

Recomendaciones para promover la modelación en el aula: cerrando la brecha entre investigación y práctica

Verónica Vargas-Alejo¹ y Luis E. Montero-Moguel²

RESUMEN

La modelación es una tendencia internacional en la educación matemática cuya inserción en el aula requiere de atención debido a la escasez de recursos para que los profesores utilicen los resultados de las investigaciones empíricas para impulsarla. Este capítulo, fundamentado en la Perspectiva de Modelos y Modelación, tiene como objetivo presentar cinco recomendaciones respaldadas por investigaciones empíricas para que los profesores puedan impulsar la modelación en su entorno educativo. Se reporta el estudio de caso cualitativo de un profesor de matemáticas de nivel superior en su primer curso de modelación matemática, el cual se basó en las cinco recomendaciones para la implementación de MEAs en el aula, descritas en este estudio. Los resultados del estudio de caso revelaron que estas recomendaciones permitieron al docente reflexionar y cambiar ideas iniciales sobre el tipo de problemas, sus ambientes de resolución y los procesos de evaluación.

PALABRAS CLAVE

Modelación, modelos, Profesores, MEAs, Conocimiento matemático.

¹ veronica.vargas@academicos.udg.mx
Universidad de Guadalajara
<https://orcid.org/0000-0002-7431-0568>

² luis.monteromoguel@utsa.edu
The University of Texas at San Antonio
<https://orcid.org/0000-0002-9009-1377>

ANTECEDENTES

Este capítulo tiene el objetivo principal de contribuir a la ampliación de herramientas que permitan a los profesores de matemáticas incorporar los hallazgos de las investigaciones en modelación matemática en sus clases mediante la presentación de cinco recomendaciones. Consideramos que este capítulo puede ser útil para los profesores de matemáticas que tienen su primer acercamiento con la modelación matemática. Además, pensamos que puede ser relevante para los formadores de profesores e investigadores debido a la vigente discusión sobre cómo debería ser el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el aula, desde los niveles básicos hasta los niveles superiores, ya que una de las tendencias actuales internacionales que se promueve es la modelación (English, 2021; Garfunkel & Montgomery, 2019; Lesh, 2010; Sevinc, 2021). En esta tendencia se busca cambiar los enfoques memorísticos y algorítmicos, y se promueve una formación de los estudiantes que posibilite el desarrollo no solo de conocimientos, sino también de formas de pensar flexibles para enfrentar los problemas actuales y los retos del futuro incierto. De acuerdo con la “Declaración de Incheon y Marco de acción para la realización del Objetivo de Desarrollo Sostenible 4”, esto es importante en tanto se requiere una educación de calidad que implique que los ciudadanos desarrollen aptitudes, valores, actitudes y conocimientos suficientes para llevar vidas sanas y plenas, para tomar decisiones con ciertos fundamentos, y para hacer frente a los desafíos de orden local y mundial (Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura, 2016).

Algunas preguntas clave abordadas en varias investigaciones (Ärlebäck & Doerr, 2018; English, 2021; Garfunkel & Montgomery, 2019; Makar et al., 2020; Montero-Moguel & Vargas-Alejo, 2022) que proponen el uso de la modelación en el salón de clases son: ¿Qué es la modelación? ¿Qué es un modelo? ¿Qué significa incorporar la modelación en el salón de clase? ¿Qué ocurre cuando se incorpora?

Las respuestas a estas preguntas conducen a reflexiones útiles no sólo para investigadores, sino también para docentes interesados en la incorporación de la modelación en el salón de clase.

Otra de las preguntas clave abordadas es ¿con qué tipo de situaciones problema o actividades puede incorporarse la modelación? Lesh y Doerr (2003) y Lesh (2010) han encontrado que el uso de situaciones problemas no triviales es el eje central para generar ambientes de modelación. Estas situaciones problema (denominadas MEAs por sus siglas en inglés: *Model Eliciting Activities*) deben ser cercanas a la vida real y poseer ciertos atributos. Las investigaciones en torno a la modelación matemática han destacado que los estudiantes, al estar expuestos a problemas no triviales, con frecuencia crean, extienden significativamente, revisan o refinan sus formas de pensar

(Lesh & Doerr, 2003) a través de uno o más ciclos de modelación. Durante este proceso, los estudiantes matematizan y se ven inmersos en ambientes donde es importante justificar, argumentar y tomar decisiones para elegir el o los modelos que ofrezcan las mejores respuestas para un cliente.

A pesar de los hallazgos y la relevancia de la modelación matemática descrita por las investigaciones, existen “barreras y desafíos fuertes que deben superarse si queremos asegurarnos de que los modelos y la modelación tengan un lugar y un papel adecuados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en aulas ordinarias en todo el mundo” (Niss & Blum, 2020, p. 3). Dentro de estos desafíos destaca el proveer a los profesores con herramientas que les permitan realizar cambios profundos en sus prácticas para que impulsen la creación de ambientes de modelación en el aula que contribuyan al desarrollo del conocimiento matemático (y multidisciplinario) y habilidades de los estudiantes. Las investigaciones en torno a la modelación matemática (e.g., Montero-Moguel et al., 2020; Corum & Garofalo, 2019) demuestran que el desafío es mayor cuando los profesores tienen su primer acercamiento a la modelación matemática.

Aunque se han realizado investigaciones en el ámbito de la modelación matemática, Niss y Blum (2020) destacan que persisten problemas en la disponibilidad de recursos para los profesores y en la inclusión de secciones de modelación en los libros de texto. Además, existe una brecha entre las investigaciones empíricas y la formación docente. Por lo tanto, con la finalidad de contribuir en la reducción de esta brecha, el presente capítulo proporciona a los profesores de matemáticas recomendaciones para que puedan tomar la iniciativa de fomentar la modelación en su entorno educativo.

Este capítulo fue estructurado en tres secciones fundamentadas en investigaciones empíricas de la Perspectiva de Modelos y Modelación [MMP por sus siglas en inglés: *Models and Modeling Perspective*]. La primera sección aborda los fundamentos teóricos de la MMP con el objetivo de generar una reflexión profunda sobre la modelación matemática.

La segunda sección está compuesta por *cinco recomendaciones para la implementación de las MEAs en el aula*, cuidadosamente estructuradas, que ofrecen iluminación sobre el primer acercamiento de los profesores a la modelación matemática: 1) análisis curricular previo a seleccionar las MEAs, 2) diseño o selección de las MEAs para el aula, 3) adaptación de la MEA al contexto de los estudiantes, 4) recursos para la implementación en el aula, y 5) evaluación de los modelos que emergen al resolver las MEAs. Finalmente, reportamos el estudio de caso de un profesor de matemáticas del nivel superior en su primera experiencia en un curso de modelación matemática, el cual se basó en las *cinco recomendaciones para la implementación de las MEAs en el aula*, incluidas en este capítulo.

MARCO TEÓRICO

Este capítulo utiliza como marco teórico la perspectiva de modelos y modelación. La MMP plantea que aprender matemáticas puede describirse como un proceso no lineal de desarrollo de sistemas conceptuales o modelos que se modifican de manera continua durante la interacción de un individuo o estudiante con sus compañeros o maestros al resolver una situación problema (Lesh, 2010).

Los modelos son sistemas conceptuales (que consisten en elementos, relaciones y reglas que gobiernan las interacciones) expresados mediante el uso de sistemas de notación externa, y utilizados para construir, describir, o explicar los comportamientos de otros sistemas –de tal forma que el otro sistema pueda ser manipulado o predicho de manera inteligente.

Un modelo matemático se enfoca en las características estructurales (más que, por ejemplo, en las características físicas o musicales) de los sistemas relevantes. (Lesh & Doerr, 2003; p. 10)

Las observaciones que hace un individuo de su entorno están influidas por sus teorías, ideas y experiencias, que a su vez estructuran ese entorno en modelos. Es decir, los individuos pueden identificar aspectos, organizarlos y estructurarlos. Modelar es mapear de un sistema a otro con el objetivo de describir, explicar o predecir algún fenómeno. En este proceso de modelación se consideran sólo algunas características del fenómeno en estudio, es decir, se simplifican o distorsionan algunos aspectos, mientras se mantienen otros que se pueden manipular para apoyar la explicación, descripción y predicción del fenómeno. En términos de Brady y Lesh (2021), “modelar es desarrollar innovaciones conceptuales en respuesta a las necesidades que impone el mundo; el resultado (un modelo) es una forma de pensar sobre ese mundo, que posibilita la interpretación y la acción” (p. 96).

La MMP propone el uso de la modelación en el aula, con los siguientes objetivos: a) que los estudiantes desarrollen conocimiento a través de la construcción de modelos y b) fomentar la práctica de la modelación. Propone crear experiencias en el salón, que más que copias de las actividades que hacen los profesionistas, propicien aspectos claves de la futura práctica profesional de los estudiantes (Lesh, 2010). Busca que “en apoyo al aprendizaje en el aula a través de la modelación, los maestros y los investigadores en la MMP se comprometan en una forma específica de modelación de segundo orden: a crear ambientes educativos que promuevan los modelos y la práctica de modelación” (Brady, 2018, p. 45).

La MMP propone el uso de MEAs, que son actividades que contienen situaciones problema cercanos a la vida real (Lesh, 2010). Se diseñan para que los estudiantes reconozcan la necesidad de desarrollar algún tipo específico de modelo matemático y para revelar su pensamiento durante el proceso de resolución; demandan la construcción de modelos y no sólo respuestas puntuales a preguntas específicas: “involucran herramientas concep-

tuales compartibles, manipulables, modificables y reutilizables para construir, describir, explicar, manipular, predecir, o controlar otros sistemas matemáticamente significativos” (Lesh & Doerr, 2003, p. 3).

