

# Experimento de diseño para identificar elementos de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje y su articulación con la Educación Matemática Realista en profesores de Educación Primaria al trabajar con fracciones

Rubén Omar González Balderas <sup>1</sup> 

Christine Janet Luna de la Rosa <sup>2</sup> 

Selso Loera Serrano <sup>3</sup> 

## Resumen

La investigación se enmarca en el experimento de diseño, específicamente sobre los elementos que consideran profesores en activo en la enseñanza de fracciones. La intención consiste en realizar una prueba piloto para observar de qué manera los profesores movilizan los elementos de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) en el momento de enseñar fracciones, analizados desde los fundamentos de la Educación Matemática Realista (EMR) y la Fenomenología de Hans Freudenthal. La intervención se realiza con tres profesores a cargo del tercer grado de educación primaria, grado donde comienza formalmente la enseñanza de las fracciones en México. Los resultados se refieren a la articulación entre los elementos de la THA y la EMR. En particular, se analiza cómo los profesores trabajan los fundamentos de la EMR para favorecer el diseño posterior de THA considerando los obstáculos inscritos en la equipartición.

**Palabras clave:** Fracción, equipartición, fenomenología, trayectoria hipotética de aprendizaje.

---

<sup>1</sup> maresillos@hotmail.com

Centro de Actualización del Magisterio en Zacatecas, Zacatecas, México

<sup>2</sup> christine\_luna@camzac.edu.mx

Centro de Actualización del Magisterio en Zacatecas, Zacatecas, México

<sup>3</sup> selso-loera@camzac.edu.mx

Centro de Actualización del Magisterio en Zacatecas, Zacatecas, México

## Introducción

En la presente investigación se considera la equipartición como obstáculo didáctico, reforzado por investigaciones que han vislumbrado las dificultades cognitivas que se asocian a este significado, por ejemplo, en Cortina et al. (2012) y en Cortina et al. (2013) se expresa la preocupación de trabajar las fracciones como acepciones de diferentes usos y significados, tal como lo maneja Kieren (1976, 1980, 1993) bajo la idea de mega-concepto: parte-todo, cociente, razón, medida y operador. Esta preocupación ya venía siendo focalizada por autores como Freudenthal (1971), (1983), (1991), Kilpatrick et al. (2001); Thompson y Saldanha (2003), quienes reconocen que las fracciones pierden significatividad al dejar de ser vistas como números genuinos, y aún más, se dificulta su comprensión.

Freudenthal (1983) consideró que visualizar la fracción como parte de algo, como una concreción, es tan convincente que escolarmente toma hegemonía fenomenológica frente a las demás, este enfoque lleva a tomar la fracción como un comienzo demasiado estrecho y unilateral que conduce únicamente a fracciones propias, y encuentra su insuficiencia en cuanto se comienzan a trabajar fracciones mixtas. Bajo el mismo enfoque, la acepción de la fracción como equipartición, por su aparente facilidad de comprensión, instaura un modelo de razonamiento que es evocado constantemente para afrontarse a problemas matemáticos asociados con la fracción, evidenciando la carencia cognitiva que posteriormente dificulta su adecuación para afrontarse a las diferentes necesidades que demanda el concepto matemático (Cortina et al., 2013). En este caso, los alumnos, al carecer de herramientas, utilizan el conocimiento que poseen lo que les resulta viable o útil en ese momento, y al pasar al siguiente ciclo escolar se convierte en un obstáculo didáctico (Brousseau, 1997).

En sintonía, Fandiño (2015) señala problemáticas asociadas a las interpretaciones del concepto de fracción, mismas que producen diferentes efectos sobre la acción didáctica. Al comenzar la enseñanza del concepto matemático de fracción en educación básica, se establece una definición aparente definitiva y acabada, misma que posteriormente no satisface los distintos significados que asume el término durante las acepciones solicitadas a lo largo de la escolaridad primaria. Relacionado con el fenómeno anterior, Simon et al. (2018) dentro de su investigación identifican cuatro tipos de limitaciones sobre la comprensión de las fracciones: ausencia de la fracción como cantidad, fracción como dos números, concepto limitado de fracción parte-todo, dificultad de comprender la unidad de referencia (pp. 3-4).

