

Multiplicación y división de fracciones: Excel y otras tecnologías digitales para reflexionar sobre su enseñanza

Alexandra Angel¹, Olimpia Figueras² y Carlos Valenzuela-García³

RESUMEN

En este documento se describen resultados del análisis de recursos educativos de Telesecundaria propuestos en el libro de matemáticas del alumno de primer grado para el estudio de la multiplicación de fracciones mediante Excel. A partir de esos resultados se diseñó una secuencia de actividades dirigida a profesores con el propósito de promover su reflexión sobre la enseñanza de la multiplicación y división de fracciones. Se presentan, además, hallazgos de un estudio exploratorio con la participación de profesores de secundaria en formación, estructurando sus respuestas de acuerdo con los componentes del marco de los Modelos Teóricos Locales. Finalmente, se discuten las áreas de oportunidad identificadas al usar Excel como herramienta cognitiva. Se concluye que el Modelo de Enseñanza de Telesecundaria es un ambiente potencial para enriquecer el conocimiento de profesores acerca de los conceptos de multiplicación y división de fracciones y su enseñanza, integrando tecnologías digitales.

PALABRAS CLAVE

Multiplicación y división de fracciones, Recursos educativos de matemáticas, Uso de libros de texto, Uso de hojas de cálculo, Telesecundaria.

¹ alexandra.angel@cinvestav.mx

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
<https://orcid.org/0000-0003-3912-9883>

² figuerao@cinvestav.mx

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
<https://orcid.org/0000-0003-0334-9470>

³ carlos.valenzuela@academicos.udg.mx

Universidad de Guadalajara
<https://orcid.org/0000-0002-0776-5757>

ANTECEDENTES

Esta sección se organiza en tres partes. En la primera se analiza el uso de recursos educativos de matemáticas por los docentes. La segunda trata del empleo de Excel en el proceso de enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La última parte versa sobre cómo el conocimiento del profesor acerca de los conceptos de multiplicación y división de fracciones puede ser una fuente de dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del tema.

El uso de recursos educativos en educación matemática

Shulman (1986) sostiene que los recursos educativos, junto con los planes y programas de estudio, constituyen herramientas fundamentales en el oficio de los docentes. Pepin et al. (2013) afirman que los profesores interpretan y rediseñan los recursos educativos para adaptarlos a sus necesidades y costumbres, en este proceso de apropiación moldean y dan forma al contenido matemático.

El grupo temático de trabajo dedicado a las investigaciones centradas en los recursos curriculares y el diseño de tareas, desarrollado en el decimotercer Congreso de la Sociedad Europea para la Investigación en Educación Matemática, celebrado en 2023 (*Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*), destaca que dichos recursos se aplican tanto a nivel macro, sirviendo como perspectivas específicas para analizar los sistemas curriculares y pedagógicos, como a nivel micro, identificando potencialidades y áreas de mejora en las tareas sugeridas. Por ende, su análisis desempeña un papel crucial en la educación matemática.

Rezat (2012) enfatiza la relevancia de los recursos educativos para expresar y compartir ideas, especialmente en el ámbito del desarrollo curricular, la formación docente y la práctica cotidiana. Si bien su estudio se centra principalmente en el libro de texto de matemáticas como recurso educativo, el investigador señala que, dada la variedad de artefactos disponibles, no siempre es clara la comprensión de cómo usarlos. Asimismo, subraya que este asunto constituye un importante problema de investigación.

A lo largo de esta década es notable cómo numerosos libros de texto incorporan referencias a recursos educativos digitales, tales como páginas web, software, aplicaciones y videos. Estas herramientas expresan y difunden perspectivas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, entre profesores, estudiantes, autoridades educativas e investigadores especializados en matemática educativa.

Los profesores son usuarios activos de los recursos educativos. De acuerdo con Pepin et al. (2013) existen dos dimensiones principales en la interacción de los docentes con los recursos: la primera se refiere al diseño y la calidad, mientras que la segunda concierne al aprendizaje del docente y su desarrollo

profesional. La investigación global en curso, en la cual se inscribe este documento, se centra en esta última dimensión.

Hegedus y Moreno-Armella (2009) destacan que, ante la creciente integración de tecnología digital en las escuelas, las interrogantes acerca de su empleo han cambiado. Ya no nos preguntamos simplemente por qué utilizarla, sino con qué finalidad. Estos investigadores sostienen que, “el conocimiento que emerge de un medio digital es diferente del conocimiento que emerge de un medio de lápiz y papel porque el mediador no es epistemológicamente neutral” (p. 398). Por ello, a medida que la naturaleza misma de los temas que estudiamos en la escuela se transforma, las teorías del conocimiento, la didáctica y la educación en general deberían hacerlo también.

El uso de recursos educativos puede entenderse como el empleo de herramientas que extienden y aumentan las capacidades humanas, ya sean las motoras, las sensoriales o las de razonamiento (Bruner, 1966, citado en Arcavi, 2020). De acuerdo con Arcavi (2020), en matemática educativa son de especial interés las herramientas que aumentan las capacidades de razonamiento, también llamadas herramientas cognitivas, que “... se refieren principalmente a las posibilidades de potenciar el aprendizaje del contenido *per se* por medio de características como la visualización dinámica, interactividad, sorpresas que llevan a plantear preguntas y formular hipótesis, probar alternativas y similares” (p. 434).

Antecedentes del uso de Excel como herramienta cognitiva

Una de las herramientas cognitivas que se ha empleado en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es la hoja de cálculo. Aunque originalmente “no se creó con un propósito educativo específico... se ha encontrado que puede ser un gran apoyo para la enseñanza de diversos temas de matemáticas” (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2000, p. 15). Específicamente, Excel se ha implementado en la enseñanza de las matemáticas para temas como la divisibilidad, variación proporcional, ecuaciones, raíz cuadrada y cúbica, perímetro y área (SEP, 2000), funciones cuadráticas, probabilidad (Drier, 2001), área, volumen (Fuglestad, 2008), fracciones, porcentajes y números decimales (Drier, 2001; SEP, 2000; Fuglestad, 2008). A continuación se reseñan las investigaciones en las que se ha usado la hoja de cálculo para estudiar fracciones.

