En el proceso de resolución del PROBLEMA 1, se observó una diversidad de técnicas. Estas técnicas tienen un valor pragmático y epistémico, ya que ayudan a resolver el problema y a atribuir significados a los objetos matemáticos tales como variable, variación, ecuación, incógnita, solución y todos ellos asociados al objeto sistema de ecuaciones lineales.

E1 planteó una técnica basada en suponer una posible solución para una de las incógnitas (columna M) y, en encontrar el valor de la otra incógnita para satisfacer las dos condiciones identificadas. En particular, usó la estrategia de hacer cero una de las incógnitas para entender las relaciones entre incógnitas y datos. Esta técnica tiene un valor pragmático en el sentido de que se considera útil para que los estudiantes que aún no desarrollan un pensamiento algebraico resuelvan el problema sin tantas dificultades. Un profesor puede promoverla para ayudar a los estudiantes a identificar datos, incógnitas y relaciones entre ellos, y así acercarlos a conceptos como variable y variación, relacionados con el concepto de sistemas de ecuaciones lineales. Por otra parte, de acuerdo con Wilson et al. (2005) el uso de una columna como variable (M en este caso) tiene potencial en el desarrollo del significado de variable cuando se está aprendiendo o enseñando álgebra mediante la hoja de cálculo. En este sentido, esta técnica tiene valor epistémico para el aprendizaje del álgebra.

E2 propuso una técnica basada en considerar ambas incógnitas del problema como variables, además las etiquetó como A y B. Esta técnica de acuerdo con Vargas y Guzmán (2007a, 2007b), Vargas-Alejo y Guzmán-Hernández (2012) y Wilson et al. (2005), tiene un fuerte valor epistémico ya que “puede apoyar de manera potencial el desarrollo de un sentido más claro de la notación como variable” (Wilson et al., 2005, p. 327). La técnica usada por *E2* puede promoverla un profesor para ayudar a los estudiantes a identificar datos, incógnitas y relaciones entre ellos, y así acercarlos a conceptos como variable y variación, relacionados con el concepto de sistemas de ecuaciones lineales. Cuando un alumno usa esta técnica de “celdas como variables”, indica que su pensamiento está cercano al algebraico.

E3 y *E4* propusieron técnicas basadas en su trabajo previo en lápiz y papel. Esto coincide con lo señalado por Haspekian y Kieran (2023) en tanto que cuando se tiene al ambiente de lápiz y papel como un entorno referencial de aprendizaje de las matemáticas, los profesores buscan integrar las herramientas de tal manera que se mantengan las características convencionales, en este caso, del álgebra.

Las técnicas de *E3* y *E4* fueron pragmáticas en el sentido de que los estudiantes buscaron complementar sus procedimientos, ya realizados con

otra tecnología (lápiz y papel y GeoGebra) para resolver el problema. El valor que atribuyeron a la hoja de cálculo fue la de una herramienta más, que podría sumar a los diferentes tipos de formas de resolver un problema.

El uso de diferentes procedimientos para resolver un problema tiene valor epistémico en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que permite no sólo que un alumno pueda autoevaluar soluciones, sino también que encuentre un camino más corto o elegante. Un profesor puede aprovechar el uso de diferentes técnicas por sus estudiantes al permitir que las expongan y discutan en el grupo para apoyar la comprensión de algún objeto matemático y los conceptos asociados. Esto último, en términos de Lesh y Doerr (2003) equivale a decir que los significados están distribuidos en las distintas representaciones y es importante que los estudiantes tengan la experiencia de transitar entre ellas.

El potencial y las limitantes del uso de la hoja de cálculo, según los estudiantes de posgrado

Al presentar sus técnicas al grupo (fase 3 de la implementación), los estudiantes de posgrado describieron la experiencia que enfrentaron al utilizar la hoja de cálculo, ya que era la primera vez que la utilizaban. El siguiente extracto muestra parte de la conversación.

