

Desarrollo de dos agendas de investigación en el marco del enfoque Ontosemiótico

Development of two research agendas within the framework of the Ontosemiototic approach

Lilia P. Aké ¹ 

Juan D. Godino ² 

Luis R. Pino-Fan ³ 

Resumen

Describimos una colaboración académica e investigativa sobre el desarrollo de dos líneas de investigación y, de forma paralela, la formación y consolidación como investigadores de dos profesores de matemáticas mexicanos en el seno de los programas de maestría y doctorado en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. La primera línea, trabajada por Lilia Aké, versó sobre la formación de profesores en razonamiento algebraico; y la segunda, a cargo de Luis Pino-Fan, se centró en la formación de profesores sobre la derivada. Ambos investigadores en formación estuvieron adscritos al grupo de investigación Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística, de la Universidad de Granada y fueron colaboradores científicos de varios proyectos de investigación sobre formación de profesores de matemáticas. El trabajo realizado dio lugar a dos líneas de investigación dentro del sistema teórico del Enfoque Ontosemiótico con publicaciones de alto impacto.

¹ lake86@gmail.com

Universidad Autónoma de Querétaro (SOMIDEM)

² jdgodino@gmail.com

Universidad de Granada (SEIEM)

³ luis.pino@unison.mx

Universidad de Sonora (SOMIDEM)

Palabras clave

Formación de investigadores, enfoque ontosemiótico, razonamiento algebraico, formación de profesores.

Abstract

We describe an academic and research collaboration on developing two lines of research and, in parallel, training and consolidation as researchers of two Mexican mathematics teachers in the master's and doctoral programs in Didactics of Mathematics at the University of Granada. The first line, in which Lilia Aké worked, dealt with the training of teachers in algebraic reasoning; and the second, in charge of Luis Pino-Fan, focused on training teachers in the derivative. Both researchers were assigned to the research group Theory of Mathematics Education and Statistical Education at the University of Granada and were scientific collaborators in several research projects on mathematics teacher education. The work carried out resulted in two lines of research within the theoretical system of the Ontosemiotic Approach with high-impact publications.

Keywords

Research training, ontosemiotic approach, algebraic reasoning, teacher education.

Introducción

En este trabajo describimos una historia de colaboración entre España y México centrada, inicialmente, en la formación como investigadores en educación matemática de dos jóvenes profesores de matemáticas mexicanos. Tras la realización de las tesis doctorales, se continuó la colaboración mediante la publicación de diversos artículos científicos en revistas de alto impacto, dando lugar a la consolidación de dos líneas de investigación relevantes en Didáctica de la Matemática. Estas líneas, desarrolladas en el marco del Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática (EOS) (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2024), representan aportaciones significativas tanto en el ámbito teórico como en el práctico.

La colaboración comienza en junio de 2008, cuando Lilia Aké y Luis Pino-Fan terminaron sus estudios de licenciatura en la Universidad Autónoma de Yucatán y solicitaron una beca del Programa MAEC-AECID (Ministerio de Asuntos Exteriores y Cooperación y Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo, Gobierno de España) para la realización de estudios de posgrado en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Dichas becas fueron concedidas y en otoño de 2009 se inscribieron en el máster de Didáctica de la Matemática, como un primer paso en su formación doctoral.

Los cursos de fundamentación teórica y metodológica del programa de doctorado en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada, iniciado en 1988, fueron articulados en el curso 2007-2008 como un programa de máster en dicha especialidad. Por tanto, los estudios y actividad

de investigación realizados por L. Aké y L. Pino-Fan en su primer año de estancia en Granada les permitieron obtener el título de máster en Didáctica de las Matemáticas e hizo posible su inscripción en el programa de doctorado. La dirección de los trabajos de investigación fue asignada por el Departamento de Didáctica de la Matemática al Dr. Juan D. Godino, con la colaboración como codirector del Dr. V. Font (Universidad de Barcelona) para el caso de la tesis de L. Pino-Fan. Las tesis fueron defendidas en mayo de 2013 (L. Pino-Fan) y en noviembre de 2013 (L. Aké).

Las investigaciones fueron desarrolladas en el seno del grupo FQM-126 del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía, “Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística”, en el marco de los proyectos de investigación sobre formación de profesores, SEJ2007-60110/EDUC, MEC-FEDER, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MEC) y EDU 2009-08120/EDUC. La participación en estos proyectos y la interacción con otros estudiantes y doctores formados en el programa permitieron a L. Aké y L. Pino-Fan ampliar sus horizontes de colaboración.

En los apartados que siguen se describe el tipo de formación teórica y metodológica que recibieron los estudiantes y los proyectos de doctorado que dieron origen a la colaboración. Posteriormente, se presentan las líneas de investigación que surgieron con el desarrollo de los proyectos de tesis doctorales y que se reflejan en las publicaciones desarrolladas colaborativamente durante la etapa de formación doctoral. Asimismo, se describen los trabajos realizados en años posteriores a los estudios de doctorado y su impacto en las líneas de investigación correspondientes. En un último apartado se analiza el tipo de colaboración realizada en este caso específico.

Programa de formación de investigadores y tesis doctorales

El programa de formación del máster en Didáctica de las Matemáticas en el que participaron L. Aké y L. Pino-Fan y con el que se dio origen a la colaboración, incluía cuatro módulos:

- I. Metodología de investigación (formación general en investigación educativa, aplicada a la educación matemática).
- II. Cursos transversales (orientados a situar la educación matemática en una perspectiva general como campo de investigación; problemas comunes a varios bloques temáticos).
- III. Cursos especializados (estudio didáctico de campos matemáticos especializados, tales como la estadística, probabilidad, pensamiento numérico y algebraico, geometría).
- IV. Trabajo de investigación integrado en una de las líneas de investigación del Departamento (Trabajo final de Máster).

