

Tres estudios sobre el conocimiento y la enseñanza de los números racionales

Three studies on the knowledge and teaching of rational numbers' arithmetic

Bernardo Gómez ¹ 

Olimpia Figueras ² 

Carlos Valenzuela ³ 

María T. Sanz ⁴ 

Resumen

En este capítulo se describen tres estudios en los que se identificaron dificultades enfrentadas por estudiantes de 6 a 17 años de edad al usar los números racionales en la resolución de una diversidad de tareas. En el estudio de la primera etapa de la colaboración entre investigadores de las diferentes instituciones, se caracterizaron mediante un esquema interpretativo, distintos niveles de comprensión de aquellas relaciones que subyacen en las tareas vinculadas con conceptos de razón y proporción. En el segundo estudio se tipificaron estrategias de estudiantes para resolver problemas de división de fracciones asociadas a formas textuales que aparecen en los enunciados, así como a su estructura. Del análisis de las respuestas de los educandos del tercer estudio se derivó el método de lecturas analíticas el cual sirve como herramienta para que los estudiantes desarrollen habilidades para usar los números racionales.

¹ bernardo.gomez@uv.es

Universidad de Valencia (SEIEM)

² figuerao@cinvestav.mx

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (SOMIDEM)

³ carlos.valenzuela@academicos.udg.mx

Universidad de Guadalajara (SOMIDEM)

⁴ m.teresa.sanz@uv.es

Universidad de Valencia (SEIEM)

Palabras clave

Fracciones, números racionales, razón y proporción, lecturas analíticas de problemas multiplicativos.

Abstract

In this chapter a description of three studies is made, in those, difficulties faced by students aged 6 to 17 years when using rational numbers to solve a variety of tasks were identified. In the study of the first stage of the collaboration between researchers from different institutions, different levels of understanding of those relationships that underlie tasks related to concepts of ratio and proportion were characterized by means of an interpretive scheme. In the second study, student strategies for solving problems involving the division of fractions associated with textual forms that appear in the problem statements, as well as with their structure, were typified. From the analysis of the responses of the students in the third study, the method of analytical readings was derived, which serves as a tool for students to develop skills to use rational numbers.

Keywords

Fractions, rational numbers, ratio and proportion, analytic readings of multiplicative problems.

Mirando hacia atrás

El 27 de octubre de 1988, el entonces rector de la Universidad de Valencia, Ramón Lapiedra Civera, firmó un convenio entre esa institución y el Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas con sede en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav), convenio signado el 24 de enero de 1989 por Eugenio Filloy, director del programa.

A partir de ese momento se iniciaron actividades de investigación y formación de recursos humanos entre investigadores del Departamento de Didáctica de la Matemática (DDM) de la universidad española y el Departamento de Matemática Educativa (DME) de la institución mexicana.

Los dos primeros autores de este capítulo empezaron a colaborar desde 1991 y sus interacciones en México y en España se concretaron en proyectos de investigación, trabajos de fin de máster, tesis de maestría y doctorado, la organización de diferentes eventos académicos celebrados tanto en México como en España, así como en la escritura de diversos tipos de documentos para difundir los resultados de los estudios llevados a cabo en ambas instituciones (Puig, 2004, 2017).

Esta colaboración se puede dividir en tres etapas. La primera vinculada con actividades hechas en el contexto del convenio mencionado en el primer párrafo; la segunda iniciada con la firma, el 24 de noviembre de 2004, de un segundo convenio entre el Cinvestav y la Universidad de Valencia, y la tercera que inicia con la integración al equipo de los dos últimos autores

de este capítulo a partir de 2015, con la estancia en el DDM de Carlos Valenzuela¹ –entonces estudiante del Programa de Doctorado del DME–, y en 2017, la de María Teresa Sanz –profesor ayudante doctor del DDM– en el DME². Esta interacción entre los cuatro autores condujo a una colaboración, bajo el convenio existente entre la Universidad de Guadalajara de México y la Universidad de Valencia a partir de 2020. En este capítulo se describen de forma resumida tres aportaciones del grueso de la colaboración llevada a cabo durante más de tres décadas por los autores de este capítulo, cada una de las cuales corresponde a una de las etapas mencionadas.

Las dos primeras aportaciones, dirigidas conjuntamente por los dos primeros autores, se focalizan en la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de número racional. La primera corresponde a un estudio llevado a cabo en el periodo 1996-1997, que tenía por objetivo general contrastar el desempeño de escolares de primaria (6-12 años de edad) de España y México al resolver las mismas tareas relacionadas con los conceptos razón y proporción (ver Fernández et al., 2009). La segunda aportación tuvo como objetivo indagar acerca de las relaciones entre los elementos variables de los problemas multiplicativos escolares de división de fracciones y las variables de resolución observables en las actuaciones de los estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria en España (12-16 años de edad) cuando se enfrentan a este tipo de problemas. El informe de este trabajo se encuentra en la tesis de doctorado de Contreras (2012).

La tercera aportación dirigida principalmente por los dos últimos autores de este capítulo y asesorados por los dos primeros se centró en la resolución de problemas verbales y tenía como objetivo analizar el desempeño de estudiantes de bachillerato (15 a 17 años de edad) al resolver problemas verbales que involucran el uso de las fracciones. Los datos se recopilaron por medio de un cuestionario de lápiz y papel aplicado a educandos de diferentes instituciones de educación media superior en la Ciudad de México. La caracterización de las estrategias empleadas por los estudiantes para resolver los problemas se hizo mediante lecturas analíticas, herramienta metodológica que se describe en la última parte de este documento.

El nexo de unión entre estas tres temáticas se basa en la conexión que existe entre los problemas de multiplicar y dividir con el esquema de proporcionalidad a través de la relación cuaternaria que estructura dicho esquema, lo

¹ Carlos Valenzuela en su estancia en la Universidad de Valencia hizo un Máster en Investigación en Didáctica de las Matemáticas 2015-2016 y contó además con apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

² María Teresa Sanz obtuvo una beca en el marco del programa “Becas Iberoamérica. SANTANDER Investigación, 2017” para una estancia de investigación en el DME y contó también con un respaldo financiero del Ministerio de Ciencia e Innovación a través del programa de investigación EDU2017-84377-R.

que se aprecia claramente en las dos primeras aportaciones. Asimismo, las tres aportaciones descritas se inscriben en la problemática que se enfrenta en la transición del uso de los números naturales al de los números racionales, en particular al de las fracciones, que como se muestra en este documento es un proceso largo con obstáculos que perduran desde que se empiezan a utilizar las fracciones en la escuela primaria hasta los estudios preuniversitarios.

Introducción a la temática

Hay dos cambios principales al avanzar en la aritmética escolar: uno es el paso de la aritmética de los números naturales a la aritmética de los números racionales, y el otro el paso del campo conceptual de la estructura aditiva al campo conceptual de la estructura multiplicativa. Por lo que respecta al primero, el número pasa de ser la expresión de la pluralidad a ser una relación entre la cantidad y la unidad³, relación que involucra al concepto de razón, el cual, algoritmizado por división da lugar al número racional y el razonamiento proporcional. Con respecto al segundo, la enseñanza dota de una perspectiva limitada al campo conceptual multiplicativo, lo que ha producido como resultado que algunos estudiantes sean incapaces de resolver una gran variedad de problemas o cuestiones donde están involucrados los símbolos de fracción.

En la primera mitad de la década de los noventa, período en el cual se inició la colaboración conjunta, los investigadores en aritmética educativa se interesaban por estos dos campos temáticos; en particular por los contenidos matemáticos que se relacionan con la razón y el razonamiento proporcional, por un lado, y con los problemas multiplicativos por el otro.

Competencias en razón y proporción: Estudio de la primera etapa

La investigación sobre las nociones vinculadas al “razonamiento proporcional”, tal como se recoge en la literatura especializada, ha sido diversa tanto en metodologías como en tipos de tareas utilizadas. Algunas de ellas, como las propuestas por Piaget, se han enfocado en caracterizar el pensamiento de los individuos. Otras han puesto énfasis en aspectos como la dificultad relativa de los problemas diseñados para la enseñanza, la influencia del contexto, la complejidad numérica de los datos y el análisis de las estrategias de solución empleadas por los estudiantes.