Estudiante 4: *Yo me fui a lo más rápido. Lo más rápido y lo más sencillo fue usar álgebra. Claro, a lo mejor para alguien no va a ser sencillo.*

Maestra: *¿Recurriste a lo que ya sabes, cierto?*

Estudiante 4: *Sí*

Estudiante 3: *Sí. Si a mí no me hubieran dicho usa Excel, yo no hubiera usado Excel.*

Estudiante 2: *De hecho.*

Estudiante 1: *Yo estoy acostumbrado a que cuando vemos un problema, decimos se puede solucionar así, así y así...*

Otro comentario que emergió sobre las técnicas fue el siguiente

Estudiante 1: *Creo que ninguno de nosotros tenemos experiencia resolviendo problemas con Excel. Tampoco sé si Excel sea la mejor forma.*

Esto llevó a la profesora a discutir (fase 4 de la implementación) con los estudiantes de posgrado el potencial de la hoja de cálculo en cada una de sus técnicas a la luz de distintas investigaciones (Rojano & Sutherland, 2000; Vargas-Alejo & Guzmán-Hernández, 2012; Wilson et al., 2005) relacionadas con el uso de la hoja de cálculo en la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales. Además, les mostró la evolución de técnicas mediante el uso de la hoja de cálculo desarrolladas por estudiantes de bachillerato para resolver el PROBLEMA 1 (Vargas & Guzmán, 2007a), destacando cómo ciertas técnicas ayudaban a los estudiantes a discutir sobre diversos conceptos matemáticos tales como variable, variación, ecuación, incógnita, función,

solución y sistema de ecuaciones lineales a través del uso de celdas y columnas variable, así como fórmulas.

Durante la sesión, (fase 5 de la implementación) revisaron varias técnicas. Una de estas técnicas se muestra en la Figura 8. Esta técnica fue utilizada al final del proceso de solución del PROBLEMA 1. También fue utilizada durante una entrevista, en la cual al PROBLEMA 1 se le habían cambiado las cantidades 80 y 67 por 2340 y 1575.

Figura 8

Técnica en hoja de cálculo llevado a cabo por los estudiantes de bachillerato para abordar el PROBLEMA 1

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|----|---------------|---------------|-------------|------------|-------------|--------------|------------|-------------|
| 1 | #de objetos A | kg de objetoA | hrs.objetoA | # objeto B | kg objeto B | hrs.objeto B | suma de kg | suma de hrs |
| 2 | 225 | 540 | 675 | 450 | 1800 | 900 | 2340 | 1575 |
| 3 | 95 | 228 | 285 | 201 | 804 | 402 | 1032 | 687 |
| 4 | 15 | 36 | 45 | 17 | 68 | 34 | 104 | 79 |
| 5 | 20 | 48 | 60 | 18 | 72 | 36 | 120 | 96 |
| 24 | 115 | 276 | 345 | 37 | 148 | 74 | 424 | 419 |
| 25 | 120 | 288 | 360 | 38 | 152 | 76 | 440 | 436 |
| 26 | 125 | 300 | 375 | 39 | 156 | 78 | 456 | 453 |
| 27 | 130 | 312 | 390 | 40 | 160 | 80 | 472 | 470 |
| 28 | | | | | | | | |
| 29 | | | | | | | | |
| 30 | a | 2.4a | 3a | b | 4b | 2b | 2.4a+4b | 3a+2b |
| 31 | | | | | | | 2340 | 1575 |

Nota: Técnica utilizada en bachillerato. Adaptada de Vargas y Guzmán (2007a).

Los estudiantes de posgrado observaron cómo los estudiantes de bachillerato ordenaron la información y el tipo de fórmulas utilizadas (Figura 9). Revisaron el potencial de la técnica en términos del manejo de conceptos asociados al objeto matemático *sistemas de ecuaciones lineales*.

