

El papel de la colaboración entre México y España en la consolidación del Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

The role of collaboration between Mexico and Spain in the consolidation of the Mathematics Teachers' Specialised Knowledge Model

Dinazar Isabel Escudero-Ávila ¹ 

Nuria Climent ² 

Leticia Sosa ³ 

Luis Carlos Contreras ⁴ 

Resumen

Desde una perspectiva interpretativa, nuestro grupo de investigación, enmarcado dentro de la Red Iberoamericana MTSK y que integra a investigadores de México y España, trata de comprender el conocimiento específico que posibilita al profesorado enseñar matemáticas. Para ello, hemos desarrollado un modelo para el análisis de dicho conocimiento, centrado en la matemática, su enseñanza y aprendizaje. En este capítulo presentamos sus bases, desarrollo y aplicaciones desde la perspectiva de las colaboraciones de investigadores de ambos países. Así, trabajos doctorales desarrollados por investigadores mexicanos dirigidos desde la Universidad de Huelva y colaboraciones posteriores, contribuyen de forma notable a la investigación sobre y con el modelo de conocimiento especializado del profesorado de matemáticas. Esta colaboración se mantiene hasta la actualidad y se proyecta en investigaciones futuras.

¹ dinazare@ucm.es

Universidad Complutense de Madrid (SOMIDEM-SEIEM)

² climent@ddcc.uhu.es

Universidad de Huelva (SEIEM)

³ lsosa@uaz.edu.mx

Universidad Autónoma de Zacatecas (SOMIDEM)

⁴ lcarlos@uhu.es

Universidad de Huelva (SEIEM)

Palabras clave

Formación del profesorado, conocimiento del profesor, matemáticas, conocimiento especializado.

Abstract

From an interpretative perspective, our research group, which is part of the Ibero-American Network MTSK and integrates researchers from Mexico and Spain, tries to understand the specific knowledge that enables teachers to teach mathematics. To this end, we have developed a model for analysing this knowledge, which deals with the knowledge that focuses on mathematics and its teaching and learning. In this chapter, we present its bases, development and applications from the perspective of the collaborations of researchers from both countries. Thus, doctoral works developed by Mexican researchers directed from the University of Huelva and subsequent collaborations contribute significantly to research on and with the “mathematics teachers’ specialised knowledge” model. This collaboration continues until now and is projected in future research.

Keywords

Teacher education, teachers’ knowledge, mathematics, specialised knowledge.

Introducción

Investigadores de España y México, liderados desde la Universidad de Huelva inicialmente por José Carrillo, hemos venido colaborando durante más de una década en el estudio de la formación del profesorado de matemáticas. Esta colaboración se inició con la realización de la tesis doctoral “Transposición y destransposición del saber matemático y didáctico, representaciones y prácticas en la formación inicial de docentes” de Eugenio Lizarde Flores (2013), profesor de la Normal Rural Gral. Matías Ramos Santos de Zacatecas, México. Esta primera colaboración de Lizarde con el grupo de Didáctica de la Matemática con la Universidad de Huelva puso de manifiesto el interés compartido de reflexionar sobre elementos que se ponen en juego durante la formación inicial de los docentes como lo es el conocimiento que requiere el profesor de matemáticas y cómo desarrollarlo. Este trabajo conjunto despertó el interés de otros investigadores e investigadoras mexicanas por establecer lazos que posibilitaran la conformación de un grupo de trabajo que compartiera proyectos de investigación financiados y que actualmente se articula dentro de la Red Iberoamericana MTSK (<https://redmtsk.net>), aprobada por la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado en 2019, y que une a investigadores de 11 países, con importante representación de España y México. Gran parte de los esfuerzos de esta colaboración se han dirigido a mejorar la comprensión sobre el conocimiento del profesorado de matemáticas, el papel que juega en su enseñanza y cómo promoverlo.

En este capítulo, tratamos de reflejar nuestra trayectoria al respecto, centrándonos especialmente en los trabajos desarrollados de forma conjunta por investigadores de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática (SOMIDEM) y la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Tras presentar brevemente nuestra perspectiva sobre el estudio del conocimiento del profesor, en el primer epígrafe, abordamos la evolución de las colaboraciones entre investigadores de la SOMIDEM y la SEIEM en la creación de un modelo para el estudio del conocimiento del profesorado de matemáticas, el modelo Mathematics Teachers' Specialised knowledge (MTSK). A continuación, se expone cómo se ha empleado este modelo para el estudio de la formación del profesorado de matemáticas, en el tercer epígrafe, y del conocimiento del formador de profesorado de matemáticas, en el cuarto. El capítulo concluye con un apartado de reflexiones finales.

El conocimiento del profesor como objeto de estudio

Desde hace varias décadas se han venido realizando estudios sobre el conocimiento del profesor. En nuestro grupo del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM) en la Universidad de Huelva (España) surgió el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK por sus siglas en inglés). Ahí participan investigadores de diferentes países, entre ellos de México. Nuestro interés germinal, como investigadores, de estudiar los procesos y elementos implicados en el desarrollo profesional del profesor de matemáticas, ha derivado en la necesidad de comprender el papel del conocimiento en la práctica docente del profesor y en su formación profesional, tanto inicial como continua. Para ello, resulta necesario adoptar una postura sobre qué se entiende por conocimiento. Nos interesa una perspectiva interpretativa en el estudio de dicho conocimiento, que busca comprender sus mecanismos, más que evaluarlos. Por ello, adoptamos la definición de Schoenfeld (2010) de conocimiento del profesor.

Yo defino el conocimiento de un individuo como la información que tiene disponible para usar para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea. ¡Nótese que, de acuerdo con esta definición, el conocimiento no ha de ser necesariamente correcto! (Schoenfeld, 2010, p.25).

Otro aspecto que identificamos relevante al estudiar el conocimiento del profesor son las creencias. En ese sentido y en concordancia con lo planteado por Ponte (1994) y Pajares (1992) y basándonos fundamentalmente en Carrillo (1998) y Contreras (1999), entendemos las creencias como:

Verdades personales, sostenidas individual y/o colectivamente, derivadas de la experiencia o el propio pensamiento, con cierta componente afectiva y evaluativa, sobre la que se pueden tener diferentes grados de convencimiento, así como

pudiendo ser justificadas en base a argumentos que no sigan criterios que puedan responder a cánones de evidencia, es decir, no son falsables (Montes et al., 2014; p. 6).

Siendo conscientes de las dificultades para diferenciar entre conocimiento y creencias, atribuimos al conocimiento un estatus de objetivación del que no gozan las creencias (Thompson, 1992). Las creencias del profesorado sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje interactúan con su conocimiento; por ejemplo, considerar la matemática como una construcción social o como un cuerpo estático de conocimiento que no se crea, sino que se descubre (Carrillo, 1998, considerando, entre otros, los aportes de Ernest, 1989). De este modo, la comprensión de cómo se produce el aprendizaje de determinados contenidos matemáticos, se relaciona con una perspectiva más constructivista que tradicional de su enseñanza y aprendizaje (Carrillo, 1998).

En los primeros estudios desarrollados, evidenciamos la importancia de que el profesor conozca cómo aprenden sus estudiantes el contenido que imparte (Sosa et al., 2015) y de analizar el conocimiento del profesor sobre la enseñanza de las matemáticas (e.g., el uso de ejemplos y ayudas Sosa et al., 2016). Los resultados de ese estudio, relativos a la enseñanza del álgebra lineal, muestran el conocimiento sobre la potencialidad y el uso didáctico de los ejemplos y de la diversificación y focalización de ayudas en la enseñanza. Este conocimiento puede ser condicionado por la identidad profesional del profesor, su formación, su experiencia y el contexto donde desarrolla su labor docente.

Otro aspecto relevante es el conocimiento del profesor sobre la enseñanza de las matemáticas mediada por recursos tecnológicos. Sandoval-Cáceres et al. (2014) describen el conocimiento que evidencia un profesor de primaria al utilizar un recurso interactivo de *Enciclomedia* en clase de matemáticas. El estudio se centra en identificar el conocimiento que necesita el profesor para sustentar prácticas en las cuales las tecnologías digitales tengan un papel transformador. Los autores señalan que las prácticas de enseñanza mediadas con tecnologías digitales demandan un profundo conocimiento en las dimensiones tecnológica, didáctico-matemática y de contenido matemático por parte del profesor.

En la formación inicial y continua del profesor de matemáticas, comprender su conocimiento y sus creencias son parte fundamental pues influyen significativamente en las acciones, las decisiones y la práctica del (futuro) profesor de matemáticas.