Como resultado de estas investigaciones, ya se disponía al inicio del trabajo conjunto de un amplio surtido de aportaciones al conocimiento de la

³ “Se entiende por número no tanto una colección de muchas unidades como una relación abstracta de una cantidad cualquiera a otra de la misma especie que se considera como unidad. Según sea esta relación, o comparación con la unidad, se tienen tres especies de número: el entero, el fraccionario y el sordo. El entero está medido por la unidad; el fraccionario por un submúltiplo de la unidad; el sordo es inconmensurable con la unidad...” Newton (1707, p. 2).

comprensión de los estudiantes sobre los conceptos de proporción, razón y proporcionalidad, que dejaba entrever vacíos como, por ejemplo, los que se refieren a lo que ocurría con niños de la edad de los alumnos de la escuela primaria.

Con la intención de cubrir este vacío y avanzar en el conocimiento de lo que ocurre en la franja de edad (6-12 años de edad), se inició en México un estudio de corte cualitativo. Durante el período 1993-96 (ver Gómez, 1996; Jiménez de la Rosa, 1996; Muñoz, 1996) se obtuvo un primer acercamiento a la identificación, categorización y evolución de clases de comportamientos de alumnos de una escuela primaria al resolver tareas que implican cambios cualitativos, aditivos o multiplicativos de tipo proporcional.

Al analizar los datos de esta indagación se articuló un esquema de interpretación de las respuestas de los estudiantes que pasó de un modelo de descripción de conductas aisladas a otro de agrupamiento de tipos de comportamientos identificados. Este esquema, que fue pertinente para poder derivar conclusiones y supuestos sobre las tendencias del comportamiento y las competencias de los niños, constituyó el punto de partida del desarrollo de la investigación que se llevó a cabo en España durante los años 1996-97.

Tomando como base los estudios elaborados en México, se planteó continuar la indagación en España, aprovechando el mismo cuestionario para hacer un estudio de tipo comparativo. Se pretendía contrastar el desempeño de los niños de ambos países frente a las mismas tareas usadas en el estudio mexicano. La intención era encontrar evidencias que permitieran sustentar o desechar la hipótesis sobre las diferencias en determinados aspectos, tanto de la enseñanza como de las formas de expresión oral y escrita que favorecen diferencias en las competencias manifestadas por los estudiantes en relación con la razón, proporción y proporcionalidad.

Ésta es la parte de la investigación de la que se da cuenta, de modo resumido, en este capítulo. El informe completo se encuentra en Fernández et al. (2009).

A continuación, se hace una descripción de las tareas que constituyen los cuestionarios, el esquema de interpretación y clasificación de las actuaciones de los alumnos, así como resultados de la comparación entre los obtenidos en los dos estudios llevados a cabo en España y México.

El cuestionario

Para la observación del desempeño de los alumnos se utilizó una metodología de 'análisis de tareas', la cual está ligada al uso de técnicas de clasificación de los datos observados sobre sus estrategias de resolución. Con esta metodología lo que se pretende es obtener información de tipo cognitivo y meta-cognitivo de las actuaciones individuales observables de los estudiantes al

responder a tareas específicas que son propias de los temas incluidos en los currículos respectivos.

En el análisis de tareas juega un papel central el cuestionario de lápiz y papel para la obtención de resultados empíricos conducentes a la identificación de los métodos, estrategias de resolución, y/o errores que se desprenden de las respuestas de los estudiantes.

Una fase posterior sirve para establecer niveles de dificultad asociados a las tareas propuestas, para describir limitaciones en la comprensión del conocimiento matemático, para identificar perfiles de estudiantes, o para la elaboración de modelos teóricos explicativos de las actuaciones observadas.

Para tal fin se diseñó un cuestionario de lápiz y papel con tres tipos de tareas: el primero tiene que ver con los procesos comparativos en situaciones de variabilidad o variación (co-variación, comparación parte-todo, comparación cualitativa de escalas), el segundo se relaciona con conceptos de proporcionalidad simple (valor perdido), y el tercero corresponde a relaciones de proporcionalidad compleja (comparación de razones). Algunas tareas se diseñaron con modalidades de dificultad creciente para adaptarlas a los distintos ciclos educativos (primer ciclo –1er y 2do grados–, segundo –3er y 4to grados–, y tercero –5to y 6to grados– de educación primaria).

Esos tres tipos de tareas se corresponden con conocimientos y procesos asociados a los conceptos de razón y proporción que pueden considerarse como una jerarquía vinculada a etapas de complejidad gradual con referencia a contenidos matemáticos de los diseños curriculares de la educación primaria.

Para el diseño se adaptaron tareas ya utilizadas en la investigación precedente. Lo que interesó de éstas fue su potencialidad para obtener evidencias de la competencia de los estudiantes para comprender y resolver situaciones de fenómenos asociados a procesos de cambio, regularidades, razón y proporción. También interesaba identificar dificultades que explican su falta de competencia cuando intentan resolver esas situaciones. Las tareas se describen a continuación.

1. Las situaciones Zapatos, Trenes y Casas, Collares y Sucesiones comparten una estructura basada en la variación conjunta correlativa, lo que implica que, para responder adecuadamente, es necesario establecer una comparación cualitativa. En particular, Casas-collares-sucesiones se planteó en tres versiones distintas, una para cada ciclo escolar, en todas se solicita al estudiante identificar una regularidad en una progresión aritmética y extenderla según la posición del término requerido.
2. Las situaciones sobre Cuadrado y Rectángulo (dos modalidades), Muñecos de alambre (tres modalidades), Perro y Fotografía, corresponden a situaciones en las cuales se requiere hacer una comparación

- de escalas. En las tres primeras se requiere reproducir una figura bidimensional a escala de otra dada; en la segunda el factor de proporcionalidad y la unidad de medida están explícitos en el enunciado. En la cuarta, hay que efectuar una comparación cualitativa, eligiendo entre tres figuras la que es una reproducción a escala de otra dada.
3. La situación Pisos plantea un problema relacionado con el cambio de densidad, específicamente en torno a la relación entre área y población. En ella, se solicita comparar dos razones de densidad no unitarias, verificar su desigualdad y determinar cuál es la menor.
 4. Tesoro y Carreteras (dos modalidades) es una tarea en la que se requiere descodificar una unidad de medida para cuantificar una distancia. En este caso se trata de un mapa en el que se proporciona numéricamente una distancia entre dos lugares y dos líneas segmentadas en un número diferente de tramos todos de la misma medida: una de las líneas representa la distancia que se explicita numéricamente y la otra representa la distancia desconocida por la que se pregunta.
 5. Tazas de arroz y Receta, y Refrescos y Monedas son tareas que corresponden a situaciones en las que hay que encontrar el valor desconocido de una proporción. La primera viene dada mediante un pictograma, la segunda mediante una tabla de datos en forma de matriz y la tercera (dos modalidades: 1er y 2do ciclos, y 3er ciclo) es una situación de regla de tres.
 6. Comunidad Valenciana, Supermercado, Mecnógrafas y Agua de limón corresponden a situaciones de comparación de razones. En las dos primeras se requiere expresar un porcentaje, en la tercera verificar la igualdad de dos razones y en la cuarta determinar la mayor de dos razones, una no unitaria y otra unitaria, asociadas a una mezcla. La solución implica un razonamiento proporcional de tipo inverso: a menos agua, más sabor a limón.

El esquema de interpretación

El modelo de interpretación y clasificación resultó del escrutinio de las respuestas de los alumnos de seis cursos de enseñanza primaria –6 a 12 años de edad– al resolver las actividades del cuestionario de lápiz y papel en las que están involucrados los temas matemáticos: variación, razón, proporción y proporcionalidad.

En el estudio español se partió del modelo utilizado en los estudios mexicanos de los años 1993-1996, y se amplió y modificó para poder clasificar las actuaciones que algunos alumnos tuvieron al resolver algunas tareas que no formaban parte de aquellas identificadas en los estudios citados.

Este modelo de interpretación permitió articular los datos sobre las actuaciones de los estudiantes en cinco categorías. Dichas categorías agrupan

patrones comunes de conducta desde un enfoque relacional y dan cuenta de la percepción que tienen los estudiantes de las relaciones en juego entre los elementos de la información gráfica, verbal o pictórica de la tarea propuesta, y de los aspectos en los que centran su atención para resolverla.

A su vez, estas categorías se subdividen en subcategorías, y éstas en clases, según se profundiza en la apreciación de similitudes y diferencias en las interpretaciones plausibles, tanto de las expresiones escritas por los estudiantes, como de los procedimientos llevados a cabo por ellos.