Figura 9

Valores y fórmulas recursivas utilizadas por los estudiantes de bachillerato al abordar el PROBLEMA 1

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|----|---------------|---------------|-------------|------------|-------------|--------------|------------|-------------|
| 1 | #de objetos A | kg de objetoA | hrs.objetoA | # objeto B | kg objeto B | hrs.objeto B | suma de kg | suma de hrs |
| 2 | 225 | =A2*2.4 | =A2*3 | 450 | =D2*4 | =D2*2 | =B2+E2 | =C2+F2 |
| 3 | 95 | =A3*2.4 | =A3*3 | 201 | =D3*4 | =D3*2 | =B3+E3 | =C3+F3 |
| 4 | 15 | =A4*2.4 | =A4*3 | 17 | =D4*4 | =D4*2 | =B4+E4 | =C4+F4 |
| 5 | =A4+5 | =A5*2.4 | =A5*3 | =D4+1 | =D5*4 | =D5*2 | =B5+E5 | =C5+F5 |
| 6 | =A5+5 | =A6*2.4 | =A6*3 | =D5+1 | =D6*4 | =D6*2 | =B6+E6 | =C6+F6 |
| 17 | =A16+5 | =A17*2.4 | =A17*3 | =D16+1 | =D17*4 | =D17*2 | =B17+E17 | =C17+F17 |
| 18 | =A17+5 | =A18*2.4 | =A18*3 | =D17+1 | =D18*4 | =D18*2 | =B18+E18 | =C18+F18 |
| 19 | =A18+5 | =A19*2.4 | =A19*3 | =D18+1 | =D19*4 | =D19*2 | =B19+E19 | =C19+F19 |
| 20 | =A19+5 | =A20*2.4 | =A20*3 | =D19+1 | =D20*4 | =D20*2 | =B20+E20 | =C20+F20 |
| 21 | =A20+5 | =A21*2.4 | =A21*3 | =D20+1 | =D21*4 | =D21*2 | =B21+E21 | =C21+F21 |
| 22 | =A21+5 | =A22*2.4 | =A22*3 | =D21+1 | =D22*4 | =D22*2 | =B22+E22 | =C22+F22 |
| 23 | =A22+5 | =A23*2.4 | =A23*3 | =D22+1 | =D23*4 | =D23*2 | =B23+E23 | =C23+F23 |
| 24 | =A23+5 | =A24*2.4 | =A24*3 | =D23+1 | =D24*4 | =D24*2 | =B24+E24 | =C24+F24 |
| 25 | =A24+5 | =A25*2.4 | =A25*3 | =D24+1 | =D25*4 | =D25*2 | =B25+E25 | =C25+F25 |
| 26 | =A25+5 | =A26*2.4 | =A26*3 | =D25+1 | =D26*4 | =D26*2 | =B26+E26 | =C26+F26 |
| 27 | =A26+5 | =A27*2.4 | =A27*3 | =D26+1 | =D27*4 | =D27*2 | =B27+E27 | =C27+F27 |
| 28 | | | | | | | | |
| 29 | | | | | | | | |
| 30 | a | 2.4a | 3a | b | 4b | 2b | 2.4a+4b | 3a+2b |
| 31 | | | | | | | 2340 | 1575 |

Nota: Técnica utilizada en bachillerato (Vargas & Guzmán, 2007a)

Se dieron cuenta de lo que Haspekian (2005) señala en la literatura de investigación, que, con la hoja de cálculo, estos conceptos se pueden tratar de manera dinámica en contraste con el ambiente de lápiz y papel donde su existencia está limitada a algo estático. Además, observaron cómo a través de esta herramienta los alumnos tuvieron la posibilidad de enfrentarse al significado de variable mediante el acceso a *celdas variables o columnas variables* al construir tablas numéricas donde se pueden generalizar cálculos numéricos mediante la escritura de fórmulas que sintetizan relaciones entre conjuntos de datos (relaciones funcionales).