El impacto de las investigaciones con el modelo MTSK en el estudio del conocimiento del profesor

A partir de los trabajos doctorales de Nuria Climent Rodríguez (2002), Cinta Muñoz Catalán (2010), Carlos Miguel Ribeiro (2010) y de Leticia

Sosa (2011), se evidencia el potencial de contar con un modelo de conocimiento del profesor que permita realizar un análisis sistemático de las componentes y estructura de dicho conocimiento. En este último trabajo se realiza un estudio de las componentes del conocimiento matemático para la caracterización del conocimiento para la enseñanza (*Mathematical Knowledge for teaching*) de matrices en bachillerato, usando el modelo de conocimiento del equipo de Ball y colaboradores (2008). Esto permite reflejar las necesidades específicas del profesor de matemáticas y pone el foco en la necesidad de comprender en profundidad la naturaleza y los elementos que conforman este conocimiento.

Hasta este momento, el grupo de investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva era percibido como un equipo interesado en el estudio de los procesos de desarrollo profesional del profesor y las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje, así como su influencia en la práctica profesional del profesor. A partir de la visita de José Carrillo en 2010 al Centro de investigación y de estudios avanzados (Cinvestav) en Ciudad de México, en la que realizó una conferencia plenaria dirigida a docentes de matemáticas de secundaria y tras el regreso a México en 2011 de Sosa al concluir sus estudios de doctorado, se consolidó que el interés del grupo de Huelva está también en el estudio del conocimiento del profesor desde una perspectiva más analítica y con un espíritu crítico, de manera pueda ser la base sobre la cual construir espacios de desarrollo profesional.

Esta historia de trabajo en grupo y el desarrollo de una línea dirigida hacia la formación del docente en matemáticas quedaron plasmados en el libro “Matemática Educativa: la formación de profesores” publicado y coordinado en México, a través de un capítulo en el que se muestra la investigación sobre el profesor de matemáticas en la Universidad de Huelva (Carrillo et al., 2013).

Desde esta perspectiva, y con el interés de continuar con las reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento profesional y el trabajo con el modelo *Mathematical Knowledge for teaching* (MKT) (Ball et al., 2008), en 2011 surgió el interés de Dinazar Escudero y Eric Flores de realizar la tesis doctoral en el seno del grupo de Huelva, fortaleciendo así los lazos entre México y España.

A partir de la reflexión conjunta del grupo liderado por José Carrillo y compuesto por miembros de distintas Universidades de España, Portugal y Latinoamérica, se iniciaron reflexiones teóricas y empíricas sobre el concepto de “conocimiento especializado del profesor” que se propone en el modelo MKT y lo que lo convierte en un conocimiento exclusivo del docente, discutiendo estos análisis en espacios como la XV Escuela de Invierno de Matemática Educativa (Escudero et al., 2012). Lo anterior nos lleva a identificar distintas problemáticas al respecto del uso del MKT:

- Se hace uso de elementos externos a lo especializado para definir este tipo de conocimiento.
- Más que una “manera especial” de mirar el contenido matemático o conocimiento de un tipo de matemática especial a la que no puedan o necesiten tener acceso los estudiantes u otros profesionales, se observa un uso específico de esos conocimientos por parte del docente.
- Se identifican dificultades en la delimitación del conocimiento especializado, derivadas de su definición aludiendo a actividades propias del profesor de matemáticas y no del conocimiento que permite realizarlas.

A partir de entonces, se reconoció que el conocimiento del contenido matemático debe ser el elemento distintivo y específico del conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Sin embargo, lo especializado puede entenderse como el resultado de la interacción de distintas aproximaciones a un objeto matemático como objeto de enseñanza, es decir, distintas formas de conocer un contenido matemático.

En Ciencias Sociales, los modelos teóricos se utilizan para representar, construir o modelar de manera sistematizada una serie de fenómenos, y están destinados a explicar la realidad o actuar sobre ella, buscando realizar una abstracción de esta. En este sentido, el grupo de trabajo comenzó a analizar, además del MKT, distintos modelos de conocimiento, con intereses y perspectivas diferentes respecto a los elementos que constituyen el conocimiento profesional del profesor y el uso que puede hacer de ellos, como el *Knowledge Quartet* (Rowland, 2009), el *Modelo de Competencias y conocimientos del profesor de matemáticas del EOS (CCDM)* (Pino-Fan & Godino, 2015) y el *Mathematical Proficiency for Teaching* (Kilpatrick et al., 2001), entre otros.

En 2013, los primeros resultados y reflexiones realizadas por el grupo fueron presentados para su discusión y posible validación en el congreso de la Sociedad Europea de Investigación de Educación Matemática —CERME 8—, dentro del grupo de trabajo sobre Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor. En este espacio se expusieron cinco comunicaciones con propuestas de análisis y crítica al modelo MKT, la presentación de la propuesta de un nuevo modelo de conocimiento y ejemplos de uso de este modelo para el análisis de profesores (Carreño, Ribeiro et al., 2013; Carreño, Rojas et al., 2013; Carrillo, Climent et al., 2013; Flores, Escudero & Carrillo, 2013, Montes et al., 2013).

Así, Flores, Escudero y Carrillo (2013) introdujeron una revisión teórica del modelo MKT centrada en la caracterización del *Conocimiento Especializado del Contenido* y sus diferencias y similitudes con el *Conocimiento Común del Contenido*, y la comparación con los conocimientos que podrían considerarse dentro de los subdominios del *Conocimiento del Contenido y los Estudiantes y el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza*. En este trabajo se pone el

énfasis en cómo se definen los subdominios y el tipo de clasificación de conocimientos que se logra realizar con este modelo. Ball et al. (2008) definen el Conocimiento Común como el conocimiento que posee cualquier persona matemáticamente instruida, sin que sea exclusivo, por tanto, de los profesores de matemáticas y poniendo el foco en el “saber hacer” (como hacer una resta o saber dividir, por ejemplo). Por otra parte, en el *Conocimiento Especializado* se incluye el saber “por qué se hace así”, lo que permite que el profesor pueda explicar la procedencia matemática de los errores de los alumnos. Este último, definido por Ball et al. (2008) como el conocimiento matemático que va más allá del que se espera de cualquier adulto bien educado, permite reconocer dos elementos en los cuales se apoyan los autores para definirlo: 1) la profesión, o el usuario de este conocimiento, al definirlo en términos de un conocimiento que es único del profesor y que, aunque algunas otras profesiones podrían tenerlo, en el caso del profesor de matemáticas es indispensable, y 2) como una ampliación del Conocimiento Común. Es decir, el Conocimiento Especializado va más allá del Común, pero sin hacer uso de conocimientos sobre los alumnos o conocimiento sobre la enseñanza (Escudero et al., 2012; Flores, Escudero & Carrillo, 2013). En este último trabajo se concluye que las definiciones se basan en elementos extrínsecos al conocimiento del profesor, como referencias a otras profesiones o la referencia a ir más allá del Conocimiento Común. Además, se mostraba que las tareas profesionales que enfrenta el profesor de matemáticas requerían conocimiento de significados, propiedades y definiciones de los contenidos involucrados. Flores et al. (2013) afirman no reconocer en ello una forma particularmente especial de conocer el contenido, ni percibir ningún conocimiento matemático especializado que sea inaccesible para estudiantes o para otros profesionales, sino más bien un uso específico de este conocimiento. Lejos de derivar de ello que el conocimiento especializado de los profesores de matemáticas no tiene sentido o que este subdominio no es útil para el análisis del conocimiento profesional del profesor, los datos sugieren que este conocimiento no debería ser exclusivo del dominio matemático. Este tipo de conocimiento debería incluir también conocimiento sobre la enseñanza, sobre las formas de construir conocimiento matemático, sobre el desarrollo de la complejidad dentro de los temas y sobre las características del aprendizaje del contenido, entre otros aspectos. El conocimiento especializado abarca más aspectos que los significados, propiedades y definiciones, y no requerir de comparaciones con otras profesiones en las que se utilizan las matemáticas. Estas conclusiones nos llevan a plantear el desarrollo de un modelo que busca reflejar el conocimiento especializado sea el resultado de la interacción de distintas formas de conocer el contenido matemático.

Así, se propuso la necesidad de plantear una forma distinta de modelar el conocimiento del profesor y se presentó la primera propuesta de un nue-

vo modelo que pretende reflejar la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas como un conjunto de conocimientos y no como un subdominio de lo matemático. Este modelo centró su atención en el conocimiento específico del profesor de matemáticas, sin importar si este es compartido o no con otros profesionales que usan la matemática. Dicho modelo fue llamado *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2013).