Sin embargo, en el proceso de análisis de las respuestas de los alumnos españoles, se identificaron algunos comportamientos diferentes a los de los niños mexicanos, y también surgieron otras interpretaciones y manifestaciones de conductas comunes en otros problemas para los cuales no se tenían evidencias. Esta situación requirió efectuar modificaciones al modelo de interpretación, cuyo resultado final se recoge en el siguiente esquema, del cual sólo se describen aquí las categorías, invitando al lector interesado a leer el informe incluido en Fernández et al. (2009).

Categoría 1. Percepción relacional de los elementos de la información. Las respuestas de los estudiantes que se agrupan en esta categoría contienen evidencias sobre el reconocimiento por parte de los niños de: 1.1) algún atributo que permite vincular los datos entre sí, tales como forma y/o tamaño; 1.2) el reconocimiento de reglas de asociación entre elementos de conjuntos que varían correlativamente; 1.3) relaciones parte-todo; o bien 1.4) relaciones numéricas entre cuatro cantidades.

Categoría 2. Identificación de las relaciones apropiadas entre los elementos en juego. En esta categoría se reunieron las respuestas en las que se pusieron de manifiesto algunas de las siguientes características: 2.1) identificación de la relación de cambio y uso parcial de la misma, 2.2) identificación de un patrón o unidad diferente, y 2.3) identificación de un cambio.

Categoría 3. Percepción aislada de elementos de la información. En esta categoría, se incluyen las respuestas en las cuales se encuentran evidencias de que los estudiantes centran su atención en algún(os) componente(s) del enunciado de la tarea que se les propone, ya sea parte de la información gráfica, numérica, o verbal; o bien, en combinaciones de estos tipos de elementos que aparecen en los enunciados de las tareas (Fernández et al., 2009, p. 93). En ella se incluyen las siguientes subcategorías: 3.1) predominio del conteo, 3.2) predominio de una parte del enunciado verbal o gráfico, y 3.3) predominio de la operatividad.

Categoría 4. Descodificación particular del enunciado. Sobre los comportamientos ubicados en esta categoría, se observa que los alumnos hacen una interpretación distinta de la esperada de las relaciones que se enuncian en el problema. Tal vez el enunciado está estructurado de forma que resulta poco usual para los niños, o bien, el contexto no les es familiar.

Estas características promueven respuestas pertinentes que guardan relación con los procesos de decodificación, a través de los cuales algunos estudiantes hacen interpretaciones particulares del enunciado del problema que no corresponden a aquellas que intentó comunicar el autor y que se acercan a lo que la mayoría asocia.

En este tipo de respuestas, las estrategias que usan los estudiantes y las soluciones a las que llegan son coherentes con su particular lectura de las expresiones o términos contenidos en el enunciado. En esta categoría sólo se incluyen dos subcategorías. 4.1) interpretación del enunciado diferente a la esperada y 4.2) medición con instrumentos.

Categoría 5. Respuestas singulares. En esta categoría se encuentran aquellas respuestas que corresponden a: 5.1) identificadas, aunque no pertinente; 5.2) no identificada y 5.3) no contestada.

Algunos resultados

Aunque el estudio de los datos recogidos en Valencia proporcionó un modelo “más fino” para interpretar y clasificar las respuestas de los estudiantes, se puede decir, desde una perspectiva global, que no hay diferencias significativas en cuanto al nivel de éxito.

Comparando por cursos, aparecieron diferencias cuantitativas que inducen a pensar que están relacionadas con el momento en que se estudian los conceptos en cada uno de los dos países. Así, por ejemplo, los datos inducen a pensar que existen diferencias en cuanto a la instrucción en ambos países que se manifiestan en el primer ciclo de la enseñanza primaria en términos cuantitativos y cualitativos, tal vez debido a la distinta escolarización previa (la educación infantil) que se proporcionaba en los dos países en esa época. En los otros dos ciclos tienden a desaparecer las diferencias cualitativas y las diferencias cuantitativas oscilan, según cuál sea la tarea, a favor de una u otra parte de los estudios. Esto nos permite pensar en diferencias en el énfasis que se pone en su tratamiento escolar y no en diferencias de enfoque.

Las respuestas no apropiadas observadas revelaron una problemática ligada a la forma en que los estudiantes de primaria interpretan las tareas de razón y proporción, que está fuertemente interiorizada y que no es de fácil eliminación.

Con la intención de evitar estos efectos no deseados, parece razonable recomendar un cambio en la enseñanza que considere esta información para desarrollar una instrucción más eficaz, insistiendo en aquellos aspectos en donde se esperan respuestas erróneas de los estudiantes, anticipándose a ellas y diseñando estrategias para su corrección. Para ello, las tareas empleadas en el cuestionario utilizado en este estudio pueden usarse en las aulas como actividades de instrucción, y el cuestionario y el modelo de clasificación de actuaciones como herramientas de evaluación.

Los problemas escolares de división de fracciones: Estudio de la segunda etapa

Para el diseño de la investigación que se describe en esta parte del capítulo se partía de la constatación de que la enseñanza de la división de fracciones se orientaba a lo procedimental, poniendo el énfasis en la práctica de la regla del producto cruzado o la inversión de la fracción divisor sobre ejemplos numéricos descontextualizados.

Esta es una perspectiva limitada que se extiende al campo conceptual multiplicativo, produciendo como resultado que algunos estudiantes sean incapaces de resolver una gran variedad de problemas o cuestiones donde están involucrados los símbolos de fracción. De ahí que se planteara como objetivo de la investigación identificar esos problemas o cuestiones e intentar aportar conocimiento que ayudara a explicar la dificultad que enfrentan los estudiantes para reconocer la operación que los resuelve.

Marco teórico

En numerosos informes de investigación se incluyen dificultades que se ha observado enfrentan los niños cuando resuelven problemas escolares⁴ de multiplicación y división con fracciones.

Una de ellas es que el tipo de números usados influye en el reconocimiento de la operación que se elige para resolver un problema verbal multiplicativo, hasta el punto en que los niños cambian de manera de pensar en relación con la operación que se necesita para resolver problemas cuyo contenido es el mismo pero que difieren en los términos numéricos (naturales o racionales) sin que esto les parezca incongruente porque los perciben como problemas diferentes (Bell et al., 1981).

Otra es que los estudiantes evitan sistemáticamente la operación directa de dividir fracciones al resolver problemas y optan por estrategias alternativas, incluso más complejas (Hart, 1980, 1981).

Sinicrope et al. (2002) señalan que las extensiones de las tres interpretaciones usuales (consideradas modelos semánticos en esta investigación) de la división de enteros: partición, medida e inversión del producto cartesiano, no son suficientes para explicar la división de fracciones, “la división como la determinación de una razón unitaria y la división como la inversa de la multiplicación son también importantes interpretaciones de la división de fracciones” (p. 153).

Dado que las interpretaciones de la división están asociadas a enunciados textuales que son los que se usan para definir y explicar la operación, como por ejemplo ‘repartir’ o ‘averiguar cuántas veces cabe’, la afirmación de

⁴ En este documento llamamos problemas escolares a los problemas usados en la enseñanza a lo largo de su larga evolución histórica recogida en libros de texto y manuales escolares.

Sinicrope sugiere que en la división hay otros enunciados textuales que también son importantes y que habría que considerar.

Por otra parte, las investigaciones de Kieren (1980, 1988) y Behr et al. (1983) han puesto a los subconstructos de los números racionales (parte-todo, medida, cociente, operador y razón) como fuente fenomenológica, en el sentido de Freudenthal (1983), para sugerir contextos de enseñanza del mundo real de los números racionales.

La aportación de Vergnaud (1983; 1988), al señalar que el prototipo de la estructura multiplicativa es la relación cuaternaria, devela la conexión que existe entre los problemas de multiplicar y dividir con el esquema de proporcionalidad. Con este esquema la noción de multiplicar se muestra como una relación funcional entre espacios de medida. Un espacio de medida puede considerarse como una estructura con dos elementos básicos: un par formado por un conjunto y una medida (M, x) . Esto determina tres categorías de problemas, según los espacios de medida sean uno (cálculo del escalar o de la medida), dos (isomorfismo de medidas, producto de medidas y proporción múltiple) y tres espacios de medida (función o proporción compuesta). A su vez, la posición del valor desconocido determina cuatro tipos de problemas: multiplicación, cuotición, partición y hallar el cuarto término de una proporción.