Tabla 1

Seis principios de diseño para las MEAs

Principio	Cómo saber que el principio se cumple y cómo promueve la evolución
Principio de significado personal	Los estudiantes dan sentido a la tarea, la perciben como significativa y recurren a sus propias experiencias de la vida real para resolverla. Esto asegura que los grupos de estudiantes traigan diversas perspectivas.
Principio de autoevaluación	Los estudiantes juzgan sus soluciones en proceso por sí mismos al evaluar qué tan útiles son para el “cliente” de la MEA en lugar de preguntarle al maestro u otra “figura de autoridad”. Las necesidades del cliente representan un mecanismo de selección que asegura la supervivencia de las ideas más viables.
Principio de construcción del modelo	Los estudiantes articulan un sistema conceptual (modelo) basado en una forma particular de ver la situación problema. En el trabajo en grupo, se ponen en comunicación los modelos de diferentes alumnos entre sí.
Principio de documentación del Modelo	Para mediar en la discusión a nivel de grupo, los estudiantes generan representaciones externas de su pensamiento. Este principio también se refiere a la comunicación y reproducción de modelos.
Principio de generalización del modelo	Los estudiantes muestran cómo generalizar sus soluciones para responder a una variedad de condiciones que el cliente puede enfrentar. Tal modelo ocupa un espacio análogo a un nicho ecológico.
Principio de prototipo simple	La MEA ingresa a la memoria compartida que representa un tipo de estructura matemática y se invoca apropiadamente en la resolución de problemas futuros. Esto asegura la supervivencia y la propagación en escalas de tiempo más largas, análogas a la supervivencia de una especie en evolución.

Nota. Tabla extraída de Brady (2018, p. 46).

Estas actividades posibilitan documentar y evaluar la comprensión conceptual de los estudiantes y, por lo tanto, identificar las fortalezas y debilidades conceptuales. Las MEAs se construyen bajo seis principios de diseño (Tabla 1).

Las MEAs están estructuradas por tres secciones principales: una *nota periodística* para ayudar a los estudiantes a situarse en el contexto del problema que resolverán, *preguntas de calentamiento* que propician la reflexión del contexto, y una *situación problema* que solicita la escritura de una carta con soluciones para un cliente concreto (Lesh et al., 2000). Se necesitan al

menos uno o dos periodos completos de clase, aproximadamente 90 minutos en total, para su resolución.

Las MEAs propician que los estudiantes desarrollen procesos de matematización que implican “cuantificar, dimensionar, coordinar, categorizar, algebrizar y sistematizar objetos, relaciones, acciones, patrones y regularidades relevantes” (Lesh & Doerr, 2003, p. 5). Las respuestas que los estudiantes construyen para las MEAs generalmente involucran el desarrollo de descripciones o explicaciones complejas.

Las descripciones, explicaciones y construcciones no son procesos simples que los estudiantes usan con el propósito de producir “la respuesta” y, no son sólo posdatos que los estudiantes dan después de que la “respuesta” se ha producido. Ellas son los componentes más importantes de las respuestas que se requieren. Así, el proceso es el producto. (Lesh & Doerr, 2003, p. 3)

Al resolver las MEAs, los modelos iniciales que construyen los estudiantes pueden ser inconsistentes o incompletos, pero la revisión y evaluación continua de las ideas permite a los alumnos reflexionar, probar, autoevaluarse, reconstruir y refinarlos. Los modelos se vuelven cada vez más complejos y útiles (Lesh & Doerr, 2003; Makar et al., 2020); es decir, los estudiantes se ven inmersos en procesos continuos de modificación, extensión y refinamiento de ideas para dar sentido a las problemáticas a las que se enfrentan. De tal manera que el desarrollo de interpretaciones involucra una serie de ciclos de modelación.

La MMP plantea que el conocimiento es social, construido por los individuos. Sugiere, por lo tanto, la creación de comunidades donde los estudiantes puedan comunicar sus modelos a otros, analizarlos, discutirlos, negociarlos y evaluarlos; en consecuencia, esto permite la modificación, ampliación y refinamiento de las formas de pensar. Así pues, el uso de MEAs puede contribuir al desarrollo de habilidades fundamentales en la práctica de la modelación, como las consideradas en el siglo XXI: la “comunicación, colaboración, creatividad, pensamiento crítico, toma de decisiones y autorregulación” (Sevinc, 2021, p. 19).

La MMP reconoce la importancia del maestro como facilitador de procesos de modelación mediante el uso de MEAs (Lesh & Doerr, 2003). El maestro es quien puede propiciar entornos colaborativos en el aula donde los estudiantes interaccionan con las maneras de pensar de sus compañeros. Esta interacción posibilita la reflexión y la autoevaluación de las propias formas de pensamiento. Sevinc (2021) señala que los profesores pueden

promover la creatividad de los estudiantes al alentarlos a traer sus perspectivas subjetivas para crear modelos únicos, pero matemáticamente válidos y apropiados para el problema dado en un contexto del mundo real. Además, modelar podría ser visto como una oportunidad de ayudar a los estudiantes a tomar conciencia de su proceso de autorregulación en el cual ordenan gradualmente sus formas de pensar para desarrollar modelos poderosos. (p. 19)

Los alcances mencionados no son una tarea trivial para los profesores. Inclusive, con base en investigaciones en torno a la formación docente en la MMP (Montero-Moguel et al., 2020), se considera que es complejo para un profesor construir MEAs que cumplan con los seis principios de diseño (Tabla 1) cuando no ha tenido acercamiento previo a la MMP.

Con el propósito de orientar a los profesores que desean crear ambientes de modelación en el aula, hemos estructurado cinco recomendaciones que consideramos fundamentales para que los profesores implementen las MEAs. Estas recomendaciones son descritas con detalle en la siguiente sección.

CINCO RECOMENDACIONES PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE LAS MEAs EN EL AULA

En este apartado se describen elementos importantes que pueden apoyar a los docentes para utilizar las MEAs en el aula con el propósito de desarrollar conocimiento y fomentar la práctica de la modelación. Estos elementos se derivan de investigaciones sustentadas en la MMP, realizadas por los autores de este capítulo y llevadas a cabo con estudiantes de bachillerato y profesores. Estos elementos se describen como una serie de recomendaciones ejemplificadas a través de las MEAs que fueron implementadas en diferentes contextos educativos. Cabe destacar que no pretendemos ofrecer una lista exhaustiva de sugerencias ni una descripción detallada debido a las limitaciones de espacio en el documento. Además, no consideramos que estas sugerencias deban seguirse al pie de la letra de manera lineal o paso a paso. Nuestro objetivo es ofrecer sugerencias a los docentes que tengan la intención de diseñar, analizar, implementar y evaluar MEAs para promover la modelación en el aula.

Análisis curricular previo a seleccionar las MEAs

Es importante que el profesor revise y analice los objetivos y metas curriculares del plan de estudios de sus alumnos, del programa del curso, o bien, de una unidad del curso a impartir. Al realizar esta revisión, el docente podrá percibir que los objetivos no se limitan únicamente a la memorización de conceptos y la automatización de algoritmos. Además, identificará, tal como señala Sevinc (2021), la necesidad de fomentar en sus estudiantes el desarrollo de habilidades propias del siglo XXI, tales como la comunicación, la colaboración, la creatividad, el pensamiento crítico, la toma de decisiones y la autorregulación.

Se propone al docente, a partir de recomendaciones de la literatura de investigación (Lesh & Doerr, 2003), que trate de identificar cuáles son las ideas poderosas o ideas integradoras en el currículo escolar, por ejemplo: proporcionalidad, variación, funciones. Enseguida lo exhortamos a que desempaque la red conceptual existente alrededor de esta idea fundamental.

Es decir, sugerimos que el profesor extraiga todos los conceptos inmersos en las grandes ideas. Hemos encontrado que por medio de mapas conceptuales de las grandes ideas los profesores pueden desempaquetar los conceptos inmersos y observar la relación entre ellos.

Diseño o selección de una MEA

Una vez que el profesor identifique las ideas integradoras y los objetivos curriculares de su plan de estudio, programa educativo o unidad del programa, estará en condiciones de seleccionar, adaptar o diseñar una MEA o conjunto de MEAs. También podría armar Secuencias de Desarrollo de Modelos mediante una elección cuidadosa de un conjunto de MEAs (al respecto puede revisarse Lesh, 2010; Makar et al., 2020; Montero-Moguel et al., 2020).

El diseño de una MEA

El diseño puede tomar varias horas porque implica seguir las sugerencias que se describen en los seis principios de diseño de las MEAs (Tabla 1). Un ejemplo de MEA diseñada, así como su análisis en términos de los seis principios de diseño, puede observarse en la Figura 1.

La MEA Deforestación fue diseñada para estudiantes del nivel medio superior, pertenecientes a comunidades cercanas al bosque mencionado. El diseño tomó aproximadamente 80 horas, ya que hubo varias acciones que se tuvieron que realizar, como buscar investigaciones en instituciones que brindaran datos reales. Incluso, se buscó información únicamente registrada en bases de datos gubernamentales. Por otra parte, se hizo un pequeño piloto para identificar si la situación problema planteada tenía potencial matemático. Aunque se implementó con estudiantes y profesores del nivel medio superior, únicamente se publicaron en Vargas-Alejo et al. (2018b) los resultados obtenidos con profesores.

