

Los Recorridos de Estudio e Investigación y las restricciones institucionales en la formación del profesorado

Study and Research Paths and institutional constraints in Teacher Education

Berta Barquero ¹ 

Marianna Bosch ² 

Avenilde Romo-Vázquez ³ 

Resumen

En 2013 iniciamos una colaboración entre equipos de investigación españoles y mexicanos sobre la formación del profesorado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. El marco empírico elegido fue el Programa de Matemática Educativa del CICATA Legaria, un centro pionero en la impartición de postgrados en línea en matemática educativa a profesorado de educación secundaria y universitaria en ejercicio. La colaboración permitió concretar y desarrollar los “recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado”, un dispositivo que se enmarca en el nuevo paradigma del cuestionamiento del mundo y que pone el acento en las restricciones institucionales que encuentra el profesorado cuando intenta implementar nuevas modalidades de estudio en infraestructuras pedagógicas tradicionales aún vigentes.

¹ bbarquero@ub.edu

Universitat de Barcelona, España

² marianna.bosch@ub.edu

Universitat de Barcelona, España

³ avenilde.romo@cinvestav.mx

Cinvestav, México

Palabras clave

Formación del profesorado, formación en línea y a distancia, modelización matemática, recorridos de estudio e investigación, restricciones institucionales.

Abstract

In 2013, we started a collaboration between Spanish and Mexican research teams on teacher training within the Anthropological Theory of the Didactic. The empirical framework chosen was the Educational Mathematics Programme at CICATA Legaria, a pioneering centre in providing postgraduate courses in educational mathematics for in-service secondary and university teachers. The collaboration allowed us to specify and develop “study and research paths for teacher education”, an instructional format framed in the new paradigm of questioning the world. One of its main characteristics and novelties is how it helps teachers address the institutional restrictions they can encounter when implementing new study modalities in traditional educational infrastructures still in use.

Keywords

Teacher education, online and distance training, mathematical modelling, study and research paths, institutional constraints.

La formación del profesorado y el cuestionamiento del mundo

En 2013 iniciamos una colaboración entre equipos de investigación españoles y mexicanos sobre la formación del profesorado en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. El marco empírico elegido fue el Programa de Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, unidad Legaria (en adelante, CICATA-IPN), un centro pionero en la impartición de postgrados en línea en matemática educativa a profesorado de educación secundaria y universitaria en ejercicio. La colaboración permitió trabajar y concretar la propuesta de los *Recorridos de Estudio e Investigación para la Formación del Profesorado* (REI-FP), un dispositivo que persigue enmarcar la formación del profesorado en el nuevo *paradigma del cuestionamiento del mundo* (Chevallard, 2013) y que pone el acento en las restricciones institucionales que encuentra el profesorado cuando intenta implementar nuevas modalidades de estudio en estructuras pedagógicas tradicionales aún vigentes.

En la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD; Chevallard, 2013), el problema de la formación se plantea de forma genérica para abordar, sin distinciones a priori, cualquier tipo de proceso de estudio, sea o no reglado, afecte a estudiantes o profesionales. Los procesos de estudio se describen a partir del llamado *esquema herbartiano*, que debe su nombre al filósofo y pedagogo alemán Johann Friedrich Herbart, a quien se atribuye la idea del profesor universitario como guía del proceso de estudio que llevan a cabo los estudiantes. El esquema herbartiano permite describir cualquier proceso

de estudio, iniciado por un grupo de personas, los estudiantes X , ayudados por otro grupo de personas, los profesores o guías del estudio, Y . X e Y se proponen abordar una cuestión Q para la que quieren elaborar una respuesta $R^\heartsuit$ (Chevallard & Cirade, 2009). El esquema herbartiano se indica de forma simbólica como $S(X, Y, Q) \ M \hookrightarrow R^\heartsuit$, donde $S(X, Y, Q)$ designa el sistema didáctico formado por X e Y alrededor de Q . En el proceso de elaboración de la respuesta final $R^\heartsuit$, interviene un elemento esencial del esquema: el *medio* M del proceso de estudio, el cual integra todos los recursos materiales e inmateriales a los que recurren X e Y para construir $R^\heartsuit$, lo que se simboliza como: $\{S(X, Y, Q) \hookrightarrow M\} \hookrightarrow R^\heartsuit$. Entre estos recursos se encuentran cuestiones derivadas de Q , saberes de todo tipo elaborados por otros y que parecen útiles para abordar las cuestiones derivadas, así como otros objetos, informaciones y datos empíricos.

El esquema herbartiano permite describir cualquier proceso de estudio generado por una cuestión Q , así como aquellos procesos en los que las cuestiones originales han quedado desde hace tiempo sustituidas por las obras O que permitieron, en algún momento, elaborar respuestas a cuestiones que quizá ya han desaparecido para X e Y . Estas respuestas, poco a poco, se han considerado suficientemente importantes como para convertirse ellas mismas en el objeto del estudio. El pedagogo español Esteve (1998, p. 46), dirigiéndose a los profesores, recordaba que “alguien, sumido en la duda, inquieto por una nueva pregunta, elaboró los conocimientos del tema que mañana te toca explicar”. El papel de las preguntas y respuestas queda entonces revertido: en lugar de estudiar cuestiones para elaborar respuestas, se estudian obras-respuestas a modo de anticipación de las cuestiones potenciales a las que estas obras deberían permitir elaborar respuestas. Surge así la consideración y caracterización de dos paradigmas de estudio: el de la “visita de las obras”, centrado en el estudio de respuestas, y el del “cuestionamiento del mundo”, centrado en el planteamiento y estudio de cuestiones (Chevallard, 2013).

Una de las principales líneas de desarrollo de la TAD aborda las condiciones que facilitan la transición del paradigma de la visita de las obras, hoy día en crisis, hacia el paradigma del cuestionamiento del mundo. Esta misma línea también incluye el estudio de las restricciones de distinta naturaleza que limitan la transición, desde las más genéricas ligadas a la forma en que nuestras sociedades conciben la educación y la difusión de los saberes, hasta las más específicas vinculadas a los tipos de contenidos y actividades que se proponen en las aulas. La consideración del problema de la formación del profesorado, tanto la inicial como la continua, tampoco es ajena a los dos paradigmas. En el paradigma de la visita de las obras, el problema de la formación se formularía preguntando por las “obras” (saberes, competencias, etc.) que los profesores deben conocer y, por lo tanto, “visitar” durante el

periodo de formación. En cambio, en el paradigma del cuestionamiento del mundo, el problema se formula a partir de las cuestiones de la profesión docente que se deben abordar en la formación (Chevallard & Cirade, 2009; Cirade, 2006), incluyendo entre ellas el cuestionamiento de los saberes por enseñar (Bosch & Gascón, 2009; Ruiz-Olarría, 2015).

En España, la investigación sobre las condiciones necesarias para el cambio de paradigma nos condujo a diseñar e implementar nuevos dispositivos didácticos basados en la indagación llamados *recorridos de estudio e investigación* (REI). Estos dispositivos se conciben y diseñan en el paradigma del cuestionamiento del mundo, aunque su implementación se realiza bajo las condiciones de un sistema educativo marcado por el dominante paradigma de la visita de las obras. Su diseño y análisis permiten investigar e identificar, no solamente los tipos de procesos de estudio que se puedan enmarcar en una transición hacia un nuevo paradigma, sino las restricciones y limitaciones que impone el paradigma dominante y que dificultan sus posibilidades de implementación. De este modo, se propusieron y analizaron REI para la enseñanza secundaria (García, 2005; Rodríguez-Quintana, 2005; Lucas, 2015) y universitaria (Barquero, 2009; Serrano, 2013), incluyendo la formación del profesorado (Sierra, 2006; Ruiz-Olarría, 2015).

En el momento en el que surgió la posibilidad de colaboración entre el equipo español de la TAD y el equipo mexicano del CICATA-IPN, los dispositivos de formación docente del CICATA-IPN estaban en constante innovación, debido a que la modalidad no tenía referentes tradicionales. El marco institucional resultaba en este contexto un ámbito empírico excelente para experimentar nuevas propuestas de formación coherentes con el paradigma del cuestionamiento del mundo y que llamamos *recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado* (REI-FP) (Ruiz-Olarría, 2015).