Planteamiento de la investigación

En la investigación que se describe en esta parte del capítulo, los datos que se analizan son fracciones y los problemas que se plantean son sobre la división de fracciones. Si bien, de acuerdo con la investigación precedente, es de esperar que los estudiantes enfrenten dificultades en el reconocimiento de la operación que resuelve los problemas y el uso de estrategias alternativas, es poco lo que se sabe acerca de los factores que determinan esas dificultades y comportamientos.

Variables de problema. En los años en que se llevó a cabo el estudio que nos ocupa no se disponía de investigaciones en las que se hiciera un análisis de la gran variedad de problemas escolares de división de fracciones y se categorizaran desde la perspectiva conjunta de las variables de problema: las formas o enunciados textuales que sugieren los subconstructos y contextos fenomenológicos de los números racionales, por un lado, y los tipos de problema que se siguen de la estructura multiplicativa, por otro. Estructura y enunciados textuales son las dos variables de problema que se usan en este estudio para categorizar en clases y subclases los problemas escolares de operación directa de división de fracciones.

Variables de resolución. Por otra parte, tampoco se disponía de estudios en los cuales se caracterizaran las actuaciones de los estudiantes al resolver los problemas de división de fracciones desde una perspectiva conjunta de

las variables de resolución: los algoritmos de la división de fracciones y los comportamientos ya observados en la investigación precedente; a saber: la falta de reconocimiento de la operación de un determinado problema de división de fracciones, evitar efectuar la operación directa para resolver el problema y preferencia por estrategias más complejas. Las estrategias, los algoritmos de división de fracciones y el evitar a hacer la operación, son los valores de la variable de resolución a tener en cuenta para describir el desempeño de los estudiantes al resolver problemas de división de fracciones.

Con base en las aportaciones de la investigación precedente como marco teórico y teniendo en cuenta las variables de problema, se planteó como primera parte de la indagación caracterizar los principales modelos (interpretaciones) de la división de fracciones e identificar y recopilar los tipos de enunciados de los problemas escolares de división de fracciones.

Para esta primera parte se utilizó la metodología de análisis “histórico epistemológico” de los libros de texto y manuales escolares. Con esta metodología se pretende identificar y caracterizar los elementos constitutivos del desarrollo y evolución histórica y curricular de un determinado contenido matemático escolar en diferentes momentos de la historia, con la intención de conocer lo que es o ha sido la práctica real de la enseñanza, ya que esos documentos son los registros disponibles del conocimiento matemático en un momento determinado de la historia.

Como segunda parte, se tomó como objetivo comparar los valores de la variable de problema con los de la variable de resolución observados en las respuestas de una muestra conveniente de estudiantes de secundaria a un cuestionario de lápiz y papel con distintos tipos de problemas de división de fracciones. Para esta comparación se utilizó la metodología del análisis de tareas ya descrita anteriormente.

Para guiar la investigación se formularon varias preguntas e hipótesis, entre ellas las siguientes:

- ¿Cuáles son los tipos de problemas multiplicativos que los estudiantes reconocen como problemas que se resuelven usando una división de fracciones?
- ¿Cómo median los modelos (semánticos) de división y el tipo de números implicados en el problema a la hora de reconocer cuál es la operación que se necesita para resolverlo?
- ¿Cuáles son los algoritmos que usan preferentemente los estudiantes cuando dividen fracciones?

Las hipótesis en relación con esas preguntas fueron:

- Los tipos de problemas que los estudiantes reconocen como aquellos que se pueden resolver con una división de fracciones dependen de su estructura, de las formas textuales incluidas en el enunciado y del tipo de datos.

- Los modelos semánticos de la división y el tipo de datos implicados en los problemas median obstruyendo o favoreciendo el reconocimiento de la operación que es necesario hacer para resolver el problema.
- Los estudiantes, cuando no reconocen que el problema es de división directa, recurren a plantear un esquema cuaternario que conduce a un método reglado (de regla de tres) y a métodos razonados que utilizan estrategias alternativas.

En cuanto a las variables de problema se identificaron los modelos semánticos y formas o enunciados textuales asociados que se encuentran en la Tabla 1.

Tabla 1
Formas textuales más usuales de la división

Modelo semántico	Formas textuales de división de números naturales	Formas textuales de división de fracciones
Partición	Partir o repartir en partes iguales	Repartir la fracción dividiendo en un número fraccionario de partes iguales
Medida	Averiguar cuántas veces cabe el divisor en el dividendo	Averiguar cuántas veces cabe una fracción en otra
Inversión de la multiplicación (aritmética)	Hallar un número entero que multiplicado por el divisor da el dividendo	Hallar una fracción que multiplicada por el divisor da el dividendo
Inversión del factor multiplicativo	Hacer el dividendo tantas veces menor como indica el divisor	Hacer el dividendo tantas veces menor como indica el numerador del divisor y tantas veces mayor como indica el denominador del divisor
Proporción	Valor unitario desconocido: El número que es a la unidad como el dividendo es al divisor Valor unitario conocido: El número que es al dividendo como la unidad es al divisor	

Nota. Elaboración propia.

En cuanto a los problemas, se hizo una búsqueda en los libros consultados que dio lugar a un amplio listado que se depuró al organizarlos en torno a las variables de problema: modelo semántico, estructura y tipo de datos.

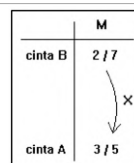
De este listado inicial, de 52 problemas multiplicativos, se extrajo una selección para el cuestionario de lápiz y papel que se aplicó a los estudiantes, atendiendo a que hubiera un representante de cada valor de la variable de problema, estructura y modelo semántico. Se descartaron los problemas correspondientes a la variable de modelo “partición” porque deja de tener sentido cuando el divisor no es natural, y a la variable datos que no fueran de división de fracciones por ser éstos los que interesaban para la investigación. También se descartaron los problemas de regla de tres, los de más de una etapa y los que tienen números mixtos en los datos.

Tabla 2*Problemas del cuestionario, caracterización y esquema de relaciones en juego*

Problema 1. (Las dos cintas) La longitud de la cinta A es $\frac{3}{5}$ m y la de la cinta B es $\frac{2}{7}$ m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

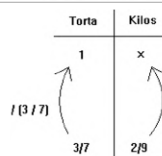
Modelo: Medida. Estructura: Un espacio de medida, cálculo del escalón.

Datos: $\frac{Q}{Q}$



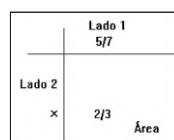
Problema 2. (Peso de la torta) $\frac{3}{7}$ de torta pesan $\frac{2}{9}$ de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?

Modelo: Proporción de valor unitario desconocido. Estructura: Dos espacios de medida, $\frac{E'}{E} = I$. Isomorfismo de medidas. Datos: $\frac{Q}{Q}$



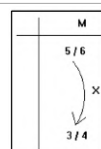
Problema 3. (La mesa de Ana) La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide $\frac{2}{3}$ de m². Sabiendo que uno de sus lados mide $\frac{5}{7}$ de metro, averigua cuánto mide el otro lado.

Modelo: Inversión de la multiplicación-factor perdido. Estructura: Producto de medidas. Datos: $\frac{Q}{Q}$



Problema 4. (Ecuación) Hallar el valor de x en la expresión: $\frac{5}{6} x = \frac{3}{4}$

Modelo: Inversión de la multiplicación-factor perdido. Estructura: un espacio de medida, cálculo del escalón. Datos: $\frac{Q}{Q}$. Descontextualizado



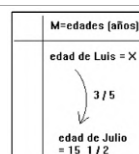
Problema 5. (Tarro de miel) En un tarro de miel caben $\frac{3}{5}$ de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus $\frac{3}{8}$ partes?

Modelo: Medida. Estructura: Dos espacios de medida, Multiplicación con valor unitario conocido. Datos: $\frac{Q}{Q}$

Problema de control: No forma parte de la investigación. Se incluyó en el cuestionario definitivo con la intención de evitar que los estudiantes no consideren que todos los problemas son de división

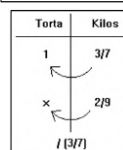
Problema 6. (Edades) Los 15 $\frac{1}{2}$ años que tiene Julio son los $\frac{3}{5}$ de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

Modelo: Inversión de la multiplicación-factor perdido. Estructura: Un espacio de medida M. Cálculo de la medida. Datos: $\frac{Q}{Q}$



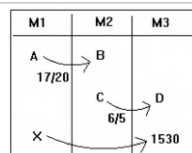
Problema 7. (Porción de torta) 1) $\frac{3}{7}$ de torta pesa $\frac{2}{9}$ de kilo. ¿Cuánto pesa la torta? 2) Si cada torta pesa $\frac{3}{7}$ de kilo, ¿qué porción de torta tendré con $\frac{2}{9}$ de kilo?