La selección de una MEA

Una alternativa al diseño es elegir alguna de las MEAs existentes y documentadas. Si un docente está promoviendo por primera vez un ambiente de modelación en el aula, sugerimos seleccionar una MEA. Es fundamental tomar en cuenta que la MEA seleccionada esté alineada con los conceptos matemáticos que se desea que los estudiantes profundicen, y que cumpla con el principio de significado, es decir, que esté relacionada con el contexto de los estudiantes.

Los profesores pueden recurrir a MEAs en diversos artículos de investigación (e.g., Årlebäck & Doerr, 2018; Lesh & Doerr, 2003; Makar et al., 2020; Montero-Moguel & Vargas-Alejo, 2022; Vargas-Alejo et al., 2018a), así como a los análisis de los resultados obtenidos al implementarlas. Ade-

más, existen varias bases de datos desarrolladas por universidades de prestigio e investigadores de renombre donde pueden encontrarse MEAs (e.g., <https://bit.ly/3QFPajx>, <https://bit.ly/448hP48>).

Figura 1
Mea Deforestación

Cambios EN MICHIOACÁN

Morelia, Michoacán
Lunes, 7 de agosto de 2017

SECCIONES: Inicio | Michoacán | México | Deportes | Economía | Campus Viviente | Cultura | Internacional

El cultivo de Aguacate

Bosques michoacanos convertidos en cultivo de aguacate 1

Contenido extra

El enfoque 3

Ayúdanos 4

No olvides escribirnos

¿Tu opinión o muy importante? No olvides escribirnos tu carta con posibles propuestas para encontrar solución a las problemáticas aquí planteadas.

Entérate

Morelia, Mich. - En la Meseta Purépecha, de Michoacán se produce el 75 por ciento del aguacate de ese estado y el 65 por ciento de todo el país. Sin embargo, ante la ausencia de una regulación efectiva para delimitar las áreas de conservación forestal, así como de alternativas reales y competitivas para el buen manejo de los recursos forestales, el cultivo de aguacate sigue creciendo de manera desmedida sobre los bosques.

Continúa en la página 2

Morelia, Mich. A 7 de agosto de 2017

AYÚDANOS

(COMUNICACIÓN)

Desde hace varios años, las siembras del aguacate han provocado la deforestación de miles de hectáreas de bosques de pino y encino, según datos oficiales. La desaparición de los bosques purépechas se debe principalmente al crecimiento de la superficie dedicada a monocultivos de aguacate y a la urbanización. Sin considerar la conversión de parcelas que tradicionalmente se destinaban al cultivo de temporal o a la ganadería.

Muchos de los cultivos de aguacate son ilegales. Se cultiva aguacate en zonas boscosas sin permiso de la Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales (Semarnat) para el cambio de uso de suelo. Incluso, algunos incendios forestales son provocados para sembrar aguacates.

El cultivo de aguacate ha traído una serie de efectos sociales positivos y negativos. Entre los positivos destaca, sin duda, el incremento del ingreso en la región por lo bien costado del producto. En tanto a la actividad ha crecido un conjunto de servicios asociados, como empresas de fertilizantes e insecticidas, sistemas de irrigación, servicios agronómicos, etc. Adicionalmente, se ha abierto una fuente de empleo temporal que permite a un importante número de jornaleros ocuparse en la temporada de cosechas; también ha dado lugar al crecimiento de la infraestructura de los pueblos aguacateros en la región.

Sin embargo, los grandes ganadores de la actividad son comunidades familiares ubicadas sobre todo en la ciudad de Uruapan, que controlan, además de importantes áreas de producción, la venta de insumos, el empaque y comercialización de la fruta en el mercado internacional y nacional. Por otra parte, el éxito comercial se ha convertido en una amenaza para los bosques de Michoacán, donde existen algunas de las reservas forestales más importantes del país.

El problema se agrava, porque además el desplazamiento de las superficies boscosas puede tener impacto ambiental sobre la captura y disponibilidad de agua en la región. Otros factores que pueden tener efectos negativos sobre las condiciones ambientales de la zona y sobre el bienestar de su población son el elevado uso de agroquímicos y la demanda de grandes volúmenes de madera para el empaque y transporte del aguacate.

Morelia, Mich. A 7 de agosto de 2017

ENFOQUE

De acuerdo con el texto contesta las siguientes preguntas

¿Qué estado de la República Mexicana es el mayor productor de aguacate?

¿Por qué el cultivo de aguacate afecta los bosques? ¿Cómo afecta el cultivo de aguacate los bosques? O ¿Qué efectos produce en los bosques el cultivo de aguacate?

¿Por qué es importante el cultivo de aguacate?

Vargas, V. & Cossich, C. (2017). El cultivo de aguacate. Recuperado de <https://doi.org/10.24018/2127/2939>

Morelia, Mich. A 7 de agosto de 2017

AYÚDANOS

Yuri, funcionario joven de la comunidad de Tingambato, preocupado por la reciente noticia sobre la pérdida de bosques que ocurre en la Meseta Purépecha, investigó en internet la problemática con el fin de solicitar apoyo para detener la deforestación. Pero, primero se propuso informarse mejor sobre la situación, de manera que ello le permitiera describirla. Su intención es, primero, concientizar a la población y finalmente, conseguir apoyo de toda la comunidad para resolver la problemática. La información que encontró fue la siguiente.

Un estudio realizado por el Centro de Investigaciones en Geografía Ambiental-UNAM, en los municipios de Charapan, Charán, Los Reyes, Nahuatzen, Nuevo San Juan Parangaricutiro, Paracho, Pánuco, Tacámbaro, Tingambato, Uruapan y Zacsacuan muestra cómo se perdieron 20 mil 32 hectáreas de bosques entre 1976 y 2005. Y sólo de 2000 al 2005 esta pérdida se aceleró y adquirió un ritmo de 509 hectáreas por año.

Un periódico de abril de 2017 señaló que cada año se pierden entre 600 y 1000 hectáreas de bosque en todo el estado, según datos gubernamentales del Instituto Nacional de Investigaciones.

En el año 2014 de acuerdo con la Forestal la superficie con bosque (pino, pino-encino y encino) en la Meseta Purépecha era de 147 744 ha. La Meseta Purépecha tiene una extensión territorial de 381 357 ha.

Yuri a partir de esta información, tiene muchas preguntas. Le inquieta saber: ¿cuánto bosque existió en 1976?, ¿cuánto bosque existió en 2005?, ¿cuánto bosque existe actualmente?, ¿cuánto bosque existirá dentro de 10 años? Si el ritmo de pérdida de hectáreas continúa siendo el señalado ¿cuánto dejará la Meseta Purépecha de tener bosques? Yuri considera que el bosque pronto desaparecerá. Sabe que la deforestación está relacionada con el crecimiento del cultivo de aguacate por lo que buscó más información para cotejar o evaluar la veracidad de los datos anteriores. Encontró la siguiente información.

En 1960 no existían monocultivos de aguacate en la meseta purépecha; había variedades criollas que daban cobertura de sombra al cultivo de café. Hacia 1976 calculamos una superficie de agricultura frutícola de 34 606 hectáreas, cuyo cultivo dominante era el monocultivo de aguacate. Has, aunque aún persistían áreas de cafetales. Hacia el año 2000 el cultivo del aguacate domina la superficie frutícola y alcanza las 55 627 ha, y en el año 2006 aumenta aún más hasta las 67 181 ha. El cultivo de huertas de aguacate ha traído profundos cambios.

Becco, basándose en información del censo del aguacate de SAGAR, establece el área cubierta por aguacate en 5 municipios dentro de la Meseta Purépecha en 39 849 hectáreas para el año 1993, mientras que Coria y Martínez, a partir de la interpretación de fotografías aéreas de 1991, obtienen un total de 41 957 hectáreas para la Meseta Purépecha (62 393 para el estado de Michoacán).

Ayúdame a Yuri a encontrar un método o procedimiento para dar respuesta a cada una de sus dudas planteadas. Escribe una carta donde expliques tu procedimiento.

Vargas, V. & Cossich, C. (2017). El cultivo de aguacate. Recuperado de <https://doi.org/10.24018/2127/2939>

Nota: MEA extraída de Vargas-Alejo et al. (2018b).

Adaptación de la MEA al contexto de los estudiantes

Para hacer que la MEA sea significativa y permita a los estudiantes relacionarla con sus propias experiencias de la vida real al resolverla, se sugiere adaptar el contexto si éste resulta demasiado ajeno a ellos. De esta manera, se asegura que los grupos de estudiantes puedan aportar desde diversas perspectivas y construir diferentes modelos siguiendo el principio de significado personal. Una manera de adaptar las MEAs es mediante la incorporación de información proveniente de reportes de investigación, la revisión de periódicos locales y visitas a lugares cercanos a los estudiantes. A continuación se presentan dos ejemplos de adaptación de MEAs.

Carmona (ver en Vargas-Alejo et al., 2018a) hizo una adaptación de la MEA original “Big foot” de Lesh y Doerr (2003) para un curso de profesores y estudiantes de posgrado de Michoacán. La MEA “Big foot” fue diseñada en el contexto de un detective llamado Tom Brown que vive en New Jersey y que desea conocer la altura de una persona que arrojó los bebederos del parque de esta comunidad. La MEA solicita que los estudiantes construyan un procedimiento para estimar la altura de las personas basada en la huella de un zapato. Esta MEA, donde subyace el concepto de proporcionalidad, tiene la estructura general de las MEAs compuesta por tres secciones: *nota periodística del contexto*, *preguntas de calentamiento* y *situación problema*. Dentro de la situación problema de esta MEA se incluye una imagen impresa de la huella del zapato de un jugador real de básquetbol.