Drier (2001) propone que los estudiantes de primaria exploren la conexión entre fracciones y porcentajes a través del uso de la hoja de cálculo mediadas por la representación gráfica del todo y la parte. Las actividades diseñadas se fundamentan en el uso de un deslizador que permite al usuario ajustar el denominador de una fracción seleccionada y visualizar el resultado tanto numérica como gráficamente. La investigadora señala que, en varios cursos dirigidos a profesores en formación y en servicio, ha diseñado activi-

dades en una hoja de cálculo con la intención de ayudar a sus estudiantes a explorar conceptos matemáticos.

Por otra parte, Fuglestad (2008), reporta un proyecto de investigación en el que tres profesores desarrollaron aplicaciones en Excel para estudiar temas específicos del currículo como fracciones, área, volumen y porcentajes. Uno de los profesores diseñó una actividad para comparar porcentajes, fracciones y decimales. El objetivo era que los estudiantes indagaran las relaciones y determinaran las posibles reglas para cambiar entre diferentes representaciones de números racionales. Los profesores debatieron sobre las limitaciones y posibilidades del uso de la hoja de cálculo y cómo utilizar esa información para el diseño de tareas específicas. Fuglestad notó que, en una de las actividades de los profesores, la hoja de cálculo simplificaba inmediatamente $\frac{2}{4}$ a $\frac{1}{2}$, y dialogó con los profesores sobre la posibilidad de deshabilitar esa función. En este proyecto “la enseñanza es vista como un proceso de aprendizaje” (p. 1410).

En el marco del proyecto Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (EMAT) se elaboró el libro de texto “Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo” (SEP, 2000). Este libro, que se complementa con un disco compacto con archivos de hojas de cálculo, propone actividades exploratorias sobre fracciones equivalentes. Dentro de estas actividades, se insta a los estudiantes a reflexionar sobre el significado de las expresiones *máximo común divisor* y *mínimo común múltiplo*. Las fracciones que se muestran en pantalla deben ser simplificadas por los alumnos, dividiendo numeradores y denominadores entre dos y entre tres. Estas actividades están diseñadas para que los estudiantes las hagan en parejas, fomentando el diálogo y el intercambio de ideas a través de la manipulación de objetos o representaciones matemáticas.

Las investigaciones referidas proponen actividades matemáticas que promueven la reflexión y el debate. En estos estudios, el papel del docente es el de un coordinador que guía el uso de la tecnología de acuerdo con la idea de que “el objetivo principal del empleo de la tecnología en el aula no se reduce a practicar algoritmos, sino que ayuda al alumno a descubrir y construir conceptos y técnicas mediante ejercicios de reflexión” (SEP, 2000, p. 9). En las actividades propuestas se destaca que el uso de la hoja de cálculo como herramienta cognitiva (de acuerdo con Arcavi, 2020) favorece la visualización, interactividad, planteamiento de preguntas y formulación de hipótesis en las actividades de comparación.

Conocimiento del profesor sobre multiplicación y división de fracciones

La aritmética de las fracciones es reconocida como un tema desafiante tanto para los estudiantes de primaria y secundaria, como para profesores, ya sea en formación o en servicio, de esos niveles educativos (Ball, 1990; Siegler & Lortie-Forgues, 2017; Tirosh, 2000; Whitehead & Walkowiak, 2017).

Al efectuar operaciones aritméticas con fracciones, varios investigadores han señalado la diferencia entre conocer el procedimiento y entender su razón de ser, y simplemente saber cómo llevarlo a cabo sin comprender su justificación (Skemp, 1976, citado en Whitehead & Walkowiak, 2017).

En matemática educativa es abundante la literatura acerca del conocimiento de los profesores de primaria y secundaria en formación, y su dominio al usar y justificar algoritmos para multiplicar y dividir fracciones. A continuación, se mencionan algunas investigaciones al respecto.

Ball (1990) se centró en el conocimiento matemático de los profesores en formación de primaria y secundaria, poniendo especial atención en las fracciones. Una de las tareas que Ball propuso fue plantear un problema aritmético escolar verbal en el que se requería la división de fracciones. Los resultados revelaron que, para muchos, esa tarea fue muy complicada. En entrevistas con los participantes, Ball les pidió efectuar la división, y la mayoría obtuvo el resultado correcto. La investigadora argumenta que es importante que los profesores en formación conozcan los conceptos matemáticos, los procedimientos, y cómo se relacionan para poder hacer ambas tareas. Ella enfatiza que “los profesores deben ser no solo capaces de describir los pasos que involucra un algoritmo sino de discutir los juicios, hechos, significados y razones de ciertas relaciones y procedimientos” (p. 459).

Tiresh (2000), de manera similar, planteó actividades para profesores de primaria en formación sobre división de fracciones, tratando también los conceptos erróneos comunes de los estudiantes de ese nivel escolar respecto al tema. La investigadora reporta que a pesar de que la mayoría de los participantes sabía cómo dividir fracciones, encontró que muchos no podían justificar su método y desconocían las razones detrás de los errores frecuentes de los estudiantes en este campo.

Por su parte, Whitehead y Walkowiak (2017) analizaron la comprensión de profesores de primaria en formación sobre los algoritmos de multiplicación y división de fracciones, pidiéndoles explicar la razón por la que funcionaban dichos algoritmos. Para ello, diseñaron tareas orientadas a identificar y corregir errores en las respuestas de los estudiantes y a justificar por qué ciertas estrategias no eran efectivas. Los resultados revelaron que estos futuros docentes fundamentaban sus explicaciones en la mera repetición de las reglas que aplican al ejecutar estos procedimientos, en lugar de comprender a profundidad el porqué de dichas reglas.

Las tres investigaciones referidas evidencian que los profesores en formación de primaria y secundaria enfrentan dificultades para justificar e interpretar los algoritmos de la multiplicación y división de fracciones. Esto sugiere un dominio insuficiente de estos conceptos fundamentales.

Siegler y Lortie-Forgues (2017) han identificado algunos factores que influyen en la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, y los han clasifi-

cado en: inherentes al tema y de tipo cultural. Por ejemplo, el lenguaje empleado para nombrar a las fracciones, junto con los libros de texto usados, son factores de tipo cultural, que varían según las particularidades de la vida de los estudiantes. Asimismo, otro factor de este tipo, de acuerdo con el señalamiento de los investigadores es el conocimiento del profesor.