Modelo: Proporción de valor unitario conocido. Estructura: Dos, Espacios de Medida. Isomorfismo de M. División con valor unitario conocido. Datos: $\frac{Q}{Q}$



Problema 8. (Trigo) Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los $\frac{17}{20}$ de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es $\frac{6}{5}$ del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan?

Modelo: proporción con valor unitario conocido (alternativamente, inversión de la multiplicación o factor perdido). Estructura: Tres espacios de medida. Función compuesta. Datos: $\frac{Z}{Q}$



Nota. Elaboración propia. El problema 1 es tomado de Yamaguchi y Jwasaki (1999), y los problemas 2 y 7 son tomados de Rey Pastor y Puig Adam (1932, p. 211)

Problemas del cuestionario

En la Tabla 2 se encuentran los problemas considerados en el cuestionario para recopilar los datos de la investigación; en ella se incluyen las características de los problemas considerados, así como los esquemas que muestran las relaciones en juego.

El cuestionario final se aplicó a 21 estudiantes de cuarto curso de la ESO (Educación Secundaria Obligatoria), de 12-16 años, en un instituto público en Valencia. Para el análisis de las respuestas se consideraron como variables de resolución las tres siguientes: esquema, método y algoritmo. Esto conforma una terna que denominamos enfoque y que caracteriza la actuación de cada estudiante.

Algunos resultados

Los estudiantes de este grupo: 1) identifican mejor la división de fracciones con la inversión de la multiplicación o factor perdido, 2) tienen dificultades para identificar la división de fracciones con una proporción, pero parece que reconocen más fácilmente la de valor unitario conocido que la de valor unitario desconocido, y 3) no identifican la división de fracciones con la división medida, ya que en los problemas de medida tienden a dar respuestas aditivas.

Figura 1

Estrategia de resolución de Cristina al problema 1

1 La longitud de la cinta A es $\frac{3}{5}$ m y la de la cinta B es $\frac{2}{7}$ m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

$\frac{3}{5} \text{ m} \rightarrow 0,6 \text{ m}$ $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{21}{35} = \frac{10}{35} = \frac{11}{35}$
 $\frac{2}{7} \text{ m} \rightarrow 0,285 \text{ m}$ $m \text{ cm}(5,7) = 5 \cdot 7 = 35$

La cinta A es $\frac{11}{35}$ veces tan larga como la cinta B.

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y por qué crees que son esas operaciones:

Hay que hacer una resta porque para haya la diferencia entre las dos se hacen las restas. Se saca el mínimo común múltiplo porque no tienen las dos fracciones el mismo denominador y por eso no se pueden restar.

En la Figura 1 se puede ver la resolución de Cristina⁵ al problema 1, este es un ejemplo de una resolución aditiva; a continuación la transcripción de su escritura:

⁵ Los nombres de los estudiantes que aparecen en el documento son pseudónimos para proteger su identidad.

Transcripción:

$$\frac{2}{3} \text{ m} \rightarrow 0'6 \text{ m}$$

$$\frac{2}{7} \text{ m} \rightarrow 0'285 \text{ m}$$

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{21}{35} - \frac{10}{35} = \frac{11}{35}$$

$$mcm(5,7) = 5 \cdot 7 = 35$$

La cinta A es $\frac{11}{35}$ veces tan larga como la cinta B

Hay que hacer una resta porque para hallar [sic] la diferencia entre las dos se hacen las restas. Se saca el mínimo común múltiplo porque no tienen las dos fracciones el mismo denominador y por eso no se pueden restar

Hipótesis 1. La estructura de los problemas condiciona el reconocimiento de la división de fracciones y el enfoque de su resolución.

- En el caso de un sólo espacio de medida, problemas 1, 4 y 6, los enfoques de resolución más frecuentes son: planteamiento y resolución de una ecuación, y división directa.
- Con respecto al isomorfismo de medidas, problemas 2, 5 y 7, el enfoque de resolución más frecuente es el funcional de la regla de tres.

Hipótesis 2. Los modelos semánticos de la división influyen en el reconocimiento de la división de fracciones como método para resolver el problema.

- La división directa predomina en los problemas que corresponden al modelo de medida.
- La regla de tres predomina en los problemas que corresponden al modelo de proporción, independientemente de si son de valor unitario conocido como es el 2, como si son de valor unitario desconocido como son el 7 y el 8. No obstante, los problemas 7 y 8 tienen una estructura diferente. Así, mientras que el problema 7, es de isomorfismo de medidas, el 8, que resultó de gran dificultad para los estudiantes, consta de más de una etapa, y es de tres espacios de medida.
- El método de ecuación predomina en los problemas 3, 4 y 6, que corresponden al modelo de inversión de la multiplicación o factor perdido.

Hipótesis 3. Los estudiantes, cuando no reconocen que el problema es de división directa, recurren a plantear un esquema cuaternario que conduce a un método de regla de tres o a métodos razonados que utilizan estrategias alternativas.

Un ejemplo de estrategia alternativa es la resolución de Estefanía al inciso 1 del problema de la torta que aparece en la Figura 2, la cual se basa en el valor complementario del peso conocido. Estefanía resuelve el problema por etapas. Dado que el total de la torta es $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1$, determina el peso de $\frac{4}{7}$ mediante una regla de tres; en una segunda etapa calcula el peso de la torta entera, sumando los pesos de $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{7}$.

Figura 2*Resolución de Estefanía al inciso 1 del problema 7*

$$\begin{array}{l}
 \frac{3}{7} \text{ de la torta} \rightarrow \frac{2}{9} \text{ kg} \\
 \left. \begin{array}{l} \frac{3}{7} \rightarrow \frac{2}{9} \\ \frac{4}{7} \rightarrow \otimes \end{array} \right\} \rightarrow \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{8}{63} \div \frac{3}{7} = \frac{8}{27} = 0.2962 \text{ kg por los 4 parts del total.} \\
 \frac{8}{27} + \frac{2}{9} = \frac{14}{27} = 0.518 \text{ kg en total por}
 \end{array}$$

Explica cómo lo haces: Por medio de 1 caja de 3 encontramos lo que pesan los $\frac{4}{7}$ y después reparamos los $\frac{3}{7}$ que faltan para así saber el total que pesa toda la torta.

Otra estrategia alternativa consiste en reducir a la fracción unitaria, como se muestra en el ejemplo de Mercé que aparece en la Figura 3. Como puede verse, Mercé a partir del valor del peso de $\frac{3}{7}$ de torta, halla el peso de $\frac{1}{7}$ de torta (dividiendo por $\frac{3}{1}$) y para obtener el peso de toda la torta halla el peso de $\frac{7}{7}$ multiplicando por $\frac{7}{1}$.

Implicaciones para la enseñanza

Es usual en los libros de texto que la división de fracciones se trate siempre de la misma manera, mediante un algoritmo (productos cruzados o invertir y multiplicar) y en situaciones descontextualizadas. De hecho, los problemas multiplicativos suelen aparecer al margen de las unidades didácticas destinadas a las fracciones y son considerados como “una cosa aparte”, lo que hace que pocos estudiantes asocien los problemas multiplicativos con la operación de división directa de fracciones y prefieran transitar por caminos intermedios o alternativos.

Figura 3*Resolución de Mercé al problema 8***2.- TORTAS**1) $\frac{3}{7}$ de torta pesan $\frac{2}{9}$ de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?2) Si cada torta pesa $\frac{3}{7}$ de kilo, ¿qué porción de torta tendré con $\frac{2}{9}$ de kilo?