La MEA de Carmona (Vargas-Alejo et al., 2018a) titulada “El Gigante bondadoso” está construida en el contexto del bosque de Maravatío, Michoacán. Las modificaciones realizadas fueron construidas sobre datos reales de la localidad de los profesores. En la Figura 2 se muestra la primera sección de la MEA “El Gigante bondadoso” y el ejemplo de la huella incluida en la situación problema (16 pulgadas de largo).

La MEA “El gigante bondadoso” fue readaptada con el propósito de promover el refinamiento de ideas de proporcionalidad de profesores de Guadalajara. El contexto se basó en el parque González Gallo de la Zona Metropolitana. La adaptación de la MEA conservó las tres secciones originales de la MEA “El Gigante Bondadoso”. En la Figura 3 se muestran en orden las tres secciones de la MEA re-adaptada.

La relevancia de los contextos en las MEAs, como ya se mencionó en el principio de significado personal, tiene que ver con el hecho de que los estudiantes le dan sentido a la tarea, la perciben como significativa y recurren a sus propias experiencias de la vida real para resolverla. Los grupos de estudiantes aportan diversas perspectivas para la construcción de modelos. Las investigaciones de Vargas-Alejo et al. (2018a) destacan que al conocer el contexto, los estudiantes tuvieron la posibilidad de entender e incluir más información (cuando así fue necesario) en el modelo; esto les permitió

construir una diversidad de modelos en términos del conocimiento de la complejidad de la situación.

Figura 2

Sección del contexto de la MEA Gigante Bondadoso en el contexto de Michoacán y muestra de la huella de la situación problema

VOZ VIVIENTE

www.campusviviente.org La Voz de la Ciencia para la Comunidad Miércoles, 12 de agosto de 2015

El Gigante Bondadoso

¡Increible descubrimiento en el Parque Alameda la Estación!

Todo Maravatío se moviliza para encontrar a sujeto desconocido.

Maravatío, Mich. - ¡Increible el descubrimiento hecho por Juan Aguirre esta mañana! Juan Aguirre, empleado del municipio de Maravatío, llegó al Parque Alameda la Estación esta mañana para cumplir con sus labores diarias de limpiar las hojas que caen de los árboles y la basura que algunas personas descuidadas dejan tiradas el día anterior.



Parque Alameda la Estación, Maravatío.

“¡No podía creer mis ojos, cuando ví que los juegos del parque estaban completamente arreglados! Todos recién pintaditos. Les quitaron lo oxidado y además aceitaron las cadenas, por lo que los columpios ya no rechinan.” Aguirre comentó al reportar el incidente.

Aguirre venía acompañado de su esposa, Chelita, quien todos los días trabaja en el parque vendiendo tamales. “Mi esposo y yo llegamos siempre al parque entre cuatro y media y cuarto para las cinco, pues mis clientes empiezan a pedirme tamales y atole desde las cinco de la mañana. Mi puesto lo pongo a un lado de las resbaladillas, frente a los columpios, pues no estoy al paso de todos, pero cuando pasan por el parque es fácil que me vean.”

Según Chelita y Juan Aguirre lo que sucedió no tiene precedentes. “Por lo general, la gente de Maravatío es muy amable, pero a la persona que se le ocurrió arreglar los juegos del parque para los niños es realmente bondadosa. ¡Todos en Maravatío tenemos que agradecerle!”

Sin embargo, este agradecimiento tendrá que esperar, ya que la identidad de quien arregló el parque es un misterio. La única pista que dejó son las huellas de sus

zapatos, pues como llovió ayer en la noche, la tierra estaba húmeda y se quedaron marcadas hasta esta mañana.

“Chelita fue la primera que vió las huellas cuando llamamos a las autoridades”, explicó Juan Aguirre. “¡Son enormes!”

En nuestra entrevista, Chelita comentó, “Yo no sé quién habrá sido. Juan se ríe porque le digo que es El Gigante Bondadoso, pues las huellas que encontré son ¡casi el doble de mis pies! Lo que sí es es que todos en Maravatío tenemos que agradecerle. En especial los niños de las escuelas quienes podrán aprovechar los juegos una vez más.”

¡No cabe duda que todo es posible en el Parque Alameda la Estación!



Chicos y grandes, todos agradecidos con El Gigante Bondadoso

Contenidos

1- El Gigante Bondadoso



2- Enfoque



3- Ayúdanos



El Gigante Bondadoso

© Guadalupe Carmona, 2002-2015, basado en Lesh, Hoover & Kelly, 1992



Recursos para la implementación en el aula

Después de diseñar, seleccionar o adaptar la MEA, el profesor debe resolverla para identificar su potencial en cuanto a los conocimientos matemáticos y habilidades que pueden requerirse, así como la práctica de modelación a la que puede dar lugar. Las MEAs, tal como lo mencionan Makar et al. (2020), nos pueden ayudar a: “revelar las ideas iniciales de los estudiantes sobre una situación problema” (p. 147). El análisis del potencial del problema permite al docente planificar sus intervenciones, en caso de ser necesarias, durante el proceso de resolución de la MEA. Además, le permite enfocar su observación en determinados procesos de los estudiantes con el objetivo de conocer las fortalezas y debilidades, tanto conceptuales como en habilidades.

Los docentes, tras resolver las MEAs, expresan preocupación por el hecho de que si el problema les resultó difícil, sus alumnos también tendrán dificultades y necesitarán ayuda para extraer o buscar los datos, las incógnitas y las variables que pueden utilizar, así como las relaciones o conexiones que pueden establecer. Además, señalan que los estudiantes están acostumbrados a buscar respuestas únicas y a ser evaluados en términos de la solución final.

El profesor reconoce el desafío que genera en los estudiantes enfrentarse a situaciones complejas como las MEAs. Por lo tanto, las implementaciones con frecuencia implican que los profesores tengan dudas respecto a cómo generar confianza en sus estudiantes durante el proceso de solución. Con base en las investigaciones se derivan las siguientes sugerencias para ayudar al profesor a enfrentar estos desafíos en el aula.

La diversidad de modelos y la no respuesta única

La diversidad de modelos que emergen se deriva del diseño de la MEA acorde a los seis principios de diseño (Tabla 1). No siempre emerge un modelo único, y ello debe ponerse a discusión, permitiendo que los estudiantes justifiquen y argumenten las decisiones tomadas en cada momento. Ejemplos al respecto pueden verse en Vargas-Alejo et al. (2018a) donde, por ejemplo, los estudiantes generaron modelos basados en proporciones y en proporcionalidad para resolver la MEA Gigante Bondadoso.

Los profesores con quienes se implementó la misma MEA, además de lo mencionado anteriormente, también utilizaron su conocimiento estadístico. Con base en sus creencias mencionaron que posiblemente debía haber sido un hombre, ya que son fuertes y tienen pies más grandes que una mujer.

En la MEA Deforestación, los profesores utilizaron modelos lineales y exponenciales (Vargas-Alejo et al., 2018b). Los modelos construidos fueron elaborados a partir de ciertas suposiciones basadas en el contexto de la situación, los datos y la experiencia personal. El rol del investigador como docente fue sumamente importante para validar estos modelos que emergieron, y para propiciar la evaluación del potencial del modelo tanto en lo

matemático como en términos del contexto de la situación. Se apoyó la existencia de la diversidad de modelos, permitiendo a los profesores justificar y argumentar sus decisiones con base en la interpretación que se hizo de la situación.

Figura 3
MEA Gigante Bondadoso en el contexto del parque González Gallo de Guadalajara

El Informador

Periodismo vezaz

Guadalajara, Jalisco a 23 de febrero de 2018 <https://plus.google.com/u/0/communitas/1001320204402382712939>

El Gigante Bondadoso

¡Increíble acontecimiento en el Parque González Gallo!

Todo Guadalajara se movilizó para encontrar A sujeto desconocido

Contenido extra

El enfoque 3

Ayúdanos 4

No olvides escribirnos

¡Tu aportación es muy importante! No olvides escribirnos tu carta con posibles propuestas para encontrar solución a las problemáticas aquí planteadas

Campus Viviente Jalisco



Increíble...

Guadalajara, Jalisco. - ¡Increíble el descubrimiento hecho por Mario González esta mañana! Mario, empleado del municipio de Guadalajara, llegó al Parque González Gallo esta mañana para cumplir con sus labores diarias de regar plantas y limpiar la basura que algunas personas descuidadas dejan tiradas en el día anterior cuando visitan el bosque.

Continúa en la página 2

Guadalajara, Jalisco a 23 de febrero de 2018



Lo busco, lo busco y no lo busco... por favor, ayúdanos a resolver este enigma




(Continuación)

"No podían creer mis ojos, cuando vi que el área de ejercicios del Parque González Gallo estaba completamente arreglada! Todos estaban bien chicos, recién pintados y arreglados. Trajeron nuevos aparatos, quitaron los que ya estaban deteriorados y reconstruieron. Además, pusieron aparatos para niños y jóvenes con capacidades diferentes."

Mario comenzó a reportar el incidente.