Para concluir, en Cortina et al. (2012) se sugiere que los alumnos en México, a través del modelo de enseñanza, difícilmente alcanzan las metas establecidas en los Planes y Programas de Estudio, y que posiblemente las

actividades de enseñanza propuestas en estos documentos, podrían no ser las adecuadas para apoyar el aprendizaje matemático. En Cortina et al. (2013) se conjetura que las dificultades sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones se relacionan con la equipartición (concepto visto como relación parte-todo desde el modelo de Kieren), como forma inicial de enseñanza y es visto como un obstáculo didáctico, idea que parte del análisis realizado del concepto por Freudenthal (1983), Thompson y Saldanha (2003) y reforzada en investigaciones como Fandiño (2015), Cortina et al. (2012), Cortina et al. (2013) y Block (2022).

### **Planteamiento del problema**

Las complejidades ilustradas nos llevan a explorar lo que hay detrás de estas interacciones entre la investigación teórica y la realidad en las aulas. En el campo de la Educación Matemática no tiene que ver solo con el profesor o el alumno, sino con la manera en la que se da ese diálogo entre teoría y práctica. Ya Freudenthal (1971, 1983) expresaba la preocupación de trabajar las fracciones como acepciones de diferentes usos y significados, argumentando que las fracciones pierden significatividad al dejar de ser vistas como números genuinos, y aún más, se dificulta su comprensión.

Existen diferentes usos y significados de las fracciones, sin embargo, en las prácticas docentes, prevalece un uso limitado de los significados de estas, en consecuencia, el bajo rendimiento en el aprendizaje de las fracciones se deriva del bajo nivel de profundidad tanto del contenido como de su didáctica.

Asociado a ello, el uso de la equipartición como introducción al tema matemático de fracciones, obstaculiza la comprensión y enseñanza de concepciones maduras de los números racionales, así, las estructuras de enseñanza carecen de profundidad en la comprensión de los procesos significativos en el contexto de la didáctica, que, a su vez, impactan en el rendimiento escolar en las matemáticas.

En este sentido, se busca reconocer qué elementos de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) son considerados por profesores en activo al momento de trabajar con fracciones, elementos consistentes con los principios de la Educación Matemática Realista y la Fenomenología Didáctica de Hans Freudenthal para superar los conflictos cognitivos inscritos en la equipartición.

### **Referentes teóricos**

Mediante el enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR), propuesta por Freudenthal (1971, 1983, 1991), subyacen principios que dan sentido a esta corriente ideológica y se tomaron como base para el análisis de los elementos que conforman la THA:

- Principio de actividad. Concibe a las matemáticas como actividad humana, bajo esta condición se busca matematizar, no vista como el uso de un sistema de símbolos ya preparados, sino como la actividad organizativa que parte de la realidad y dota de sentido las prácticas sociales que construyen las matemáticas (Freudenthal, 1991, pp. 35–36).
- Principio de realidad. Es indispensable que el aprendizaje de las matemáticas surja desde la realidad, y en este sentido, que sea “realizable, imaginable o razonable para los alumnos” (Bressan et al., 2005, p. 75). Por lo tanto, reclama el trabajo en contextos y situaciones problemáticas realistas.
- Principio de reinención. El rol del docente consiste en mediar entre los alumnos y las situaciones que implican matematizar, “entre las producciones informales de los alumnos y las herramientas formales, ya institucionalizadas, de la matemática como disciplina” para brindar la oportunidad guiada a los alumnos, quienes no poseían herramientas matemáticas, para que las reinventen (Bressan et al., 2005, p. 81).
- Principio de niveles. Freudenthal (1991, pp. 41–42) caracterizó la idea de matematización horizontal que consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático, y vertical, ya dentro de la matemática misma. También se reconocen distintos niveles de comprensión por los que los alumnos transitan, están ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva.
- Principio de interacción. Observa el aprendizaje de las matemáticas como una actividad social, a través de las discusiones que se suscitan para validar, generalizar y normalizar los modelos de representación que conllevan a la resolución de problemas, sus distintos procedimientos, justificaciones, adecuaciones y la eficiencia que tienen al operarlos.
- Principio de interconexión (estructuración). El currículo es percibido como un proceso que requiere del diseño de secuencias didácticas, “lejos de ser elaboraciones académicas restringidas a objetivos instruccionales” (Bressan et al., 2005, p. 96).

Asimismo, se considera como soporte teórico conceptual la fenomenología didáctica de la fracción de Freudenthal (1983). Tomando en cuenta el enfoque fracturador de la fracción, la cual considera la división de magnitudes, con o sin resto, a través de diferentes métodos, como irreversible, reversible o meramente simbólico. También se hace uso del enfoque comparador de la fracción. Un fenómeno importante y que se ha dejado de lado en una enseñanza tradicional o, en su caso, en una enseñanza que carece de un conocimiento profundo sobre las fracciones, es el hecho de

que las fracciones además de dividir un todo en partes, sirven para comparar objetos concretos.