Como competencias transversales en los diferentes cursos figuran:

1. Analizar críticamente la literatura científica en Didáctica de la Matemática.
2. Buscar fuentes bibliográficas, así como analizar y organizar la literatura existente sobre temas específicos relacionados con la Didáctica de la Matemática.
3. Adquirir o mejorar las habilidades de exposición oral y escrita de trabajos teóricos y de investigación.
4. Aplicar los conocimientos adquiridos a la práctica en: a) la investigación propia de la Didáctica de las Matemáticas; b) el ámbito de la enseñanza de las matemáticas.
5. Fomentar el espíritu crítico, reflexivo y emprendedor.

La línea de Teoría y Métodos de Investigación en Educación Matemática, a la cual se adscribieron L. Aké y L. Pino-Fan, estaba centrada en el desarrollo y aplicación del EOS en distintas áreas de contenido matemático de los diferentes niveles educativos. Dentro de dicha línea, J. D. Godino impartía el curso de Teoría de la Educación Matemática, en el cual los estudiantes recibían información sobre el marco teórico del EOS, como un sistema teórico integrador para la investigación en didáctica de la matemática. En cuanto a las competencias específicas del curso Teoría de la Educación Matemática figuraban:

- 1) Analizar y sintetizar los principales paradigmas y líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas
- 2) Analizar y sintetizar los fundamentos teóricos de la cognición e instrucción matemática.
- 3) Aplicar los conocimientos sobre marcos teóricos usados en educación matemática al análisis didáctico de experiencias de enseñanza / aprendizaje.
- 4) Comprender y valorar el papel de los marcos teóricos en el planteamiento de problemas específicos de investigación.

Tanto L. Aké como L. Pino-Fan realizaron estancias de investigación de tres meses en el CINVESTAV (Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México), lo que les permitió que su doctorado tuviera la mención de doctorado internacional.

Proyecto de investigación doctoral L. Aké

El proyecto de investigación doctoral de L. Aké, titulado *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación* (Aké, 2013), se centró en el razonamiento algebraico y la formación de profesores de educación primaria. El objetivo general era evaluar el conocimiento didáctico-matemático que los futuros maestros de educación primaria tienen

sobre el razonamiento algebraico propio de los primeros niveles educativos. Se pretendía aportar nuevos conocimientos, recursos teóricos y metodológicos que permitieran la evaluación de tal conocimiento.

Así mismo, se propuso investigar el desarrollo de conocimientos sobre el álgebra y su didáctica en la formación inicial de maestros. Mediante el diseño de propuestas instruccionales, se pretendía ofrecer oportunidades de formación a los futuros maestros, para que reconocieran y promovieran el razonamiento algebraico en los escolares. Se formularon los siguientes objetivos específicos:

1. Caracterizar el conocimiento didáctico-matemático que requiere el profesor de primaria para el desarrollo de procesos de instrucción eficaces que le permitan promover el desarrollo del razonamiento algebraico en sus estudiantes. Esto requiere sintetizar las investigaciones realizadas en el campo de la Didáctica de la Matemática sobre la inclusión del razonamiento algebraico en la escuela primaria. Se tienen en cuenta las facetas epistémica, cognitiva, afectiva, instruccional y ecológica que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra para caracterizar el razonamiento algebraico elemental.
2. Diseñar instrumentos para evaluar el conocimiento didáctico-matemático de maestros en formación sobre la enseñanza y el aprendizaje de contenidos relativos a la aritmética, medida y geometría.
3. Aplicar los instrumentos elaborados para valorar los conocimientos didáctico-matemáticos de muestras intencionales de futuros profesores de educación primaria sobre el razonamiento algebraico elemental.
4. Diseñar, implementar y evaluar experiencias formativas que promuevan el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático en el campo del álgebra.

Considerando esos objetivos, la tesis doctoral de L. Aké abordó una problemática educativa utilizando las herramientas teóricas que proporciona el EOS, las cuales permitieron proponer una conceptualización del álgebra escolar y aplicarla a la formación de profesores de educación primaria. Por un lado, la conceptualización del álgebra escolar está basada en el reconocimiento de distintos niveles de algebrización de la actividad matemática, entendiendo el desarrollo del razonamiento algebraico a través de diversas tipologías de tareas de carácter estructural y funcional.

Por otro lado, el trabajo con los estudiantes de magisterio fue articulado a través de un proceso formativo en un curso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A lo largo de este proceso formativo se desarrollaron y evaluaron las competencias de los futuros maestros, tanto en la resolución de tareas de índole algebraica, como en la identificación de objetos algebraicos y la asignación de niveles de algebrización a las actividades matemáticas escolares.