Mario González venía acompañado de un esposo Minerva, quien todos los días trabaja en el Parque vendiendo lonches, dulces y agua. "Ehey... mi esposo y yo llegamos siempre al parque entre cinco y media y cuarto para las seis, pues mis clientes empiezan a pedirme agua desde las seis de la mañana. Mi puesto lo pongo a un lado de donde hay un área de ejercicio, así quienes utilizan los aparatos pueden comprarme agua después de hacer su ejercicio. Es más fácil que me vean y me compren."

Según Minerva y Mario lo que sucedió no tiene precedentes. "Por lo general, la gente de Guadalajara es amable, pero a la persona que se le ocurrió arreglar el área de juegos es realmente bondadosa."

¡Todos en Guadalajara tenemos que agradecerle!"

Sin embargo, este agradecimiento tardará que esperar, ya que la identidad de quien arregló el Parque es un misterio. La única pista que dejó son las huellas de sus zapatos, pues se quedaron marcadas en el suelo hasta esta mañana.

"Minerva fue la primera que vio las huellas cuando llamamos a las autoridades", explicó Mario. "¡son enormes!"

En nuestra entrevista, Minerva comentó: "Yo no sé quien habrá sido. Mario se ríe porque le digo que es El Gigante Bondadoso, pues las huellas que encuentro son ¡casi el doble de mis pies! Lo que sí sé, es que todos en Guadalajara tenemos que agradecerle. Es especial las familias quienes podrán aprovechar el espacio una vez más."

ENFOQUE

Guadalajara, Jalisco a 23 de febrero de 2018

De acuerdo con el texto contesta las siguientes preguntas

1. ¿Qué sucedió misteriosamente en el Parque González Gallo?
2. ¿Qué pista dejó el Gigante Bondadoso?
3. ¿Por qué Minerva le llama al Gigante Bondadoso?

El Gigante Bondadoso, basado en Leish, Hoover & Kelly, 1992

AYÚDANOS

Guadalajara, Jalisco a 23 de febrero de 2018



Huellas del Gigante Bondadoso
Idioma: Dos Miles

Los jóvenes de la Escuela Politécnica U de G, están agradecidos con El Gigante Bondadoso. Sin embargo, quisieran saber la verdadera identidad de esta persona para hacerle un reconocimiento. Por la huella que dejó, esta persona debe tener una gran estatura.

Aquí te presentamos una copia en papel de la huella que encontró Minerva en el Parque. Para encontrar quién es en realidad El Gigante Bondadoso, los estudiantes de bachillerato deben encontrar su estatura.

Escribe una carta a los estudiantes explicándoles un método para encontrar la estatura de una persona si tienes el tamaño de su huella del pie. Este método debe servir para encontrar la estatura del Gigante Bondadoso, pero también la de cualquier otra persona, si conocemos el tamaño de su pie.




El Gigante Bondadoso, basado en Leish, Hoover & Kelly, 1992

Los profesores se dieron la oportunidad de ser creativos al pensar las situaciones problema desde distintos ángulos, y al entender que no siempre puede haber una solución o modelo único. En este caso, los profesores que argumentaron la construcción de un modelo lineal para predecir la desaparición del bosque lo hicieron a partir de que el municipio propusiera reglas y manejara una tala moderada.

La evolución de modelos

La interpretación de la situación problema incluida en una MEA siempre está cambiando y evolucionando durante el proceso de solución. De acuerdo con la MMP, “la modelación implica que los estudiantes expresen interpretaciones matemáticas del problema y patrones en sus estructuras conceptuales con la ayuda de representaciones concretas, simbólicas, verbales, gráficas o pictóricas” (Sevinc, 2021, p. 7). Ejemplos de ello se pueden revisar en Montero-Moguel y Vargas-Alejo (2022) y Vargas-Alejo et al. (2018a), donde se muestra cómo los modelos evolucionaron y se refinaron de acuerdo con la interpretación del contexto, las incógnitas y los datos identificados por los estudiantes. Se puede ver cómo los estudiantes, en la medida que resolvieron el problema, fueron extendiendo, modificando y refinando sus ideas, integrando cada vez más representaciones para presentar al cliente un modelo, al menos situado. Algunos estudiantes lograron construir modelos comparables y reutilizables.

Como sugerencia, para promover la evolución de modelos es necesario que el profesor aprenda a escuchar a los estudiantes para saber plantear las preguntas adecuadas sin dar la solución. Esto le permitirá motivar a los estudiantes para que aprendan a autorregular sus procesos de resolución y autoevaluar “la idoneidad de sus soluciones y artefactos colaborativos en proceso (es decir, modelos emergentes), en lugar de depender de juicios externos o autorizados (maestros) sobre la calidad o utilidad de sus producciones” (Sevinc, 2021, p. 7). El estudiante debe autoevaluar que los modelos sean matemáticamente válidos y apropiados para el problema dado en el contexto del mundo real. Adquirir conciencia del proceso de autorregulación es importante para lograr la modificación, extensión o refinamiento de los modelos a través de la organización gradual de las formas de pensar.

Promover la interacción

Se debe fomentar el trabajo individual, en equipo y la discusión grupal, ya que los estudiantes interactúan a través de los ambientes colaborativos con las diferentes formas de pensamiento de sus compañeros, poniendo a debate sus propias ideas desarrolladas de manera individual o en equipo. Estos ambientes colaborativos permiten la reflexión y autoevaluación de los propios procesos de pensamiento, lo que a menudo conduce a una evolución en la forma de pensar. Para ilustrar este punto, se pueden encontrar ejemplos

en las investigaciones de Montero-Moguel y Vargas-Alejo (2022), así como en Vargas-Alejo et al. (2018a).

Se puede observar cómo los estudiantes modifican, extienden o refinan sus modelos a partir de las discusiones en equipo y grupales. De acuerdo con la MMP, “la modelación requiere que los estudiantes construyan formas de pensar que puedan compartir con otras personas, aplicables en contenidos de problemas similares o isomórficos, y generalizables para su uso en situaciones similares” (Sevinc, 2021, p. 7). Hemos observado que esto se logra al promover la interacción en equipos y en grupo (Montero-Moguel & Vargas-Alejo, 2022; Vargas-Alejo et al., 2018a).

Evaluación de los modelos que emergen al resolver las MEAs

La evaluación de los modelos matemáticos construidos para dar solución a problemas cercanos a la vida real va más allá de decidir si una solución es correcta o incorrecta, pues implica identificar qué tan bien se adapta el modelo a los propósitos que se han definido en la actividad de modelación (Niss & Blum, 2020). Concebir la evaluación como una verificación del modelo al final del proceso enfatiza únicamente las respuestas correctas y soluciones normativas, mientras que, si se considera como una actividad continua, se fomenta la toma de decisiones por parte de los estudiantes (Czocher, 2018). Dentro de la MMP se privilegia todo el proceso de construcción del modelo, por tanto, las evaluaciones de los modelos se consideran como un proceso continuo y dinámico. Las MEAs propician diferentes oportunidades para evaluar los modelos construidos por los estudiantes. En este capítulo nos enfocaremos en dos oportunidades: la autoevaluación y la evaluación externa.

Autoevaluación

Cuando los estudiantes trabajan en equipos para resolver problemas complejos como las MEAs, a menudo se generan choques de ideas debido a las diferentes formas de pensamiento (Lesh et al., 2000). Por lo tanto, es importante que los equipos desarrollen procesos de autoevaluación continua para alinear sus ideas. La autoevaluación durante el proceso de solución de las MEAs implica evaluar y poner a prueba de forma iterativa (i.e., evaluación continua de cada modelo) las diversas opciones de solución que los estudiantes proponen durante la construcción de sus modelos. De esta manera, se pueden desarrollar diferentes ciclos de modelación, lo que les permite construir modelos cada vez más refinados para dar solución a la MEA.

Así, la autoevaluación se convierte en un elemento clave para el éxito de los estudiantes en el trabajo en equipo y en la resolución de problemas complejos. Por medio del proceso de autoevaluación, los estudiantes tienen la oportunidad de:

(a) detectar deficiencias en sus formas actuales de pensar; (b) comparar ideas alternativas y seleccionar las que sean más y menos útiles; (c) integrar las fortalezas y minimizar las debilidades de formas alternativas de pensar; (d) extender o refinar las interpretaciones que son más prometedoras; y (e) evaluar las adaptaciones que se realicen. (Lesh et al., 2000, p. 620)

Este proceso es posible porque las MEAs son construidas bajo el principio de autoevaluación que “significa que el problema proporciona el contexto y la información necesaria para ayudar a los estudiantes a evaluar su progreso mientras trabajan en un problema” (Diefes-Dux et al., 2006, p. 53).

La implementación de la MEA propuesta por Diefes-Dux et al. (2006) describe el proceso de autoevaluación que desarrollaron los estudiantes. La MEA “*Nano Roughness MEA*” solicita a los estudiantes construir un modelo para cuantificar la rugosidad de una superficie metálica a partir de tres diferentes fotografías de diferentes escalas de un microscopio de fuerza atómica. Los estudiantes tuvieron la oportunidad de probar y mejorar sus métodos para medir la rugosidad al utilizar diversas imágenes. Durante este proceso, los estudiantes tuvieron que evaluar si sus métodos eran efectivos en diferentes escalas y decidir si era necesario tomar en cuenta sus variaciones. Además, los equipos de estudiantes debían tomar decisiones sobre cómo abordar estas diferencias de escala en sus modelos (Diefes-Dux et al., 2006).