El MTSK no se concibió como una mejora ni una evolución del MKT, sino una forma distinta de modelar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas a partir de la idea de que lo que hace especializado a este conocimiento es la integración de distintas formas de conocer el contenido matemático y su estudio como objeto de enseñanza y aprendizaje. Este modelo surge como propuesta de herramienta metodológica para explorar el conocimiento especializado del profesor en situaciones diversas de su labor y formación, por ello no constituye un marco teórico ni pretende ser una hipótesis de conocimiento ideal del profesor de matemáticas. Se plantea como una propuesta de modelo analítico con dominios y subdominios de conocimiento que puedan ser identificados de forma disjunta, solo para su análisis, con fines de caracterizar no solo lo que conoce el profesor, sino cómo lo conoce.

En este sentido, se distinguen considerar tres dominios de conocimiento: el *Conocimiento Matemático*, el *Conocimiento Didáctico del Contenido* y las *Creencias sobre la Matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje* (Carrillo et al., 2013). Dentro del Conocimiento Matemático se presentan tres subdominios: el *Conocimiento de los temas*, el *Conocimiento de la estructura de las matemáticas* y el *Conocimiento de la práctica matemática*. Por su parte, el dominio del *Conocimiento Didáctico del Contenido* engloba los subdominios de: *Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*, *Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas* y *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas*. Además, se enfatiza que las creencias atraviesan todos los subdominios de conocimiento, dado que pueden establecer un sesgo en cuanto al conocimiento que el profesor evidencia al realizar tareas profesionales (Figura 1).

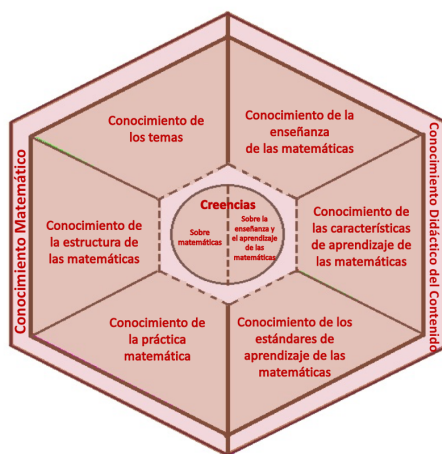
A partir de estas publicaciones y las reflexiones compartidas con expertos, se inició un proceso de “poner a prueba” el modelo. En Carrillo et al. (2014) se expusieron las bases teóricas y metodológicas sobre las que se construye el MTSK. En esta publicación se hace referencia a este como “un marco teórico”, porque es posible utilizar este modelo desde distintos marcos y con diferentes perspectivas teóricas, como se ha ido desarrollando posteriormente (e.g. Sandoval-Cáceres et al., 2014; Vasco et al., 2016).

En este momento las reflexiones sobre el modelo se orientaron al refinamiento de las definiciones de los subdominios y la identificación de

categorías que permitieran realizar un análisis aún más preciso del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en distintos escenarios y recopilando distintos tipos de evidencias de MTSK (e.g. Flores et al., 2013, 2014).

Figura 1

Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK). Elaboración propia



Nota. Elaboración propia.

Como hemos señalado antes, la labor de conformación de este modelo fue producto de un esfuerzo conjunto de investigadoras e investigadores con formaciones, tradiciones y contextos diversos, donde México ha tenido un papel especialmente relevante y desde los cuales ha sido posible analizar si los subdominios y categorías del modelo están lo suficientemente bien contruidos como para caracterizar los conocimientos especializados de cualquier profesor de matemáticas en cualquier contexto.

Aunque el modelo y los resultados obtenidos con los análisis basados en sus subdominios ya se habían presentado en congresos nacionales e internacionales, tanto en América como en Europa, y se habían mostrado resultados parciales de análisis con el modelo, no fue sino hasta 2018 que se publica en la revista *Research in Mathematics Education* el artículo *The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. En este artículo se presentan las definiciones y caracterización de todos los dominios y subdominios del modelo, además de reflexionar sobre algunas de las relaciones entre distintos tipos de conocimiento (Carrillo et al., 2018) y en el cual se cuenta con la participación de investigadores e investigadoras de España, México, Ecuador, Chile y Portugal. En 2022 se publica un libro sobre la trayectoria en el uso del modelo MTSK desde sus inicios hasta el momento (Carrillo et al., 2022), en el cual participan 7 autores mexicanos con contribuciones en 10

capítulos, lo cual refleja la colaboración entre nuestros países y la relevancia e impacto del trabajo con MTSK.

A continuación, se describen cada uno de los subdominios del modelo con la finalidad de mostrar el estado actual de las categorías, que se han ido construyendo a lo largo de casi 14 años de trabajo, y de resaltar las contribuciones derivadas de la relación entre México y España.

Sobre el Dominio de Conocimiento Matemático

El MTSK se organiza en torno al conocimiento que posee el profesor de matemáticas acerca de un determinado tema que se integra en el contexto escolar y que es susceptible de ser visto como un objeto de enseñanza y aprendizaje. Así, tiene sentido hablar de que se requiere reconocer características de este tema como objeto matemático.

Conocimiento de los temas

En este subdominio (KoT, por sus siglas en inglés - *Knowledge of Topics*) se integran los conocimientos del profesor acerca de un determinado tema escolar como objeto matemático, combinando una comprensión profunda, formal y rigurosa con el conocimiento matemático que se espera desarrollar en los estudiantes. Además, reconoce la complejidad del tratamiento de estos objetos en el aula (Carrillo et al., 2018; Vasco et al., 2016; Vasco & Moriel, 2022).

Utilizaremos el tema de fracciones para ejemplificar las categorías de conocimiento asociadas a este subdominio. Sobre la *fenomenología y aplicaciones* de la fracción, el profesor puede saber que este concepto tiene asociados distintos significados como, por ejemplo, el de parte-todo, cociente o medida (Moriel & Reyes, 2022). Sobre las *definiciones, propiedades y fundamentos*, un profesor sabe que una fracción es propia cuando el numerador es menor que el denominador, además de saber que esta fracción está delimitada entre 0 y 1 (Moriel & Reyes, 2022). Sobre los *registros de representación* asociados, el profesor podría conocer distintas formas de representar la fracción como el registro verbal (mitad o un medio), el numérico ($\frac{1}{2}$, 0,5) y el gráfico (representación en la recta numérica), entre otros (Rojas, 2014). Finalmente, sobre los *procedimientos*, además de considerar los conocimientos sobre cómo se lleva a cabo algún proceso o procedimiento, se consideran también lo que se sabe sobre cuándo puede hacerse, por qué se hace así y las características de este resultado (Vasco & Moriel, 2022). Por ejemplo, para el caso de las fracciones se requiere conocimiento acerca de cómo convertir una fracción en otra equivalente (*¿cómo se hace?*); saber que cualquier fracción puede convertirse en una equivalente a través de este método (*¿cuándo puede hacerse?*); saber que una fracción es equivalente a otra cuando la relación que existe entre numerador y denominador se mantiene constante y por lo tanto,

representa al mismo número racional (*¿por qué se hace así?*), es decir, que dos fracciones son equivalentes si una es múltiplo de la otra (*características del resultado*).

Conocimiento de la estructura de las matemáticas

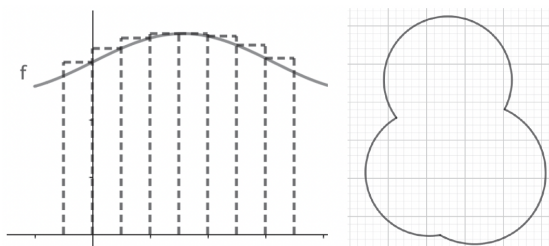
El conocimiento matemático del profesor debe incluir reconocer las relaciones que existen entre temas matemáticos, de modo que los contenidos pertenecen a una red de ideas interconectadas, que le permite comprender ciertos conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y desarrollar conceptos elementales mediante el tratamiento a través de herramientas avanzadas.

En este subdominio (KSM, por sus siglas en inglés- *Knowledge of the Structure of Mathematics*) se consideran conexiones inter-conceptuales de cuatro tipos (Flores-Medrano, 2022; Montes et al., 2013): conexiones de complejización, de simplificación, transversales y auxiliares.