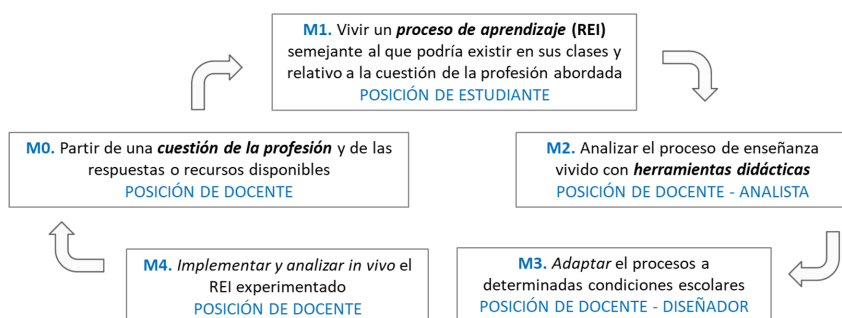
Los REI-FP se presentan como procesos formativos estructurados en cinco fases o módulos que numeramos de forma secuencial, pero que mantienen cierta coexistencia durante el proceso (ver Figura 1).

En cada uno de ellos, se pide al profesorado en formación asumir distintos roles (como estudiantes indagadores, analistas, diseñadores y/o docentes) que permitirán establecer distintas relaciones con los saberes profesionales bajo estudio y construcción. El primer módulo, que llamamos *Módulo 0* por su carácter central, consiste en la consideración de una cuestión relativa a la profesión docente Q_{FP} en el contexto considerado (formación inicial o continua, nivel educativo, etc.) que suele formularse en términos de “¿Cómo enseñar un determinado contenido C ?” Para abordar esta cuestión Q_{FP} , los profesores en formación, X , junto con el equipo de formadores Y , construyen un determinado medio M . El primer elemento de este medio es un proceso de estudio, generalmente en forma de REI, relacionado con el contenido C .

En el *Módulo 1*, *X* e *Y* se convierten en estudiantes y profesores (o guías del estudio) respectivamente de este REI. Después de haber llevado a cabo el REI, *X* e *Y* vuelven a su rol inicial de profesores en formación y educadores para analizar el proceso de estudio vivido, tarea para la cual se necesitarán nuevas herramientas matemáticas y didácticas que el profesorado en formación *X* deberá estudiar con la ayuda de los formadores *Y*. El *Módulo 3* del REI-FP incluye el diseño y análisis de un proceso de estudio adaptado a una realidad y condiciones escolares concretas. Finalmente, en el *Módulo 4*, se implementa la propuesta y se analizan los resultados de la implementación con el objetivo de identificar nuevas condiciones y restricciones para el diseño, gestión y análisis de procesos de estudio relacionados con la cuestión generatriz Q_{FP} del REI-FP y con el contenido *C*.

Figura 1

Estructura de los REI-FP



Nota. Adaptación a partir de Ruiz-Olarría (2015)

La formación del profesorado en línea y a distancia: en busca de la coherencia

La colaboración entre investigadores de México (CICATA-IPN) y del grupo español que trabaja en la TAD (www.atd-tad.org) se inició con la planificación e implementación de un primer curso para un programa de formación continua del CICATA-IPN, de nivel maestría, en la modalidad en línea y a distancia, dirigido a profesores de matemáticas de México y de Latinoamérica. El curso se titulaba “Procesos de Institucionalización de la Matemática Escolar” (PIME) y formaba parte de una Maestría en Matemática Educativa. Este primer curso de 2013 fue seguido por otros cursos, que fueron impartidos anual o semestralmente, hasta el año 2020, bajo distintas apelaciones: “Naturaleza del Pensamiento Matemático” (NPM) o “Análisis del Discurso Matemático Escolar” (ADME). Desde el punto de vista de la investigación, la adaptación de los REI-FP constituyó todo un reto, ya que estos estaban, en ese momento, en plena fase de desarrollo en el trabajo de tesis doctoral

de Ruiz-Olarría (2015). En el caso de CICATA, los cursos eran módulos, cuya duración era de cuatro semanas, considerando 20 horas de trabajo semanales por parte de los profesores (80 h en total en cada curso). Los grupos, de quince a veinte profesores, eran heterogéneos, con diferentes nacionalidades, formaciones, experiencia docente e impartían docencia en distintos niveles educativos: secundaria, bachillerato o universidad. Además, eran cursos en línea y a distancia, una modalidad poco extendida en el periodo anterior a la pandemia del COVID-19.

Los cursos eran principalmente teórico-prácticos, teniendo como objetivo principal poner a disposición de los profesores herramientas y resultados surgidos de la investigación en didáctica de las matemáticas para analizar, innovar y regular, al menos parcialmente, su práctica docente. Para ello, se identificaban cuestiones emergentes en la práctica docente, tanto las reconocidas por los profesores (por ejemplo, dificultad para enseñar la demostración) como las que les eran menos perceptibles, pero de las que la investigación da cuenta (por ejemplo, el rol del lenguaje matemático en la enseñanza de las matemáticas). El modelo de formación consistía en proponer cuatro grandes actividades por curso, una por semana, que implicaban la lectura y análisis de artículos de investigación, análisis de propuestas o implementaciones didácticas, adaptación de tareas o lecciones para explorar concepciones de los estudiantes o para enseñar algún contenido matemático, así como la implementación y análisis de tareas o ejercicios con su grupo de estudiantes. Se alternaba el trabajo individual, con el trabajo colaborativo entre profesores y con el grupo de profesores y formadores gracias al soporte de diferentes herramientas de la plataforma de aprendizaje (foros, wikis, videos, correos electrónicos, etc.).

En estas condiciones institucionales se diseñaron e implementaron nueve cursos, impartidos por un equipo docente mixto compuesto por un equipo mexicano de ocho miembros y un equipo español de seis miembros. Se tomaron de partida tres REI previamente experimentados en la enseñanza secundaria o universitaria (ver Tabla 1), los cuales se adaptaron y experimentaron en el Módulo 1 del REI-FP con los docentes en formación.

Dos objetivos guiaron el diseño de los cursos. El primero consistía en dotar a los profesores de herramientas teóricas y metodológicas para el análisis y la implementación de procesos didácticos enfocados en la enseñanza de la modelización matemática. El segundo servía para que estas herramientas les permitieran analizar, a lo largo del proceso de formación, la actividad matemática desarrollada bajo el rol de estudiantes y docentes, la gestión didáctica de procesos de modelización, además de identificar condiciones y restricciones institucionales que podían facilitar o, por el contrario, limitar un buen desarrollo de estos procesos. Para conseguir esta evolución y cuestionamiento, la metodología de los REI-FP se fue adaptando para que

cuatro de sus módulos —M1, M2, M3 y M4— se desarrollaran en cuatro actividades semanales, que incluían varias fases y mantuvieron ciertas invariantes, como se ilustra en la Tabla 2.

Tabla 1

Cursos, equipos mixtos de formadores y REI de base implementado

Año / Curso	Equipo español	Equipo mexicano	REI implementado
2013 PIME	Berta Barquero Marianna Bosch Josep Gascón Alicia Ruiz Lidia Serrano	Apolo Castañeda Gabriel Molina Avenilde Romo Mario Sánchez	Previsión de ventas para Desigual
2014 PIME	Berta Barquero Marianna Bosch	Gabriel Molina Olda Covián Avenilde Romo	Previsión de ventas para Desigual
2015 NPM	Berta Barquero Marianna Bosch Ignasi Florensa Josep Gascón	Alejandro Rosas	Análisis del REI vivido “Previsión de ventas en Desigual” en el curso PIME usando el mapa C-R.
2015 PIME	Berta Barquero Marianna Bosch	Gabriel Molina Olda Covián Avenilde Romo	Comparando realidad contra previsión: el caso de los usuarios de Facebook
2017 NPM	Berta Barquero Marianna Bosch Lidia Serrano	Avenilde Romo Mario Sánchez	Comparando realidad contra previsión: el caso de los usuarios de Facebook
2018 NPM	Berta Barquero Marianna Bosch Lidia Serrano	Gabriel Molina Camilo Ramírez Avenilde Romo	Comparando realidad contra previsión: el caso de los usuarios de Facebook
2019 NPM	Berta Barquero Marianna Bosch Alicia Ruiz Lidia Serrano	Sergio Chalé Avenilde Romo	Comparando realidad contra previsión: el caso de los usuarios de Facebook
2019 ADME I	Berta Barquero Marianna Bosch Alicia Ruiz	Sergio Chalé Avenilde Romo	La moda no da la talla (Módulos 1 y 2)
2020 ADME II	Berta Barquero Marianna Bosch Alicia Ruiz	Gabriel Molina Avenilde Romo	La moda no da la talla (Módulos 3 y 4)

La *primera actividad* consistía en experimentar (en propia piel) un REI, previamente experimentado con estudiantes de secundaria o de universidad. La cuestión generatriz se planteaba en un contexto extra matemático e involucraba datos numéricos, así como procesos de modelización matemática. En esta actividad, los estudiantes —docentes en formación en este caso—, adoptaban el rol de consultores matemáticos y trabajaban en pequeños grupos, debiendo entregar un informe final con dos partes: una respuesta a la cuestión generatriz dirigida al cliente (imaginario) de la consultoría que la había planteado y una respuesta al equipo de supervisores de la consultoría destacando el proceso de estudio desarrollado (cuestiones abordadas y respuestas parciales aportadas, fuentes consultadas, validaciones de las respuestas, etc.). Para lograrlo, se proponía una primera fase de trabajo en equipo (de tres integrantes) que iniciaba el proceso de estudio y generaba

un informe parcial con una respuesta preliminar. Estos informes se compartían en una segunda fase con otro equipo. Ambos informes parciales se analizaban y con base en ello, en la tercera fase, se generaba el informe final por equipo. Estas fases se desarrollaban en foros, lo que permitía mantener un registro, al menos parcial, del proceso seguido por cada equipo, así como de las comparaciones entre equipos y del grupo (foro general del curso). Cada equipo era acompañado por un formador durante las cuatro actividades, quien orientaba el proceso de estudio. Al final de esta actividad, se solicitaba a cada equipo un análisis matemático del proceso de estudio e investigación emprendido, que completaba la primera entrega grupal.