Enseguida se presenta una introducción a la modalidad Telesecundaria y al problema de investigación.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La educación secundaria en México se imparte en distintas modalidades, entre ellas la General, Técnica, Telesecundaria, Comunitaria y Para Trabajadores. Cada modalidad se creó con objetivos específicos para atender distintos problemas educativos en el país. La Telesecundaria se diseñó con base en el modelo educativo italiano, la *Telescuola*, y se integró al sistema educativo mexicano en 1968. “Ambos [modelos] intentaban brindar una alternativa de bajo costo a la demanda de educación secundaria en zonas donde no se contaba con escuelas formalmente establecidas” (SEP, 2010, p. 36).

Durante el ciclo escolar 2020-2021, más de 1.3 millones de jóvenes (de entre 12 y 14 años) asistieron a una escuela telesecundaria, representando el 21% de la población estudiantil de nivel secundaria en México (SEP, 2021). En la modalidad telesecundaria, un solo profesor imparte todas las asignaturas de un determinado grado escolar. Sin embargo, la falta de especialización de los profesores ha sido un factor que afecta su dominio sobre los temas que imparten (Calixto & Rebollar, 2008), en particular de los contenidos matemáticos.

Como apoyo al proceso de enseñanza y aprendizaje en la Telesecundaria, los profesores disponen de libros especializados “para el maestro” correspondientes a cada asignatura que imparten. Estos se complementan con recursos audiovisuales enfocados en didáctica. Por su parte, los estudiantes tienen a su disposición libros de texto para cada asignatura y una variedad de recursos educativos digitales, tanto audiovisuales, como informáticos, que se mencionan en los propios libros. Todos ellos se pueden consultar en la página web de Telesecundaria (SEP, 2010).

En el caso de la Telesecundaria en México, los libros de texto han representado, y continúan siendo, una de las herramientas esenciales para el profesor, como lo indicaba Shulman (1986). No obstante, su estructura y uso han evolucionado; por ejemplo, los libros de texto del ciclo escolar 2020-2021 están ahora integrados con recursos digitales. Dentro de una investigación en curso, se ha hecho un análisis de ciertos libros de texto de Telesecundaria (SEP, 2019a, 2019b), enfocándose en los contenidos matemáticos relacionados con la multiplicación y división de fracciones presentes tanto en recursos impresos, como digitales. Es relevante mencionar que una

porción significativa de los contenidos matemáticos de 1º y 2º grados de esta modalidad se centra en la aritmética de las fracciones. Estos tópicos, como se ha señalado previamente, representan desafíos notables para los profesores de secundaria.

En el libro de matemáticas para alumnos de primer grado (SEP, 2019b), se menciona un recurso audiovisual que instruye sobre el uso de Excel para multiplicar fracciones. Por otro lado, en un video de Telesecundaria dirigido a docentes (SEP, 2019a), se destaca la importancia de que los estudiantes analicen la relación entre los números en los numeradores y denominadores, tanto de los factores, como del resultado, con el objetivo de deducir el algoritmo para multiplicar fracciones. A partir de la revisión de estos libros, se procedió a un análisis más detallado del recurso audiovisual, explorando el uso de Excel no solo para la multiplicación de fracciones, sino también para la división.

Se propusieron distintas fracciones –propias, impropias y equivalentes, que van de una hasta cuatro cifras— para analizar el uso de la hoja de cálculo para multiplicar y dividir. Se observó que el software no siempre muestra en pantalla lo que el usuario introduce. Por ejemplo:

1. Si se digita $2/4$, entonces escribe $1/2$.
2. Si se digita $5/5$, entonces escribe 1.
3. Si se digita $7/3$, entonces escribe $2\ 1/3$.
4. Si la multiplicación hace referencia a una celda vacía, entonces interpreta el contenido de la celda como si tuviera escrito un 0.
5. Si el usuario digita una fracción de dos cifras como $11/20$, entonces escribe $5/9$.

En los casos 1 y 2, Excel simplifica las fracciones que el usuario digita. En el caso 3, Excel reescribe las fracciones impropias como fracciones mixtas. Mientras que, en el caso 5, el usuario digita una fracción de dos cifras y dado que por defecto la celda admite una fracción de hasta una cifra, Excel aproxima la fracción ingresada cuando esta se escribe con más cifras de las que el formato permite.

Del análisis anterior se concluyó que los cálculos que hace el software podrían generar confusión entre estudiantes y profesores. Sin embargo, también ofrecen una excelente oportunidad para profundizar en el estudio de las fracciones. Con base en estas observaciones, se diseñó una secuencia de actividades para acompañar a los docentes en la exploración de estos temas, inducirlos a la reflexión de esos conceptos y de su enseñanza, y coordinar las discusiones que se deriven. El propósito de este capítulo es detallar el estudio exploratorio en el que participaron profesores de secundaria en formación. A través de este, se busca utilizar los hallazgos para reconocer las oportunidades presentes al emplear Excel en línea con la perspectiva cognitiva de Arcavi (2020). Bajo este enfoque, Excel permite extender las capacidades de razonamiento debido a su capacidad de generar sorpresas, lo que a

su vez incita a formular preguntas, hipótesis y explorar distintas alternativas. Todo esto converge en el objetivo principal: descubrir el potencial de los recursos educativos ofrecidos para Telesecundaria.