Proyecto de investigación doctoral L. Pino-Fan

El proyecto de investigación doctoral de L. Pino-Fan, titulado “Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada” (Pino-Fan, 2013), se centró en el conocimiento de profesores de bachillerato para la enseñanza y el aprendizaje de la derivada. El objetivo general consistió en aportar nuevos conocimientos y recursos teóricos y metodológicos que permitan la evaluación del conocimiento didáctico-matemático de los profesores de secundaria y bachillerato en formación inicial, para la enseñanza de la derivada. Asimismo, se trató de analizar cómo desarrollar el conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza idónea del objeto derivada en los futuros profesores de bachillerato, mediante el diseño de propuestas instruccionales, que favorecieran dicho desarrollo. En este sentido, el proyecto de investigación se centró, básicamente, en la consecución de los siguientes objetivos específicos:

1. Identificar y caracterizar, a partir de las investigaciones que se tienen en el campo de la Didáctica de la Matemática respecto a la noción derivada, el conocimiento didáctico-matemático que requiere el profesor de secundaria/bachillerato para desarrollar procesos de instrucción eficaces para la enseñanza de la derivada. Esto se hace mediante el análisis y descripción de las configuraciones asociadas a las distintas facetas (epistémica-ecológica, cognitiva e instruccional) que propone el EOS para caracterizar dicho conocimiento didáctico-matemático.
2. Diseñar instrumentos que permitan evaluar el conocimiento didáctico-matemático de los profesores de secundaria/bachillerato en formación inicial y permanente sobre la derivada.
3. Caracterizar, mediante la aplicación de los instrumentos de evaluación desarrollados, el conocimiento didáctico-matemático de los profesores de secundaria/bachillerato en formación inicial sobre la derivada.
4. Diseñar, implementar y evaluar experiencias de formación que promuevan y mejoren el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de los profesores de secundaria/bachillerato en formación inicial.

Es importante destacar que esta tesis doctoral, especialmente en sus reflexiones finales, sembró las primeras semillas de lo que posteriormente se consolidaría como la segunda línea de investigación, descrita en este capítulo, sobre el conocimiento didáctico-matemático del profesorado, hoy firmemente integrada en el seno del EOS.

Líneas de investigación desarrolladas en el marco del EOS

La realización de los trabajos doctorales permitió potenciar dos líneas de investigación enmarcadas en la formación del profesorado. Segui-

damente describimos la motivación y resultados obtenidos en cada una de ellas.

Línea 1: razonamiento algebraico elemental en maestros en formación

Esta línea de investigación tiene como objetivo caracterizar y evaluar el conocimiento didáctico-matemático necesario para que los maestros de primaria puedan fomentar el razonamiento algebraico en sus estudiantes. Se abordan cuestiones como los niveles de algebrización de la actividad matemática escolar, el diseño de instrumentos de evaluación y la implementación de experiencias formativas para mejorar la enseñanza del álgebra en los niveles iniciales.

Motivación

Diversas perspectivas teóricas e investigaciones apoyan la introducción de contenidos algebraicos en el currículo de la escuela elemental (Cai & Knuth, 2011; Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 2007). Sin embargo, esta misma diversidad, tal y como lo señalan Kaput y Blanton (2000), es una de las razones por las que tales innovaciones han tenido dificultades para su implantación. Por tanto, se reconoce que no se tiene una posición suficientemente explícita de lo que se podría considerar como álgebra en los primeros grados (Kaput, 2008). Esta situación nos llevó a plantear como primera pregunta de investigación,

¿Cuáles son los rasgos característicos del razonamiento algebraico elemental que permiten discriminar diversos niveles de algebrización, en particular distinguir las prácticas de índole algebraica de las que no lo son?

En consecuencia, el primer problema que abordamos en la tesis doctoral es la clarificación del significado del álgebra, reconociendo de entrada una pluralidad de significados del objeto según los marcos institucionales y contextos de uso. En nuestro caso, fijamos la atención en el uso del álgebra en educación primaria, lo que en la literatura anglosajona se describe como “álgebra temprana” (early algebra), y que nosotros designamos como Razonamiento Algebraico Elemental (RAE). Tras el estudio sistemático de la bibliografía correspondiente consideramos necesario tomar una posición sobre la naturaleza del RAE, usando las herramientas teóricas que proporciona el EOS, lo que nos permitió proponer una manera de conceptualizar el razonamiento algebraico.

Una vez clarificada la naturaleza del RAE, su introducción efectiva en la escuela primaria, como proponen diversos autores (Blanton & Kaput, 2011; Kieran 2007) y propuestas curriculares (NCTM, 2000), requiere como condición crítica la formación de los profesores. Con relación a esta problemática nos planteamos otra cuestión de carácter evaluativo que formulamos en los siguientes términos:

¿Qué conocimientos, incluyendo comprensión y competencia, tienen los maestros en formación inicial sobre el RAE?

Esta cuestión se interpreta en el marco del EOS como un estudio de evaluación de significados personales de estudiantes de magisterio sobre un objeto matemático, en nuestro caso el álgebra elemental.

Una vez detectadas las necesidades formativas de los futuros maestros sobre el RAE, abordamos el problema de elaborar diseños instruccionales que promuevan la evolución de los significados personales de los estudiantes en la dirección previamente identificada, esto es, nos preguntamos,

¿Qué tipo de acciones formativas sería necesario (y posible) implementar en un programa de formación inicial de maestros de primaria para desarrollar en ellos el sentido algebraico?

En relación con este problema planteamos el diseño, implementación y evaluación de una experiencia formativa de un grupo de futuros profesores de educación primaria que contempla, en el marco de un curso sobre “enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de educación primaria”, la evolución de los significados personales de los estudiantes sobre el RAE.

Resultados

Uno de los principales aportes que se derivan de la tesis de L. Aké es la conceptualización del RAE basada en niveles de algebrización articulados desde el EOS. Dada la falta de consenso sobre el significado del álgebra en los niveles elementales, nuestra propuesta imbrica las diferentes caracterizaciones realizadas desde las investigaciones con las herramientas del EOS proporcionando un significado de referencia del mismo. Esto supone un avance en el esclarecimiento de la naturaleza del álgebra en la escuela elemental.