En la *segunda actividad*, los estudiantes adoptaban el rol de profesores y se les pedía que adaptaran el estudio matemático llevado a cabo en el REI para ser experimentado en sus escuelas, en una de las clases a su cargo. La adaptación debía hacerse primero individualmente y después discutir las distintas propuestas en equipos, con el objetivo de acordar una propuesta conjunta que se pudiera implementar en al menos una de las clases de los componentes del grupo. De esta manera, surgían las diferentes limitaciones que provienen del paradigma dominante de la visita de las obras (currículum, tiempo de enseñanza asociado a los temas, dificultad para implementar procesos de investigación, etc.) de forma explícita, tanto en la adaptación de la propuesta como en la posterior discusión. La *tercera actividad* consistía en reportar y analizar los resultados de las implementaciones, bajo el rol de profesores responsables de estas experimentaciones. Finalmente, la *cuarta* y última actividad se destinaba al análisis del proceso seguido durante las primeras tres semanas y a modificar el diseño de los REI adaptados, a partir del análisis in vivo (individualmente, durante cada una de las experimentaciones) y a *posteriori* (después de la experimentación, compartiendo las distintas experiencias en grupo). Aquí los participantes adoptaban el rol de expertos analistas.

Estas cuatro actividades se mantuvieron en la mayoría de los cursos, con variaciones relacionadas con los REI elegidos (“Previsión de ventas para Desigual”, “Comparando realidad contra previsión: el caso de los usuarios de Facebook” y “La moda no da la talla”) y con las herramientas didácticas diseñadas específicamente para permitir diferentes tipos de análisis: matemático, didáctico y ecológico, así como diversos niveles de análisis de los REI (ver Tabla 2). Para la *Actividad 1*, se propusieron pautas para realizar los informes, parcial y final, relacionadas con elementos del esquema herbartiano y, en particular, los mapas de cuestiones y respuestas donde aparecieran: la cuestión generatriz del REI, las cuestiones derivadas, respuestas parciales, respuestas encontradas en fuentes de información, modelos matemáticos estudiados, elegidos y desechados, y respuesta final (entre otros posibles elementos).

Tabla 2

Relación de los módulos y actividades en los REI-FP, objetivos perseguidos, herramientas introducidas y tiempo aproximado

Módulos del REI-FP declinados en 4 Actividades	Herramientas didácticas	Objetivo	Tiempo
M1: Vivir el REI Actividad 1. Vivencia y análisis de un problema (REI) (Rol: Aprendiz matemático, en equipo) <i>Fase 1.</i> Producción de un informe parcial en equipo <i>Fase 2.</i> Comparación de informes parciales entre dos equipos <i>Fase 3.</i> Producir un informe final (respuesta parcial R) y un análisis matemático del proceso seguido	Mapa de cuestiones y respuestas como herramienta de análisis de la actividad matemática. Este esquema se fue ampliando a lo largo de los cursos, incluyendo modelos matemáticos utilizados y dialécticas NPM 2019 Cuestiones, respuestas parciales, fuentes de información utilizadas (conocimientos propios, artículos, libros, webs, etc.) Modelo(s) final(es) propuesto(s) y forma de validación PIME 2014. Se incluyó la opinión de un experto sobre modelos matemáticos a corto, mediano y largo plazo ADME I 2019. Esquema herbartiano, dialécticas del estudio: cuestiones y respuestas, media-medio	Análisis de la actividad matemática y del proceso seguido para desarrollarla	1 semana ADME I 2019 3 semanas
M2: Adaptar el REI Actividad 2. Guía didáctica (Rol: Profesor) <i>Fase 1.</i> Diseñar una breve guía didáctica individualmente para que un colega sea capaz de implementar con un grupo de estudiantes el REI vivido <i>Fase 2.</i> Analizar, comparar y discutir en un foro las guías didácticas individuales por cada miembro del equipo <i>Fase 3.</i> Generar una guía didáctica común ADME I 2019 Actividad 1. Se solicita un REI adaptado y una guía didáctica para su implementación Actividad 2. Realizar un análisis <i>a priori</i> del REI adaptado	Guía pedagógica/didáctica Fase 1. Carta a un colega – un primer nivel de análisis didáctico Fase 2. Transición del análisis individual del REI vivido al institucional (temas matemáticos abordados, formas de evaluar) Fase 3. Emergencia de restricciones institucionales comunes a los participantes ADME I 2019. Pautas para adaptar el REI, dialéctica media-medio. Se proponen las dialécticas cuestiones-respuestas y media-medio para realizar el análisis	Análisis didáctico y emergencia de las restricciones institucionales	1 semana ADME 2019 3 semanas
M3: Experimentar el REI Actividad 3. Implementación del problema (Rol: Profesor/Analista didáctico). Con base en la guía conjunta, planificación, experimentación con un grupo de estudiantes, clase ordinaria o voluntarios, y análisis a posteriori ADME II 2020. Actividad 3 Implementación en línea del REI adaptado	Guía para redactar el informe de la experimentación: 1) Consideraciones de la experimentación 2) Análisis <i>a priori</i> de la actividad propuesta (Actividad 1) 3) Actividad observada del grupo de estudio, estudiantes y profesor 4) Elementos para una próxima investigación 5) Resultados obtenidos y nuevas cuestiones por explorar ADME II 2020. Guía adaptada a la modalidad en línea	Confrontar el análisis <i>a priori</i> (lo esperado en la guía didáctica) vs 'un primer análisis <i>a posteriori</i> un primer análisis de lo sucedido	1 semana ADME II 2020 2 semanas

Tabla 2 (Continúa)

Relación de los módulos y actividades en los REI-FP, objetivos perseguidos, herramientas introducidas y tiempo aproximado

Módulos del REI-FP declinados en 4 Actividades	Herramientas didácticas	Objetivo	Tiempo
M4: Análisis de la experimentación. (Rol: Analista didáctico)	Se proponen las pautas para el informe de la Actividad 3 ampliadas, dialécticas cuestiones y respuestas y media-medio		
Actividad 4. Análisis conjunto y revisión final de la guía didáctica			
<i>Fase 1.</i> Puesta en común de las experimentaciones	ADME II 2020. Guía para confrontar los análisis <i>a priori</i> y <i>a posteriori</i> , considerando las dialécticas de, cuestiones y respuestas y media-medio (énfasis en el rol de las medias digitales)	Análisis global del proceso seguido	1 semana
<i>Fase 2.</i> Revisión de la guía didáctica			ADME II 2020 2 semanas
ADME II 2020. Actividad 4. Análisis a posteriori en equipo y reflexión individual sobre el proceso de estudio seguido	Pautas para realizar la reflexión individual		

Para la *Actividad 2*, con el objetivo de obtener descripciones detalladas de las propuestas de los REI adaptados, se pedía a los participantes que redactaran una carta a un compañero profesor para explicar el tipo de propuesta que se debía llevar a cabo (REI adaptado), junto con los materiales y orientaciones sobre la forma de conducir la propuesta en clase. Esta carta inicial evolucionaba hasta convertirse en una guía didáctica para la implementación del REI, que ofrecía un análisis *a priori* matemático y didáctico, del REI adaptado a las condiciones escolares concretas. Las pautas para realizar esta guía fueron evolucionando del primer al último curso, incorporando y precisando elementos del esquema herbartiano y las dialécticas del estudio, cuestiones-respuestas y media-medio (Barquero et al., 2018). Para las *Actividades 3* y *4* se presentaban pautas para describir la implementación en el aula, generar un primer análisis *a posteriori*, confrontar los análisis *a priori* y *a posteriori*, y generar un análisis global del proceso seguido. Estas pautas pretendían mostrar la potencialidad de las herramientas del esquema herbartiano, de las dialécticas del estudio (cuestiones-respuestas y media-medio) para dar cuenta del proceso de modelización vivido por los estudiantes, pero también de las condiciones institucionales que posibilitaban la implementación del REI y de las restricciones que impedían el desarrollo de procesos de investigación en el aula.