Freudenthal (1983) atribuye la construcción de objetos matemáticos a su práctica matemática misma, es decir, a los fenómenos que los dotan de sentido que después funcionan como medios de organización de objetos del mundo, ajustables a la realidad de los alumnos para ser aprendidos. Los objetos mentales y conceptos se vuelven medios de organización de fenómenos. Para constituir un objeto mental como medio de organización se deben considerar todos los usos para los que fue creado, y con ello organizarlos con efectos didácticos.

Bajo esta idea, es importante tomar la postura de que los objetos matemáticos o conceptos no preceden a la experiencia misma, sino que la actividad humana fue la que los creó. Otra aclaración importante es la distinción entre objeto mental y concepto, aunque ambos pueden ser medios de organización de fenómenos, entre ellos prevalecen diferencias, por ejemplo, el objeto mental antecede al concepto, y a su vez, los objetos mentales contienen a los conceptos, ya que su relación intrínseca reside en ser medios de organización. Otra distinción es que los objetos mentales son concepciones de los individuos que subyacen a la experiencia y pueden no ser matemáticos, mientras que los conceptos provienen de la matemática.

Respecto a la THA, Cobb et al. (2008) la comprenden como la composición de conjeturas acerca de las formas en que se reorganizan colectivamente los razonamientos sobre el aprendizaje, además de incluir los medios con los cuales se apoya cada reorganización. Para Simon (1995) la THA está compuesta por los objetivos de aprendizaje, prácticas matemáticas para lograr el aprendizaje y las conjeturas sobre cómo debe ser el proceso para los alumnos. En cuanto a los objetivos del profesor para el aprendizaje, procuran la selección de tareas y conjeturas acerca del proceso, mismas que determinan el rumbo que debe seguir la consecución de prácticas para lograr los objetivos establecidos. Estos objetivos en la postura adoptada se espera que cumplan con los principios de la EMR. Por ello, enseguida se describe la metodología utilizada para identificar los elementos de las THA a la luz de los principios de la EMR. Este experimento de diseño servirá de referente para el posterior diseño de THA para la enseñanza de las fracciones, en investigaciones posteriores.

## **Metodología**

Se toma el Experimento de Diseño como referente metodológico apropiado para llevar a la práctica la prueba piloto. Esta prueba es considerada la etapa cero de una investigación más amplia, se contextualiza en la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones en educación primaria y, por lo tanto, se centra en experimentos específicamente sobre los elementos que consideran

profesores en activo en la enseñanza de fracciones para apoyar su quehacer docente a través del diseño, innovación y análisis de la enseñanza (Cobb et al., 2003).

A través de la revisión literaria, se identifica la variedad de términos utilizados para definir la investigación de diseño, varía con base en usos tradicionales de las metodologías utilizadas, los sectores educativos donde es implementada, por preferencias de los investigadores e incluso para proyectos específicos, en este sentido, en la presente investigación, asumimos de igual forma el término Experimento de Diseño en el aula como la metodología utilizada e Investigación de Diseño para referirnos al paradigma implementado.

La investigación de diseño trata de evidenciar los recursos y elementos que se presentan en la resolución de tareas, las interacciones entre profesores, la evolución de nociones, conceptos, razonamientos y el conocimiento mismo sobre cómo se realiza la enseñanza a lo largo de la experimentación (Molina et al., 2011), con la intención de favorecer el diseño posterior de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje que superen obstáculos inscritos en la equipartición.

Derivado de ello, nuestra investigación se enmarca en el enfoque cualitativo y representa un conjunto de procesos sistemáticos, empíricos y críticos de investigación e implican la recolección y el análisis de datos cualitativos, así como su integración y discusión conjunta, para realizar inferencias producto de toda la información recabada y lograr un mayor entendimiento del fenómeno bajo estudio (Hernández et al., 2014). El enfoque cualitativo nos ayuda a formular una perspectiva amplia y profunda del fenómeno, lo cual nos permite recuperar datos valiosos para expresar con solidez las inferencias y la exploración durante el análisis reflexivo.