Otro de los aportes es la evaluación sobre el RAE realizada con maestros en formación de México, dada la inexistencia de este contenido en el currículo español. Contar con un marco de referencia sobre los conocimientos de futuros docentes que están familiarizados con el álgebra en la escuela primaria, aporta conocimientos sobre los significados personales de los estudiantes respecto al mismo. Los resultados suponen que, aunque se integra en el plan de estudios de la licenciatura en educación primaria una asignatura sobre el álgebra (su enseñanza y aprendizaje), los futuros docentes mexicanos manifiestan dificultades en la resolución de problemas de índole algebraica. Los maestros en formación aún identifican el álgebra con la manipulación simbólica y el uso exclusivo de letras. Por ello, hacer frente a la reforma educativa de la educación básica en México —que integra desde 2009 un enfoque sobre resolución de problemas en el que se incluye el sentido numérico y pensamiento algebraico para los niños— implica un reto para los futuros maestros.

En esta misma línea sobre formación de profesores, consideramos como otra aportación del trabajo, la implementación de un proceso formativo que contempla el desarrollo del RAE y cuya finalidad es brindar a los maestros en formación oportunidades para desarrollar competencias de análisis para la identificación de rasgos algebraicos en la actividad matemática escolar. Proporcionar pautas a los maestros en formación para la identificación de niveles de algebrización en la práctica matemática supone avances para la integración de la propuesta en las aulas de la escuela elemental.

El diseño de tareas específicas incluidas en el cuestionario desarrollado —en cuya estructura se pone de manifiesto nuestra conceptualización del RAE integrada al modelo de conocimiento del profesor propuesto por Godino (2009)— aporta información cruzada respecto a dos tópicos de creciente interés en la comunidad de investigadores. La pretensión de hacer operativo nuestro enfoque sobre el álgebra incorporado a la noción del conocimiento didáctico-matemático constituye un aporte, tanto en el campo de formación de profesores como en el campo de didáctica del álgebra.

Durante esta etapa de formación, los avances del trabajo doctoral fueron presentados en foros como el CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education), el PME (Psychology of Mathematics Education) y la SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática), así como en grupos de trabajo del Departamento del CINVESTAV en México. Se publicaron artículos que contribuyeron a la consolidación de la conceptualización operativa del álgebra escolar basada en niveles de algebrización.

En este contexto, el artículo sobre la *naturaleza del álgebra escolar* (Godino et al., 2012) representó el primer paso para una conceptualización del razonamiento algebraico a nivel de educación primaria basada en la intervención de procesos de generalización, simbolización y objetos algebraicos. Este trabajo propone la interpretación del álgebra escolar articulada en niveles de desarrollo y pone de manifiesto la importancia de fortalecer la formación docente con herramientas conceptuales para fomentar el razonamiento algebraico en edades tempranas.

En el manuscrito *Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros* (Godino et al., 2014), la propuesta de niveles de algebrización se consolida y se definen cuatro niveles (nivel 0, nivel 1, nivel 2 y nivel 3) basados en tipos de objetos, transformaciones y lenguaje que permiten distinguir un nivel de otro. De esta manera, se plantea que el uso de lenguaje simbólico-literal y la operación analítica-sintáctica con este lenguaje son requisitos para asignar un nivel propiamente algebraico (nivel 3) a una práctica matemática. La investigación manifiesta la importancia de diseñar tareas adecuadas para promover el pensamiento algebraico en las primeras edades y la necesidad de que los docentes de primaria, tanto

en ejercicio como en formación, comprendan la naturaleza gradual del pensamiento algebraico.

A partir de la definición de los niveles de algebrización, el artículo *Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación* (Aké et al., 2014) aporta un diseño de intervención formativa sustentada en la ingeniería didáctica interpretada desde el EOS, cuya finalidad fue el fomento del reconocimiento de niveles de algebrización en futuros maestros de primaria. Este estudio evidenció que la asignación de niveles de algebrización es compleja y requiere mayor tiempo de formación, pero también confirmó la pertinencia de trabajar con contenidos algebraicos en la formación de maestros. Uno de los aportes sustanciales de esta línea de investigación se encuentra en el artículo *Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica* (Godino, Neto et al., 2015) en el que el modelo de niveles de algebrización se amplía al incorporar niveles orientados al álgebra escolar de secundaria. Además, se evidencia cómo los niveles de algebrización propuestos para la educación primaria y secundaria, articulados desde el EOS, son coherentes con las etapas de algebrización propuestas desde la TAD (Teoría Antropológica de lo Didáctico). En el Anexo 1 incluimos la relación de las principales publicaciones realizadas, indicando el número de citas según Google Académico.

Línea 2: conocimiento didáctico-matemático del profesorado

Esta línea, inicialmente, se centró en la evaluación y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático relacionado con la enseñanza de la derivada. A través del análisis de configuraciones epistémicas, cognitivas e instruccionales, se identificaron los desafíos que enfrentan los profesores en formación al trabajar este contenido matemático clave, proponiendo metodologías y recursos específicos para su enseñanza. Sin embargo, en la actualidad, con base en las colaboraciones entre Luis Pino-Fan, Juan D. Godino, Vicenç Font, entre otros investigadores del equipo, integrantes de la SEIEM y SOMIDEM, se ha logrado consolidar una línea de investigación robusta sobre conocimientos y competencias del profesorado de matemáticas.