Flores-Medrano (2022) considera que es importante establecer una dirección desde la cual se explora un determinado contenido matemático, y propone el ejemplo del conocimiento que tiene el profesor de matemáticas acerca de las relaciones entre las sumas de Riemann y el reticulado como técnica para aproximarse al área de una figura (Figura 2). En este ejemplo, si el contenido que estamos analizando es el de las sumas de Riemann, la conexión con el cálculo de áreas mediante retículas se clasifica como una *conexión de simplificación*; sin embargo, si el contenido que se analiza es el cálculo de áreas, la relación con las sumas de Riemann se interpreta como una *conexión de complejización*.

Figura 2

Sumas de Riemann y reticulado para cálculo de áreas



Nota. Flores-Medrano (2022), p. 51

Por otra parte, al referirse a las conexiones transversales, Flores-Medrano (2022) señala que existen conexiones entre objetos matemáticos en las cuales no parece haber un hilo que una necesariamente dos nodos, sino que puede pensarse en planos en los que estos nodos coexisten según sus rasgos y similitudes. Por ejemplo, el profesor podría conocer que el uso y

significado que se le da al signo igual en Aritmética ($6 - 2 = 4$) y en Cálculo ($f(x) = x - 2$), es distinto, aunque se conecta a través de la comprensión de que la igualdad puede tener distintos significados (resultado, equivalencia, semejanza, congruencia, etcétera). Este mismo autor se refiere a las *conexiones auxiliares* como conexiones de utilidad. Como ejemplo propone pensar en la relación que existe entre un sistema de ecuaciones de 3×3 y la ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos (no colineales), donde el sistema de ecuaciones funciona como una herramienta para determinar una expresión para la circunferencia.

Conocimiento de la práctica matemática

En este subdominio (KPM, por sus siglas en inglés -*Knowledge of Practices in Mathematics*) se consideran los conocimientos del profesor sobre las formas de conocer y crear o producir en Matemáticas, es decir, el conocimiento sintáctico. A diferencia del conocimiento de las relaciones o conexiones entre conceptos, propio del KSM, en este subdominio se considera el conocimiento de cómo se establecen dichas relaciones considerando aspectos de la comunicación matemática, el razonamiento y la verificación o validación, la formulación y aplicación de definiciones, el establecimiento de conexiones (entre conceptos, propiedades, etc.), el uso de correspondencias y equivalencias, el empleo de representaciones, la argumentación, la generalización y la exploración (Delgado, et al, 2022; Montes, et al., 2013). En este subdominio se identifican diversas categorías de conocimiento, de acuerdo a prácticas matemáticas que han surgido durante el estudio profundo de contenidos matemáticos y que no pretenden ser exhaustivas.

Delgado et al. (2022) identifican en la literatura de investigación sobre este subdominio cuatro prácticas matemáticas, dentro de las cuales se definen algunos indicadores. Así, se integra en el KPM el conocimiento del profesor sobre la *práctica de demostrar* en matemáticas, relativo a conocimientos sobre el *desarrollo de demostraciones, métodos y tipos de demostraciones y las funciones de la demostración*. Por otra parte, se habla también del conocimiento de la práctica de definir, entendiendo esta como una forma de crear y establecer nuevos conocimientos a través de reconocer el significado y carácter de un concepto (Delgado et al., 2022). Se considera aquí el conocimiento sobre las *características de una definición* (por ejemplo, atributos que debe verificar una definición matemática como la jerarquía o precisión, no circularidad, minimalidad, no ambigüedad, coherencia, invariancia y equivalencia).

Se considera también en este subdominio los conocimientos asociados a la *práctica de resolver problemas*, englobando aquí conocimientos del uso de distintos registros de representación, de heurísticos, estrategias de simplificar, reinterpretar, descomponer, sistematizar e introducir un elemento auxiliar para explorar la solución de un problema (Escudero-Ávila et al., 2015).

Por último, se considera también en este subdominio el *papel del lenguaje matemático* en términos del conocimiento que se tiene sobre el rol de los símbolos dentro del trabajo matemático y el *del uso del lenguaje matemático* y su impacto en el trabajo matemático y didáctico (Delgado et al., 2022).

Sobre el Dominio de Conocimiento Didáctico del Contenido

En Escudero-Ávila y Carrillo (2020) se publica una reflexión sobre las bases teóricas y metodológicas en las que se construye este dominio como parte del MTSK. En este trabajo se pone de manifiesto la intención de focalizar la atención en los conocimientos sobre cómo las matemáticas son aprendidas y enseñadas, así como sobre las expectativas de aprendizaje en los diferentes niveles educativos. Además, se establece la diferencia entre la caracterización de este dominio del MTSK y caracterizaciones como las de Shulman (1986) o Ball et al. (2008).

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas

En concordancia con las bases del modelo MTSK, este subdominio se centra en el análisis de un determinado contenido matemático como objeto de enseñanza para categorizar los conocimientos didácticos que puede poseer un profesor sobre dicho contenido, focalizando la atención en la enseñanza de las matemáticas de manera integrada y no en las matemáticas y su enseñanza como conjuntos que se intersecan (Escudero-Ávila & Carrillo, 2020; Sosa y Reyes-Camacho, 2022). Dentro de este subdominio se distinguen tres categorías de conocimientos.

Dentro de la categoría de *Teorías de enseñanza de las matemáticas*, se incluyen los conocimientos de teorías o construcciones mentales del profesor sobre la enseñanza de un determinado tema. Se distinguen aquí dos tipos teorías: las que están fundamentadas en resultados de investigaciones en el campo de la Didáctica de la Matemática, o *teorías institucionales*, y *teorías personales* de enseñanza, que pueden provenir de la reflexión del profesor sobre su práctica. En el primer tipo podría situarse, por ejemplo, el conocimiento que puede tener un profesor sobre los niveles de Van Hiele como herramienta para la organización de progresiones o trayectorias hipotéticas de aprendizaje para la enseñanza de conceptos geométricos. En el segundo, por ejemplo, las teorías personales que puede tener un profesor sobre el uso de tecnología como el software *Derive* dentro del tema de álgebra matricial en el aula de bachillerato de acuerdo con su experiencia (Sosa et al., 2016).

Siguiendo con el ejemplo anterior, para poder establecer una teoría personal acerca del uso de tecnologías en el aula de matemáticas es necesario que el profesor tenga un conocimiento profundo del software *Derive* como recurso de enseñanza, para reconocer su potencial y limitaciones para el tratamiento del álgebra matricial. En este sentido se define la categoría de

conocimiento de *recursos didácticos (físicos o digitales)*, que puede incluir conocimiento sobre libros de texto, series de televisión, materiales manipulativos, etcétera, siempre y cuando se reflexione sobre la relación del recurso con un determinado contenido (Escudero-Ávila & Carrillo, 2020).

Por último, se considera en este subdominio el conocimiento de *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* asociados al tratamiento de un tema (Sosa et al., 2016). En Escudero-Ávila & Carrillo (2020) se muestra el caso de un profesor que propone a sus estudiantes una *tarea* en la que se trabaja un problema de llenado de recipientes para explorar las características de las funciones. En dicha tarea el profesor hace uso de distintos *ejemplos* de recipientes con una secuencia específica para trabajar distintos tipos de función. La *estrategia* que utiliza el profesor es la modelación matemática del llenado de recipientes. Además, el profesor reconoce en el tránsito entre distintos registros de representación y la modelación matemática una *técnica* para dar sentido al concepto de función.

Las interconexiones entre el KMT y los subdominios del conocimiento matemático ayudan a comprender aspectos de la práctica profesional del profesorado, puesto que proporcionan una base para la toma de decisiones al respecto del tratamiento de un tema (Vasco et al., 2021).

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas

La inclusión de este subdominio (KFLM, por sus siglas en inglés - *Knowledge of Features of Learning Mathematics*) responde a la necesidad de incluir el conocimiento del profesor sobre un determinado tema matemático como objeto de aprendizaje y del proceso de comprensión de los estudiantes sobre los distintos contenidos, los errores, dificultades, y obstáculos asociados a cada concepto, así como el lenguaje habitualmente asociado (Escudero-Ávila, 2022).

Al igual que en el KMT, en el KFLM se consideran *teorías personales o institucionales* sobre el aprendizaje de un determinado contenido matemático. Además, se incluye en el KFLM el conocimiento sobre las *fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas*. Por ejemplo, retomando el caso de un profesor que aborda el álgebra matricial, Sosa y colaboradores (2015) muestran evidencias del conocimiento de un profesor sobre las necesidades, dificultades y confusiones matemáticas típicas de los estudiantes al trabajar este contenido, que pueden deberse a una mala relación con temas del bloque temático o a no proceder ordenadamente ni respetar convenciones matemáticas necesarias para su estudio.