(Rey Pastor y Puig Adam, “Elementos de Aritmética”, 1932, pgs. 211 y 212).

$$\begin{array}{l}
 1) \quad \frac{3}{7} \rightarrow \frac{2}{9} \quad \frac{1}{7} \rightarrow \frac{2}{9} : \frac{3}{1} = \frac{2}{27} \\
 \frac{7}{7} \rightarrow \times \quad \frac{7}{7} = \frac{2}{27} \cdot \frac{7}{1} = \frac{14}{27} \\
 \text{La torta pesa } \frac{14}{27} \text{ kg} \\
 2) \quad \frac{3}{7} \rightarrow \frac{7}{7} \quad \frac{7}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{14}{63} : \frac{3}{7} = \frac{98}{189} \\
 \frac{2}{9} \rightarrow \times \\
 \text{Tendré } \frac{98}{189} \text{ de torta.}
 \end{array}$$

La confirmación de las hipótesis implica que la enseñanza de los problemas multiplicativos debe tener en cuenta las variables de los problemas y de enseñanza; es decir, del hecho de que los problemas tienen diferente estructura y modelos semánticos y formas textuales asociados, y de que hay diferentes enfoques de resolución, métodos y algoritmos, por tanto, su enseñanza no puede ser igual, sino diferenciada para cada tipo de problema.

Por ejemplo, se debería tener presente que existe una interrelación entre las variables de los problemas, las variables de enseñanza y las variables de resolución. Así, hay que destacar en la enseñanza que problemas con diferente estructura tienen modelos de división asociados distintos y, por tanto, enfoques de resolución también diferentes. Por consiguiente, no puede organizarse la enseñanza asociando el mismo modelo de división ni el mismo enfoque de resolución a problemas con estructuras diferentes.

Mirando hacia adelante: Estudios de la tercera etapa

Con el propósito de considerar algunos de los desafíos identificados en el desarrollo de la aritmética escolar —especialmente en lo referente a la transición del uso de los números naturales al de los números racionales—, en 2015 se dio inicio, como se mencionó al comienzo de este capítulo, a la tercera etapa de colaboración entre los investigadores autores de este texto.

En esta etapa, los autores han colaborado llevando a cabo estudios relacionados con dos líneas principales de investigación y desarrollo. Por un lado, se han hecho indagaciones enfocadas en los números racionales, específicamente sobre las fracciones y la resolución de problemas verbales. Por otro lado, dichas indagaciones han facilitado la integración de tecnologías digitales y el desarrollo de propuestas metodológicas para la resolución de problemas verbales, con el objetivo de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones en diferentes niveles educativos y promover el desarrollo de habilidades en el proceso de resolución de problemas.

Las siguientes secciones contienen resultados derivados de la primera indagación de la tercera etapa, cuyo objetivo fue caracterizar el desempeño de estudiantes mexicanos de bachillerato (15 a 17 años de edad) al resolver problemas verbales relacionados con fracciones. Asimismo, se expone el método de lecturas analíticas y su relación con la resolución de problemas verbales, destacando su uso para analizar los procesos de resolución de un problema, en particular los usados por los estudiantes.

Indagación sobre resolución de problemas con fracciones

El estudio de las fracciones comienza formalmente en la educación básica. En México, España y otros países se inicia la enseñanza de este concepto cuando los niños tienen alrededor de 8 años de edad. Desde entonces, su estudio continúa en el nivel secundario, media superior (bachillerato) y

superior o universitario hasta llegar al conocimiento de los números racionales. Por ello, se espera que al iniciar el bachillerato los alumnos hayan construido conocimiento y desarrollado habilidades específicas y suficientes para ser competentes en actividades en las que las fracciones juegan diferentes papeles. Una de las preguntas que guía esta indagación es: ¿qué conocimiento sobre las fracciones han construido los alumnos de bachillerato que les permite resolver problemas verbales?

Para dar respuesta a la pregunta anterior se diseñó un cuestionario con una serie de problemas en los que se usan fracciones. El cuestionario fue aplicado en diferentes centros educativos de nivel media superior en la Ciudad de México. Parte de los resultados de ese estudio se presentaron en congresos y publicaciones, ver por ejemplo Valenzuela et al. (2022).

En dicha investigación se consideró la aplicación y análisis de tres problemas verbales, y los objetivos fueron: 1) determinar las diferencias por edad y tipo de bachillerato en cuanto al éxito en la resolución de problemas con fracciones, y 2) analizar los procesos de resolución de los estudiantes según el tipo de problema, la edad y tipo de bachillerato.

El tipo de bachillerato se distingue porque en México existen principalmente tres: 1) el bachillerato general, cuyo propósito es preparar a los estudiantes para su ingreso a la universidad, 2) el bachillerato tecnológico que proporciona un certificado en diferentes áreas tecnológicas, y, además, los prepara para su ingreso a la universidad; y 3) el bachillerato técnico profesional proporciona un certificado profesional como técnico.

En el diseño y en el proceso de resolución de un problema verbal se pueden identificar algunas variables, entendidas como las características del problema mismo que pueden influir en el proceso de resolución del estudiante. Puig y Cerdán (1988) identifican tres tipos de variables que pueden ser de interés al tratar con problemas verbales: las variables sintácticas, las de contexto y las de contenido. Para el diseño y caracterización del tipo de problemas verbales que se aplicaron, se tomaron como base los estudios de Gómez et al. (2016) y la caracterización de problemas en un contexto de herencia, en los que cada heredero recibe una porción de una cantidad conocida, o el legado se divide proporcionalmente. El contenido que subyace en ese tipo de problema es referente a la fracción, en particular, según los estudios de Freudenthal (1983) y Kieren (1980) se identifica el uso de la fracción como operador y fracturador. Los problemas que se propusieron se muestran en la Figura 4.

Como puede verse en la Figura 4, los tres problemas (P1, P2 y P3) tienen una estructura similar. Una diferencia es que P2 es de dos etapas, por lo que el proceso de redefinición del todo y el uso de la fracción como operador aparece dos veces. Otra diferencia aparece en P3, en el que se asigna una cantidad a la parte de una parte desconocida.

Figura 4

Problemas propuestos en el cuestionario aplicado a alumnos de bachillerato en México

P1. Un poste está pintado de tres colores diferentes: rojo, azul y negro. La parte negra mide $\frac{1}{3}$ de la longitud del poste, la parte roja mide $\frac{2}{3}$ de la longitud que queda y la parte azul mide 2,70 metros. ¿Cuál es la longitud del poste?

P2. Miguel está jugando a un videojuego. Debe terminar el juego en un tiempo indicado. Juega un tercio del tiempo, pausa el juego y se va a almorzar. Cuando regresa, juega $\frac{1}{5}$ del tiempo que le queda. Después de cenar juega una séptima parte del tiempo que le queda, entonces, aparece en la pantalla un mensaje "quedan 32 minutos". ¿Cuánto tiempo se indicó en la pantalla al iniciar el juego?

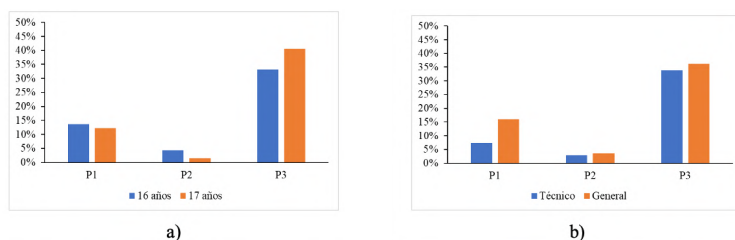
P3. Un ladrón entró en un palacio y encontró una bolsa llena de monedas. La tomó y trató de escapar, pero un guardia le detuvo. Entonces, le ofreció la mitad de las monedas con tal de que le dejara escapar. El guardia le devolvió 80 monedas y le dejó marchar. Pero fue sorprendido por otro guardia, a quien también le ofreció la mitad de las monedas que le quedaban. Cuando el guardia recibió esta cantidad, también fue generoso y le devolvió 50 monedas. Al final el ladrón sale del palacio con 200 monedas en la bolsa. ¿Cuántas monedas había en la bolsa al principio?

Nota: Los colores en los enunciados indican lo siguiente: Rojo- aparece la idea de un todo y de partes-; Morado- la fracción puede usarse como fracturador (parte-todo)-; Verde- la fracción puede usarse como operador y redefinir el todo-; Amarillo- una medida es asignada a una de las partes-; Azul- identificación del todo y su medida (valor de magnitud o cantidad)-.