Los dos últimos cursos, ADME I y ADME II, se desarrollaron en condiciones excepcionales. Estos fueron implementados en semestres consecutivos (septiembre-diciembre 2019 y enero-junio 2020), favoreciendo una organización sensiblemente distinta a los otros cursos. En ADME I se implementaron las actividades 1 y 2, en un tiempo de 4 semanas, y en ADME II, las actividades 3 y 4, lo que permitió precisar las herramientas didácticas puestas a disposición de los profesores y generar procesos de

estudio más amplios. El curso de ADME II, además, fue implementado durante la pandemia del COVID-19 y las implementaciones del REI adaptado se hicieron también a distancia, lo que implicó que los docentes tuvieran que adecuar todo el diseño del REI adaptado y los materiales necesarios, para poder ser implementados en línea con sus estudiantes.

El diseño de esta estructura particular de la formación se hizo buscando coherencia, tanto con la propuesta inicial de los REI-FP, como con los elementos del esquema herbartiano: la cuestión inicial se formulaba a partir del problema de la profesión docente de enseñar procesos de modelización matemática en el aula. La construcción de un medio apropiado para abordar esta cuestión incluía la vivencia de un REI, así como los procesos formativos que los estudiantes proponían implementar. El proceso de estudio debía conducir a los estudiantes a elaborar una respuesta final $R^\heartsuit$ que no consistía solo en una propuesta didáctica para implementar directamente en el aula, sino en el análisis de sus características y, sobre todo, el análisis de su ecología didáctica, es decir, de las condiciones que facilitan su implementación y las restricciones que la limitan y que se ponían de manifiesto en las distintas etapas del proceso formativo.

Restricciones institucionales en la formación del profesorado

La colaboración entre los equipos mexicanos y españoles se inició a raíz de una necesidad de formación, pero se planteó desde el primer momento como un proyecto de investigación conjunta. El problema que abordábamos no era solo la adaptación de los REI-FP al formato en línea y a distancia, sino la propia propuesta de los REI-FP como dispositivo de formación y, en particular, su potencial para situar en el corazón de la formación docente el problema de la *ecología* de las propuestas didácticas que se sitúan en la transición hacia un paradigma de cuestionamiento del mundo. En este sentido, además de basarse en el cuestionamiento y reconstrucción de las matemáticas por enseñar y la elaboración de organizaciones matemáticas para la enseñanza (Ruiz-Olarría, 2015), buscábamos un desarrollo de los REI-FP que posibilitara la identificación, por parte de los docentes en formación, de algunas de las principales restricciones institucionales que pesan sobre la implementación de actividades próximas al paradigma del cuestionamiento del mundo. Esta línea de investigación ha dado lugar a diversas publicaciones y contribuciones a congresos (Barquero et al., 2018, 2019; Romo-Vázquez et al., 2016, 2019, 2020) cuyos principales resultados se resumen en esta sección.

El esquema herbartiano como herramienta de diseño

Un primer elemento por considerar, más interno al marco de la TAD y su metodología de investigación, es la operacionalización del esquema herbar-

tiano, no solo para la descripción y análisis de procesos de estudio, sino como herramienta clave en el proceso de concepción y diseño de los REI-FP. Tal como se detalla en Barquero et al. (2019), en las primeras propuestas de REI-FP, que eran todas presenciales, para la formación inicial y en contexto universitario, se ponía el acento en el tipo de actividades que los estudiantes debían llevar a cabo, más que en las cuestiones que motivaban estas actividades. En particular, se problematizaba el tipo de recursos didácticos que se debían poner a disposición de los estudiantes, pero no había llegado a plantearse el problema del tipo de proceso que facilitaría esta puesta a disposición.

El hecho de partir de una situación más exigente, debido a la modalidad en línea y a distancia de los REI-FP, nos condujo a acomodar el diseño del curso a la estructura procognitiva del esquema herbartiano. El esquema nos permitía distinguir dos procesos de indagación en paralelo (el del REI-FP y el del REI que este incluye) y nos conducía a distinguir los elementos que estructuran el REI-FP. Así, debíamos formular la cuestión inicial en términos de la problemática del profesor y esperar, como resultado final del curso, la elaboración de una respuesta propia por parte del grupo de profesores. En otras palabras, había que considerar cómo se iba a desarrollar la dialéctica cuestión-respuesta dentro del propio proceso de formación. También había que pensar cuál sería el medio que profesores y formadores iban a construir para elaborar y contrastar respuestas parciales a las cuestiones derivadas abordadas y qué elementos externos podían alimentar la dialéctica medio-medio: qué respuestas existentes aportaban los formadores, cuáles eran más accesibles a los profesores; qué papel podían tener las discusiones entre profesores y cómo gestionarlas desde el papel de formadores, etc. Finalmente, el diseño del REI-FP en línea y a distancia también requería una organización previa de los dispositivos que debían facilitar el reparto de responsabilidades entre profesores y formadores. Una de las conclusiones importantes a las que se llegó (Barquero et al., 2019, p. 506) es la posibilidad de incluir el propio esquema como parte de las herramientas de diseño, gestión y análisis que se proporcionan a los participantes en el curso, y así se realizó en las últimas dos ediciones del curso.

Restricciones institucionales sobre la enseñanza de la modelización matemática

Los REI-FP que se implementaron seguían todos un mismo formato y estructura, realizándose pocos cambios en la infraestructura pedagógica y tecnológica que los sostenían. Un invariante de la propuesta fue la cuestión de la profesión docente QFP que generaba el REI-FP y que, en todas las ediciones, se formuló en los términos siguientes:

¿Cómo analizar, adaptar, desarrollar e integrar un proceso de estudio relacionado con la modelización matemática en nuestra práctica docente? ¿Cómo implementar

procesos de estudio basados en la modelización matemática de forma sostenible y a largo plazo? ¿Qué dificultades hay que superar? ¿Qué herramientas didácticas se necesitan? ¿Qué nuevas cuestiones surgen?

La elección de la modelización matemática estuvo motivada por cuatro razones principales. La primera, más circunstancial, era la presión internacional de las pruebas PISA en los currículos nacionales y el mandato cada vez más generalizado de incorporar a la enseñanza secundaria elementos vinculados a la modelización y resolución de problemas que surgen en contextos extra matemáticos. La segunda es la perspectiva de las matemáticas como herramienta de modelización que se considera en la TAD como un principio epistemológico básico para el análisis de las actividades matemáticas. En tercer lugar, la enseñanza de la modelización matemática es un caso paradigmático de ecología didáctica compleja y facilita la aparición e identificación de restricciones institucionales propias del paradigma de la visita de las obras. Finalmente, disponíamos de varios ejemplos de REI experimentados en distintos contextos que parten de cuestiones generatrices basadas en la previsión (de poblaciones, de ventas de camisetas, de usuarios de redes sociales, etc.) y requieren la consideración y contraste de distintos modelos funcionales. Las conclusiones de Romo-Vázquez et al. (2020, p. 785) ilustran bien los resultados que se obtuvieron:

Las cuatro actividades que conforman el curso permiten gradualmente hacer conscientes a los profesores de las restricciones institucionales que dificultan la integración de la actividad de modelización matemática en la enseñanza regular. Experimentar el REI (Actividad 1) los confronta a una búsqueda de la respuesta esperada por los formadores más que a seguir un proceso de estudio y de investigación. En la adaptación del REI para ser implementado en el aula (Actividad 2 y 3), los profesores intentan revertir la incertidumbre que conlleva el desarrollo de una actividad abierta. El análisis de las guías didácticas juntamente con los formadores muestra que el “cierre del REI implementado” no es una cuestión de un profesor ni de un equipo, sino de varios y, por tanto, que hay una visión compartida sobre la enseñanza de la modelización matemática, que traspasa fronteras y que parece asociada a una pedagogía de ‘visita de las obras’. Esta visión compartida se refleja en el “cierre” de la actividad de modelización a una secuencia de preguntas cortas; propuesta de ciertos modelos matemáticos previamente identificados por el profesor; uso muy dirigido de las TIC; predominio del contenido matemático curricular, el poco o nulo espacio para la investigación y el trabajo autónomo de los estudiantes. Finalmente, el REI-FP en la modalidad online permite que un grupo muy heterogéneo de profesores de matemáticas visibilicen restricciones institucionales que determinan su enseñanza.