Motivación

El estudio sobre los conocimientos que debe tener un profesor de matemáticas para que su enseñanza sea idónea ha ido tomando un creciente interés en los últimos años (Ball & Even, 2008; Chapman, 2020; Wood, 2008). Sin embargo, son pocas las investigaciones orientadas al diseño de instrumentos que permitan explorar y caracterizar el conocimiento didáctico-matemático de los profesores sobre tópicos específicos. En la investigación inicial, producto de la tesis doctoral, se informa de los resultados obtenidos mediante la aplicación de un cuestionario que se diseñó teniendo en cuenta

el inicio de un modelo específico denominado “Conocimiento Didáctico-Matemático”. Concretamente, se aborda la evaluación de la faceta epistémica de dicho conocimiento (relacionada con la riqueza y complejidad matemática) sobre la derivada en una muestra de futuros profesores de matemáticas de bachillerato en México.

Para lograr el objetivo central de la investigación el estudio se llevó a cabo en cuatro fases:

- 1) Mediante una revisión sistemática de tipo histórico-epistemológico-didáctico se elabora una conceptualización de los significados de la derivada.
- 2) Diseño del cuestionario CDM-Derivada, teniendo en cuenta los significados de la derivada y criterios aportados por las investigaciones sobre Didáctica del Cálculo, así como sobre formación de profesores de matemáticas.
- 3) La aplicación piloto del cuestionario a una muestra de 53 futuros profesores de bachillerato en México y el diseño del cuestionario definitivo a partir de los resultados obtenidos en la primera fase; también se tienen en cuenta los resultados del estudio de triangulación mediante juicio de expertos al que se sometió el cuestionario.
- 4) Aplicación del cuestionario definitivo a una muestra de 49 futuros profesores de bachillerato en México.

En la cuarta fase se realizaron entrevistas clínicas para profundizar en la caracterización de las configuraciones cognitivas sobre la derivada. Los resultados de la investigación aportaron nueva información sobre la caracterización de los conocimientos que los futuros profesores deberían tener para gestionar idóneamente los aprendizajes sobre la derivada de sus futuros estudiantes. Además, proporcionaron pautas y criterios que permiten el diseño de metodologías didácticas para desarrollar y/o fortalecer el conocimiento especializado sobre la derivada.

Resultados

Como resultados principales, se logró la reconstrucción del significado holístico de la derivada. Para poder explorar el conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada, primero debíamos tener una “visión amplia” sobre lo que es la derivada o sobre cuál o cuáles son sus significados. Así, en el capítulo 3 de la tesis realizamos un estudio histórico-epistemológico que nos permitió caracterizar, a partir de la identificación de las configuraciones epistémicas activadas, los sistemas de prácticas que dieron paso al surgimiento de la derivada, se identificaron los significados parciales que constituyen el significado global u holístico. Esta reconstrucción es de interés puesto que los significados de la derivada pretendidos por una institución, o profesor como representante de la institución, deben ser representativos de

este significado global. Se logró abrir una línea de investigación sobre el estudio histórico-epistemológico de los objetos del cálculo, con la finalidad de reconstruir sus significados holísticos. El trabajo desarrollado en este capítulo 3 de la tesis fue el germen de otras colaboraciones enmarcadas en la línea de "historia y epistemología de las matemáticas" desde la perspectiva del EOS. Así, se han realizado diversos estudios para reconstruir, a partir de análisis histórico-epistemológicos, el significado global de objetos matemáticos como derivada, función, límite, infinito, antiderivada, Chi-cuadrada, t-Student, entre otros (ver, por ejemplo, Pino-Fan et al., 2011; Pino-Fan et al., 2018).

Por otro lado, se propusieron criterios para el análisis de la idoneidad epistémica de los significados de la derivada pretendidos en los libros de texto y en los planes de estudio. En el Capítulo 4 de la tesis, con la finalidad de identificar y caracterizar los significados de la derivada pretendidos en el currículo de matemáticas de bachillerato, se diseñó una metodología para el análisis de los libros de texto y planes de estudio sobre la derivada, con el propósito de estudiar si los significados pretendidos en éstos eran representativos del significado holístico. Esta metodología, actualmente, se sigue utilizando para el análisis de libros de texto y del currículo en general. Se diseñó una metodología para la exploración de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático (CDM), tomando en cuenta las herramientas teóricas y metodológicas del EOS, y los aportes que se han realizado desde el campo de investigaciones sobre didáctica del Cálculo. Esto permitió diseñar un cuestionario para la exploración de los conocimientos sobre la derivada de los futuros profesores.

Además, se aportaron criterios para analizar y describir la faceta epistémica del CDM de los futuros profesores. Tanto la elaboración del cuestionario como las respuestas de los profesores en formación mostraron el complejo entramado de prácticas, objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la resolución de las tareas relacionadas con la derivada. La toma de conciencia de esta complejidad es necesaria en la formación de profesores para que estos puedan desarrollar y evaluar la competencia matemática en sus futuros estudiantes.

La investigación también permitió explorar la pertinencia del vínculo entre las configuraciones cognitivas y el conocimiento didáctico-matemático requerido para la enseñanza, concretamente, el referente a la faceta epistémica (conocimiento común, especializado y ampliado). El uso e identificación de objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), sus significados y los procesos involucrados en la solución de tareas matemáticas, son la base de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Uno de los resultados más relevantes, el cual constituye un aporte teórico-metodológico, fue el esbozo de un modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesorado, el cual se presenta en

las páginas finales de la tesis de L. Pino-Fan, hoy en día conocido como modelo CDM, y que ha evolucionado a un modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesorado. El planteamiento de dos niveles del conocimiento especializado es uno de los aspectos relevantes a considerar en el diseño de acciones formativas que fomenten los conocimientos sobre derivadas de los futuros profesores.