También se ha identificado como parte del KFLM el conocimiento sobre *formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático* que se estudia. Por ejemplo, en Escudero-Ávila y Carrillo (2020) se muestran evidencias del conocimiento de un profesor de que, al transitar de un registro

de representación a otro, los estudiantes construyen relaciones y podrán identificar diferentes características de la función, así como asignarle distintos significados. Por último, en el KFLM se considera la categoría del conocimiento del profesor sobre *aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas*.

Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las matemáticas

A diferencia de modelos y aproximaciones teóricas en las que se habla de la necesidad de tener un conocimiento del currículo (en el sentido de las normas o decretos gubernamentales oficiales), para el caso del MTSK, en el KMLS (*Knowledge of Mathematics Learning Standards*) se recogen los conocimientos del profesor que se reflejan en estándares curriculares —internacionales, nacionales o locales—, así como las recomendaciones curriculares que pueden bien provenir de investigaciones en educación matemática, de asociaciones de profesores de matemáticas o de currículos oficiales o incluso de normas propias de las instituciones educativas que deben ser conocidas por el profesorado (Codes & Contreras, 2022). De este modo, este conocimiento proporciona la referencia de qué contenido enseñar en cada nivel, así como orientaciones sobre su enseñanza y evaluación.

En este subdominio se define la categoría de conocimiento de los *resultados de aprendizaje esperados* en un determinado nivel para un contenido en particular. Para ilustrar esta categoría, en Escudero-Ávila y Carrillo (2020) se muestran evidencias de que Omar, profesor de matemáticas de secundaria, sabe que en su país se aborda el concepto de función como parte del currículum de bachillerato (12 a 17 años) y que se retoma en grados superiores, lo que significa que los estudiantes de octavo y noveno grado tienen una base sobre el concepto de función lineal.

Para la categoría correspondiente a los conocimientos del profesor sobre el *nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado* para un tema particular en un momento escolar específico, Codes y Contreras (2022) ponen como ejemplo que un profesor sepa que no puede esperarse que un estudiante de primaria alcance un nivel de deducción formal o de rigor.

Por último, se identifica dentro del KMLS la categoría de *secuenciación de temas* matemáticos, entendida como el conocimiento del profesor tanto sobre lo que un estudiante de un determinado nivel necesita para abordar nuevas tareas como sobre las potencialidades que el trabajo actual tendría para desarrollar un determinado tópico posterior (Codes & Contreras, 2022).

Sobre el Dominio de Conocimiento Didáctico del Contenido

Si bien las creencias del profesorado sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje se consideran un subdominio del modelo MTSK, han recibido menor atención que los subdominios de conocimiento. Esto puede estar

justificado porque antes del desarrollo del modelo MTSK, el grupo de investigación de la Universidad profundizó en el estudio sobre estas creencias y su papel en la enseñanza, creando instrumentos para su análisis (Carrillo, 1998; Contreras, 1999; Climent, 2002). De aquí, la principal necesidad en el desarrollo del MTSK consistiera en delimitar y detallar los subdominios de conocimiento del contenido y didáctico del contenido.

Figura 3
Resumen de los dominios, subdominios y categorías de conocimiento del modelo MTSK

Subdominios		Categorías asociadas al subdominio	
Conocimiento matemático	Conocimiento de los tópicos KoT	Fenomenología y aplicaciones	
		Definiciones, propiedades y sus fundamentos	
		Registros de representación	
		Procedimientos	¿cómo se hace?
			¿cuándo puede hacerse?
			¿por qué se hace así?
			Características del resultado
	Conocimiento de la estructura de las matemáticas KSM	Conexiones de complejización	
		Conexiones de simplificación	
		Conexiones transversales	
		Conexiones auxiliares	
	Conocimiento de la práctica matemática KPM	La práctica de demostrar	Desarrollo de demostraciones
			Métodos y tipos de demostración
			Funciones de la demostración
		La práctica de definir	Características de la definición
		La práctica de resolver problemas	Estrategias para resolver problemas
		El papel del lenguaje matemático	Papel de los símbolos
Uso del lenguaje			
Conocimiento Didáctico del Contenido	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT	Teorías sobre enseñanza	Personales
			Institucionales
		Recursos didácticos (físicos y digitales)	
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	
	Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM	Teorías sobre aprendizaje	Personales
			Institucionales
		Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas	
		Formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático	
	Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas		
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMLS	Resultados de aprendizaje esperados	
		Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado	
Secuenciación de temas			

Nota. Adaptación de Escudero-Ávila (2023) basada en Carrillo et al. (2022)

Una vez avanzado el desarrollo del modelo, algunas investigaciones han abordado las relaciones entre el conocimiento y las creencias del profesorado de matemáticas (e.g. Flores & Carrillo, 2014). Además, ha surgido el cuestionamiento de si, además de las creencias, deberían incorporarse más elementos del dominio afectivo. El estudio de esta cuestión ha sido abordado en colaboraciones entre investigadores de SEIEM y SOMIDEM en relación con la problemática de si podemos hablar de un auténtico dominio afectivo matemático como ponen de manifiesto Marbán et al. (2022). La consideración de emociones y actitudes ligadas a la matemática parece apuntar a esta posibilidad. Con la posible inclusión de las emociones y actitudes, además de las creencias, dentro del modelo MTSK, se da cuenta de la importancia de la conexión entre cognición y afectos, y de esta conexión en el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. Así, García y Pascual (2017), ponen de relieve el papel de las emociones, como la congoja y satisfacción, en la acción del profesor y su relación con su conocimiento. En este estudio de caso constituido por un profesor novel de secundaria (reflejado también en García et al., 2019), encuentran evidencia de que el conocimiento del profesor desencadena las emociones de congoja y satisfacción. Los autores reconocen la relevancia de la autopercepción de la competencia docente porque en su propia observación de aula, el profesor puede emitir juicios sobre su conocimiento que adquieren importancia cuando se busca relacionarlos con las emociones.

La formación del profesorado vista desde el conocimiento especializado del profesorado

Desde sus inicios, el interés del equipo de investigación del SIDM, que será el germen de la creación de la Red Iberoamericana MTSK, se sitúa en poder orientar mejor la formación inicial y continua del profesorado. De hecho, el interés en el conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas se deriva de la observación de la importancia de dicho conocimiento en los procesos de desarrollo profesional del profesorado (Climent & Carrillo, 2003).

El modelo MTSK se aplica inicialmente para el análisis de actividades dirigidas a la formación inicial y continua de profesores de matemáticas (Carrillo et al. 2014). Así, se muestra cómo la mirada desde el MTSK permite detallar qué aspectos del conocimiento especializado del, en este caso futuro, profesorado de matemáticas, pretende abordarse.

Posteriormente, la aplicación del modelo MTSK a la formación de profesorado se orienta tanto a la estructuración de asignaturas en la formación inicial de profesorado como al diseño de tareas formativas (Montes et al., 2019). De este modo, las investigaciones sobre el conocimiento del profesorado para la enseñanza de distintos temas matemáticos pueden servir de

fundamento para determinar qué elementos de conocimiento especializado abordar en la formación inicial de profesorado. Se busca una estructura curricular de dicha formación que asegure que el futuro profesorado disponga de un conocimiento especializado base.

Con más énfasis, desde el 2018, en el seno de los proyectos “Conocimiento especializado del profesorado de matemáticas y formación del profesorado” (RTI2018-096547-B-I00) y “Conocimiento especializado en la formación del profesorado de matemáticas: Tareas y conocimiento del formador” (MTSK-T&MTEK) (PID2021-122180OB-100), financiados por el Gobierno de España, en los que participan investigadores de España y de México, junto con otros investigadores integrantes de la Red MTSK, la investigación con el modelo se ha orientado a analizar cómo construyen conocimiento especializado los profesores de Matemáticas en formación inicial y continua, iniciando el diseño de tareas para la formación de profesores basadas en el modelo MTSK.