El estudio exploratorio tiene como objetivo validar el diseño de la experimentación, lo que implica asegurar que las actividades planificadas efectivamente promuevan los procesos de reflexión y discusión previstos. Al lograrlo, se contará con elementos para indagar sobre la plausibilidad de la hipótesis de la investigación en la que se plantea que el modelo de enseñanza de Telesecundaria, específicamente para la multiplicación y división de las fracciones, es un ambiente potencial para que los profesores enriquezcan sus conocimientos acerca de estos conceptos, su enseñanza y la integración de tecnología digital en su práctica docente.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico y metodológico de los Modelos Teóricos Locales (MTLs), propuesto por Filloy (1999) ha sido usado para estructurar la presente investigación. De acuerdo con Puig (2008, p. 88), “los MTLs los elaboramos para dar cuenta ... de fenómenos que se producen en situaciones de enseñanza y aprendizaje, pero además concebimos las situaciones de enseñanza y aprendizaje como situaciones de comunicación y de producción de sentido”. En este caso, los fenómenos de interés son los procesos de comunicación y producción de sentido que tienen lugar en el intercambio de mensajes entre profesores y recursos educativos. Es decir, en la investigación global se indaga cómo los profesores de Telesecundaria amplían sus conocimientos sobre multiplicación y división de fracciones al ser usuarios activos de los recursos educativos, en la dimensión que señalaban Pepin et al. (2013) respecto al aprendizaje de los docentes y su desarrollo profesional. Este proceso, como señala Puig (2003, p. 184, citado en Puig, 2008, p. 90),

...se produce gracias a la lectura/transformación de esa secuencia de textos que llamamos Modelos de Enseñanza. Como consecuencia de esa lectura/transformación se producen conceptos nuevos a través de la producción de nuevos sentidos y el establecimiento de nuevos significados para el SMS [Sistema Matemático de Signos] (o los SMS) en que se describe y produce lo enseñado, que incluso conlleva a la elaboración de nuevos SMS.

En su práctica docente, el profesor de Telesecundaria usa las herramientas de su oficio, las interpreta antes de usarlas, y, en este caso, interpreta y usa los recursos educativos para estudiar la multiplicación y división de fracciones, con lo cual se identifica un proceso de lectura/transformación como señala Puig. De ahí que se haya elegido el marco teórico de los MTLs para dar cuenta de este fenómeno.

Los MTLs se construyen considerando cuatro componentes y sus interrelaciones, en términos de esta investigación: 1) el componente Modelos de Competencia Formal -que se abrevia como Componente Formal- se

relaciona con un análisis sobre la multiplicación y división de fracciones como objetos matemáticos y el conocimiento que debe tener un usuario ideal de ellos; 2) el componente Modelos de Enseñanza involucra, entre otras cosas, el análisis de los textos matemáticos que se encuentran entre los recursos educativos que usan los profesores de Telesecundaria; en esos textos se caracterizan los significados de la multiplicación y división de fracciones y las tareas y contextos empleados para su enseñanza, es decir, su tratamiento didáctico; 3) el componente Modelos de Comunicación se refiere a la decodificación que hacen los docentes de los mensajes emitidos por los creadores de los recursos educativos; y finalmente; 4) el componente Modelos de Procesos Cognitivos versa sobre las actuaciones de los profesores, pero también sobre sus maneras de producir sentido acerca de las actividades matemáticas que hacen.

En el marco teórico y metodológico de los MTLs se emplea el término “competencia”. Puig (2008, p. 87) señala que ese término “es motivo de múltiples seminarios, artículos y manifiestos” debido a que en el ámbito educativo se ha usado asignándole diferentes sentidos. De acuerdo con el investigador, con la competencia matemática se explica y predice la conducta de un sujeto ideal, que es aquel que conoce el conjunto de las matemáticas socialmente establecidas en un momento histórico determinado. El describir la competencia del sujeto ideal permite dar cuenta de sus actuaciones posibles y predecirlas, esa información forma parte del Componente Formal del MTL. Sin embargo, cuando en la experimentación intervienen sujetos reales, el término competencia desde los MTLs se usa para describir sus actuaciones concretas, y esto forma parte del Componente de Procesos Cognitivos.

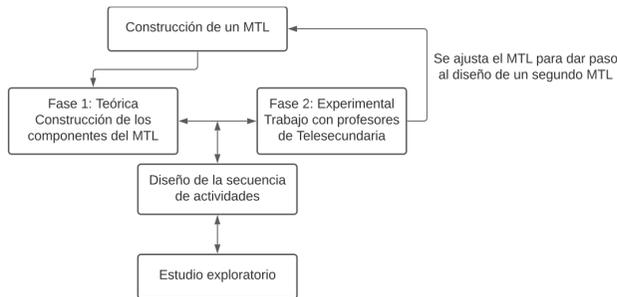
METODOLOGÍA

La construcción de un MTL se da en dos fases como se muestra en la Figura 1. La primera fase consiste en un análisis teórico para la construcción de los componentes del MTL. En Angel et al. (2022) se da cuenta de la construcción de los dos primeros componentes. La segunda fase es experimental e involucra la interacción de profesores de Telesecundaria con recursos educativos seleccionados de la modalidad.

Como parte de la segunda fase se diseñó la experimentación, constituida por actividades y hojas de trabajo para recolectar datos que se materializaron en un taller. Después se planeó la validación de los instrumentos, principalmente para observar si las actividades propuestas promueven los procesos de reflexión esperados. Esto se efectuó a través de un estudio exploratorio que se llevó a cabo en octubre de 2022 en el marco del quincuagésimo quinto Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, y formó parte de los talleres de docencia que tuvieron lugar en dicho evento.

Figura 1

Esquema de la metodología para construir el Modelo Teórico Local



El taller impartido se tituló: “Multiplicación y división de fracciones, algo más que la enseñanza de algoritmos”, y se desarrolló de manera presencial. Este se organizó en tres sesiones independientes de dos horas cada una. En la Figura 2 se muestra un esquema de su estructura, cómo se tituló cada actividad y los recursos educativos digitales que se usaron.

Cada sesión se dividió en dos momentos. En el primero, los participantes hicieron actividades y recibieron hojas de trabajo para anotar sus reflexiones personales acerca de ellas. En el segundo momento, en plenaria, los participantes conversaron e intercambiaron ideas acerca de: 1) sus reflexiones; 2) la idoneidad de las actividades para la enseñanza de la multiplicación y división de fracciones; 3) el uso de los recursos educativos referidos en las hojas de trabajo que fueron proyectados durante las sesiones.

Participantes

Previo a la celebración del evento se publicó una convocatoria dirigida a profesores de nivel secundaria de todas las modalidades. Sin embargo, ningún profesor de Telesecundaria asistió, y la mayoría de los asistentes eran profesores de secundaria en formación. Específicamente, al taller asistieron dos estudiantes de la Licenciatura en Ciencias de la Educación con acentuación en Enseñanza de las Matemáticas; cinco estudiantes de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas; dos estudiantes de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas; y una profesora de nivel superior e investigadora en matemática educativa. Todos los participantes comparten el interés por la matemática educativa y se inscribieron al taller de manera voluntaria debido a su motivación por el tema. Se contó con un total de diez participantes, siete mujeres y tres hombres.