La intención latente en nuestra investigación, desde el enfoque cualitativo, busca una observación fundamentada en la realidad, orientada a los descubrimientos, situado en el proceso, inductivo, con datos reales y profundos, no generalizable y con realidad dinámica. El sustento filosófico y metodológico de nuestra investigación es el pragmatismo, que radica en el rechazo de una verdad absoluta dogmatizada, y en contraposición, el conocimiento es aquel que posee un valor práctico para ser de utilidad, por lo tanto, la articulación entre la THA y la EMR que se genera de esta investigación tiene carácter objetivo, subjetivo, interpretativo e intencionado.

En concordancia, es una investigación formativa, desarrollada para brindar aportes que permitan diseñar sistemáticamente la enseñanza mediante Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje, tanto de sus elementos como de la articulación con la EMR. El análisis es situado directamente de la práctica, fundamentado en la teoría y para la exploración de la articulación entre THA y EMR, es de naturaleza cualitativa, y de corte

interpretativo, en el caso de profesores en activo como aportes y recursos para la enseñanza que son apprehendidos desde la práctica y desde las potencialidades de adaptar la teoría, de modo que permite formular THA en futuras investigaciones.

El proceso de investigación experimenta la prueba piloto, basada en principios teóricos y a través de conjeturas que puedan ser puestas en práctica, con la intención de ser analizadas, modificadas o validadas en contextos áulicos. El diseño instruccional se formula mediante tres prácticas, en las cuales se analizan las decisiones de acción de los profesores; es decir, se pretende analizar la relación que existe entre la actividad diaria del profesor, la THA y los fundamentos teóricos de la EMR.

Para diferenciar, la THA permitió reconocer y reflexionar sobre si los docentes consideran sus elementos e inmersos en ellos se presentan principios de la Educación Matemática Realista. Entonces, la investigación tiene un carácter emergente, que se construye a medida que se avanza en el proceso a través del cual se recaben las distintas visiones y perspectivas de los participantes, para brindar elementos para el futuro diseño formal de propuestas de enseñanza que superen los obstáculos inscritos en la equipartición.

En este sentido, la posición asumida es interactiva e intersubjetiva, en cuanto se experimenta la prueba piloto y es reflexionada con base en la comunicación intelectual de los participantes con la intención de obtener e identificar los elementos que posibiliten la enseñanza de las fracciones de forma inicial desde diferentes significados.

La investigación se realizó con tres profesores de educación primaria pertenecientes a la misma zona escolar número 103 del municipio de Guadalupe, en el estado de Zacatecas, México; en tercer grado, con el contenido matemático de fracciones como medida. La selección de estos profesores se sustenta en la diversidad de trayectorias académicas y experiencia en servicio, con ello se da cuenta también de profesores que han pertenecido a diferentes reformas curriculares en México, situación que favorece la multiplicidad de perspectivas y enfoques con los que han trabajado, lo que ayuda a conformar diálogos colectivos que permitan la reflexión y análisis de lo que se trabaja.

Los profesores mencionados cuentan con 18, 22 y 35 años en servicio, han atendido en diferentes momentos y con diferentes reformas el tercer grado escolar de primaria. Asimismo, la población escolar en la que laboran comparte las mismas características geográficas, nivel socioeconómico y académico. La pertenencia a la misma zona geográfica, económica y escolar, proporcionó estabilidad en el seguimiento, así como la observación directa, participante y el análisis reflexivo e interpretación de resultados según lo demandó el dispositivo implementado.

## Experimento de diseño

Se exploran tres prácticas matemáticas de profesores que se llevaron a cabo de forma gradual y se busca identificar elementos sobre la enseñanza de las fracciones que posibilitan ver la fracción como medida, en el sentido de abrir diferentes caminos para comprender las fracciones desde diferentes significados.

En la *práctica 1*, los profesores movilizan sus conocimientos sobre las fracciones, se pretendió que reconocieran qué hacen para iniciar el proceso de enseñanza. Además, se buscó reconocer qué saberes curriculares identifican como fundamentales en los Planes y Programas de Estudio, así como en los libros para el alumno. Para lo cual se hacen preguntas como: ¿Cómo iniciamos la enseñanza de las fracciones? ¿Qué recursos utilizamos? ¿Qué ejemplos utilizamos? ¿Qué nos dice el libro para el alumno o el Plan y Programa de Estudios respecto a la enseñanza de las fracciones?