Del estudio usando el modelo MTSK sobre las características de tareas formativas que permitan construir conocimiento especializado, se destaca la necesidad de que estén situadas en la práctica del profesor, convirtiendo dicha práctica en el centro de la formación (Joglar-Prieto et al., 2022). De este modo, además de permitir desarrollar conocimiento especializado, posibilita que el profesorado vivencie situaciones de la misma naturaleza que se espera pueda proponer a su alumnado (Ribeiro et al., 2021). Además, en muchas de ellas se le pide al (futuro) profesorado que desarrolle tareas profesionales, como interpretar y dar retroalimentación al pensamiento de los estudiantes, diseñar actividades matemáticas (Flores-Medrano et al., 2022), o evaluar un conjunto de ejemplos para la introducción de un concepto. De esta forma, reproducen o se asemejan al trabajo de enseñar, lo que favorece en mayor medida la generación de conocimiento profesional útil y disponible (Cusi y Martignone, 2022) y propicia que los profesores otorguen legitimidad a las tareas propuestas. Estas características son coherentes con la visión de la formación del profesorado como un proceso continuo desde la formación inicial a la del profesorado en ejercicio, donde el aprendizaje del profesor se basa en la reflexión sobre la práctica a partir de su problematización (Carrillo et al., 2020). De este modo, en muchos de los casos la formación continua se usa como recurso para nutrir la formación inicial de tareas genuinas, tratando de salvar la brecha que tradicionalmente existe entre formas propositivas de educación y la práctica (Rowland et al., 2014). Esta idea de continuidad pone el foco en posibilitar que los profesores construyan un amplio conjunto de conocimientos y destrezas, y desarrollen una actitud consistente con un aprendizaje a lo largo de la vida.

El aprendizaje del profesorado o futuro profesorado para la enseñanza de las matemáticas depende, en gran medida, de las tareas que se les

encomienden, en cuyo diseño hay que considerar su función, su forma y su foco (Grevholm et al., 2009). Las tareas formativas diseñadas desde el modelo MTSK por nuestro equipo de investigación han tenido como foco el conocimiento especializado en relación con una diversidad de tópicos matemáticos. Por ejemplo, Arce et al. (2023) se han centrado en el desarrollo de razonamiento deductivo en contextos geométricos. La función de la tarea, en este caso, es la movilización y construcción de conocimiento particularmente complejo de abordar en la formación del profesorado, como es el caso del conocimiento sobre demostrar. De este modo, se trata de desarrollar fundamentalmente conocimiento sobre la práctica matemática (KPM). Mediante un experimento de enseñanza (Cobb et al., 2015), los autores exploran cómo evoluciona el tipo de razonamiento utilizado por el futuro profesorado de primaria al resolver una tarea geométrica. Así, aunque gran parte del futuro profesorado utiliza fundamentalmente argumentos inductivos, algunos futuros profesores se advierte que este procedimiento no es suficiente para demostrar sus conjeturas. Estos autores destacan la importancia de preguntas como “¿Crees que la conjetura está suficientemente demostrada?”, permiten a los futuros profesores reflexionar sobre los procesos de razonamiento y demostración de cada etapa, desplegando y verbalizando elementos de su KPM. Este experimento de enseñanza por sí mismo no es suficiente, en la mayoría de los casos, para generar la necesidad intelectual de una prueba deductiva, por lo que se apunta a la necesidad de un diseño cuidadoso de conjuntos de tareas formativas que promuevan oportunidades para mover a los futuros profesores hacia esquemas de prueba analítica y fortalecer los avances en su KPM.

El estudio sobre tareas formativas ha permitido concluir que su diseño, considerando el modelo MTSK, favorece que se haga explícita la función de la tarea. La identificación de un foco y función específica permite optar por la forma de tarea más efectiva, cuidando la alineación de estos tres elementos. Por otro lado, el modelo MTSK se ha mostrado útil para abordar la complejidad del análisis del conocimiento que se moviliza con las tareas. Esto se atribuye a su potencial como herramienta analítica por el detalle en dominios, subdominios y categorías (Figura 2), a lo que se añade disponer de indicadores concretos de las categorías en relación con numerosos contenidos matemáticos extraídos de investigaciones previas sobre la práctica de aula.

Algunas tareas han permitido observar cómo puede promoverse la profundización del futuro profesorado en conceptos matemáticos, desempaquetando (en el sentido de Ma, 2010) conceptos elementales (Climent et al., 2024). Si bien en algunos de los estudios desarrollados se muestra cómo futuros profesores movilizan conocimiento de la práctica matemática (KPM), se observan dificultades particulares para promover el conocimiento de la práctica matemática pretendido con algunas tareas (como en Arce et

al., 2023, antes referida). Esta dificultad puede incrementarse en el caso de prácticas matemáticas sobre las que los (futuros) profesores no han tenido experiencia matemática previa (como es el caso de las prácticas de definir, argumentar y demostrar). Es importante abordar estas prácticas en la formación, ampliando la imagen de los (futuros) profesores sobre prácticas matemáticas escolares y rompiendo así con su idea de matemática escolar (en su mayoría como un conjunto de reglas y procedimientos estándar) (Boaler, 2002). La dificultad para observar la movilización de KPM y KSM (conocimiento de la práctica y la estructura de la matemática) ha sido también identificada en la implementación de tareas formativas en formación continua (Flores-Medrano et al., 2022).

En la mayoría de las tareas se ha promovido la construcción conjunta de conocimiento matemático y didáctico-matemático, al trascender los (futuros) profesores el papel de aprendices de matemáticas. Es el caso de las tareas que han abordado el estudio de la competencia en formulación de problemas (Montes et al., 2024). Estas tareas, además de la movilización del conocimiento del contenido matemático (KoT) y conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (KMT y KFLM), han permitido poner en juego las concepciones de los futuros profesores sobre la naturaleza de la matemática escolar. Además, se ha observado cómo con tareas formativas en las que se sitúa a futuros profesores como profesores, a partir de observación de vídeos de clases reales, la construcción de conocimiento del contenido (KoT) se produce a través del uso de KFLM (Climent et al., 2024). También en formación continua se ha observado que la movilización de conocimiento matemático a través de tareas formativas va de la mano de la movilización de PCK (Montes et al., 2021).

También en el contexto de la formación continua en México, se han desarrollado estudios en los que la construcción del conocimiento del profesor es el eje vertebral en el diseño y selección de tareas formativas. Así, Lizarde (2020), en el diseño de una maestría profesionalizante para maestros en servicio, muestra que la construcción de conocimiento cobra sentido en la medida en que la gestión del formador logre devolver la responsabilidad a los estudiantes. En ese estudio se reporta la construcción de conocimiento del profesor en torno al dominio conceptual del tema, la elaboración de paquetes de conocimiento, la fundamentación teórica, el diseño, la aplicación y el análisis de lecciones.

El interés por el conocimiento especializado del formador de profesorado de matemáticas

En los últimos años, la comunidad de investigación en educación matemática ha comenzado a poner el foco en una temática que, de alguna manera, tiene sus raíces en la investigación sobre el conocimiento del profesor de

matemáticas. Una vez alcanzada cierta comprensión acerca del conocimiento del profesorado surge el interés por el conocimiento de quien forma al profesorado (en adelante MTE).

Desde la Red MTSK esta temática ha ocupado un lugar relevante en la agenda de investigación y es precisamente en España y México donde se han desarrollado investigaciones que abordan el conocimiento y la práctica de los formadores del profesorado de matemáticas. De este modo, la aplicación del modelo MTSK al estudio del conocimiento del formador de profesorado, explota una de las potencialidades identificadas por Kilpatrick y Spangler (2016) en el modelo MTSK.

A nivel internacional, la colaboración entre nuestros países se ha plasmado en el trabajo de Escudero-Ávila et al. (2021), en el que se plantea la pregunta sobre qué necesitan conocer los formadores del profesorado de matemáticas necesitan conocer, sobre la base del contenido de la formación. En este trabajo, se asume que parte del conocimiento del formador es el conocimiento del profesor y, por ello, se proporciona una comparación detallada de las diferencias entre el conocimiento que necesitan los formadores y los profesores de matemáticas para ilustrar su naturaleza más compleja, entendiendo que una mejor comprensión acerca del contenido de la formación proporciona una mejor comprensión del conocimiento necesario para su desarrollo. Aunque MTSK está implícito en el planteamiento, se adopta una posición ecléctica para favorecer al debate desde otros modelos de conocimiento del profesor. También se aborda aquí la problemática de los diferentes perfiles de MTE (como matemáticos profesionales, investigadores en educación matemática y profesores con experiencia en educación obligatoria que participan en la formación de profesores de matemáticas), los cuales presentan diferencias importantes en la generación del conocimiento de los futuros profesores.