De acuerdo con la metodología de los MTLs, para concluir con la construcción del MTL de esta investigación se debe llevar a cabo la fase de experimentación con los profesores de Telesecundaria en servicio, como se muestra en el esquema de la Figura 1. El hecho de que en el estudio exploratorio no hayan participado profesores de Telesecundaria no va en detri-

mento de la investigación, por el contrario, permite validar los instrumentos, es decir, permite observar si las actividades propuestas promueven procesos de reflexión sobre la multiplicación y división de fracciones y su enseñanza de los participantes.

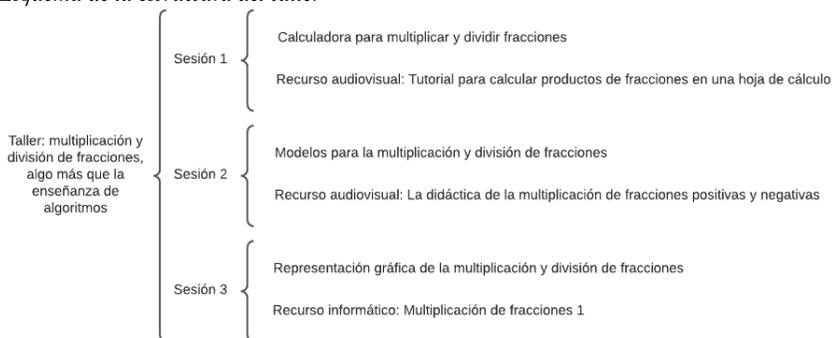
Instrumento

Con base en el modelo de enseñanza de Telesecundaria para la multiplicación y división de fracciones, se diseñó una secuencia de actividades, en modalidad de taller, dirigida a profesores. En ella se proponen escenarios hipotéticos del uso de Excel en clase y de las interrogantes que los estudiantes pueden plantear al usar el software. Todos los ítems relativos al uso de Excel fueron diseñados por los autores de este documento. Además, se crearon hojas de trabajo en las que se proponen actividades con lápiz y papel, cuyos ítems se plantean basándose en las investigaciones de Tirosh (2000) y Whitehead y Walkowiak (2017); en ellas se indaga sobre la interpretación y justificación de algunos de los algoritmos para multiplicar y dividir fracciones. Las actividades propuestas se extendieron al tema de la división de fracciones de acuerdo con las ideas de Lamon (2012).

El propósito de la secuencia de actividades es que los profesores 1) exploren el uso de Excel no solo para multiplicar, sino también para dividir fracciones; 2) analicen la validez de distintos algoritmos para multiplicar y dividir fracciones; y 3) reflexionen y discutan acerca de las áreas de oportunidad al usar Excel en términos de procesos de enseñanza y aprendizaje.

Figura 2

Esquema de la estructura del taller



Análisis de los datos

La recolección de datos durante el taller se hizo mediante hojas de trabajo y notas que tomaron los tres coordinadores del taller —autores de este capítulo— durante y después de las discusiones plenarias. Los investigadores intercambiaron observaciones después de cada sesión acerca de las notas que tomaron, e hicieron una triangulación de su interpretación sobre las actua-

ciones de los participantes. Los datos se presentan de manera descriptiva. Se refieren las palabras pronunciadas o escritas de los participantes —que en el texto se muestran entrecomilladas—, así como las acciones que se llevaron a cabo dentro del taller y que se analizan de forma cualitativa. La interpretación de los resultados se hace con base en los cuatro componentes del MTL.

RESULTADOS

Sesión 1: calculadora para multiplicar y dividir fracciones

En la primera sesión del taller se proyectó el recurso audiovisual de Telesecundaria: “Tutorial para calcular productos de fracciones en una hoja de cálculo” (SEP, 2019b, p. 42). A cada participante se le entregaron las hojas de trabajo correspondientes y se les pidió que usaran Excel para construir una calculadora para multiplicar fracciones, como la que se muestra en la Figura 3. De acuerdo con el recurso audiovisual, al no cambiar en cada celda a “formato fracción”, Excel interpreta los datos como fechas. Por ejemplo al digitar “2/5”, el programa escribe “02-may”.

A continuación, se muestran algunos de los ítems planteados en las hojas de trabajo, así como algunas de las respuestas de los participantes.

Ítem 1: Ana escribió en la hoja de cálculo los ejemplos que se muestran en la Figura 4, fila 2 y 3, y le pregunta ¿por qué en la fila 2, en la que se multiplica $1/2 * 1/3$, se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador, pero en la fila 3 no? ¿Qué le respondería?

Figura 3

Calculadora para multiplicar fracciones en Excel

	A	B	C	D
1				
2			=A2*B2	
3				

Los usuarios dejan ver en sus respuestas en las hojas de trabajo nociones de fracciones equivalentes. La mayoría menciona que como resultado de simplificar $\frac{4}{10}$ se obtiene la fracción equivalente $\frac{2}{5}$. Sin embargo, también emergen otras cuestiones vinculadas a la idea de que el proceso de simplificación “achica a las fracciones”. Esto se observa en las expresiones escritas en las hojas de trabajo de 3 participantes: “le diría que es porque se simplifica, y Excel lo que hace automáticamente es dividir todo entre dos para reducir la fracción”; “porque excel simplifica la fracción. El resultado sin simplificar sería $\frac{4}{10}$, pero Excel lo divide entre 2 para que sea una fracción más pequeña”; “la fracción se simplifica, es decir no muestra números tan grandes. Fracciones equivalentes”. En la discusión colectiva, estas ideas erróneas pasaron desapercibidas.