Evaluación externa

Como se ha mencionado previamente, las MEAs se diseñan para que la construcción del modelo satisfaga las necesidades de un cliente; por lo tanto, la evaluación externa debe generarse desde la perspectiva de este cliente. Es decir, los estudiantes, profesores y/o investigadores asumen el papel de la persona o grupo de personas para el cual fue construido el modelo. Es importante evitar que las MEAs se valoren con “rúbricas de calificación que cambian las reglas del juego al evaluar el trabajo de los estudiantes utilizando criterios que no se comunicaron (explícita o implícitamente) en la asignación de las MEAs” (Lesh, 2010, p. 32). Esta misma obra sugiere centrarse en dos criterios importantes derivados de los principios de las MEAs, el primero es que “las soluciones que son ‘más prácticas’ también deben ser soluciones que involucren el tipo de pensamiento matemático que los investigadores de la MMP están tratando de investigar”, es decir, los conceptos matemáticos inmersos en la MEA; y el segundo “la posibilidad de compartir y reutilizar las herramientas y los artefactos que los estudiantes producen durante los MEAs” (p. 32). Bajo estos dos criterios fundamentales, Lesh (2010) propone la “Guía de evaluación de calidad de las MEAs”, que puede ser revisada en el artículo de Lesh, 2010 (p. 32).

Por su parte, Montero-Moguel y Vargas-Alejo (2022) proponen la “Guía de evaluación de modelos relacionados con el concepto de función [GEMF], la cual permite clasificar el tipo de modelos construidos por los

estudiantes al resolver MEAs que propician la construcción, modificación, ampliación y refinamiento del concepto de función” (p. 226). La GEMF permite identificar el tipo de modelo y el razonamiento covariacional de los estudiantes desde la perspectiva del cliente. Montero-Moguel y Vargas-Alejo (2022) sugieren el uso de esta guía bajo un enfoque dinámico de la construcción de modelos, es decir, analizar los diferentes ciclos de modelación que desarrollan los estudiantes durante el proceso de solución de las MEAs o de las secuencias de desarrollo de modelos.

Los hallazgos de Montero-Moguel y Vargas-Alejo (2022) muestran cómo por medio de la GEMF se pudo identificar que un grupo de estudiantes universitarios “exhibieron ideas de linealidad en sus primeros modelos, los cuales evolucionaron para convertirse en modelos exponenciales; al mismo tiempo, el razonamiento covariacional de los estudiantes se modificó, amplió y refinó a través de distintos niveles” (p. 214) y, además, los modelos fueron herramientas compartibles y útiles para el cliente.

EJEMPLO DE IMPLEMENTACIÓN DE LAS CINCO RECOMENDACIONES: UN ESTUDIO DE CASO

En esta sección presentamos un estudio de caso de un profesor en su primer acercamiento a la modelación matemática. El profesor estaba tomando un curso de modelación que se basó en las *cinco recomendaciones para la implementación de las MEAs en el aula*. El marco teórico que fundamentó este estudio fue la MMP, el cual se describió previamente en este capítulo. La pregunta de investigación que guió este estudio fue la siguiente: ¿Cómo facilitan las cinco recomendaciones para la implementación de las MEAs en el aula el primer acercamiento a la modelación matemática de un profesor?

Metodología del estudio de caso

La metodología para este estudio de caso es descrita en las siguientes secciones.

Diseño del estudio

Para este estudio, se llevó a cabo un enfoque cualitativo mediante un estudio de caso. Esta elección se basó en el interés por obtener un conocimiento profundo de las interpretaciones del profesor seleccionado como sujeto de estudio, considerando la complejidad del contexto (Punch, 2014). Específicamente, se adoptó un enfoque de “estudio de caso instrumental, donde se examina un caso particular para dar una idea de un problema o para refinar una teoría” (Punch, 2014, p. 121). Se seleccionó este diseño debido al interés de analizar a profundidad el primer acercamiento a la modelación de un profesor, con el objetivo de comprender a fondo su enfoque inicial y obtener información que permitiera refinar las ideas y prácticas relacionadas con las *cinco recomendaciones para la implementación de las MEAs en el aula*.

Contexto y participantes

El estudio de caso tuvo una duración de un semestre, el participante seleccionado para el estudio fue un profesor de matemáticas del nivel superior que estaba cursando la Maestría en enseñanza de las matemáticas. El profesor fue seleccionado debido a que expresó que era su primer acercamiento a la modelación matemática. El profesor participaba en un curso sobre modelación matemática impartido por la investigadora principal de este estudio. El curso se basó en *cinco recomendaciones para la implementación de las MEAs en el aula* descritas en este capítulo. Durante el estudio, el profesor impartía un curso de matemáticas a 22 estudiantes de ingeniería de innovación agrícola sustentable; en este grupo de estudiantes se implementó una de las MEAs de forma presencial.

Instrumentos de recolección de datos

Con el objetivo de comprender a profundidad el caso del profesor en su entorno natural, se obtuvieron los datos para este estudio a partir de las interacciones entre el investigador-profesor, profesor-estudiantes y estudiantes-estudiantes. Se recopilaron datos de las grabaciones y transcripciones de las interacciones entre el investigador y el profesor, las notas de campo del investigador, los diarios del profesor y los modelos construidos por los estudiantes para dar solución a las MEAs. Los modelos de los estudiantes se recopilaron a lo largo de todo el proceso de resolución de la MEA, e incluyeron tanto documentos escritos como expresiones verbales.

Procesos de Análisis

Todos los datos recopilados fueron organizados y revisados a detalle por los investigadores. Posteriormente se siguieron las recomendaciones de Richards (2021) para las investigaciones cualitativas que sugiere que los investigadores realicen un trabajo analítico al involucrarse en la interpretación y codificación de los datos a lo largo del proyecto. Para conseguir este objetivo, se desarrollaron dos procesos seriados. En el primer proceso los investigadores fragmentaron, examinaron y compararon la información en busca de patrones, similitudes y discrepancias. El segundo ciclo de codificación se centró en identificar los elementos relevantes relacionados con a) el análisis curricular desarrollado por el profesor, b) selección y adaptación de las MEAs, c) la implementación en el aula, y d) la autoevaluación y evaluación de los modelos de los estudiantes.

Criterios de Validez

Para este estudio se atendieron dos formas de validez propuestas por Richards (2021) para las investigaciones cualitativas. Se empleó *la triangulación de información* al examinar los hallazgos a través de diversas fuentes de evidencia

(previamente descritas). Asimismo, se llevó a cabo *la verificación por pares de la codificación* de la siguiente manera: el primer investigador realizó los procesos de codificación, mientras que el segundo llevó a cabo las revisiones y proporcionó retroalimentación.

RESULTADOS

En esta sección se muestra el seguimiento dado al profesor durante su participación en el curso. Los resultados fueron agrupados en cinco fases que fueron identificadas como relevantes en el análisis del estudio de caso.

Fase 1. El profesor participó en lecturas y discusiones relacionadas con la MMP (e.g., Lesh & Doerr, 2003), las cuales fueron dirigidas por la investigadora principal. Durante las discusiones se plantearon preguntas como: ¿Qué tipo de formación matemática es necesaria para los individuos en esta era? y ¿En qué medida los planes de estudio y curriculum de tus clases de matemáticas aportan para satisfacer estas necesidades? Se presentan en orden las respuestas del profesor a estas preguntas.

Reflexivos, críticos, responsables, trabajar en equipo, capaces de transmitir y aplicar sus conocimientos matemáticos en áreas diversas y el uso de las nuevas tecnologías.

Desde el aula de matemáticas se debe contribuir a la formación de profesionistas competentes, que no solo tengan un cúmulo de conocimientos, sino que tengan capacidad de aplicarlo para resolver problemas de su sociedad.

Fase 2. El profesor, en colaboración con otros cinco profesores de matemáticas, participó en la resolución de la MEA “El Gigante Bondadoso” (Figura 3). Para este estudio se modificó el contexto para hacerlo más cercano a los participantes. La implementación de la MEA fue conducida por la investigadora. Después de resolverla, el profesor hizo las siguientes reflexiones.

Fue una actividad que en la primera leída que le di me pareció muy sencilla de resolver, y aparte me llamó la atención la manera en que estaba presentada, como una noticia de periódico. Sin embargo, al empezar a resolverla pensé en cómo sustentar mi solución, no pude hacer mediciones porque la hice ya por la tarde y no contaba con personas suficientes para tomar medidas de referencia, así que busqué en internet información al respecto con lo que terminé sustentando mi respuesta al problema. A decir verdad, me quedé con dudas sobre si mi procedimiento y solución eran correctos.

Fase 3. En esta fase, el profesor tuvo la oportunidad de seleccionar una de las MEAs del banco de MEAs para implementar con su grupo. Se optó por la MEA “El Gigante Bondadoso”. Sin embargo, se reconoció la necesidad de hacer modificaciones en el contexto, para las que se propuso un parque cercano a la escuela de los estudiantes.

Al periódico con la noticia del Gigante Bondadoso se le cambió el dato del parque con el fin de que les pareciera a los estudiantes un lugar familiar para ellos. En lugar de mencionar el Parque González Gallo, se mencionó la Unidad Deportiva Hugo Sánchez.

Después de llevar a cabo la adaptación, el profesor procedió a planificar la implementación de la MEA. Gracias al análisis previo del potencial de la actividad pudo anticipar posibles intervenciones necesarias durante el proceso de resolución, así como enfocar su observación en ciertos aspectos del desarrollo matemático de los estudiantes. Estos detalles fueron registrados y compartidos durante el curso, como se puede apreciar en el siguiente fragmento incluido en las reflexiones del profesor.