Con base en las respuestas, los profesores conjeturan sobre la naturaleza *hipotética de aprendizaje* inherente al proceso de enseñanza, al mencionar que es necesario “comprender la relación del numerador y el denominador para poder comprender las fracciones” y que para ello hacen uso de “ejemplos reales como pizza, pasteles, etc., para después introducirlos en las figuras geométricas y después operaciones para reforzar”.

Sustentado en los argumentos de los profesores, comúnmente la fracción se comienza a enseñar como la parte que resulta de partir un entero en  $n$  partes iguales, o bien, como la parte que resulta de definir la fracción en términos del rol que juegan el numerador y el denominador, es decir, la división de algo en partes, donde el numerador es el número de partes que tenemos y el denominador es el número de partes en lo que lo dividimos  $\frac{a}{b}$ .

Bajo esta idea, como un *recurso clásico (prácticas matemáticas)*, la fracción se enseña mediante representaciones pictóricas y posteriormente en figuras geométricas o en la recta numérica, por ello, después se solicita representar  $\frac{3}{5}$  en una recta. Resulta sencillo atenderla por la definición proporcionada, pues denota una relación parte-todo mediante la equipartición; es decir, significa tres de cada cinco segmentos de recta. Pero esta definición y representación no presenta problemas hasta que intentan interpretar  $\frac{7}{5}$ , no se puede tener siete de cinco. Como resultado, afirmaciones como “ $a$  es tantas partes de  $b$ ” no tienen sentido y encuentran insuficiencia fenomenológica, cuando se habla de *partes de*. Es aquí donde los profesores evidencian fortalezas y dificultades asociadas a la construcción de objetos mentales, mostrando las dificultades y obstáculos didácticos que surgen al comenzar la enseñanza de las fracciones mediante la relación parte-todo y las representaciones mencionadas. Preguntas como:

- ¿Qué operaciones mentales realizamos para concebir una situación de la manera en que concebimos  $\frac{3}{5}$ ?

- ¿Qué conocimientos son necesarios para concebir la fracción  $\frac{7}{5}$ ?
- ¿Qué desarrollo conceptual podría llevar a tal razonamiento?

Estas preguntas muestran la carencia fenomenológica de tal concepto matemático a través de la equipartición y abren la coyuntura para reflexionar sobre alternativas de enseñanza, así como visualizar las potencialidades que podrían aprovecharse para el aprendizaje, asociadas a la naturaleza de la matemática subyacente a esta forma de enseñanza.

En cuanto a los *objetivos de aprendizaje*, aparecen de forma intuitiva con base en los procesos hipotéticos de aprendizaje y las prácticas matemáticas para lograrlo, sin embargo, no se declara de manera formal qué se espera cumplir con dicha forma inicial de enseñanza.

En la *práctica 2*, se pretendió identificar conocimientos que habiliten un abanico de posibilidades de enseñanza de las fracciones, con este objetivo, se solicitó hacer la transformación de fracciones impropias a mixtas, es decir, cambia la fracción  $\frac{7}{5}$  a fracción mixta, como resultado es  $1\frac{2}{5}$ , algorítmicamente se vuelve sencillo para los docentes, pues poseen conocimientos operacionales de las fracciones, pero se vuelve complicado imaginar qué fenómenos en términos de representaciones dan sentido a esta transformación, por tanto, conviene preguntarse:

- ¿Qué significa esta transformación o cambio?
- ¿Cómo se ejemplifica el cambio?
- ¿Qué conocimientos son necesarios para lograr hacer la transformación o el cambio?

Los profesores reconocen las formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático, resaltan las prácticas matemáticas en cuanto a los procedimientos algorítmicos y su lógica adyacente, aunado a ello, reconocen que el problema anterior también se presenta en los alumnos, mostrando dificultades para comprender el cambio o transformación. Un conflicto frecuente que muestran los estudiantes se presenta cuando conciben las fracciones contenidas en un todo, y en la comprensión de que la magnitud de una cantidad (cualquiera que sea la medida que se trabaje) se determina en relación con una unidad. Lo que vuelve la magnitud independiente de la unidad numérica en la que se expresa, en consecuencia, pierde fenomenología que la dote de sentido. De esta forma se ven obstaculizadas las hipótesis que tienen los docentes sobre cómo debe ser el proceso para los alumnos.

En la *Práctica 3* se buscó establecer la fracción como medida viable para superar los conflictos presentados en las prácticas predecesoras, las fracciones se vuelven “reales” cuando las personas las entienden a través de la complementariedad de esquemas de operaciones conceptuales que se basan cada uno en una comprensión profunda (Thompson & Saldanha, 2003).