Figura 4*Ejemplos referidos en las hojas de actividades*

	A	B	C
1	Fracción a	Fracción b	a*b
2	1/2	1/3	1/6
3	1/2	4/5	2/5
4	2/5	2/3	1/4
5	2/5	2/3	4/15
6	1/4	1 1/3	1/3

Ítem 2: Sin mostrarle su trabajo, Rodrigo le dice lo siguiente: -profé, calcule el producto de $1/2 * 11/20$, a ver cuánto le da. ¿Usted qué resultado obtiene? ¿Cómo le explicaría a su alumno lo que está haciendo la hoja de cálculo?

La mayoría de los usuarios configuraron el formato de las celdas usando la instrucción “hasta un dígito”, por ello, cuando digitaron $11/20$, la hoja de cálculo no pudo mostrar esa fracción, en cambio escribió $5/9$. Esto sorprendió a la mayoría, sin embargo, algunos usuarios no lo notaron. Otros usuarios que eligieron el formato “hasta tres dígitos” no observaron ese fenómeno en sus pantallas. Después de que algunos participantes comentaron la manera en que configuraron el formato de las celdas, se llegó al consenso de que era conveniente seleccionar en la hoja de cálculo el formato de celdas de fracción de “hasta tres dígitos”. En la discusión también se mencionó la relación que hay entre las fracciones $11/20$ y $5/9$. Algunos participantes externaron que, si se fijaban en la representación decimal de ambas fracciones, era posible notar que $5/9$ es una aproximación de $11/20$.

Una pregunta adicional que se planteó en ese momento fue ¿cómo saber qué tan buena es la aproximación que hace Excel? Como respuesta se mencionaron dos técnicas para valorarla: 1) hacer una sustracción, entre más cercana sea la resta a 0, mejor será la aproximación; 2) hacer una división, entre más cercano sea el cociente a 1, mejor será la aproximación. Por otro lado, en las hojas de trabajo se observó que un participante hizo un uso indistinto de los términos: simplificar y aproximar, refiriéndose a: “ $2/7 \leftarrow$ Resultado. Al configurar el formato de celdas, se deben escoger 2 dígitos para lograr que la aplicación no simplifique la fracción, ya que, al no configurarla, automáticamente buscará la fracción de 1 dígito + cercana”.

Ítem 3: Laura propuso los ejemplos que se muestran en la Figura 4, filas 4 y 5, y le pregunta ¿por qué los productos de las celdas C4 y C5 son distintos si tienen los mismos factores? ¿Cuál resultado es el correcto? ¿Cómo explicaría a la estudiante lo que está haciendo la hoja de cálculo?

La mayoría de los participantes respondieron en sus hojas de trabajo que esto se debe a la configuración de Excel, o al formato de las celdas, mencionaron que este planteamiento es similar al del ítem 2, y que $\frac{1}{4}$ es una aproximación de $\frac{4}{15}$. Algunos usuarios mostraron en sus hojas de trabajo que $\frac{1}{4}$ es equivalente a $\frac{4}{16}$. Sin embargo, hubo 2 usuarios que consideraron que ambos

resultados son correctos “los dos son correctos, solo lo diferente sería la configuración de la celda y aquí podemos enseñar las fracciones equivalentes, $\frac{1}{4}$ se aproxima a $\frac{4}{15}$ ”, “los dos resultados son correctos, pero se puede ver de dos maneras, ya que la configuración de las celdas decide si el resultado será de dos o de un dígito”. En este caso, se observa que los usuarios identifican el resultado, y atribuyen a la configuración del formato de las celdas el que no pueda escribirse el denominador de dos dígitos, por lo que concluyen que, en esencia, los dos son correctos. En la discusión se mencionó que eso se podía argumentar haciendo una aproximación por ensayo y error.

Ítem 4: Alejandro le comenta que la hoja de cálculo está haciendo algo raro, porque en la celda B6 que se muestra en la Figura 4, ha puesto una fracción y la hoja de cálculo ha escrito otra ¿qué está pasando? ¿Qué fracción ha escrito originalmente su alumno?

La mayoría de los usuarios argumentaron que Excel escribe las fracciones impropias en forma de fracción mixta. En sus respuestas usan expresiones como: “La computadora está haciendo” o “Excel está haciendo”, con lo cual ponen de manifiesto que están interpretando su funcionamiento. En la discusión, un usuario mencionó que de ser necesario usar fracciones impropias escritas en forma de fracción, se podrían usar las celdas como cajas para escribir los numeradores y denominadores de los factores y agregar el signo de multiplicación entre las celdas como se muestra en la Figura 5. Sin embargo, entre los mismos participantes surgió la discusión acerca de que un signo de multiplicación es suficiente, porque de lo contrario se fomenta entre los alumnos la idea de que el numerador y denominador de una fracción son números separados sin relación entre sí, lo cual puede ser contraproducente. Con respecto a la línea que divide al numerador del denominador, se mencionaron al menos dos formas de dibujarla usando herramientas de la hoja de cálculo.

Figura 5

Propuesta para escribir fracciones impropias en Excel

2		numerador	x	numerador
3		denominador	x	denominador

Ítem 6: ¿Cómo usaría la hoja de cálculo para mostrarle a sus alumnos que toda fracción multiplicada por 0 da como resultado 0?

En esta actividad, los usuarios propusieron distintas estrategias para mostrar en una situación de enseñanza que la propiedad mencionada se cumple “para toda fracción”. Por ejemplo: “cada quien elija la fracción que quiera y multiplíquela por cero. ¿Cuánto le da a cada quién?” “Que cada alumno realice la multiplicación $\times 0$ utilizando la fracción que cada uno quiera usar, sin restricción. —Dejar una celda vacía—. En este caso, la noción de arbitra-

riedad reside en que la propiedad se cumple cualesquiera sean las fracciones que los alumnos propongan. También algunos expresaron la arbitrariedad usando letras, por ejemplo “ $\frac{a}{b} * 0 = 0$; $\frac{a * 0}{b * 1} = \frac{0}{b}$ ”. Utilizando la propiedad de que cualquier número entero por cero da cero”. Además, un usuario manifestó esta idea diciendo “otorgarles un papelito de fracciones donde venga alguna fracción y casualmente das un 0, y posteriormente abrimos la introducción al tema”. En este caso, la noción de arbitrariedad se comunica a los estudiantes al elegir una fracción al azar escrita en papelitos que se colocan en un recipiente.