Por otra parte, notaron cómo a partir de esta técnica podía derivarse la escritura del sistema de ecuaciones lineales en forma algebraica (fila 30, Figura 8). Los estudiantes de posgrado revisaron cómo los estudiantes de bachillerato, con el apoyo del docente mediante preguntas, no solo pudieron escribir el sistema de ecuaciones lineales, sino también resolverlo. El cambio de las cantidades 80 y 67 por 2340 y 1575 había permitido que los estudiantes tuvieran que enfrentarse a un proceso extenuante de ensayo numérico fomentado con el fin de promover la necesidad o importancia de mostrar el potencial de la hoja de cálculo y de manera simultánea el de otras técnicas como la algebraica.

En la Figura 10 se presenta el método utilizado para resolver el sistema de ecuaciones lineales. La solución (225, 450), fue comprobada por los estudiantes de bachillerato en la hoja de cálculo (fila 2, Figura 8).

Figura 9

Procedimiento llevado a cabo por el estudiante de bachillerato para resolver el PROBLEMA 1 durante la entrevista

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} 2.4a + 4b = 2340 \\ 3a + 2b = 1575 \end{array} \right\} \\
 -2 \left\{ \begin{array}{l} 2.4a + 4b = 2340 \\ 3a + 2b = 1575 \end{array} \right. \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 2.4a + 4b = 2340 \\
 -6a - 4b = -3150 \\
 \hline
 -3.6a = -810 \\
 + a = \frac{-810}{-3.6} \\
 a = 225
 \end{array} \\
 \begin{array}{l}
 3a + 2b = 1575 \\
 3(225) + 2b = 1575 \\
 2b = 1575 - 675 \\
 2b = 900 \\
 b = \frac{900}{2} \\
 b = 450
 \end{array}
 \end{array}$$

Nota: Método utilizado en bachillerato (Vargas & Guzmán, 2007a)

Al final de la sesión (fase 6 de la implementación), los estudiantes de posgrado expresaron lo siguiente.

Estudiante 2: *De no habernos dicho háganlo con Excel, todos lo hubiéramos resuelto directo, ¿no? Entonces, [el uso de Excel] te genera más aprendizaje, y más al momento de bajarnos al nivel de ellos [de los estudiantes de bachillerato], pues apenas están experimentando, están viendo para qué sirve, cómo funciona.*

Estudiante 3: *Nunca se me había ocurrido usar Excel. Yo siempre uso GeoGebra... Hay que pensar en esas herramientas no como para que faciliten llegar a la respuesta, sino que faciliten entender el concepto. No tanto la respuesta, sino el concepto matemático que está detrás del problema.*

Estudiante 1: *Creo que conocer nuevas formas de resolver un problema a veces no siempre significa que sean mejores o peores, simplemente es saber más caminos y yo creo que eso también es muy importante.*

Estudiante 4: *Cada quien vemos de manera diferente un problema... y me gustó la diversidad de cómo vemos las cosas.*

En el comentario del estudiante 2 se destaca que los estudiantes de posgrado carecían de experiencia para resolver problemas utilizando la hoja de cálculo, es decir, nunca habían usado esta herramienta con ese propósito durante su formación matemática. Este desconocimiento coincide con la idea de que “entre los ambientes de trabajo matemático, el ambiente de lápiz y papel desempeña un rol referencial único para los profesores e instituciones” (Haspekian & Kieran, 2023, p. 4). A pesar de ello el estudiante 2 optó por explorar cómo abordar el PROBLEMA 1 con esta herramienta. La discusión de su técnica con sus compañeros y la docente lo hizo observar que la hoja de cálculo tenía potencial para propiciar un tipo de aprendizaje distinto al tradicional. Esto lo llevó a reflexionar que, si se utilizara Excel en la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales con estudiantes de bachillerato, podría fomentar otros tipos de aprendizajes importantes y poco convencionales.