La problemática ecológica en la formación docente

Abordar el problema de la formación docente en la transición entre el paradigma de la visita de las obras y el del cuestionamiento del mundo

plantea un desafío claro. El cambio de paradigma requiere la elaboración de nuevas propuestas didácticas, entre las cuales se encuentran los REI y otras modalidades de enseñanza centradas en los procesos de indagación. Sin embargo, es fundamental conocer las condiciones que se necesitan para que estas nuevas propuestas puedan implementarse de forma sostenible. De ahí que abordar el tema de las restricciones institucionales sea un aspecto central en y para la formación del profesorado. En este sentido, los resultados obtenidos muestran la pertinencia de los REI-FP implementados en el CICATA-IPN para ayudar a los profesores a abordar las restricciones institucionales que afectan el cambio de paradigma, así como dotarlos de nuevas herramientas analíticas y de diseño para superarlas localmente. Este proceso puede evitar la frustración y el sentimiento de culpa de los docentes, como reacción lógica, cuando se ven limitados a introducir nuevas formas de enseñar sin controlar las variables que podrían garantizar su sostenibilidad (Barquero et al., 2018).

Para ello, lo primero es luchar contra la naturalización de estas restricciones, el darlas por sentadas como algo establecido e inamovible, como parte de la naturaleza de nuestro entorno. La estructura y la orientación de los módulos y las actividades de los REI-FP contribuyeron a hacerlas visibles o, mejor dicho, presentes en las propias propuestas de los profesores en formación. El cambio de roles que promueven los módulos del REI-FP (de estudiantes de matemáticas a analistas matemáticos y didácticos primero, después a diseñadores y finalmente a docentes) resulta una estrategia productiva para poder vislumbrar distintas restricciones institucionales. La guía didáctica que elaboran los equipos de estudiantes para adaptar el REI vivido inicialmente a las condiciones de cada escuela representaba la “materialización” de propuestas didácticas consensuadas y, por lo tanto, despersonalizadas. Las discusiones que conducían a la elaboración de una propuesta conjunta sacaban a relucir los distintos criterios de diseño y las limitaciones debidas al paradigma imperante en las instituciones docentes. La comparación de las guías entre distintos equipos ponía más en evidencia estos aspectos. Finalmente, el mismo hecho de asumir distintos roles durante el curso facilitaba la identificación de distintas posiciones institucionales y, con ello, de distintas visiones sobre una misma actividad, todas igual de legítimas. Es solo a partir de esta visión que puede empezar el trabajo de modificación y análisis, incorporando entonces la distanciación necesaria para asumir el papel de analista didáctico.

Tal como indicamos en Barquero et al. (2018), el éxito del juego de roles no puede explicarse sin un segundo elemento importante del curso: la elaboración de un medio M suficientemente rico entre los formadores y los profesores, estrategia inspirada en la Teoría de las Situaciones Didácticas. Nuestra opción consistió en elaborar, junto con los profesores en formación,

una realidad matemática y didáctica compartida que sirviera de dispositivo de confrontación para las propuestas de enseñanza y las herramientas teóricas introducidas en el curso. En este sentido, la primera actividad es esencial para tener una actividad matemática empírica común a la que podamos referirnos durante el curso. Los objetos matemáticos (modelos, datos, funciones, errores de ajuste, etc.) utilizados en el análisis didáctico y en los diseños de las propuestas de enseñanza fueron todos compartidos por los educadores y los participantes de manera específica y tuvieron un papel clave en el análisis didáctico posterior. Además, la implementación del breve proceso de enseñanza de la Actividad 3 aparecía como el medio empírico por excelencia. En algunas partes del curso, el intercambio entre los equipos de profesores también se utilizó como medio auxiliar para que los participantes elaboraran un análisis epistemológico o una propuesta didáctica revisada.

Finalmente, no podemos dejar de mencionar que los resultados obtenidos no se limitaron a la identificación de las restricciones que afectan las modalidades de enseñanza propias del paradigma del cuestionamiento del mundo. Esta identificación es en sí misma una condición necesaria para la implementación de nuevas propuestas, pero no suficiente. Sin embargo, en algunos casos, el curso también pareció aportar herramientas didácticas transformadoras que algunos participantes supieron —o pudieron— aprovechar en su actividad docente posterior. Veremos ejemplos de ello en la sección siguiente, al abordar los desarrollos del trabajo sobre los REI y los REI-FP por parte del equipo mexicano.

Desarrollo de los REI y REI-FP más allá del CICATA-IPN

La colaboración emprendida sobre los REI y los REI-FP en el CICATA-IPN ha sido el germen de más investigaciones en otros contextos universitarios de formación inicial y continua del profesorado, en las etapas de infantil, primaria, de secundaria y de la universidad, en la educación secundaria urbana, rural-multigrado e indígena, así como de formación de ingenieros y de futuros investigadores en didáctica de las matemáticas. A continuación, nos detendremos en la experiencia con los REI y los REI-FP en el contexto de la Universitat de Barcelona, del CICATA-IPN y del Cinvestav de México.

La investigación sobre los REI-FP del equipo español

En el caso de la Universitat de Barcelona (UB), desde 2013-14 hasta la actualidad, se han ido implementando REI y REI-FP en distintos cursos del Grado de Maestro en Educación Infantil y Primaria. En el trabajo de Barquero (2023) se describe la experiencia más completa desarrollada en un curso obligatorio de formación en didáctica de la matemática de último año (4º curso, Grado de Educación Primaria) donde se muestra cómo los REI-FP

han servido para estructurar una asignatura completa, que lleva implementándose desde el curso 2016-17 hasta la actualidad. A partir de ciertas cuestiones de la profesión y de las correspondientes cuestiones derivadas en los distintos módulos del REI-FP, se muestra cómo las actividades planteadas han permitido transferir algunas herramientas provenientes de la investigación en didáctica de la matemática a la formación del profesorado. Algunas de las cuestiones abordadas durante los distintos módulos tratan sobre cómo analizar y describir los saberes matemáticos en distintas situaciones didácticas, en particular aquellas que involucran la modelización, cómo analizar la actividad matemática generada, cómo diseñar matemática y didácticamente situaciones, entre otras. El principio común a todas estas propuestas es la realización de un REI con los profesores en formación, ya sea partiendo de un REI previamente experimentado con estudiantes, ya sea un REI de nueva creación para el contexto de formación. Este REI surge como un elemento de respuesta a la cuestión generatriz abordada en el REI-FP que se suele formular en términos de cómo enseñar un determinado contenido curricular.

Los REI-FP que componían el curso han ido variando a lo largo de los años, aunque dos de ellos siempre se han mantenido. El primero parte de la cuestión sobre cómo introducir la inferencia estadística en la etapa de primaria y tratar con la variabilidad de los datos experimentales en estadística. Se parte de la vivencia de un REI con el profesorado en formación denominado “¿Qué se esconde dentro de la botella?” (REI adaptado de la propuesta de Brousseau et al., 2002) que trata sobre la formulación de hipótesis sobre cuál es el contenido oculto de una botella, pudiendo únicamente registrar visualizaciones sobre los objetos que se esconden (por ejemplo, bolas de distintos colores), sin poder nunca acceder a su contenido real. Posterior a la vivencia de este REI, se propone al profesorado en formación una doble tarea. En primer lugar, analizar la tipología de saberes que intervienen (basándonos en el currículum y extendiendo las nociones y terminología estadísticas más allá de la existente en los currículos). En segundo lugar, trabajar en el diseño de herramientas de evaluación para poder valorar los recorridos seguidos por los grupos de clase. Este análisis y evaluación se complementan presentando experiencias en el aula de primaria con el mismo REI (Granell & Barquero, 2019). Estas se presentan a partir de extractos de informes del alumnado de primaria o a través de filmaciones de las sesiones de clase.

Este REI-FP, al margen de mantenerse como uno de los más implementados en la UB, ha dado lugar a la colaboración con equipos internacionales que han trabajado de forma paralela en la adaptación de la situación propuesta en las investigaciones de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau et al., 2002) para ser adaptado a las particularidades de la formación inicial del profesorado de educación primaria y secundaria. En

particular, la colaboración entre las dos autoras de la UB de este trabajo y un equipo de investigadores japoneses (Hakamata et al., 2024) llevó a comparar las propuestas derivadas para las etapas de primaria y secundaria. Su comparativa pone de manifiesto que ambos diseños responden o se fundamentan en modelos epistemológicos sobre la estadística y la probabilidad que difícilmente pueden articularse, debido a los modelos epistemológicos dominantes en las dos instituciones educativas interpeladas, primaria y secundaria respectivamente.