Estos son ejemplos de la producción de sentido de los usuarios para la expresión “toda fracción”, “una fracción cualquiera” o “una fracción arbitraria”. Finalmente, hay quienes expresan la idea de que se puede construir una calculadora en Excel para multiplicar fracciones en la que uno de los factores sea cero y el otro factor puede ser propuesto por los estudiantes; de esta manera se verá que el producto será cero en todos los casos.

En la discusión se mencionó que los participantes descubrieron que, al dejar una celda vacía en la calculadora para multiplicar fracciones, el software interpreta su valor como cero. Algo que ellos no notaron es que Excel no permite escribir fracciones con numerador igual a cero.

Entre las preguntas respecto a las actividades de división de fracciones, se encuentran los ítems 16 y 17 que se comentan a continuación.

Ítem 16: ¿Qué actividades propondría para ampliar el estudio del algoritmo de la división de fracciones?

Algunas de las respuestas que dieron los participantes fueron “hacer representaciones manuales o ilustradas para posteriormente plasmarlas en la hoja de cálculo”; “usar el método gráfico”; “proponer distintos casos: dividir entre 1, entre 0, por el mismo número”; “¿Qué pasa si divides una fracción entre cero? Y ¿Cero entre una fracción? ¿Es conmutativa? ¿Cómo se divide un entero entre una fracción? ¿Y una fracción entre un entero?”. Finalmente, en la discusión se mencionó que la división no es conmutativa como la multiplicación. Sin embargo, se aclaró que la multiplicación es conmutativa en contextos matemáticos totalmente numéricos, pero cuando consideramos la resolución de problemas aritméticos, la conmutatividad depende del contexto situacional, es decir, en algunos casos cambiar el orden de los factores puede hacer referencia al enunciado de otro problema, e incluso a otro modelo de la operación aritmética.

Ítem 17: ¿Qué dificultades podrían encontrar los estudiantes al construir una calculadora para dividir fracciones en Excel?

Los usuarios mencionaron que, con el uso previo de Excel para multiplicar fracciones, conocían mejor lo que se puede esperar para el caso de la división de fracciones. Sin embargo, una de las cosas que preocupó a los usuarios fue

que es muy probable que los estudiantes pregunten por la división entre cero. Una duda que externó uno de los participantes es sobre cómo clasificar a la fracción $\frac{8}{8}$. Se respondió que es una fracción equivalente a la unidad y no es propia ni impropia.

En resumen, los cuestionamientos principales que surgieron en las discusiones colectivas de la sesión 1 fueron, acerca de cómo la hoja de cálculo procesa la información que recibe. Específicamente, acerca del funcionamiento del software, el cambio de representación que hace de las fracciones y cómo los participantes utilizarían este recurso en clase.

En la Tabla 1 se resumen las actuaciones de los usuarios que participaron en la sesión 1, en términos de nociones, contenidos y estrategias.

Por un lado, en términos del Componente Formal, los usuarios pudieron darse cuenta de las limitaciones de Excel y, al mismo tiempo, identificar áreas de oportunidad para estudiar: 1) fracciones equivalentes; 2) los números enteros como fracciones; 3) la relación entre fracciones impropias y mixtas; 4) los algoritmos de la multiplicación y división de fracciones; y 5) los recursos a los que recurren para estudiar la multiplicación y división de fracciones, y su propio conocimiento sobre ellas, particularmente sobre su representación decimal, pues reconocieron cómo emplearon dicha representación en el ítem 2.

Por otro lado, en términos del Componente de Modelos de Comunicación, se observó que los participantes usaron expresiones como “Excel está haciendo”, esto condujo a la reflexión colectiva acerca de Excel como una calculadora muy particular en la que no solo se puede configurar el formato de los números que puede procesar, sino también su visualización. Es posible usar otros elementos, por ejemplo, colores para resaltar celdas y poner énfasis en determinadas relaciones; los usuarios emplearon colores para ilustrar la propiedad de conmutatividad de la multiplicación. En la discusión, ellos ampliaron esta idea mencionando que cuando se combinan dos colores diferentes de pintura, no importa el orden en el cual se mezclen, el color de la pintura que se obtiene es el mismo.

Dentro del marco de uso de la hoja de cálculo, los participantes señalaron que, para que el resultado de una multiplicación de fracciones sea la unidad, es indispensable multiplicar una fracción propia con una impropia. Sin embargo, Excel representaría esta última como una fracción mixta. Esto podría dificultar que los estudiantes noten que los factores son, necesariamente, fracciones recíprocas entre sí. En la discusión mencionaron estrategias que emplearían para guiar a los estudiantes a observar esa relación, estas incluían modificar aspectos de la visualización de Excel y escribir a las fracciones mixtas como impropias usando papel y lápiz.

Con relación al Componente de Procesos Cognitivos se identifica que en las actuaciones generales de los usuarios, ellos discutieron sobre el

concepto de multiplicación de fracciones. Los participantes del taller también reflexionaron acerca de las posibles dificultades con las que se pueden enfrentar los estudiantes al hacer estas actividades en Excel, -esto se relaciona con el Componente de Modelos de Enseñanza-. Y finalmente, respecto al uso de la tecnología digital, principalmente para el diseño de tareas en función de las características del software.

Tabla 1

Nociones, contenidos y estrategias relacionados con los componentes del MTL en la sesión 1

Componentes del MTL	Nociones, contenidos y estrategias
1. Modelos de competencia formal	1a. Fracciones equivalentes
	1b. Los números enteros como fracciones
	1c. Fracciones impropias y mixtas
	1d. Algoritmos para la multiplicación y división de fracciones
	1e. Representación decimal de las fracciones
2. Modelos de enseñanza	2a. Dificultades de los estudiantes al usar Excel
	2b. Enseñanza de los algoritmos para multiplicar y dividir fracciones
	2c. Estrategias para generar fracciones arbitrarias
3. Modelos de comunicación	3a. Excel como calculadora configurable
	3b. Visualización en Excel
	3c. Uso de lápiz y papel para hacer cálculos con fracciones mixtas
4. Modelos de procesos cognitivos	4a. Diseño de tareas sobre la multiplicación y división de fracciones en Excel
	4b. Posibilidades y limitaciones de Excel como herramienta cognitiva
	4c. Desarrollo de estrategias para compensar las limitaciones de Excel

Sesión 2: modelos para la multiplicación y división de fracciones

Ítem 1: Sara no está segura por qué cuando se multiplican dos fracciones como $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ se permite multiplicar directo. Qué explicación le daría a Sara sobre el porqué este método funciona.