Es importante resolver primero las actividades o problemas antes de implementarlas con los estudiantes. También es importante visualizar los diferentes métodos que los estudiantes puedan llevar a cabo en la resolución, incluso adelantarse a las dificultades que pudieran tener. Eso ayuda a diseñar mejor las MEAs y los problemas a implementar.

Fase 4. El profesor llevó a cabo la implementación de la actividad con su grupo de matemáticas de ingeniería. Durante la actividad, él desempeñó el papel de facilitador y observador. Su observación no se limitó únicamente a los modelos finales, sino que registró y siguió de cerca todo el proceso de construcción. En relación a esto, el maestro mencionó lo siguiente:

La primera reacción de muchos, después de leer [la MEA], fue que no se podía saber con exactitud la altura de la persona, pero que por su huella era muy alto, dedujeron esto al comparar la huella de Minerva y su propia huella con la del gigante. Algunos mencionaron que era obvio, que entre más grande la huella, la persona es más alta, y entre más pequeña, la persona es más bajita.

Un alumno mencionó “el tamaño del pie del gigante es el doble que el de Minerva, así que la estatura del gigante es el doble que la de Minerva”. Asumió que ella tenía una estatura de 1.6 m (la tomó como la medida promedio de las mujeres de su comunidad), y concluyó que el gigante medía 3.2 m.

Otro ejemplo de modelo que el profesor identificó fue el siguiente.

Otros estudiantes, mostraron dificultad para iniciar a resolver el problema, no sabían por dónde empezar, querían que el profesor les dijera como hacerlo, tenían la idea que ya existía un método o fórmula que les ayudara a resolverlo. Así que lo primero que hicieron fue usar sus celulares para buscar en google información de cómo hacerlo.

Luego, en base a la discusión con sus compañeros, pensaron en obtener medidas más precisas, así que midieron con regla el tamaño de su pie y la del gigante para hacer mejor la comparación.

En este momento, los estudiantes compararon sus propias medidas del pie con la del gigante e hicieron una regla de tres. Uno mencionó “mi pie mide 27 cm. y mi estatura es de 1.75 m, así que, como la huella del gigante mide 38 cm, entonces su estatura se obtiene multiplicando 38 por 1.75 y dividiendo ese resultado entre 27, lo cual es igual a 2.46 m”. La mayoría hizo esto mismo, pero con sus propias medidas del pie y estatura.

El profesor también registró la forma de trabajo de los estudiantes.

El trabajo colaborativo fue muy importante para la realización de la actividad, favoreció que surgieran ideas, que se sintieran más seguros para hallar la solución, incluso dio un toque de dinamismo y buen humor a la actividad. Todos participaron y se mostraron con buena actitud.

Figura 4

Sección de nota periodística de la MEA Gigante Bondadoso adaptada de la MEA mostrada en la Figura 3

The image shows a newspaper page layout. At the top, the title "El Informador" is centered, with the subtitle "Periodismo veraz" below it. A grey bar contains the word "Jalisco" on the left and the date "1 de mayo de 2018" on the right. Below this, there are two main content blocks. The first block has a dark header with the title "El Gigante Bondadoso" and a small photo of yellow chairs. The main text reads: "¡Increíble acontecimiento en la Unidad Deportiva Hugo Sánchez!" followed by "¡ se moviliza para encontrar A sujeto desconocido". To the right of this text is a large photo of a red sports facility with a sign that reads "UNIDAD DEPORTIVA HUGO SÁNCHEZ Y CECILIA FLORES GARCÍA". The second block has a dark header with the title "Contenido extra" and a small photo of people. Below it, the text says "El enfoque" and "Ayúdanos". To the right of this text is another large photo of a paved walkway in a park-like setting. At the bottom left, there is a green box with the text "No olvidés escribirnos" and "¡Tu aportación es muy importante! No olvidés escribirnos tu carta con posibles propuestas para encontrar solución a las problemáticas". At the bottom right, there is a large green box with the word "Increíble..." in large white letters, and below it, the text "Increíble el descubrimiento hecho por Mario González esta mañana! Mario, empleado del municipio de Tamazulá llegó a La Unidad Deportiva Hugo esta mañana".

Fase 5. El profesor realizó reflexiones finales sobre la implementación en el aula, abordando aspectos de evaluación importantes. En primer lugar, describió el proceso de autoevaluación que los estudiantes llevaron a cabo durante la construcción de la MEA, así como la autoevaluación final de sus propios modelos. Además, incluyó reflexiones de sus evaluaciones sobre los modelos construidos por los estudiantes. A continuación, se presentan algunos ejemplos que ilustran las descripciones relacionadas con el proceso de autoevaluación durante la construcción de la MEA.

Los estudiantes empezaron a comparar sus resultados y verificar si sus procedimientos y resultados coincidían. Con ello se dieron cuenta que tenían un mismo

procedimiento, pero con resultados distintos, esto porque cada quien estaba usando sus propias medidas y con ellas a través de una regla de tres, deduciendo la altura del gigante. Como era de esperarse las estaturas del gigante que obtenían eran distintas. A pesar de los distintos resultados, algunos dijeron que, aunque eran diferentes las estaturas obtenidas del gigante, con varios de sus compañeros no variaba con muchos cm, así que sus resultados eran aceptables.

Otros estudiantes no conforme con ello [sus modelos iniciales] optaron por establecer una medida promedio para las mujeres y otra medida promedio para los hombres. Dijeron que la estatura promedio de las mujeres era de 1.60 m y la del hombre 1.7 m. también dijeron que la medida promedio del pie de la mujer era de 24 cm y la del hombre 27 cm. Además, asumieron que el gigante bondadoso era hombre así que la mejor estatura para el gigante se obtenía de la siguiente manera: multiplicando 38 por 1.7 y dividiendo el resultado por 27, lo cual daba 2.39 m.

El profesor también incluyó descripciones de la autoevaluación desarrollada por los estudiantes respecto a sus modelos finales, como se menciona a continuación.

Finalmente, la mayoría de los estudiantes dijeron que para calcular la altura de cualquier persona si solo conocían la longitud de su pie, primero necesitaban saber si era hombre o mujer. Si se trataba de una mujer su estatura se obtendría “multiplicando la longitud de su pie por 1.6 y luego dividiendo el resultado por 24”, si se trataba de un hombre, su estatura se obtendría “multiplicando la longitud de su pie por 1.7 y luego dividiendo el resultado por 27”

Por otra parte, el estudiante que había obtenido la estatura del gigante multiplicando por 6 la medida de su pie, empezó a pedir las medidas de los pies de sus compañeros, multiplicarlas por 6 y comparar sus resultados con las respectivas estaturas, se dio cuenta que como con el 80% de sus compañeros su método funcionaba, le quedó claro que para el otro 20% no aplicaba en lo absoluto y consciente de que puede haber un error si se toma la medida de otras personas que no son del grupo concluyó que en general, con cierto error, la estatura de cualquier persona se puede calcular “multiplicando la longitud de su pie por 6”.

Las descripciones del profesor también incluyeron su propia evaluación de los modelos, como se muestra a continuación.

Cabe mencionar, que ninguno [de los equipos] estableció una expresión algebraica para la fórmula obtenida, simplemente la expresaron con palabras y la aplicaron con algunos valores dados a manera de ejemplos.

La realización de la carta fue muy adecuada para fortalecer las habilidades de comunicación, argumentación y ordenamiento de ideas, eso les facilitó poder explicar a sus compañeros sus soluciones.

DISCUSIÓN

Las reflexiones del profesor durante la fase 1 respecto a la formación deseada para los estudiantes coinciden con varios aspectos mencionados por Sevinc (2021), que destacan la importancia de incluir habilidades del siglo XXI, como el pensamiento crítico y la colaboración, en la formación matemática.

Durante la fase 2, al resolver la MEA, el profesor transitó por varios procesos, tal como lo señalan Sevinc (2021) y Lesh y Doerr (2003). Por ejemplo, pasó de ideas o interpretaciones intuitivas a formales cuando le

pareció sencilla la actividad, pero luego se encontró con obstáculos que requerían información adicional para argumentar y respaldar su solución. El profesor identificó la necesidad de matematizar en el sentido de Lesh y Doerr (2003), es decir, de cuantificar medidas de pies, estaturas y establecer relaciones entre ellas, identificar patrones y descubrir regularidades relevantes para resolver el problema. Esta fue la razón por la que consultó internet.

En la fase 3, el profesor tuvo la oportunidad de elegir una MEA para implementar en su salón de clases, pero enfatizó la importancia de hacer modificaciones al contexto. Esto concuerda con el principio de significado personal de la MEAs (Lesh et al., 2000; Lesh & Doerr, 2003) y con la idea de permitir que los estudiantes le den sentido en función de sus propias creencias.

Al realizar su planificación, el profesor tomó en cuenta los procesos que él mismo siguió para resolver la MEA. Como menciona Makar et al. (2020), esto le permitió tener ideas iniciales sobre cómo podrían actuar los estudiantes y qué posibles intervenciones podría llevar a cabo en el aula.

Durante la fase 4, el profesor observó cómo los estudiantes articulaban su sistema conceptual (modelo) basado en su propia forma de ver la situación problema, lo cual está relacionado con el principio de construcción de modelos (Lesh et al., 2000; Sevinc, 2021). Los estudiantes crearon sus propias representaciones externas relacionadas con su pensamiento proporcional y las comunicaron verbalmente tanto dentro de sus equipos como en el grupo, lo que refleja el principio de documentación del modelo (Lesh et al., 2000; Sevinc, 2021). El profesor describió los procesos de solución que evidenciaban ciclos de interpretaciones.