El segundo de los REI-FP, denominado “*La caja de la pastelera*”, se focaliza en una cuestión generatriz sobre ¿cómo analizar, diseñar y gestionar la actividad de modelización en el aula de primaria?, similar a la emprendida en el caso de los cursos en el CICATA-IPN. Este REI-FP persigue articular las cuestiones y tareas profesionales de análisis, evaluación y diseño de tareas de modelización, y combinarse con el desarrollo del trabajo final de la asignatura que conlleva el rediseño de una situación didáctica (asociado a alguno de los REI vividos). La elección de esta cuestión viene motivada por el papel central que tienen la resolución de problemas y la modelización en el currículum de educación primaria, la falta de concreción en su formulación como competencias generales, así como la limitada disponibilidad de diseños didácticos. El diseño de este REI-FP se adaptó a las especificidades de la formación inicial, dilatando más, en comparación con los cursos en el CICATA-IPN, los tres primeros módulos de la propuesta genérica (Módulos 0, 1 y 2). Después de estos módulos comunes, se pide a los estudiantes que trabajen en el (re)diseño o adaptación y, si les es posible, la implementación (Módulos 3 y 4) de alguno de los REI vivenciados durante el curso, poniendo en práctica las herramientas de diseño y análisis matemático y didáctico introducidas a lo largo del curso. Como se explica en investigaciones derivadas de dicho curso, Barquero et al. (2022), son de especial importancia los mapas de cuestiones y respuestas como herramienta central para el análisis matemático de las situaciones didácticas, así como la consideración de guías didácticas que vienen a complementar los citados mapas con elementos didácticos para la gestión de aula.

Asimismo, las investigaciones emprendidas no se han desarrollado exclusivamente en manos de investigadores de la TAD, sino que han llevado a colaboraciones de distintos marcos teóricos y propuestas alternativas para la formación del profesorado, en particular, para la enseñanza de la modelización matemática. En la investigación presentada por Barquero y Ferrando (2024) se examinan dos cursos de formación permanente sobre modelización matemática del profesorado de matemáticas de secundaria. El primer curso integra distintos enfoques sobre modelización, mientras que el segundo se basa en una de las últimas implementaciones de REI-FP en el CICATA-IPN, con la colaboración de las tres autoras del presente trabajo. Los dos cursos

parten de unos módulos iniciales que se centran en vivenciar y delimitar qué se entiende y cómo caracterizar la modelización matemática (más allá de las breves directrices curriculares). Ambas experiencias concluyen con el trabajo de diseño de tareas de modelización por parte del profesorado en formación para ser implementadas en las escuelas secundarias. Ambos cursos se analizan desde la óptica de la *ecología de la modelización matemática* (Barquero et al., 2018; Dorier y García, 2013), es decir, de cómo los profesores avanzan, a lo largo de la formación, en la identificación colectiva de las condiciones y las restricciones que facilitan o dificultan la enseñanza y aprendizaje de la modelización. Los resultados de este trabajo muestran, en primer lugar, qué tipo de tareas de modelización diseñan los profesores y el nivel de especificidad disciplinar en el que planifican la implementación de la modelización. En segundo lugar, se analiza cómo los profesores abordan el análisis ecológico, es decir, la identificación de las condiciones y restricciones para la integración de la modelización en las aulas de secundaria tras sus experiencias.

La investigación sobre los REI-FP del equipo mexicano

En el caso del CICATA-IPN y del Cinvestav de México, se desarrollaron varios REI-FP y REI para la educación secundaria, universitaria (profesores de matemáticas, ingenieros) y posgrado (formadores de profesores, investigadores en didáctica de las matemáticas), varios de ellos en el marco de tesis de maestría de profesores que participaron en los cursos, y otros, a partir de las perspectivas que estos abrieron. Por un lado, se extendió el proceso de formación, y por el otro, los REI y su diseño se convirtieron en un elemento central en diversas investigaciones. El diseño de los REI fue evolucionando hasta consolidarse en el uso de la metodología de la ingeniería didáctica (Artigue, 2014) como lo sugieren García et al. (2019), pero incluyendo en la fase de análisis preliminares, un análisis epistemológico de actividades desarrolladas en contextos extra matemáticos (p. ej., ingenierías, topografía y siembra tradicional del café). Estos análisis permitieron proponer, con base en el esquema herbartiano, cuestiones generatrices relativas a la modelización matemática (mayormente relacionada con las formaciones), como se ilustra a continuación.

Primeramente, se presentan siete ejemplos de REI diseñados por profesores que participaron en los cursos REI-FP del CICATA-IPN, seleccionados para mostrar la diversidad de contextos y niveles educativos considerados. Dos REI fueron diseñados para la educación secundaria en Colombia (De la Hoz, 2020; Rodríguez-Mejía, 2021); uno para el bachillerato en México (Medina, 2018); un REI-FP para la formación del profesorado en Uruguay (Rey, 2016), y tres para la formación de ingenieros en México (Galindo, 2019; Guzmán, 2016; Silva, 2018). Estos REI se describen brevemente a

partir de su pregunta generatriz y se presentan siguiendo un orden ascendente en niveles educativos: secundaria, bachillerato y universidad.

El REI diseñado por De la Hoz (2020) se enfocó en la optimización de la siembra del café y se implementó en una escuela secundaria indígena arhuaca, en lengua arhuaca, aunque fue traducido al castellano para reportarse en la tesis, debido a una restricción de la comunidad. El otro REI, “Estimar el área del Llanito”, fue implementado en una secundaria multigrado rural y se diseñó con base en el análisis del levantamiento topográfico con cinta y de la geometría involucrada en esta actividad. El estudio de su pregunta generatriz —¿Cuál es la mayor superficie de área cultivable del lote El Llanito?— implicó una fase experimental. Los estudiantes hicieron el levantamiento con cinta del Llanito, terreno cercano a la escuela, generando un proceso de modelización que involucraba conocimientos topográficos y geométricos (Rodríguez-Mejía, 2021). El REI “La biblioteca de Babel” se basó en el análisis literario del cuento del mismo nombre, escrito por Borges, en el que aparece la idea del infinito. Su proceso de estudio, además de generar una actividad de modelización en el aula centrada en calcular el número total de libros en la biblioteca: 25×10^6 , permitió identificar y confrontar concepciones erróneas de estudiantes sobre el infinito (Medina et al., 2019). El REI-FP “Montaña rusa” diseñado por Rey (2016), en su tesis de maestría, codirigida por M. Bosch y A. Romo, para la formación del profesorado en Uruguay, involucró la derivada como herramienta de modelización matemática, y fue objeto de dos experimentaciones en el aula por futuras docentes que participaron en dicho REI-FP. Posteriormente, Rey se involucró en una investigación dedicada a la formación de formadores, creando un REI-FF (Rey et al., 2022), que constituyó un aporte muy novedoso. En las tesis de Guzmán (2016) y de Silva (2018) se analizaron cursos de teoría de control: en la primera se diseñó el REI “Control de velocidad proporcional de un motor de CD” (Guzmán et al., 2019) y en la segunda el REI “Desfibrilador de bajo costo”, centrado en la cuestión ¿Cómo construir un desfibrilador funcional y de bajo costo?, que fue implementado en un curso de ecuaciones diferenciales. Un ejemplo, muy singular de REI, fue el diseñado por Galindo (2019) en torno a la modelización de relaciones cuantitativas estructura-actividad (*Quantitative Structure-Activity Relationship, QSAR*), la cual, a pesar de su relevancia en la ingeniería química, no suele ser enseñada en las formaciones universitarias de México. Su singularidad radica en que varios REI-QSAR emergen de un conjunto de cuestiones generatrices, expresado por una cuestión que se componía de cuatro partes: 1) identificar el modelo validado para predecir una propiedad, 2) elegir una propiedad dentro de un abanico de posibilidades (p. ej. solubilidad, la presión del vapor), 3) elegir un grupo de sustancias (de alcoholes, de pesticidas) y 4) considerar su estructura. Se formulan, a manera de ejemplo, dos cuestiones generatrices: ¿cuál es el

modelo validado más adecuado para predecir la solubilidad de los alcoholes a partir de su estructura? O ¿cuál es el modelo validado más adecuado para predecir la presión del vapor de los alcoholes a partir de su estructura? Aunque estos REI no han sido experimentados todavía, se hizo un estudio de su viabilidad (Galindo et al., 2023).

Estas tesis de maestría mostraron la potencialidad de los REI para generar procesos de estudio, en los cuales la actividad de modelización matemática escolar fue moldeada por el contexto extra matemático en juego. Lo que llevó a incluir en los *medias* elementos como las lenguas indígenas, la comunidad indígena, un técnico-topógrafo rural, y en el *medio* definiciones específicas, por ejemplo, la optimización de área cultivable del café: sembrar el mayor número de plantas, sin sobreexplotar la tierra. Los trabajos de Rey et al. (2022) y de Galindo et al. (2023) muestran vías novedosas para incidir en la integración de la modelización en la formación de formadores y de ingenieros, respectivamente.