En síntesis, consideramos de interés destacar que tras la tesis de Luis Pino-Fan se generó una dinámica de colaboración intensa con Juan D. Godino y Vicenç Font, principalmente. Esta colaboración dio origen a una línea de trabajo centrada en el conocimiento y competencias didáctico-matemáticas del profesorado, que fue madurando en diversos contextos institucionales. En particular, artículos como los de Pino-Fan y Godino (2015), Godino et al. (2018) y Pino-Fan et al. (2023) son evidencia del sólido avance en esta línea en el seno del EOS, producto de la colaboración entre investigadores de SOMIDEM y SEIEM. Estos tres trabajos no solo han tenido repercusión en el ámbito académico (más de 300 citas en Google Académico), sino que han permitido orientar cursos de formación docente en México, Chile, Ecuador, Colombia y España. Esto se debe a la conceptualización pragmatista de la idea de competencia y a la relación establecida entre las competencias clave para la práctica del profesorado y las categorías propuestas por el modelo del conocimiento didáctico-matemático. En el Anexo 2 se incluyen las principales publicaciones realizadas y el número de citas según Google Académico.

Repercusiones del trabajo colaborativo

En este apartado, describimos los trabajos realizados en años posteriores a los estudios de doctorado y su incidencia en las líneas de investigación correspondientes. Después de la formación doctoral, Lilia Aké se incorporó al contexto mexicano. En ese sentido, es importante mencionar que la investigación que se desarrolla en México sobre la formación de profesores está ceñida a los contextos particulares de formación. La formación inicial de los docentes que imparten clases en los niveles de educación preescolar, primaria y secundaria —correspondientes a las edades de 3 a 6 años, 6 a 12 años y 12 a 15 años, respectivamente— no se lleva a cabo en Instituciones de Educación Superior, sino en Escuelas Normales que hasta el momento no están caracterizadas por cultivar la investigación en educación matemática. En cuanto a la Educación Media Superior, que abarca de los 15 a los 18 años, la enseñanza está mayoritariamente a cargo de profesionales con formación en ingeniería y no se exige contar con estudios de posgrado enfocados en la enseñanza de las matemáticas para desempeñarse como docente en ese nivel. De esta manera, las investigaciones desarrolladas en el contexto mexicano atienden a estos matices.

Uno de los trabajos representativos desarrollados en el contexto mexicano es el artículo *Análisis de tareas de un libro de texto desde la perspectiva de los niveles de algebrización* (Aké & Godino, 2018). La relevancia de este manuscrito es que analiza el libro de primer curso de primaria con la finalidad de caracterizar las formas en las que se promueve el razonamiento algebraico temprano. La pertinencia también se sostiene en el hecho de que los libros de texto que se utilizan a nivel de primaria son los mismos para todo el territorio nacional mexicano y son el principal recurso de enseñanza en el aula. Se aporta evidencia de que las tareas planteadas en el libro no están intencionalmente dirigidas a promover un pensamiento algebraico temprano en los niños y que se prioriza el registro numérico orientándose principalmente a un nivel cero de algebrización. Sin embargo, se muestra la potencialidad de las tareas para ser reorientadas hacia niveles progresivos de algebrización.

Por otro lado, debido a la manera en que está organizado el sistema de formación docente y cómo funcionan las instituciones encargadas de preparar a los profesores, el principal interés de las investigaciones en el contexto mexicano se centra en profesores de nivel secundaria y bachillerato. Los estudios sobre los conocimientos y competencias siguen siendo relevantes en el marco educativo mexicano. En esta dirección el artículo *Hacia una caracterización de la competencia algebraica en la formación de profesores* (Aké & Páez, 2024) desarrolla un estudio con futuros profesores de bachillerato en el que se caracterizan las formas en las que resuelven, interpretan y validan actividades algebraicas. Para realizar esa caracterización, se introduce una descripción de niveles de competencias fundamentada en los niveles de algebrización y elementos sustanciales de la competencia matemática. De esta manera, no solo es importante tener habilidades técnicas de resolución sino también interpretar las relaciones, regularidades y propiedades matemáticas y expresar por qué funcionan. Se aporta evidencia sobre la dificultad de alcanzar un primer nivel de competencia algebraica y la necesidad de transformar la forma en la que se estudia el álgebra escolar.

Por su parte, en el caso de Luis Pino-Fan, podemos destacar la repercusión que ha tenido el artículo publicado sobre la ampliación de las categorías del conocimiento didáctico matemático (Pino-Fan & Godino, 2015). A diferencia de otros modelos previos —como el MKT de Ball o el PCK de Shulman—, esta propuesta distingue tres dimensiones fundamentales que conforman el conocimiento integral del profesorado (matemática, didáctica y meta didáctico-matemática), integrando los conocimientos que intervienen en las distintas fases del diseño instruccional: análisis preliminar, diseño, implementación y evaluación.

La riqueza del modelo radica en su capacidad para identificar y relacionar las diversas facetas del conocimiento profesional del docente (epistémica,

cognitiva, ecológica, afectiva, mediacional e instruccional), ofreciendo un marco teórico operativo y articulado. Asimismo, se comparan críticamente las contribuciones del CDM con otros marcos teóricos, evidenciando su potencial para guiar tanto procesos de formación docente como investigaciones empíricas sobre prácticas de enseñanza. Esta perspectiva ampliada del conocimiento del profesor de matemáticas ha permitido abordar estudios sobre el conocimiento del profesorado en torno a objetos matemáticos específicos (como la derivada o el razonamiento algebraico, geométrico y estadístico), abriendo nuevas líneas de investigación y desarrollo profesional docente en Iberoamérica.