Los resultados que se describen corresponden a la aplicación de una prueba a 180 estudiantes de 16 años y 78 estudiantes de 17 años, quienes cursaban el bachillerato en diferentes instituciones de la Ciudad de México, ya sea en modalidad general o técnica. Considerando la totalidad de la muestra, el éxito en la resolución de los problemas es bajo (ver Figura 5), ya que 13.17% del total tuvo éxito al resolver P1, solo 3.30% resolvió correctamente P2 y 35.45% respondió correctamente P3. Cabe señalar que, para la resolución de este último problema, los estudiantes emplearon principalmente métodos de prueba y error. En cambio, los procesos que siguieron para los otros dos problemas están asociados principalmente a procesos aritméticos y en pocos casos algebraicos, apoyándose en ambos casos en representaciones gráficas.

Figura 5

Éxito obtenido: a) por edad, b) por tipo de bachillerato



Nota. Elaboración propia

Al hacer la comparación del éxito obtenido por edad y por tipo de bachillerato, de acuerdo con cada problema, pudo observarse que los alumnos

de 16 años tuvieron mayor éxito al resolver los problemas P1 y P2, mientras que los alumnos de 17 años tuvieron mayor éxito al resolver P3 (ver Figura 5a). Aparentemente los alumnos de mayor edad recurrieron a métodos de prueba y error. Con respecto al éxito obtenido por tipo de bachillerato, pudo observarse que tuvieron mayor éxito los alumnos del bachillerato general (Figura 5b).

Entre los resultados de este estudio se tiene que los estudiantes pertenecientes al bachillerato general y con menor edad obtuvieron mayor éxito en la resolución de los problemas. Además, pese a que los cursos están enfocados en el estudio del álgebra, los estudiantes generalmente no utilizaron métodos algebraicos para resolver los problemas, sino que, emplearon procedimientos aritméticos para resolver P1 y P2, y estrategias de ensayo y error para resolver P3, conocimientos y habilidades asociados principalmente a lo que se estudia en la educación primaria. Aunado a esto, pudieron identificarse dificultades en el proceso de comprensión del problema; en los tres problemas los estudiantes tuvieron dificultades para interpretar el sintagma “lo que queda” y asociarlo con el uso de la fracción como operador, en el que se hacen partes de partes y redefiniciones del todo.

Por lo anterior, es necesario continuar investigando la problemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, desde la educación básica hasta la educación superior. En particular, resulta crucial indagar sobre la enseñanza de la fracción como operador, dado que existe evidencia de las dificultades asociadas a este uso. Asimismo, es importante proseguir con investigaciones centradas en la resolución de problemas.

En este contexto, y con base en la literatura existente, se han propuesto las lecturas analíticas como un método para desarrollar habilidades de estudiantes durante el proceso de resolución de problemas, facilitar el análisis del proceso que siguen al resolverlos y contribuir al desarrollo de sistemas tutoriales inteligentes⁶.

El Método de Lecturas Analíticas y la resolución de problemas verbales

Los problemas verbales forman parte esencial de la educación matemática, una tradición que se remonta a tiempos antiguos, como lo evidencian los registros de civilizaciones como la egipcia, china, india y griega, entre otras (Swetz, 2009). De acuerdo con Verschaffel et al. (2020), un problema verbal se define como una representación textual de una situación que incluye datos numéricos, los cuales deben ser procesados mediante operaciones matemáticas para responder a las cuestiones planteadas.

⁵ Este estudio, junto con el anterior se enmarca en el proyecto autonómico CIAICO 2022/154.

Para Puig y Cerdán (1988) el proceso de resolución de un problema es “la actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento en que, siéndole presentado un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea” (p. 8). Para estos autores existen dos niveles para analizar el proceso de resolución de un problema, uno es el microscópico y otro el macroscópico. En el microscópico se examinan conductas aisladas o concretas. Mientras que, en el nivel de descripción macroscópico se observa la totalidad del proceso de resolución. Dicho proceso se describe por fases, siendo estas la lectura, comprensión, traducción, cálculo, solución y revisión-comprobación.

Basándose en las ideas de Puig y Cerdán (2014), quienes sostienen que para traducir el enunciado de un problema verbal al lenguaje matemático es necesario reescribir el texto del problema de manera que las cantidades involucradas queden claramente explícitas y sus relaciones se expresen mediante una fórmula aritmética o algebraica, se puede afirmar que esta reformulación se fundamenta en los métodos de análisis-síntesis o en el enfoque cartesiano. Este proceso implica una lectura profunda y detallada del problema, conocida como lectura analítica. En este sentido, Gómez et al. (2016) explican que hacer una lectura analítica implica reducir el enunciado del problema “a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades de modo que puede dar lugar a una ecuación o a una fórmula” (p. 588).

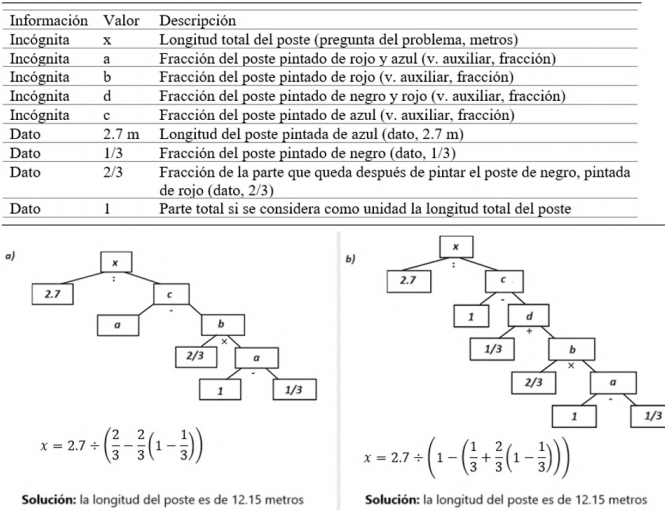
Las ideas antes descritas condujeron a la definición de un método en el contexto de la resolución de problemas al que se denominó Método de Lecturas Analíticas. Se trata de una estrategia pedagógica que utiliza estructuras de grafos jerárquicos (árbol) para representar y analizar conceptos, relaciones y estructuras de información obtenidas a partir de una lectura analítica, lo que permite visualizar la interconexión de ideas mediante nodos y aristas, facilitando la comprensión, el razonamiento lógico y la toma de decisiones a partir de datos complejos.

El Método de Lecturas Analíticas se divide en cinco pasos: 1) la lectura del problema, 2) la construcción del diccionario de cantidades conocidas y desconocidas, así como las posibles relaciones que se establecen entre ellas para encontrar el valor de la incógnita o valor desconocido, 3) la representación de relaciones utilizando grafos tipo árbol, que tienen ciertas propiedades, 4) efectuar los cálculos con la ayuda del grafo-árbol, y 5) dar respuesta al cuestionamiento en el enunciado del problema y comprobación de su veracidad.

Según Roy y Roth (2016), un árbol es una estructura de datos que consta de nodos conectados por aristas, con la propiedad de no contener ciclos. Para el método de lecturas analíticas, se utiliza específicamente un árbol binario enraizado, en el que hay un nodo superior, comúnmente conocido como raíz del árbol, y cada nodo está vinculado a cero o dos nodos sucesores.

Los nodos sin nodos sucesores se denominan hojas. Al resolver un problema los nodos muestran las variables involucradas en el enunciado y las aristas las relaciones entre ellas. Así, un grafo tipo árbol permite tener una reproducción visual de la lectura analítica de un problema verbal.

Figura 6
Lecturas analíticas que representan una resolución aritmética: a) directa, b) indirecta



Este método, como ya se mencionó, puede emplearse para distintos fines: 1) en la instrucción para desarrollar habilidades en la resolución de problemas, 2) en la evaluación e investigación para analizar los procesos que los estudiantes llevan a cabo al resolver problemas, y 3) para el diseño de sistemas tutoriales orientados a la resolución de problemas.