A partir de lo anterior, otros REI para la formación de ingenieros se diseñaron en CICATA-IPN. En Siero González et al. (2022) se analizó el diseño de un dispositivo de rehabilitación para la trombosis ventricular, que permitió proponer como cuestión generatriz: ¿Cómo construir un prototipo de rehabilitación de la trombosis venosa profunda para un usuario específico? En respuesta, un prototipo, realizado por un equipo de estudiantes de ingeniería en el curso de matemáticas aplicadas, fue utilizado por un profesor universitario afectado por trombosis, con lo que se logró, a partir de este proceso de modelización, satisfacer una necesidad real. Otros REI se diseñaron a partir del análisis de la separación ciega de fuentes y de cursos de álgebra lineal (Vázquez, 2017). Por ejemplo, el REI “Separación de tonos puros”, implementado en un curso de matemáticas de primer semestre en la modalidad en línea en una universidad colombiana (Ramírez-Sánchez et al., 2023), tuvo como cuestión generatriz: ¿Cómo se modela una mezcla de sonidos?, e implicó, para su estudio, proponer un medio didáctico inicial para esta modalidad, que requirió crear *medias* específicos, por ejemplo, aplicativos que simulaban mezclas de tonos puros y configuraciones geométricas entre micrófonos y grabadoras, los cuales jugaron un rol fundamental en la creación del medio y, por tanto, en el proceso de modelización de los estudiantes. En el REI “Análisis y separación de mezclas”, propuesto por Ramírez-Sánchez (2024) en su tesis doctoral, se aumentó la complejidad del estudio, proponiendo una mezcla de tres audios y la pregunta generatriz: ¿Cuál es el proceso matemático para separar sonidos de los audios?, así como tres cuestiones iniciales relativas al sonido y sus características, las herramientas para la separación y manipulación de señales, y la discretización de señales. Lo que llevó a considerar nuevas medias como *Jupyter* bajo el código de programación de Python para diseñar aplicativos que pudieran

integrarse al medio al permitir explorar y manipular señales mediante sus representaciones gráficas y auditivas e integrarlas al medio. Por su parte, Pablo et al. (2023) propusieron el REI “diseño de tuberías”, implementado en un curso de mecánica de fluidos, y surgido del análisis de un contexto de ingeniería civil, destacando el uso del modelo de Hazen-Williams en hidráulica.

Actualmente, en el Cinvestav, se realiza una tesis doctoral cuyo objetivo es diseñar un REI, a partir del análisis de una empresa mexicana integradora de proyectos. Los primeros análisis evidencian el proceso de modelización producido por un equipo de ingenieros para realizar una “tarea única”, para la cual no hay una técnica disponible en la empresa, que involucra el uso de la teoría de control y, por tanto, de ecuaciones diferenciales (Pérez-Sarmiento et al., 2024). Con base en este trabajo y en el de Silva (2018), y con el objetivo de abordar la segunda discontinuidad de Klein en torno a la enseñanza de ecuaciones diferenciales en la formación del profesorado en Honduras (Paz-Corrales et al., 2024), se diseñó el REI-FP “Caracterización de los componentes electrónicos de un desfibrilador” (Paz-Corrales et al., 2025). En la formación de investigadores, se diseñó un REI conformado por tres cursos de maestría, obligatorios, consecutivos y relacionados entre sí, enfocados en la educación matemática multilingüe y, más específicamente, en crear recursos didácticos multilingües para la enseñanza de las matemáticas en escuelas primarias indígenas mexicanas (Romo-Vázquez et al., 2025).

Perspectivas de futuro

La colaboración iniciada en 2013 entre las autoras de este trabajo contribuyó de forma significativa al desarrollo de la línea de investigación de la TAD que se inició con la tesis de Cirade (2006) y ha tenido un desarrollo importante hasta la fecha. La nueva propuesta de los REI-FP iniciada por el equipo español en 2010 y que se concretó en la tesis de Ruiz-Olarría (2015) halló en los cursos del CICATA-IPN un excelente ámbito de experimentación. De esta forma, la propuesta de los REI-FP pudo madurar y adaptarse a distintas modalidades de formación y de estudiantes, adquiriendo a la vez robustez y flexibilidad. Desde entonces, nuestras trayectorias académicas han comportado cambios de universidad y, con ellos, también cambios en las problemáticas de investigación que estamos abordando. Podemos considerar dos grandes líneas conectadas de trabajo futuro en las que se podrían contemplar nuevas colaboraciones que todavía no hemos iniciado.

La primera gran línea es la emprendida en la formación del profesorado a partir de los REI-FP. En la actualidad, estamos trabajando en tres grandes cuestiones. La primera es la de comparar los REI-FP con propuestas de formación basadas en otros enfoques o culturas didácticas. En particular, estamos llevando a cabo en colaboración con un equipo de investigadores

japoneses, un estudio sobre el papel que tienen las guías didácticas en los REI-FP en comparación con los “planes de clase” (*lesson plan*) en la cultura didáctica de Japón. La segunda cuestión es el desarrollo de los REI-FP en torno a otro tipo de cuestiones de la profesión docente más allá de la modelización matemática. El equipo de Barcelona ha trabajado sobre el caso de la estadística y el fenómeno de la invisibilidad del tratamiento de datos en la enseñanza secundaria actual (Verbisck et al., 2024), adaptando la propuesta de los REI-FP tanto para el caso en línea como presencial. Finalmente, consideramos fundamental seguir experimentando la propuesta de los REI-FP en distintos contextos institucionales y, particularmente, en el caso de la formación continua del profesorado de todos los niveles educativos, desde la educación infantil y primaria hasta la universidad.

La segunda línea de investigación en la que trabajamos los dos equipos desde hace años, pero de forma independiente, es el diseño, experimentación y análisis de REI para la enseñanza universitaria de las matemáticas. Desde el trabajo pionero de Barquero (2009), tanto el equipo mexicano como el español han estado diseñando y estudiando distintas propuestas para la enseñanza de las matemáticas en la formación de ingenieros. Teniendo en cuenta las experimentaciones realizadas y la variedad de contextos considerados, sería interesante recopilar las experiencias llevadas a cabo en los dos países para identificar el tipo de infraestructuras matemáticas y didácticas que se han elaborado para su implementación, así como las restricciones que han dificultado su evolución e integración como modalidad de estudio normalizada. En la actualidad, el equipo español trabaja en un proyecto de transferencia de los REI a la enseñanza secundaria y universitaria, el proyecto LABINQUIRY (<https://www.ub.edu/labinquiry/>), cuyo objetivo es la difusión de la infraestructura necesaria para la implementación de los REI por parte del profesorado de ambos niveles educativos.

Las colaboraciones en materia de investigación requieren de buenas sinergias de trabajo y la construcción de estrategias compartidas de investigación que no surgen de forma espontánea. El marco de la TAD fue clave en esta construcción. Partir los dos equipos de los mismos principios y asunciones fundamentales nos permitió consensuar muy rápidamente la problemática de investigación y las metodologías para abordarla. La ampliación que supuso la colaboración en términos del marco empírico que pudimos considerar ha sido enorme y muy fructífera. Esperemos que pueda dar los mismos frutos en un futuro próximo.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido realizada con fondos del proyecto EDU-Paradigms (PID2021-126717NB-C31) financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER, UE.

Referencias

- Artigue, M. (2014). Didactic engineering in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 159–162). Springer.
- Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas* [Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona (España)]. <http://hdl.handle.net/10803/3110>
- Barquero, B. (2023). La modelización matemática en la formación del profesorado: experiencias con los REI-FP para educación Primaria. *Revista Interuniversitaria de Formación del profesorado*, 98(37.2), 165–186. <https://doi.org/qhfb>
- Barquero, B., Bosch, M., & Romo-Vázquez, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM–Mathematics Education*, 50(1), 31–43. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0907-z>
- Barquero, B., Bosch, M., & Romo-Vázquez, A. (2019). El uso del esquema herbartiano para analizar un REI online para la formación del profesorado de secundaria. *Educação Matemática Pesquisa*, 21(4), 493–509. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p493-509>
- Barquero, B., Bosch, M., & Florensa, I. (2022). Contribuciones de los recorridos de estudio e investigación en la universidad: el caso de la formación del profesorado. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática*, 21, 87–106. <https://doi.org/10.35763/aiem21.4232>
- Barquero, B., & Ferrando, I. (2024). Teacher education for mathematical modelling: exploring the experiences of secondary school teachers in two courses. *ZDM–Mathematics Education*, 56(6), 1109–1122. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01609-4>
- Bosch, M., & Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de Secundaria. En M. J. González-López, M. T. González-Astudillo, & J. Murillo-Ramón (Eds.), *Investigación en educación matemática XIII* (pp. 89–114). SEIEM.
- Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2002). An experiment on the teaching of statistics and probability. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(3), 363–411. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(02\)00078-0](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00078-0)
- Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 161–182. <https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26>
- Chevallard, Y., & Cirade, G. (2009). Pour une formation professionnelle d'université. Éléments d'une problématique de rupture. *Recherche et formation*, 60, 51–62. <https://doi.org/10.4000/rechercheformation.584>
- Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques: entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* [Tesis doctoral, Université d'Aix-Marseille (Francia)]. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709/fr/>