En el comentario del estudiante 3, se resalta la idea de que logró comprender mejor cómo las técnicas construidas con diversas herramientas, como la hoja de cálculo y GeoGebra, deben ayudar a entender los conceptos involucrados en los problemas y no solo limitarse a encontrar una respuesta rápida. En particular, encontró que la herramienta tenía el potencial de apoyar el entendimiento de conceptos asociados a sistemas de ecuaciones lineales como: incógnita, variación, ecuación y solución. Esto refleja un cambio en sus creencias y percepciones sobre la tecnología y su conocimiento pedagógico, aspectos importantes para que los docentes encuentren motivos para fomentar la integración de herramientas como la hoja de cálculo en el aula (Haspekian & Kieran, 2023). Por otro lado, en los comentarios de los estudiantes 1 y 4, se destaca la importancia del surgimiento de diferentes técnicas y, por ende, su potencial para entender mejor algún objeto matemático.

Sin duda, en los comentarios se observan diversas conceptualizaciones sobre por qué usar la hoja de cálculo para resolver problemas, cada estudiante le dio un significado distinto según su conocimiento y experiencia. Sin embargo, todos coincidieron en que la hoja de cálculo tiene potencial para fomentar un aprendizaje diferente a lo convencional al resolver un problema donde subyace un sistema de ecuaciones lineales.

Conclusiones

La respuesta a la pregunta de investigación planteada, sobre cómo un grupo de futuros profesores resuelve un problema utilizando una hoja de cálculo y qué potencial le atribuyen a su uso para el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales, se detalló exhaustivamente en la sección anterior de resultados y discusión. Los estudiantes de posgrado (futuros profesores) realizaron trabajo de rutina al organizar datos, incógnitas, relaciones y, por ende, buscar reconocer la estructura del problema. Uno de los estudiantes empleó la técnica hoja de cálculo como herramienta para hacer operaciones, previa ejecución de procedimientos en papel y lápiz. Por otro lado, otro estudiante de posgrado ejecutó la técnica integración de diferentes herramientas realizando pasos en papel y lápiz antes de utilizar GeoGebra, y luego la hoja de cálculo. Finalmente, los otros dos estudiantes llevaron a cabo directamente sus procedimientos en la hoja de cálculo, utilizando técnicas como: sintetizando relaciones en la hoja de cálculo y celda como variables.

El surgimiento de una diversidad de técnicas fue importante ya que permitió a los estudiantes de posgrado analizar, en discusiones grupales, el potencial de cada una de ellas y compararlas con las descritas en la literatura de investigación. Los estudiantes reconocieron que su dificultad inicial para comprender por qué debían abordar el problema utilizando Excel en lugar de resolverlo con lápiz y papel se debía a la falta de experiencias previas que les permitieran apreciar cómo la hoja de cálculo podía ofrecer significados algebraicos diferentes; particularmente, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, en comparación con los métodos tradicionales. Esta observación los llevó a valorar las técnicas asociadas al ensayo numérico y, por lo tanto, el uso de la hoja de cálculo.

La hoja de cálculo, si bien no se creó con un propósito educativo, actualmente sigue siendo considerada como una herramienta cognitiva que se puede proponer para la enseñanza del álgebra, ya que es de fácil acceso para profesores y estudiantes, y puede apoyar el aprendizaje del álgebra como aritmética generalizada. Los estudiantes, tal como se describe en los resultados mostrados en este documento y en la literatura de investigación, pueden lograr interactuar con “objetos simbólicos” (por ejemplo, $= B1 + B3$) al resolver los problemas en ambiente de hoja de cálculo.

Agradecimientos

Reconocimiento al apoyo otorgado por CONAHCYT a través de las becas de posgrado.