Como complemento a este trabajo, de corte más teórico, en Sosa et al. (2024) mostramos un estudio empírico, con dos formadores de profesores de matemáticas de México y España, centrado en los fundamentos teóricos, metodologías, experiencias pragmáticas y elementos de su aprendizaje, sobre cómo han implementado su práctica de formadores de profesores de matemáticas en sus respectivos centros de formación. Ambos formadores forman parte del equipo de trabajo que generó el modelo MTSK y, consecuentemente, ambos hacen uso del modelo, aunque sus enfoques mantienen estrechas relaciones con sus identidades profesionales. Con sus resultados se señala el camino hacia otros estudios que den cuenta de cómo el contexto tiene una influencia esencial en la práctica del formador de profesores y de cómo su desarrollo profesional se sustenta en la reflexión sobre su propia práctica, como parte de comunidades de aprendizaje, de práctica y de investigación.

A partir de estos primeros trabajos, la colaboración de investigadores de México y España debería profundizar en las características del conocimiento del formador, focalizando en aquellas de mayor incidencia en el desarrollo de competencias profesionales y en su desarrollo profesional.

Reflexiones finales

En las investigaciones del grupo SIDM y la Red MTSK, en las que participan los autores de este capítulo y otros investigadores de España y México, hemos abordado la comprensión de qué conocimiento requiere el profesorado de matemáticas para desarrollar su labor docente y cómo propiciarlo. El desarrollo del modelo de conocimiento especializado del profesorado de matemáticas, MTSK, en cuyo diseño han tenido un peso relevante investigadores de ambos países, nos ha dotado de una herramienta para dicho estudio.

En la investigación sobre cómo propiciar el desarrollo de conocimiento especializado en la formación, inicial y continua, de profesorado de matemáticas, hemos avanzado en la comprensión de algunas características necesarias de las tareas formativas y de las relaciones entre estas características y sus resultados de aprendizaje. Algunas cuestiones se nos presentan como líneas de investigación futura, como, por ejemplo, cómo propiciar el desarrollo de conocimiento relativo a prácticas matemáticas, el conocimiento de la estructura de las matemáticas o un conocimiento especializado interrelacionado (Pacheco-Muñoz et al., 2023). Asimismo, continuamos indagando sobre el papel del formador en la implementación de tareas formativas, y la posible incidencia de distintos perfiles y conocimientos del formador.

Además, hemos comenzado a abordar el desarrollo de conocimiento especializado junto con competencias profesionales. Es el caso de Campos-Cano y Flores-Medrano (2023), quienes presentan una propuesta de tarea formativa para desarrollar la competencia mirada profesional en profesores de nivel medio superior en México (15 a 18 años), en el tema de funciones racionales. De este modo, se pretende que los profesores desarrollen tanto su *noticing* (van Es & Sherin, 2021) como su conocimiento especializado desde la perspectiva del modelo MTSK (en concreto, conocimiento de los temas, conocimiento de la práctica matemática y conocimiento sobre las características del aprendizaje de las matemáticas), estableciendo nexos entre ambos (siguiendo a López & Zakaryan, 2021).

La colaboración presente y futura de investigadores de la SEIEM y la SOMIDEM sobre la formación del profesorado de matemáticas desde la perspectiva del desarrollo de conocimiento especializado, está respaldada por la existencia de grupos de investigación bien cohesionados, con una trayectoria de investigación compartida ya consolidada y con numerosas y variadas interacciones entre investigadores de ambas sociedades.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto PID2021-122180OB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y “FSE Invierte en tu futuro”. Se enmarca en la Red MTSK, auspiciada por la AUIP, y el Grupo de Investigación DESYM de la Universidad de Huelva.

Referencias

- Arce, M., Conejo, L., & Flores-Medrano, E. (2023). Knowledge mobilised in a teaching experiment about conjecturing and proving by elementary preservice teachers. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Herendiné-Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3695–3702). ERME.
- Ball, D.L., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Boaler, J. (2002). Exploring the nature of mathematical activity: Using theory, research and working hypotheses to broaden conceptions of mathematics knowing. *Educational Studies in Mathematics*, 51(1–2), 3–21.
- Campos-Cano, M., & Flores-Medrano, E. (2023). Diseño de tareas formativas para desarrollar la competencia mirada profesional. En R. Delgado Rebolledo, & D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 47–54). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Carreño, E., Ribeiro, M., & Climent, N. (2013). Specialized and horizon content knowledge –Discussing prospective teachers knowledge on polygons. En B. Ubuz, C. Haser, & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2966–2975). ERME.
- Carreño, E., Rojas, N., Montes, M., & Flores, P. (2013). Mathematics Teacher’s specialized knowledge. Reflections based on specific descriptors of knowledge. En B. Ubuz, C. Haser, & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2976–2984). ERME.
- Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Universidad de Huelva Publicaciones.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Montes, M. (2020). Using Professional Development Contexts to Structure Prospective Teacher Education. En S. Llinares, & O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2* (pp. 393–419). BRILL/SENSE. <https://doi.org/10.1163/9789087905460>

- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser, & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985–2994). ERME.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Ávila, D. I., Flores-Medrano, E., & Montes, M. A. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones.
- Carrillo, J., Escudero, D., & Flores, E. (2014). El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de Matemáticas de primaria. *Revista de Análisis Matemático-Didáctico para Profesores*, 1(1), 16–26.
- Carrillo, J., Flores, E., Climent, N., Contreras, L.C., Aguilar, A., Escudero, D.I., & Montes, M.A. (2013). Investigación sobre el profesor de matemáticas en la Universidad de Huelva (España). En C. Dolores, M.S. García, J.A. Hernández, & L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: la formación de profesores*. Díaz de Santos.
- Carrillo, J., Montes, M. A., & Climent, N. (2022). (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino*. Dykinson.
- Climent, N., & Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las ciencias*, 21(3), 387–404.
- Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M., & Ribeiro, M. (2024). The MTSK model as a tool for designing tasks for teacher education. *ZDM Mathematics Education*, 56(6), 1123–1135. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01605-8>
- Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2015). Design research: An analysis and critique. En L. D. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 481–503). Routledge.
- Codes, M., & Contreras, L. C. (2022) El conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas. En Carrillo, J., Montes, M., & Climent, N. (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas. 10 años de camino* (pp. 95–108). Dykinson.
- Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática: un estudio de caso*. [Tesis doctoral]. Universidad de Huelva.
- Contreras, L. C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas*. Universidad de Huelva Publicaciones.

- Cusi, A., & Martignone, F. (2022). Integration of two theoretical lenses to analyse the potentialities of a practice-based task in fostering pre-service mathematics teacher specialized knowledge. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the CERME12* (pp. 3543–3550). Free University of Bozen-Bolzano.
<https://hal.science/CERME12/hal-03748739v1>
- Delgado, R., Zakaryan, D., & Alfaro, C. (2022) El conocimiento de la práctica matemática. En J. Carrillo, M. Montes, & N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas. 10 años de camino* (pp. 57–69). Dykinson.
- Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. En C. Keitel, P. Damerow, A. Bishop, & P. Gerdes (Eds.), *Mathematics, education, and society. Science and Technology Education, Document Series, (35)* (pp. 99–101). UNESCO.
- Escudero-Ávila, D. (2022). Conocimiento de las características del aprendizaje matemático. En J. Carrillo, M. A. Montes, & N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)* (pp. 83–94). Dykinson.
- Escudero-Ávila, D. (2023), Relaciones entre el uso del pensamiento matemático flexible y el desarrollo de conocimientos especializados en la formación inicial del profesorado de primaria. En J. L. Piñeiro, N. Pizarro, & E. Carrasco (Eds.), *Actas de las XXVII Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 36–43). Fondo Editorial UMCE.
- Escudero-Ávila, D., & Carrillo, J. (2020). El Conocimiento Didáctico del Contenido: Bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Educación Matemática*, 32(2), 1–38.
- Escudero-Ávila, D., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L.C., & Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*, 10, 53–77.
- Escudero, D.I., Flores- Medrano, E., & Carrillo Yáñez, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Sosa, E. Aparicio, & F. M. Rodríguez (Eds.), *Memoria de la XV Escuela de Invierno de Matemática Educativa* (pp. 35–42). Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.
- Escudero-Ávila D., Montes M., & Contreras, L.C. (2021). What Do Mathematics Teacher Educators Need to Know? Reflections Emerging from the Content of Mathematics Teacher Education. En M. Goos, & K. Beswick (Eds.), *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators* (pp. 23–40). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8_2