En la fase 5 se observó el principio de autoevaluación (Lesh et al., 2000; Sevinc, 2021), ya que los estudiantes evaluaron sus propias soluciones del proceso, aunque no necesariamente desde la perspectiva del “cliente” de la MEA. Las ideas del docente evolucionaron en relación al tipo de problemas a proponer en el aula, así como a la forma de abordarlos y evaluarlos. Inicialmente, el enfoque del docente en cuanto a evaluación estaba centrado en respuestas únicas, pero esto cambió hacia la evaluación de procesos. El docente evaluó los modelos, señalando el tipo de representación utilizado, en este caso, verbal, para responder a las preguntas del problema. Además, el profesor valoró la importancia de la carta como medio para fortalecer habilidades de comunicación, argumentación y organización de ideas, en línea con las propuestas de Sevinc (2021).

CONCLUSIONES

El análisis del estudio de caso reveló que las cinco recomendaciones facilitaron al profesor revisar y realizar modificaciones en su práctica docente, las cuales resultaron fundamentales al implementar las MEAs en el aula. La

recomendación relativa al análisis curricular fue relevante para que el profesor identificara la importancia de impulsar las habilidades del siglo XXI dentro del currículo de su curso de matemáticas (Sevinc, 2021). Las recomendaciones sobre la selección y adaptación de las MEAs contribuyeron a superar el desafío que enfrentan los profesores para transitar del uso de problemas tradicionales a actividades de modelación. Además, las recomendaciones propiciaron que el profesor asumiera un papel de facilitador al implementar la MEA en el aula, como lo señala la MMP (Lesh & Doerr, 2003; Montero-Moguel et al., 2020). Aunque el proceso de evaluación de modelos por el profesor no fue abordado desde el punto de vista “del cliente”, como sugiere la MMP (Lesh & Doerr, 2003), se identificaron y evaluaron las interpretaciones y el proceso de construcción de éstas por los estudiantes, como parte integral del modelo; es decir, el profesor no se enfocó únicamente en el producto final.

Se pudo observar una notable evolución en las ideas e inquietudes iniciales del docente relacionadas con la modelación matemática en el salón de clase. Principalmente, se destaca un tránsito suave donde el profesor fue refinando sus interpretaciones. Reconocemos que la preparación docente basada en la modelación requiere múltiples ciclos de revisión y refinamiento, sin embargo, los resultados revelan que estas cinco recomendaciones pueden ser una herramienta valiosa para que los profesores utilicen resultados de las investigaciones basadas en la MMP con el objetivo de promover la modelación en el aula.

Dado que sabemos que acercarse a la modelación es un desafío para los profesores (Corum & Garofalo, 2019), en este capítulo se han sustentado cada uno de los elementos de la herramienta brindada. Con ello se busca apoyar la introducción de actividades de modelación en el aula basada en la MMP, específicamente las MEAs, y brindar claridad al profesor en términos de cómo acceder, seleccionar o adaptar las MEAs a su propio contexto, cómo implementarlas y evaluar los resultados. Además, esperamos que los fundamentos teóricos le permitan al docente adentrarse en diferentes conceptos e ideas en las que se han construido las MEAs. Todas las recomendaciones incluidas se basan en hallazgos derivados de investigaciones empíricas de la MMP, por lo que invitamos a los docentes a utilizarlas.

Introducirse a la MMP es un tema complejo que requiere profundidad en diferentes direcciones, por lo que un solo capítulo es insuficiente para desarrollar una comprensión profunda; frente a esto, invitamos a los lectores a ampliar sus conocimientos sobre los fundamentos teóricos de la MMP en Lesh y Doerr (2003). Al igual que el proceso de los estudiantes, sugerimos que el profesor perciba su propio aprendizaje sobre la implementación de las MEAs en el aula como un proceso que será ampliado y refinado a medida que interactúa con sus estudiantes, sus colegas e investigadores.

Las matemáticas traspasan los límites de la disciplina y toman una posición fundamental para que los individuos puedan comprender y generar cambios en los retos reales que enfrenta la sociedad. En consecuencia, la formación en las aulas debe dar a los estudiantes la oportunidad de construir un conocimiento vinculado con los problemas del mundo real. Las investigaciones en torno a la modelación matemática han demostrado que al participar en estas actividades, los estudiantes tienen la oportunidad de describir, predecir y controlar fenómenos en contextos reales (Lesh & Doerr, 2003). Además, las MEAs propician que los estudiantes desarrollen habilidades del siglo XXI como el trabajo en equipo, pensamiento y toma de decisiones (Sevinc, 2021). En consecuencia, resulta crucial fomentar investigaciones futuras que permitan ampliar el conocimiento de la formación docente en el ámbito de la modelación matemática. Es relevante que estas investigaciones propicien la creación de oportunidades y herramientas que permitan a los profesores extraer conocimientos de los documentos de investigación y llevarlos a sus aulas con el propósito de impulsar el desarrollo del conocimiento matemático, estableciendo conexiones entre la realidad y la experiencia en la práctica de modelación.

REFERENCIAS

- Ärlebäck, J. B., & Doerr, H. (2018). Students' interpretations and reasoning about phenomena with negative rates of change throughout a model development sequence. *ZDM*, *50*(1–2), 187–200. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0881-5>
- Brady, C. (2018). Modelling and the representational imagination. *ZDM*, *50*(1–2), 45–59. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0926-4>
- Brady, C., & Lesh, R. (2021). Development in Mathematical Modeling. En J. M. Suh, M.H. Wickstrom, & L. D. English (Eds.), *Exploring Mathematical Modeling with Young Learners* (pp. 95–110). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63900-6_5
- Corum, K., & Garofalo, J. (2019). Engaging Preservice Secondary Mathematics Teachers in Authentic Mathematical Modeling: Deriving Ampere's Law. *Mathematics Teacher Educator*, *8*(1), 76–88. <https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.8.1.0076>
- Czocher, J. A. (2018). How does validating activity contribute to the modeling process? *Educational Studies in Mathematics*, *99*(2), 137–159. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9833-4>
- Diefes-Dux, H., Hjalmarson, M., Zawojewski, J., & Bowman, K. (2006). Quantifying aluminum crystal size part 1: The model-eliciting activity. *Journal of STEM Education*, *7*(1), 51–63. <https://bit.ly/3qCt14n>

- English L. D. (2021). Mathematical and Interdisciplinary Modeling in Optimizing Young Children's Learning. En J. M. Suh, M. H. Wickstrom, & L. D. English (Eds.), *Exploring Mathematical Modeling with Young Learners*. (pp. 3–23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63900-6_1
- Garfunkel, S., & Montgomery, M. (Eds.). (2019). *Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modeling Education*. Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://bit.ly/45t2YCF>
- Lesh, R. (2010). Tools, researchable issues and conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(2), 16–48. <https://bit.ly/3OVZ4LN>
- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought revealing activities for students and teachers. En M. Hoover, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591–645). Routledge. <https://bit.ly/3qxHANq>
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond constructivism: A models & modelling perspective on mathematics problem solving, learning & teaching*. Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781410607713>
- Makar, K., Doerr, H., & DelMas, R. (2020). Developing statistical modeling with paper helicopters. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK–12*, 113(2), 147–151. <https://doi.org/10.5951/MTLT.2019.0243>
- Montero-Moguel, L., Vargas-Alejo, V., & Rodríguez-González, I. (2020). Conceptual system when implementing model-eliciting activities. En A. I. Sacristán, J. C. Cortés-Zavala, & P. M. Ruiz-Arias (Eds.), *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mexico* (pp. 1653–1661). Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. <https://doi.org/10.51272/pmna.42.2020-261>
- Montero-Moguel, L., & Vargas-Alejo, V. (2022). Ciclos de modelación y razonamiento covariacional al realizar una actividad provocadora de modelos. *Educación Matemática*, 34(1), 214–248. <https://doi.org/10.24844/EM3401.08>
- Niss, M., & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. Routledge. <https://bit.ly/3OAmENU>
- Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2016). *Educación 2030: Declaración de Incheon y Marco de Acción para la realización del Objetivo de Desarrollo Sostenible 4: Garantizar una educación inclusiva y equitativa de calidad y promover oportunidades de aprendizaje permanente para todos*. UNESCO. <https://bit.ly/3qyc2XH>
- Punch, K. F. (2014). *Introduction to social research: Quantitative and qualitative approaches* (3a ed.). SAGE. <https://bit.ly/3ODbmYZ>

- Richards, L. (2021). *Handling qualitative data: A practical guide* (4a ed.). SAGE.
<https://bit.ly/3OXw8UI>
- Sevinc, S. (2021). Toward a reconceptualization of model development from models-and-modeling perspective in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 109(3), 611–638.
<https://doi.org/10.1007/s10649-021-10096-3>
- Vargas-Alejo, V., Cristóbal-Escalante, C., & Carmona, G. (2018a). Competencias Matemáticas a través de la implementación de actividades provocadoras de modelos. *Educación Matemática*, 30(1), 213–236.
<https://doi.org/10.24844/EM3001.08>
- Vargas-Alejo, V., Reyes-Rodríguez, A., & Cristóbal-Escalante, C. (2018b). La deforestación como consecuencia del incremento de áreas de cultivo: Actividad Provocadora de Modelos. *Épsilon*, 99, 7–28. <https://bit.ly/45cyipk>