- De la Hoz, E. (2020). *La siembra tradicional del café de la comunidad indígena Arhuaca en la enseñanza de las matemáticas escolares en los grados de 9° educación básica secundaria, 10° y 11° educación media* [Tesis de maestría] CICATA-IPN, México.
- Dorier, J. L., & García, F. J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM—Mathematics Education*, 45(6), 837–849. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0512-8>
- Esteve, J. M. (1998). La aventura de ser maestro. *Cuadernos de pedagogía*, 266, 46–50.
- Galindo, N. (2019). *Diseño de una unidad de aprendizaje sobre Relaciones Cuantitativas de Estructura–Actividad (QSAR) en la carrera de ingeniería química* [Tesis de maestría no publicada]. CICATA-IPN, México.
- Galindo, N., Romo-Vázquez, A., & Barroso, J. (2023). Diseño y viabilidad de recursos para enseñar la modelización QSAR en ingeniería química. *Enseñanza de las Ciencias*, 41(2), 93–115. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5645>
- García, J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* [Tesis doctoral]. Universidad de Jaén.
- García, F. J., Barquero, B., Florensa, I., & Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 75–94. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.267>
- Granell, C., & Barquero, B. (2019). Experiència amb un recorregut d'estudi i investigació sobre la inferència estadística a l'educació primària. Què s'amaga dins l'ampolla? *Noubiaix*, 44, 54–69.
- Guzmán, P. (2016). *Propuesta didáctica de modelación matemática que involucra ecuaciones diferenciales para una formación de futuros ingenieros* [Tesis de maestría]. CICATA-IPN, México.
- Guzmán, P., Covián, O., & Romo-Vázquez, A. (2019). Diseño de una actividad didáctica para un curso de control automático basada en modelización matemática. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 21(4), 412–430. <https://doi.org/g7r9bh>
- Hakamata, R., Fukuda, H., Otani, H., Otaki, K., Barquero, B., & Bosch, M. (2024). Potential of Brousseau's guessing game in teacher education: two complementary cases. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–21. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2321587>
- Lucas, C. (2015). *Una posible “razón de ser” del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional* [Tesis doctoral]. Universidad de Vigo, España.
- Medina, L. (2018). *Un diseño didáctico que relaciona literatura y matemáticas en el nivel bachillerato* [Tesis de maestría]. CICATA-IPN, México.

- Medina, L., Romo-Vázquez, A., & Aguilar, M.S. (2019). Using the work of Jorge Luis Borges to identify and confront students' misconceptions about infinity. *Journal of Mathematics and the Arts*, 13(1-2), 48–59.
<https://doi.org/10.1080/17513472.2018.1504270>
- Pablo, E., Romo-Vázquez, A., & Sánchez-Aguilar, M. (2023). A redesign of a mathematical modelling teaching proposal based on the Hazen-Williams model for engineering education. *Rivista di Matematica della Università di Parma*, 14, 299–315.
- Paz-Corrales, M., Romo-Vázquez, A. Moreno-Armella, L. M., & Pérez-Sarmiento, M. (2024). A path for addressing Klein's second discontinuity: Interplay between precision and approximation mathematics. The case of differential equations as mathematical models. En A. S. González-Martín, G. Gueudet, I. Florensa, & N. Lombard (Eds.), *Proceedings of INDRUM 5* (pp. 533–534). EUSS, INDRUM y ERME.
- Paz-Corrales, L. M., Pérez-Sarmiento, M. M., & Romo-Vázquez, A. (2025). Diseño de una propuesta didáctica de modelización matemática para la formación de futuros docentes. En A. Solares-Rojas, & A. P. Preciado Babb (Eds.), *La investigación en modelización matemática: un diálogo entre educadores de Latinoamérica y España* (pp. 1–26). Editorial SOMIDEM
- Pérez-Sarmiento, M., Romo-Vázquez, A., & Paz-Corrales, M. (2024). The mathematical modelling in industry: the case of controller design. En A. S. González-Martín, G. Gueudet, I. Florensa, & N. Lombard (Eds.), *Proceedings of INDRUM 5* (pp. 533–534). EUSS, INDRUM y ERME.
- Ramírez-Sánchez, C., Romo-Vázquez, A., Romo-Vázquez, R., & Velásquez-Rojas, D. (2023). Study of Modeling Questions in a First-Year University Mathematics Online Course. *Educational Studies in Mathematics*, 114(3), 503–524.
<https://doi.org/10.1007/s10649-023-10261-w>
- Ramírez-Sánchez, C. (2024) *Diseño de una actividad didáctica de modelización matemática para la formación de futuros ingenieros. El caso de la separación ciega de fuentes* [Tesis doctoral no publicada]. CICATA-IPN, México.
- Rey, M. (2016). *Propuesta didáctica para la formación del profesorado: el caso de la derivada como herramienta de modelización matemática* [Tesis de maestría no publicada]. CICATA-IPN, México.
- Rey, M., Romo-Vázquez, A., & Ochoviet, C. (2022). Os percursos de estudo e de pesquisa para a formação de formadores, gênese e caracterização: um estudo de caso. En S. Ag Almouloud, R. Borges, L. M. Santos, A. Henriques, & J. M. Viana (Eds.), *Percursos de estudo e pesquisa à luz da teoria antropológica do didático. Fundamentos teórico-metodológicos para a formação* (pp. 323–350). Editora CRV. <https://www.editoracrv.com.br/livrosdigitais/pdf/viewer.html>
- Rodríguez-Quintana, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico* [Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid].
<https://hdl.handle.net/20.500.14352/56054>

- Rodríguez-Mejía, M. (2021). *Propuesta didáctica basada en modelización matemática para el aula multigrado, el caso de la topografía* [Tesis de maestría]. CICATA-IPN, México.
- Romo-Vázquez, A., Barquero, B., & Bosch, M. (2016). Study and research paths in online teacher professional development. En E. Nardi, C. Winsløw, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the First Conference of the INDRUM* (pp. 400–410). University of Montpellier y INDRUM. <https://hal.science/hal-01337881/document>
- Romo-Vázquez, A., Barquero, B., & Bosch, M. (2019). El desarrollo profesional online de profesores de matemáticas en activo: una unidad de aprendizaje sobre la enseñanza de la modelización matemática. *Uni-Pluriversidad*, 19(2), 161–183. <https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.09>
- Romo-Vázquez, A., Barquero, B., & Bosch, M. (2020). La profesionalización docente en la modalidad online y la implementación de REI: aciertos y desafíos. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 22(4), 772–786. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p772-786>
- Romo-Vázquez, A., Poisard, C., & Sandoval, I. (2025). Multilingual Mathematics Education: an analysis of a Mexican research-based Master's degree course developed in the Questioning the World Paradigm. *ZDM Mathematics Education* 57, 1425–1438. <https://doi.org/10.1007/s11858-025-01752-6>
- Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza* [Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Madrid, España]. <https://repositorio.uam.es/handle/10486/665889>
- Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica* [Tesis doctoral. Universitat Ramon Llull (España)]. <http://hdl.handle.net/10803/101204>
- Siero González, L. R., Echavarría Cepeda, L. A., Romo-Vázquez, A., & Navarro Torres, J. (2022). Design of a rehabilitation device for thrombosis: a mathematical modelling activity in the training of engineers. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 21, 107–134. <https://doi.org/10.1016/j.aie.2022.100000>
- Sierra, T. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas los sistemas de numeración y la medida de magnitudes* [Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, España]. <https://hdl.handle.net/20.500.14352/56171>
- Silva, L. T. (2018). *El diseño de un desfibrilador: una actividad de modelización matemática para la formación de ingenieros* [Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional, México]. Repositorio institucional. <https://bit.ly/3PLz7PC>
- Vázquez, R. (2017). *Diseño de actividades didácticas basadas en modelización para la formación matemática de futuros ingenieros* [Tesis doctoral no publicada]. CICATA-IPN, México.

Verbisck, J., Bittar, M., Barquero, B., & Bosch, M. (2024). Addressing Water Scarcity Through Statistical Inquiry in Teacher Education. *Statistics Education Research Journal*, 23(2). <https://doi.org/10.52041/serj.v23i2.722>