- Flores-Medrano, E. (2022). Conocimiento de la estructura de las matemáticas. En J. Carrillo, M. A. Montes, & N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)* (pp. 83–94). Dykinson.
- Flores, E., & Carrillo, J. (2014). Connecting a mathematics teacher's conceptions and specialised knowledge through her practice. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 3, pp. 81–88). PME.
- Flores, E., Escudero, D.I., & Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275–282). SEIEM.
- Flores, E., Escudero, D.I., & Aguilar, A. (2014). Online mathematics teacher education: main topics, theoretical approaches, techniques and changes in researchers' work. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 3, pp. 89–96). PME.
- Flores, E., Escudero, D.I., & Carrillo, J. (2013). A theoretical review of Specialised Content Knowledge. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of 8th CERME* (pp. 3055–3064). ERME.
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D. I., & Méndez-Coca, M. M. (2022). El uso de representaciones y de problemas para la adquisición del conocimiento matemático didáctico de fracciones en la formación de maestros. *APeDuC Revista-Investigação e Práticas em Educação em Ciências, Matemática e Tecnologia*, 3(2), 98–13.
<https://apeduc revista.utad.pt/index.php/apeduc/article/view/358/141>
- Flores-Medrano, E., Gómez-Arroyo, D., Aguilar-González, A., & Muñoz-Rodríguez, L. (2022). What Knowledge do teachers need to predict the mathematical behavior of students? *Mathematics*, 10(16), 1–22.
<https://doi.org/10.3390/math10162933>
- García, M., & Pascual, M.I. (2017). De la congoja a la satisfacción: el conocimiento del profesor de Matemáticas. *IE Revista de Investigación Rediech*, 8(15), 133–148.
- García, M.S., Pascual, M.I., & Carrillo, J., & Martínez, G. (2019). El modelo del conocimiento especializado para la enseñanza y las emociones del profesor de matemáticas. En L.A. Hernández, I. Borja, J. Slisko, & J.A. Juárez (Eds.), *Aportes a la educación matemática basados en la investigación* (pp. 99–120). BUAP Publicaciones.
- Grevholm, B., Millman, R., & Clarke, B. (2009). Function, Form, and Focus: The role of Tasks in Elementary Mathematics Teacher Education. En B. Clarke, B. Grevholm, & R. Millman (Eds.), *Tasks in Primary Mathematics Education: Purpose, Use and Exemplars* (pp. 1–5). Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8>

- Joglar-Prieto, N., Liñán-García, M. M., & Contreras, L. C. (2022). MTSK en la formación inicial del profesorado de primaria. En J. Carrillo, M. A. Montes, & N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 207–222). Dykinson.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy of Sciences National Research Council.
- Kilpatrick, J., & Spangler, D. A. (2016). Educating future mathematics education professors. En L. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 297–309). Routledge.
- Lizarde, E. (2020). MTSK y formación docente continua. Explorando horizontes de posibilidades. En J. Carrillo, M. Codes, & L.C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones.
- Lizarde, E. (2013) *Transposición y destransposición del saber matemático y didáctico representaciones y prácticas en la formación inicial de docentes* [Tesis de doctorado, Universidad de Huelva].
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=40497>
- López, L. M., & Zakaryan, D. (2021). Relacionando el conocimiento especializado del profesor de matemáticas con la competencia noticing. En J. G. Moriel Junior (Ed.), *Actas de V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 349–356). Congresseme.
<https://cdn.congresse.me/ho20198vzn5ar0pp4l3wt33iit5t>
- Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics. Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States* (3rd ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003009443>
- Marbán, J., Fernández-Gago, J., García, M., Maroto, A., & Pascual, I. (2022). Dominio afectivo para la enseñanza. ¿qué lo hace especial? En J. Carrillo, M. Á. Montes, & N. Climent (Eds.), *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas, desde la perspectiva del MTSK* (pp.193–206). Dykinson.
- Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M. (2013). MTSK: from Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures. En B. Ubuz, C. Haser, & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3185–3194). ERME.
- Montes, M., Flores-Medrano, E., Carmona, E., & Huitrado, J. (2014). Reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento, las creencias y las concepciones. En J. Carrillo, N. Climent, L. Contreras, M. Montes, D. Escudero-Ávila, & E. Flores-Medrano (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones.

- Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M., & Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, & M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 157–176). Ediciones Universidad Salamanca.
- Montes, M., Chico, J., Martín-Díaz, J. P., & Badillo, E. (2024). Mathematics teachers' specialized knowledge mobilized through problem transformation, *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 101–132.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101132>
- Montes, M., Pascual, M. I., & Climent, N. (2021). Una aproximación a la formación especializada en matemáticas de maestros egresados. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 24(1), 83–104.
<https://doi.org/10.12802/relime.21.2414>
- Moriel, J., & Reyes, A. (2022). conocimiento especializado de las fracciones. En J. Carrillo, M. A. Montes, & N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)* (pp. 135–150). Dykinson.
- Muñoz-Catalán, M. C. (2010). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. <http://hdl.handle.net/10272/2949>
- Pacheco-Muñoz, E., Juárez-Ruiz, E., & Flores-Medrano, E. (2023). Relaciones direccionales intra-dominio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre localización en el plano. *AIEM -Avances de investigación en educación matemática*, 24, 57–74. <https://doi.org/10.35763/aiem24.4360>
- Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of educational research*, 62(3), 307–332.
- Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87–109.
- Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J. P. Ponte, & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII PME* (Vol. I, pp. 195–210). PME.
- Ribeiro, C. M. (2010). *O desenvolvimento profissional de duas professoras do 1º. Ciclo, envolvidas num grupo de trabalho colaborativo, partindo da modelação das suas aulas de matemática*. [Tesis de doctorado]. Universidad de Huelva.
- Ribeiro, M., Almeida, A., & Mellone, M. (2021). Conceitualizando Tarefas Formativas para Desenvolver as Especificidades do Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor. *Perspectivas da Educação Matemática*, 14(35), 1–32.
<https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/13263>
- Rojas, N. (2014). Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: Un estudio de casos [Tesis de doctorado]. Universidad de Granada.
- Rowland, T. (2009). *Developing primary mathematics teaching: Reflecting on practice with the knowledge quartet*. Sage.

- Rowland, T., Turner, F., & Thwaites, A. (2014). Research into teacher knowledge: a stimulus for development in mathematics teacher education practice. *ZDM–Mathematics Education*, 46, 317–328.
- Sandoval-Cáceres, I. T., Climent-Rodríguez, N., Jiménez-de-la-Rosa-Barrios, E. N., & Lupiáñez-Gómez, J. L. (2014). Conocimiento matemático y tecnológico para la enseñanza de las matemáticas. En E. Ortega, F. Rodríguez, M. J. Mejía, R. M. López, D. Gutiérrez, & F. V. Montes (Coord.), *Estrategias de enseñanza-aprendizaje y su importancia en el entorno educativo* (pp. 70–82). Red Durango de Investigadores Educativos A.C.
- Schoenfeld, A.H. (2010). *How we think*. Routledge.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, 15(2), 4–14.
- Sosa, L. (2011). Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos. [Tesis de doctorado, Universidad de Huelva]. <https://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/4509>
- Sosa, L., Contreras, L. C., & Sánchez-Acevedo, N. (2024). Prácticas y sustentos teóricos expresados por dos formadores de profesores en dos contextos académicos distintos. Elementos comunes. En N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 513–520). SEIEM.
- Sosa, L., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 173–189. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1522>
- Sosa, L., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación Matemática*, 28(2), 151–174.
- Sosa, L., & Reyes-Camacho, A. (2022) Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas. En Carrillo, J., Montes, M., & Climent, N. (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas. 10 años de camino* (pp. 71–82). Dykinson.
- Thompson, A.G. (1992). Teacher's Beliefs and Conceptions: a Synthesis of the Research. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook on Mathematics Teaching and Learning*. McMillan.
- Van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2021). Expanding on prior conceptualizations of teacher noticing. *ZDM–Mathematics Education*, 53(1), 17–27.
- Vasco, D., Climent, N. Escudero-Ávila, D., Montes, M.A., & Ribeiro, M. (2016) Conocimiento Especializado de un Profesor de Álgebra Lineal y Espacios de Trabajo Matemático. *BOLEMA*, 30(54), 222–239.

- Vasco-Mora, D., Climent-Rodríguez, N., & Escudero-Ávila, D. (2021). Interconnections between Content Knowledge and Pedagogical Content Knowledge of a University Lecturer in Linear Algebra. *Mathematics*, 9, 2542. <https://doi.org/10.3390/math9202542>
- Vasco, D., & Moriel, J. (2022). Conocimiento de los temas. En J. Carrillo, M. A. Montes, & N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)* (pp. 35–46). Dykinson.