Se solicitó comparar dos varas, con dicha comparación se llegó a conclusiones como que la vara más larga estaba hecha de doce de las más cortas o que doce de las más cortas formaban uno de los más largos. Lo que faltó fue el sentido de reciprocidad del tamaño relativo: que la vara más corta se midió en unidades de la mayor y la mayor en unidades del menor. Posteriormente se busca asociarlo a las fracciones y reflexionar cuestiones como:

- ¿Representa alguna fracción la vara larga?
- ¿Representa alguna fracción la vara corta?
- ¿Cuál es la lógica de esto?
- ¿Qué pasa cuando una unidad de la vara corta que se usa no cabe en un número entero de veces en lo que se quiere medir la vara larga?
- ¿Cómo cambiaría la definición de la práctica uno para dar sentido a las demás prácticas?

Con base en la información obtenida, los profesores reconocen hipotéticamente los posibles modos de aprehensión asociados a la naturaleza misma del contenido matemático. Asimismo, incluyen estructuras y teorías relacionadas con el desarrollo cognitivo del alumno, lo anterior basado en la enseñanza de las fracciones mediante la relación parte-todo (Kieren, 1976, 1980, 1993; Llinares & Sánchez, 1988). Este modelo de enseñanza que se ha trabajado en innumerables tesis de posgrado, cuya variación radica en la didáctica implementada, no obstante, no se brindan elementos que comprueben que dicho modelo tiene efectividad, generando un hueco conceptual y procedimental importante dentro de la enseñanza de las fracciones. Es de gran importancia considerar que este modelo asentó las bases para la enseñanza de las fracciones en México, consideración que dentro de este trabajo toma un importante giro sobre los conflictos cognitivos que surgen de las formas de enseñanza, y como eje para considerar alternativas que permitan favorecer la práctica docente.

### **Aportes para la docencia**

Los resultados de las tres prácticas implementadas permitieron concebir la enseñanza de las fracciones a partir de operaciones conceptuales en lugar de una lógica algorítmica. Esto no se limita a lograr la adquisición de conocimientos (saberes) de la disciplina, implica también una forma particular de abordar el quehacer matemático; pues es distinta la conceptualización de medición, multiplicación, división a medir, multiplicar y dividir. En este tenor, Thompson y Saldanha (2003) definen las primeras como actividades, mientras que las segundas son imágenes de lo que uno hace. Se suele dar por hecho que los alumnos han aprendido y comprenden los contextos en que pueden usar fracciones, pero lo que en realidad

aprenden son contextos meramente matemáticos, provenientes de reglas axiomáticas formales. Los elementos que se buscan explicitar a través del experimento, surgen de las reflexiones que se dan a partir del análisis de estas actividades y se expresan en términos de elementos de la THA asociados a los principios de la EMR y la Fenomenología de Hans Freudenthal y que a continuación se describen.

## **Objetivos de aprendizaje**

### *Principio de interconexión (estructuración)*

- Durante el experimento, los profesores de manera intuitiva reconocían los objetivos de aprendizaje; sin embargo, estos deben ser más precisos pues no se presentaron de manera explícita. Además, visto desde el enfoque de la EMR, se debe identificar el tipo de prácticas, recursos y herramientas para la matematización en función de los objetivos de aprendizaje, lo cual favorece la comprensión y alternativas de enseñanza, no vistas como la transmisión de conocimiento sino el desarrollo del mismo en prácticas sociales con normas y valores asociados con la buena ciudadanía (Gravemeijer & Terwel, 2000, p. 778). Es más importante hacer matemáticas que mostrar y enseñar las matemáticas como un producto ya hecho (Freudenthal, 1971, 1983, 1991).

## **Prácticas matemáticas para lograr el aprendizaje**

Las prácticas matemáticas que los profesores consideran pertinentes para el proceso de enseñanza y de aprendizaje de las fracciones tienden a carecer de fenomenología conforme avanza la complejidad de las mismas. Asimismo, con base en la articulación con los fundamentos teóricos de la EMR y la Fenomenología de Hans Freudenthal, es importante para favorecer la construcción de objetos mentales que doten de sentido las prácticas matemáticas, resaltar lo siguiente dentro de cada principio:

### *En el principio de actividad*

- Considerar prácticas organizativas que den lugar a diálogos colectivos entre los alumnos, mismos que permitan asignar y dar valor a las prácticas sociales que construyen las matemáticas, visto más allá de una construcción social, es decir, para la sociedad misma.