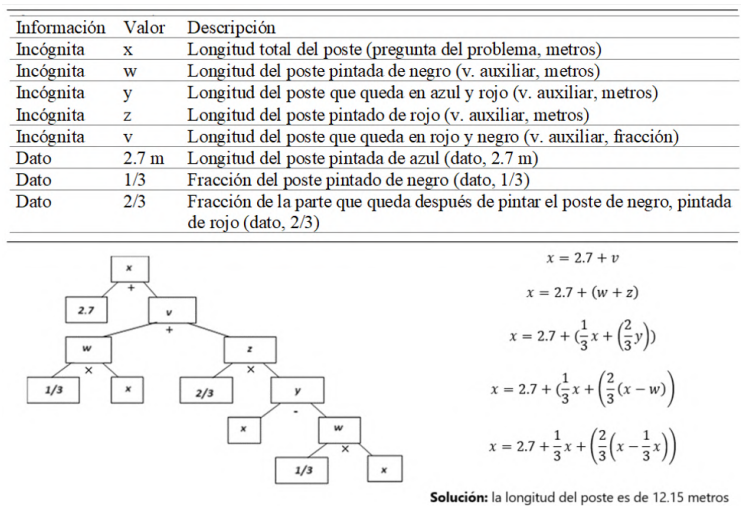
En este capítulo se expone un ejemplo de su uso para analizar procesos de resolución de estudiantes de bachillerato, tomando como referencia el problema P1 de la Figura 4. Para este uso del método es fundamental interpretar la mayor cantidad posible de procesos que los estudiantes pudieran seguir, lo que se hace ya sea antes, o bien durante y después de la recolección de datos. Esto es necesario porque un mismo problema puede ser interpretado desde diferentes lecturas analíticas, dependiendo del razonamiento del resolutor y de cómo relacione las cantidades involucradas. A continuación, se muestran tres prototipos de procesos de resolución diferentes para P1.

Como puede verse en el cálculo de la lectura analítica del P1 que se expone en la Figura 6, las expresiones que surgen para establecer las relaciones entre las cantidades son aritméticas, por ello, la lectura analítica de dicho proceso se caracteriza de la misma manera. El proceso de resolución se

clasifica como directo o indirecto, según si las relaciones entre las cantidades se establecen respetando o no el orden en el que éstas aparecen en el enunciado del problema. Una lectura analítica de naturaleza algebraica puede verse en la Figura 7.

Una diferencia entre los procesos algebraicos y aritméticos que puede notarse en los grafos es que la incógnita principal, que responde a la pregunta del problema, puede aparecer más de una vez en los nodos del grafo cuando la resolución es algebraica; pero, cuando ésta es aritmética sólo aparece en el nodo que representa la raíz del árbol.

Figura 7
Lectura analítica que representa una resolución algebraica



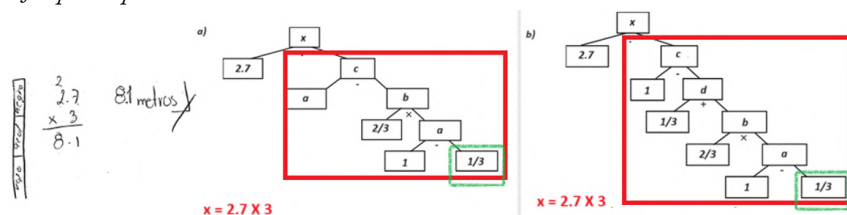
Las lecturas analíticas son utilizadas para interpretar los procesos que siguen los estudiantes al resolver un problema. Por ejemplo, uno de los errores más comunes que los estudiantes de bachillerato cometieron al responder el P1 es el que se observa en la Figura 8. En ese proceso aritmético de resolución no hay un reconocimiento de la fracción como operador y la redefinición del todo asociados al sintagma “de lo que queda”, esto hace que los datos en el recuadro rojo no sean interpretados. En cambio, el dato del recuadro verde da cuenta del número de partes en las que se divide la longitud del poste, o sea, se reconoce solo la fracción como fracturador, y por eso, esas dos cantidades se relacionan multiplicando 2.7 —la longitud de una parte— por 3 —número de partes en las que se divide la longitud del poste—.

Una de las hipótesis que se siguen probando es que, cuando los estudiantes usan el método de lecturas analíticas como herramienta para resolver problemas verbales, ya sea con lápiz y papel o a través de sistemas tutoriales inteligentes, desarrollan habilidades que le permiten, principal-

mente, reconocer, entender y explicar las relaciones entre las cantidades que aparecen en el enunciado de los problemas.

Figura 8

Ejemplo del proceso de resolución del P1 de estudiantes de bachillerato



Consideraciones finales

En este capítulo se han descrito tres estudios que muestran una ruta seguida a lo largo del tiempo para comprender con más profundidad los procesos que llevan a cabo los alumnos de los distintos niveles educativos para construir conocimientos relacionados con la aritmética de los números racionales y desarrollar habilidades para usar esos números en la resolución de una variedad de problemas que conllevan diversos niveles de complejidad. Ha quedado claro en este proceso que el tránsito del uso de los números naturales al de los números racionales es un proceso complejo que requiere de la intervención de los docentes para apoyar a los alumnos a recorrer ese camino. Por ello, uno de los principales objetivos de los proyectos de investigación llevados a cabo fue identificar los aspectos y elementos y contar con explicaciones que sirvieran a los docentes de los diferentes niveles educativos para estructurar secuencias de enseñanza que favorezcan la construcción de conocimientos sobre los números racionales de forma más accesible. La última sección de este capítulo traza una ruta para continuar la colaboración entre investigadores de México y España centrada en el estudio de la resolución de problemas verbales mediante el método de lecturas analíticas y el uso de tecnología.

Referencias

- Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver, A. (1983). Rational numbers concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91–126). Academic Press.
- Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 399–420.
- Contreras, M. (2012). *Problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. Un estudio sobre su enseñanza y aprendizaje* [Tesis doctoral]. Universidad de Valencia.

- Fernández, A., Figueras, O., Gómez, B., Monzó, O., & Puig, L. (2009). *Competencias en razón y proporción en la escuela primaria*. Universitat de València.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Springer.
- Gómez, H. (1996). *Indicios del pensamiento proporcional. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio* [Tesis de maestría]. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav.
- Gómez, B., Sanz, M. T., & Huerta, I. (2016). Problemas descriptivos de fracciones. *Bolema*, 30(55), 586–604. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a14>
- Hart, K. M. (Ed.). (1980). *Secondary school children's understanding of mathematics (Report of the Concepts in Secondary Mathematics and Science Programme)*. University of London, Centre for Science Education.
- Hart, K. M. (Ed.). (1981). *Children's understanding of mathematics: 11–16*. John Murray.
- Jiménez de la Rosa, E. (1996). *De la lectura del error a una interpretación de los saberes de los niños. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio* [Tesis de maestría]. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav.
- Kieren, T. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. En T. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 125–149). ERIC/SMEAC.
- Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*, 2 (pp. 162–181). National Council of Teachers of Mathematics.
- Muñoz, E. (1996). *Pensamiento relacional en una etapa de transición. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio* [Tesis de maestría]. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav.
- Newton, I. (1707). *Arithmétique universelle* (N. Beudeaux, Trad.). Chez Bernard.
- Puig, L. (2004). *Memoria de actividades realizadas en el marco del convenio de colaboración entre la Universidad de Valencia y el Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas con sede en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional*. Documento interno PNFAPM/Cinvestav-Universitat de València.
- Puig, L. (2017). *Memoria de actividades realizadas en el marco del convenio de colaboración entre la Universidad de Valencia y el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional*. Documento interno Cinvestav-Universitat de València.
- Puig, L., & Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis.
- Puig, L., & Cerdán, F. (2014). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. En B. Gómez, & L. Puig (Eds.), *Resolver problemas: Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 21–34). Universitat de València.

- Rey Pastor, J., & Puig Adam, P. (1932). *Elementos de aritmética. Col. Elemental intuitiva*. (Tomo I. Sexta edición). Imp. A. Marzo.
- Roy, S., & Roth, D. (2016). *Solving general arithmetic word problems*. arXiv. <https://arxiv.org/abs/1608.01413>
- Sinicrope, R. W., Mick, H. R., & Kolb, J. (2002). Interpretations of fraction division. En B. Litwiller, & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 153–155). Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics.
- Swetz, F. (2009). Culture and the development of mathematics: A historical perspective. En B. Greer, S. Mukhopadhyay, A. B. Powell, & N. Nelson-Barber (Eds.), *Culturally responsive mathematics education* (pp. 11–42). Routledge.
- Valenzuela, C., Sanz, M. T., Figueras, O., Gómez, B., & López-Iñesta, E. (2022). En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, p. 307). PME.
- Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: A survey. *ZDM Mathematics Education*, 52(1), 1–16. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4>
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 127–174). Academic Press.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Numbers concepts and operations in the middle grades* (pp. 141–161). Erlbaum.
- Yamaguchi, T., & Iwasaki, H. (1999). *Division with fractions is not division but multiplication: on the development from fractions to rational numbers in terms of the generalization model designed by Dörfler*. En Proceedings of the 23rd Conference of PME (Vol. IV, pp. 337–344).