En Pino-Fan et al. (2013) realizamos un riguroso análisis didáctico del tratamiento del concepto de derivada en el currículo mexicano de bachillerato; el currículo es pensado como la dupla <planes de estudio oficiales, los libros de texto>. Esta manera de concebir el currículo ha sido muy utilizada en trabajos posteriores debido a que permite una visión integral y completa de los significados pretendidos de los objetos matemáticos curriculares. Uno de los aportes relevantes de este estudio es la ampliación de la metodología que se tenía en el seno del EOS para el análisis de textos utilizando la configuración de objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos). Además, se introducen en el estudio cinco criterios de idoneidad epistémica para valorar la representatividad y coherencia de los significados de los objetos matemáticos (ejemplificados con la derivada): campos de problemas abordados, representaciones activadas, elementos regulativos y argumentativos, conocimientos previos requeridos, y cobertura del significado global. En el estudio se concluye que el currículo de bachillerato mexicano presenta una fuerte tendencia hacia la algebrización del concepto derivada, con escasa integración de contextos significativos y múltiples representaciones, lo que limita la comprensión profunda de tal objeto matemático. El resultado destacable radica en que esta investigación ofrece criterios operativos, tanto para diseñadores curriculares como para formadores de profesores y docentes en ejercicio, promoviendo una enseñanza más idónea y significativa del cálculo diferencial. Hoy en día los criterios presentados se han adoptado como un tipo de metodología para el desarrollo de análisis curriculares.

Otros trabajos derivados de la colaboración

El modelo de niveles de algebrización desarrollado en la tesis doctoral de L. Aké ha tenido proyección en varias investigaciones posteriores. En el marco de un proyecto financiado, ese modelo fue usado para el diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental (Godino, Aké et al., 2015). En dicho trabajo se elaboró un sistema de categorías de conocimientos algebraicos

que tiene en cuenta las estructuras, funciones y modelización, así como categorías de conocimientos didácticos (facetas epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica). Asimismo, se describe y analiza una colección de tareas que componen el cuestionario, informando sobre la validez de contenido.

Más recientemente Burgos et al. (2024) han elaborado una versión ampliada del modelo de niveles de algebrización propuesto en el marco del enfoque ontosemiótico, estableciendo subniveles que ofrecen una visión más microscópica de las estructuras involucradas y los procesos de generalización, representación y cálculo analítico implicados. Ejemplifican el modelo con actividades matemáticas que pueden abordarse desde la educación primaria, clasificadas según los diferentes subniveles de algebrización. El uso de este modelo ampliado puede facilitar el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático del profesorado en formación sobre razonamiento algebraico y su enseñanza.

El modelo de conocimientos didáctico-matemáticos basado en el EOS (modelo CDM) ha sido ampliado en Pino-Fan et al. (2023) mediante la creación de una macro herramienta para caracterizar y desarrollar competencias clave para la práctica del profesor de matemáticas. En este artículo, se describe el modelo de conocimientos didáctico-matemáticos como una alternativa teórico-metodológica que permite tanto el análisis como el desarrollo de conocimientos y competencias esenciales para el ejercicio profesional docente. Además, se profundiza en una propuesta de categorías y subcategorías de competencias profesionales necesarias para la docencia, lo que permite una integración explícita entre las nociones de conocimiento y competencia docente.

Reflexiones finales

En este capítulo hemos descrito un recorrido dual que evidencia la colaboración entre Juan D. Godino (SEIEM) y L. Aké y Luis R. Pino-Fan (SOMIDEM), en el seno del grupo de trabajo sobre el Enfoque Ontosemiótico. Dicha colaboración ha permitido, por un lado, el desarrollo de dos líneas de investigación robustas y complementarias, ofreciendo herramientas concretas para la mejora de la enseñanza de las matemáticas y la formación de profesores. Por otro lado, y de la mano del desarrollo de estas dos líneas, se muestra el proceso de formación inicial de dos investigadores en educación matemática que se caracteriza por la incorporación de los estudiantes dentro de un equipo de investigación consolidado. En este caso, en el Grupo de investigación FQM-126, Teoría de la educación matemática y educación estadística, coordinado por J. D. Godino y C. Batanero, se estaban desarrollando varios proyectos de investigación financiados por organismos regionales (Junta de Andalucía) y nacionales (Ministerio de Investigación y Desarrollo). En consecuencia, era razonable, incluso necesario, que los

proyectos de investigación de los estudiantes de maestría y doctorado estuvieran enmarcados dentro de proyectos de investigación en curso. Cuando L. Aké fue aceptada como estudiante de posgrado ya se estaban realizando investigaciones previas sobre razonamiento algebraico en el seno del Grupo de investigación, como es la tesis doctoral de Castro (2011), lo cual permitió apoyar la redacción del proyecto en dichos trabajos. El trabajo previo sobre categorías de conocimientos didáctico-matemáticos en el marco del EOS (Godino, 2009) sirvió de apoyo para enfocar la tesis de L. Pino-Fan, en este caso, con la codirección del Dr. V. Font, quien había realizado su tesis doctoral sobre la enseñanza de la derivada en bachillerato en la Universidad de Barcelona.

La participación como colaboradores científicos de L. Aké y L. Pino-Fan en los proyectos de investigación en curso les permitió integrarse dentro de los respectivos equipos, compartir ideas y colaborar en diversas publicaciones conjuntas, lo que contribuyó no sólo a desarrollar y consolidar las líneas de investigación descritas, sino también a iniciarse y consolidarse, hoy en día, como investigadores de reconocimiento internacional en el área de la Educación Matemática.