### *En el principio de realidad*

- Considerar en cada práctica su enfoque hacia la construcción didáctica que parta de las experiencias, saberes y contextos de los alumnos, así como de los significados que se les otorga a estos saberes en las aulas y más allá de estas. Este enfoque parte de las relaciones que se construyen a partir de la responsabilidad que se tiene hacia el saber cómo parte de la vida, más que por el conocimiento que se tenga producto de ella.

- Buscar que los alumnos vivencien la construcción del conocimiento a partir de sus realidades concretas, en su cotidianeidad y en permanente relación con los medios escolarmente organizados.

*En el principio de reinención*

- Considerar actividades de enseñanza y de aprendizaje, en las que los alumnos hagan matemáticas a través de sus construcciones sociales vistas desde su realidad, los saberes implican una relación y forma de apropiación de la realidad a través de múltiples conocimientos, experiencias y prácticas que confluyen en su vida cotidiana.
- Reconocer y potenciar la capacidad de los alumnos para reinventar, reinterpretar, incidir y transformar el mundo que les rodea desde su inmediato.

*En el principio de interacción*

- Las prácticas deben favorecer la interacción a través de las discusiones que permitan a los alumnos validar, generalizar y normalizar los modelos de representación que conllevan a la resolución de problemas, sus distintos procedimientos, justificaciones, adecuaciones y la eficiencia que tienen al operarlos.

## **Conjeturas sobre cómo debe ser el proceso de aprendizaje**

*Principio de niveles*

- Si bien los profesores reconocen la gradualidad en la complejidad para trabajar con fracciones, es importante vigilar la transición de la actividad matemática familiar o cimentada en la realidad del alumno hacia la actividad matemática ligada al uso formal de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva, ya que esto implica la sustitución de métodos y algoritmos de resolución por uno de nivel superior, mediante diferentes formas de resolución, uso de un lenguaje matemático más formal, mejor estructurado o en su caso, más matemático, ya que este cambio puede ser disruptivo para el alumno y perder la relación fenomenológica.
- Se debe considerar cada uno de los modelos que surgen de los alumnos, su forma de representarlos, tanto de forma contextualizada, informal o como lo establece la matemática formal, esta flexibilidad permite integrar contenidos, validarlos y en consecuencia, transitar en los diferentes niveles de comprensión. Es importante resaltar que avanzar en los distintos niveles implica adquirir nuevas herramientas que han pasado por un proceso de generalización y validación en niveles inferiores, que se convierten en elementos adquiridos que posteriormente serán retomados para operarlos para resolver otras situaciones variadas, favoreciendo la adquisición de un razonamiento matemático cada vez más formal.

El respectivo análisis busca sustentar el uso de alternativas de enseñanza, en este caso, se propone como viable la enseñanza inicial de las fracciones bajo el contexto de la fracción como medida. En tanto, la definición que se asume sobre la fracción, se construye con la iteración de fracciones unitarias no contenidas en una unidad, por ejemplo:  $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots$   $m$  veces, igual a  $\frac{m}{n}$ , es un aspecto matemático que da sentido a la medición. Las fracciones no unitarias se entenderán como la suma de fracciones unitarias:  $\frac{5}{4}$  de unidades de referencia es 5 porciones iterativas de  $\frac{1}{4}$  cada una. Consideramos que bajo este contexto y definición se pueden cumplir las demandas teóricas, además de cubrir la transición en sus diferentes usos y significados que se le otorga a las fracciones vistas bajo el modelo de Kieren (1976, 1980, 1993).

### Conclusiones

Una conclusión preliminar que ponemos a consideración, consiste en que los profesores enfrentan la enseñanza a partir de establecer conceptos y definiciones aparentemente acabadas, mismas que posteriormente no cumplen con las exigencias fenomenológicas necesarias para comprender o imaginar lo que se hace algorítmicamente. En este caso, las tareas que realizamos reflejan que los profesores parten de mostrar la definición, su significado y a partir de ello, esperan a que los alumnos comprendan metodológicamente cómo se opera con las fracciones en diferentes contextos. Las posteriores prácticas reflejan ideas, sugerencias, nociones y conocimientos que tienen los profesores sobre la enseñanza de las fracciones, mismos que pueden ser útiles para visualizar posibles caminos que pueden seguir los alumnos para comprender e imaginar lo que se hace en los diferentes significados.