Referencias

- Ainley, J., Bills, L., & Wilson, K. (2005). Designing spreadsheet-based tasks for purposeful algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10(3), 191–215.
- Angel, A., Figueras, O., & Valenzuela-García, C. (2023). Multiplicación y división de fracciones: Excel y otras tecnologías digitales para reflexionar sobre su enseñanza. En A. Castañeda, (Ed.), *Aportes y recursos para la innovación en la educación matemática* (pp. 97–122). SOMIDEM Editorial. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S1/2023/01-04>
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245–274.
- Bednarz, N., Guzmán, J., & Hitt, F. (2003, unpublished). *Une analyse des problèmes en algèbre impliquant des taux*. Documento de trabajo.
- Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 115–136). Springer.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266.
- Dettori, G., Garuti, R., & Lemut, E. (2001). From Arithmetic to Algebraic Thinking by Using a Spreadsheet. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 191–208). Springer.
- Drier, H. S. (2001). Teaching and learning mathematics with interactive spreadsheets. *School science and mathematics*, 101(4), 170–179. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2001.tb18020.x>
- Friedlander, A. (1999). Cognitive processes in a spreadsheet environment. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education 2* (pp. 337–344). PME.
- Haspekian, A. (2005). An “Instrumental approach” to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10(2), 109–141.
- Haspekian, M., & Kieran, C. (2023). Teachers’ challenges in integrating technology in mathematics teaching through the lens of the instrumental distance concept. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 2694–2701). Eötvös Loránd University of Budapest – ERME. <https://hal.science/hal-04410780/document>

- Hoyles, C., Kieran, C., Rojano, T., Sacristan, A. I., & Trigueros, M. (2020). Reflections on digital technologies in mathematics education across cultures. En A. I. Sacristan, J. C. Cortés-Zavala, & P. M. Ruiz-Arias (Eds.), *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 69–92). PME-NA. <https://doi.org/10.51272/pmna.42.2020>
- Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutierrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the psychology of mathematics education* (pp. 11–50). Sense Publishers.
- Lagrange, J.B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics*, 43(1), 1–30.
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. En R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3–33). Routledge.
- Mochón, S., Rojano, T., & Ursini, S. (2000). *Matemáticas con la hoja de cálculo. Enseñanza de las matemáticas con Tecnología*. SEP.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NTCM.
- Rojano, T., & Sutherland, R. (1993). Towards an Algebraic Approach: The Role of Spreadsheets. En I. Hirabayashi, N. Nobuhiko, S. Keiichi, & L. Fou-Lai (Eds.), *Proceedings of the 17th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education*, 1 (pp. 189–196). PME.
- Sampieri, R., Fernández, C., & Lucio, M. D. (2014). *Metodología de la investigación* (Sexta ed.). McGraw-Hill.
- Secretaría de Educación Pública. (2000). *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo. Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología*. SEP. <https://bit.ly/3Cbb1dC>
- Secretaría de Educación Pública. (2011). *Plan de estudios 2011. Educación Básica*. SEP. <https://bit.ly/3CcbxYY>
- Sutherland, R., & Rojano, T. (1993). A Spreadsheet Approach to Solving Algebra problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 12(4), 353–383.
- Tabach, M., & Friedlander, A. (2004). Levels of student responses in a Spreadsheet based environment. En M. J. Hoines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education*, 4 (pp. 423–430). PME
- Tabach, M., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2006). Constructing and consolidating of algebraic knowledge within dyadic processes: a case study. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3), 235–258.

- Vargas, V., & Guzmán, J. (2007a). Potencial de la Hoja Electrónica de Cálculo en la solución de problemas algebraicos verbales. En E. Mancera, & C. A. Pérez (Eds.), *Historia y Prospectiva de la Educación Matemática Memorias de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (pp. 1–11). Edebé Ediciones Internacionales S.A. de C.V.
- Vargas, V., & Guzmán, J. (2007b). Processes of symbolization derived in the use of Spreadsheet. En T. Lamberg, & L. R. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 171–178). PME-NA.
- Vargas-Alejo, V., & Guzmán-Hernández, J. (2012). Valor pragmático y epistémico de técnicas en la resolución de problemas verbales algebraicos en ambiente de hoja electrónica de cálculo. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(3), 89–107.
- Wilson, K. Ainley, J., & Bills L. (2005). Spreadsheets, pedagogic strategies and the evolution of meaning for variable. En H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education*, 4 (pp. 321–328). PME.
- Yin, R. K. (1984). *Case study research: design and methods, applied social research methods series*. Sage.