Referencias

- Aké, L. P. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación* [Tesis doctoral, Universidad de Granada].
<http://hdl.handle.net/10481/31332>
- Aké, L., & Godino, J. D. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación Matemática*, 30(2), 171–201. <https://doi.org/10.24844/EM3002.07>
- Aké, L., Godino, J. D., Fernández, T., & Gonzato, M. (2014). Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 5, 25–48.
<https://doi.org/10.35763/aiem.v1i5.70>
- Aké, L., & Páez, D. (2024). Hacia una caracterización de la competencia algebraica en la formación de profesores. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 18(3), 223–253. <https://doi.org/10.30827/pna.v18i3.26260>
- Ball, D. L., & Even, R. (2008). *The professional education and development of teachers of mathematics: The 15th ICMI Study*. Springer.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education* (pp. 5–21). Springer.
- Burgos, M., Tizón-Escamilla, N., & Godino, J. D. (2024). Expanded model for elementary algebraic reasoning levels. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(7), em2475.
<https://doi.org/10.29333/ejmste/14753>

- Cai, J., & Knuth, E. (2011). *Early Algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Springer.
- Carraher, D. W., & Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, pp. 669–705). Information Age Publishing, Inc. y NCTM.
- Castro, W. F. (2011). *Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores* [Tesis doctoral]. Universidad de Granada.
- Chapman, O. (Ed.). (2020). *International handbook of mathematics teacher education* (2nd ed.). Brill.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 5(20), 13–31.
- Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw Hill-Aula Magna.
<https://hdl.handle.net/10481/93596>
- Godino, J. D., Aké, L. P., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A. Blanco, T. F., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. L., & Wilhelmi, M. R. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(1). 127–150.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1468>
- Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebraización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1). 199–219. <https://doi.org/qhwt>
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.
- Godino, J. D., Castro, W., Aké, L., & Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática - BOLEMA*, 26(42B), 483–511.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Font, V. & Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. AIEM. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 63–83. <https://doi.org/qhvw>
- Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S., & Lasa, A. (2015). Niveles de algebraización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117–142. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105>
- Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton, (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Routledge.

- Kaput, J., & Blanton, M. L. (2000). *Algebraic reasoning in the context of elementary mathematics: Making it implementable on a massive scale*. University of Massachusetts - Dartmouth.
- Kieran, K. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 707–762). Information Age Publishing, Inc. y NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NTCM.
- Pino-Fan, L. (2013). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. <http://hdl.handle.net/10481/29940>
- Pino-Fan, L. R., Castro, W. F., & Font, V. (2023). A macro tool to characterize and develop key competencies for the mathematics teacher's practice. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 21(5), 1407–1432. <https://doi.org/10.1007/s10763-022-10301-6>
- Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D., & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *PARADIGMA*, 34(2), 123–150.
- Pino-Fan, L., Font, V., Gordillo, W., Larios, V., & Breda, A. (2018). Analysis of the meanings of the antiderivative used by students of the first engineering courses. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(6), 1091–1113. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9826-2>
- Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA*, 36(1), 87–109.
- Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141–178.
- Pino-Fan, L. Godino, J.D., & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (Parte 1). *REVEMAT*, 8(2), 1–49.
- Pino-Fan, L. Godino, J.D., & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (Parte 2). *REVEMAT*, 8(Ed. Especial), 1–47.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *Boletim de Educação Matemática - BOLEMA*, 29(51), 60–89. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-0000-0>
- Wood, T. (Ed.). (2008). *International Handbook of Mathematics Teacher Education*. Sense Publishing.

Anexo 1

Principales publicaciones de L. Aké y número de citas.

Referencia	Número de citas
Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. <i>Enseñanza de las Ciencias</i> , 33(1), 199–219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965	303
Godino, J. D., Castro, W., Aké, L., & Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. <i>Boletim de Educação Matemática - BOLEMA</i> , 26 (42B), 483–511. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200005	141
Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S., & Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. <i>Avances de Investigación en Educación Matemática</i> , 8, 117–142. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105	135
Godino, J. D., Aké, L. P., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A. Blanco, T. F., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. L., & Wilhelmi, M. R. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. <i>Enseñanza de las Ciencias</i> , 33(1), 127–150. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1468	53
Aké, L. P. (2013). <i>Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación</i> . [Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada]. http://hdl.handle.net/10481/31332	68
Aké, L., Godino, J. D., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2013). Proto-algebraic levels of mathematical thinking. In Lindmeier, A. M., & Heinze, A. (Eds.). <i>Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education</i> , Vol. 2, pp. 1–8. Kiel, Germany: PME.	45
Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M., Aké, L. P., Etchegaray, S., & Lasa, A. (2015). Algebraic reasoning levels in primary and secondary education. <i>CERME 9: Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education</i> .	41

Anexo 2

Principales publicaciones de L. Pino-Fan y número de citas.

Referencia	Número de citas
Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflections and assessment on teaching practice. <i>EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education</i> , 1893–1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a	395
Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. <i>PARADIGMA</i> , 36(1), 87–109.	363
Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L.R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. <i>Boletim de Educação Matemática - BOLEMA</i> , 32 (60), p. 255–278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13	340
Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. R. (2017). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. <i>International Journal of Science and Mathematics Education</i> , 17, 153–172. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6	231
Pino-Fan, L., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. <i>EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education</i> , 11(6), 1429–1456. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a	208
Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. <i>Educação Matemática Pesquisa</i> , 13 (1), 141–178.	190
Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. <i>Journal of Mathematics Teacher Education</i> , 21(1), 63–94. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8	183