De los resultados obtenidos, se espera que los profesores e investigadores identifiquen elementos de la THA que puedan anticiparse a los modos de pensamiento de sus alumnos en el aprendizaje de las fracciones, y de las formas en que este puede ayudar a guiar ese pensamiento hacia un camino más viable y superar los obstáculos adyacentes a la relación parte-todo de las fracciones. Esperamos que los lectores vean nuestro intento de habilitar un abanico de posibilidades de enseñanza para las fracciones, con la finalidad de aportar objetos mentales que constituyan un aprendizaje maduro y que repercuta directamente en aprendizajes graduales sobre las fracciones.

Hacemos estas conexiones de los elementos de la THA con la EMR para dotar de sentido las fracciones, con la intención de reconocer los objetivos de aprendizaje, las prácticas matemáticas para lograr el aprendizaje y las conjeturas sobre cómo debe ser el proceso para los alumnos, qué usan los profesores de educación primaria y cómo los alumnos pueden construir objetos mentales para la comprensión de las fracciones en sus distintos usos.

Hablamos de formas estables de pensar que implican imaginar, conectar, inferir y comprender situaciones de maneras particulares. Destacamos que no estamos hablando de cosas abstractas ni de formulaciones que residen fuera de cada persona que se enfrenta a estas situaciones, estamos hablando de formas en que las personas razonan cuando comprenden fracciones en la forma en que intentamos transmitirles. La característica principal es la construcción de THA que cumplan con los principios de la EMR, para desvanecer la frontera entre docente e investigador, con el propósito de diseñar herramientas y actividades que permitan llevar a la práctica alternativas de enseñanza y mejorarlas.

Estos esfuerzos investigan la posibilidad de habilitar la enseñanza de las fracciones a través de objetos mentales coherentes con los significados y potenciarlos, y gestan entendimientos, interpretaciones e ideas que den sentido a lo que aprenden. Esto requiere indagar en las implicaciones que tiene el diálogo entre la teoría y la práctica a corto, mediano y largo plazo en las aulas, aquí presentamos ese diálogo a partir de los elementos de la THA a la luz de la EMR.

## Referencias

- Block, D. (2022). *Más de uno, pero menos de dos. La enseñanza de las fracciones y los decimales en la educación básica*. Taberna Libraria Editores.
- Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, M. F. (2005). Los principios de la educación matemática realista. En H. Alagia, A. Bressan, & P. Sadovsky (Eds.), *Reflexiones teóricas para la educación matemática* (pp. 69–96). Libros del Zorzal.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. Kluwer.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9–13. <https://doi.org/10.3102/0013189X032001009>
- Cobb, P., Zhao, Q., & Visnovska, J. (2008). Learning from and adapting the theory of Realistic Mathematics Education. *Éducation & Didactique*, 2(1), 105–124. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.276>
- Cortina, J. L., Zúñiga, G., & Visnovska, J. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática*, 25(2), 7–29.
- Cortina, J. L., Cardoso Moreno, E. R., & Zúñiga Gaspar, C. (2012). El significado cuantitativo que tienen las fracciones para estudiantes mexicanos de 6o. de primaria. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 14(1), 70–85. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=15523175005>
- Fandiño, M. (2015). Las fracciones: Aspectos conceptuales y didácticos. En L. Hernández, J. Juárez, & J. Slisko (Eds.), *Tendencias en la educación matemática basada en la investigación* (pp. 25–38). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

- Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3, 413–435.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. D. Reidel Publishing Company.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Kluwer Academic Publishers.
- Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: A mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*, 32(6), 777–796. <https://doi.org/10.1080/00220270050167170>
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, L. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill.
- Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh & D. Bradbard (Eds.), *Number and measurement: Papers from a research workshop* (pp. 101–144). ERIC/SMEAC.
- Kieren, T. E. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. En T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 125–149). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.
- Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. En T. P. Carpenter, E. E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 49–84). Lawrence Erlbaum Associates.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press. <https://doi.org/10.17226/9822>
- Llinares, S., & Sánchez, M. V. (1988). *Fraciones: La relación parte-todo*. Síntesis.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas*, 29(1), 75–87. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435>
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114–145. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.26.2.0114>
- Simon, M. A., Placa, N., Avitzur, A., & Kara, M. (2018). Promoting a concept of fraction-as-measure: A study of the Learning Through Activity research program. *Journal of Mathematical Behavior*, 52, 122–133. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.03.004>
- Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. En J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *Research companion to the principles and standards for school mathematics* (pp. 95–113). National Council of Teachers of Mathematics.