En la discusión se mencionó cómo a veces solo se responde: “es que así es, así se hace”, y esas son respuestas muy limitadas. Los participantes estaban invitados a escribir la manera en la que ellos mismos se explicaban la validez del algoritmo; en las respuestas hubo quienes mencionaron que, si un medio

se multiplicara por dos y luego se dividiera entre tres, se obtenía el mismo resultado que al multiplicar directo. Algunos mencionaron que el procedimiento consiste en tomar la mitad de $\frac{2}{3}$. Otros, que se apoyarían en una representación gráfica, que usarían las representaciones decimales para multiplicarlas, y luego expresarían el producto como fracción.

Otras justificaciones fueron: “al igual que los números naturales \mathbb{N} se multiplican de forma directa, una fracción es exactamente lo mismo, pero representado de otra forma debido a que pertenece a otro conjunto de números \mathbb{Q} ”. “Que toda multiplicación se realiza de manera directa y no hay otro método, lo mismo pasa si se convierte a decimal”. Se concluyó que podemos recurrir a otras representaciones para interpretar el producto, y que también es posible usar Excel como calculadora y preguntar a los estudiantes ¿cómo obtener el número del producto a partir de los números de los factores?, en correspondencia con el enfoque de Telesecundaria (SEP, 2019a).

Ítem 2: Henry está tratando de calcular $\frac{1}{4} \cdot 3\frac{3}{5}$. A continuación, se muestran su razonamiento y cálculos. ¿Es válido el método de Henry? ¿Por qué sí o por qué no? Haga los cálculos para comparar.

$$1\frac{1}{4} \times 3\frac{3}{5} = (1 \times 3) + (1\frac{1}{4} \times \frac{3}{5})$$

$$3 + \frac{3}{20} = 3\frac{3}{20}$$

Uno de los asistentes pasó al pizarrón para efectuar la operación y mostró que el resultado de Henry fue incorrecto. En la discusión se mencionó que la igualdad que Henry escribe no es válida y debería de tener una adición de 4 sumandos en lugar de los 2 que tiene.

El método de comprobación al que más recurrieron los participantes fue reescribir las fracciones mixtas en forma de fracciones impropias y multiplicarlas. Otro participante usó la representación decimal de las fracciones y las multiplicó, luego, expresó el resultado de Henry en su representación decimal, comparó los valores y concluyó que eran distintos. En la discusión se comentó que una fracción mixta se descompone en la suma del entero y la fracción y no representa el producto del entero por la fracción.

Después de discutir sobre los ítems 1 y 2, se proyectó el recurso educativo audiovisual de Telesecundaria titulado: “La didáctica de la multiplicación de fracciones positivas y negativas” (SEP, 2019a). Tras su proyección, se generó un debate acerca del contenido, centrado en cómo elaborar una representación gráfica del modelo de área para la multiplicación de fracciones. Un participante se acercó al pizarrón para ilustrar la multiplicación de fracciones utilizando dicho modelo. En general, la mayoría de los presentes estaba familiarizada con esa forma de representación.

Ítem 6: Daniela dice que ella prefiere dividir fracciones de manera similar a cómo se multiplican. Por ejemplo $\frac{2}{9} \div \frac{1}{3} = \frac{2 \div 1}{9 \div 3} = \frac{2}{3}$. ¿Aceptaría la propuesta de Daniela? ¿Por qué?

En el aula, la opinión estaba dividida al respecto de si el método de Daniela era válido o no. Los participantes comentaron que utilizaron el algoritmo de Daniela para dividir otras fracciones y obtenían respuestas correctas. Uno de los participantes incluso comentó que sería buena idea enseñar a los estudiantes a dividir usando ese algoritmo.

Una participante insistía en que el algoritmo no podía ser válido, por lo que se le pidió un contraejemplo. Otro de los participantes se convenció de que el método era válido porque en realidad se hacía algo similar al algoritmo, que consiste en multiplicar medios por medios y extremos por extremos. Se le pidió pasar al pizarrón a probar la validez del algoritmo. El participante usó letras en vez de números para representar a las fracciones y, aunque hubo pasos en los que dudaba, continuó con su demostración hasta que pudo expresar la equivalencia de las expresiones:

$$\frac{a \div b}{c \div d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

La participante que estaba buscando un contraejemplo mencionó que si a, b, c y d son números que no tienen factores en común, al final se tiene que recurrir a otro algoritmo para hacer la división.

En la plenaria se llegó al consenso de que el método es válido, solo que cuando a y b , por un lado y c y d por el otro, tienen factores en común, entonces el algoritmo es simple en términos operativos, de lo contrario se tiene que recurrir a otros algoritmos para calcular el cociente.

En la Tabla 2 se resumen las nociones, conceptos y estrategias que se identificaron en las competencias de los participantes durante la sesión 2, es decir, en el conjunto de sus actuaciones.

Sesión 3: representación gráfica de la multiplicación y división de fracciones

A la última sesión del taller asistieron menos de la mitad de los participantes por ser de las últimas actividades del Congreso. Se repartieron las hojas de trabajo, pero solo para comentar las actividades propuestas. En virtud de que ya anteriormente se había discutido acerca de la representación gráfica de la multiplicación de fracciones con base en un modelo de área, se tomó la decisión de dedicar la última parte del taller a ese modelo de la división.

En las hojas de trabajo se les proporcionó a los asistentes el ejemplo de la interpretación gráfica de la división de $\frac{3}{5}$ entre $\frac{1}{3}$, que se muestra en la Figura 6, con base en la interpretación de Lamon (2012, pp. 200–201). Uno de los investigadores que dirigió el taller desarrolló el ejemplo en el pizarrón

con la finalidad de discutir acerca del procedimiento propuesto. Los asistentes comentaron que ninguno de ellos había visto antes la representación gráfica de la división de fracciones y solamente la conocían para el caso de la multiplicación de fracciones.

Tabla 2

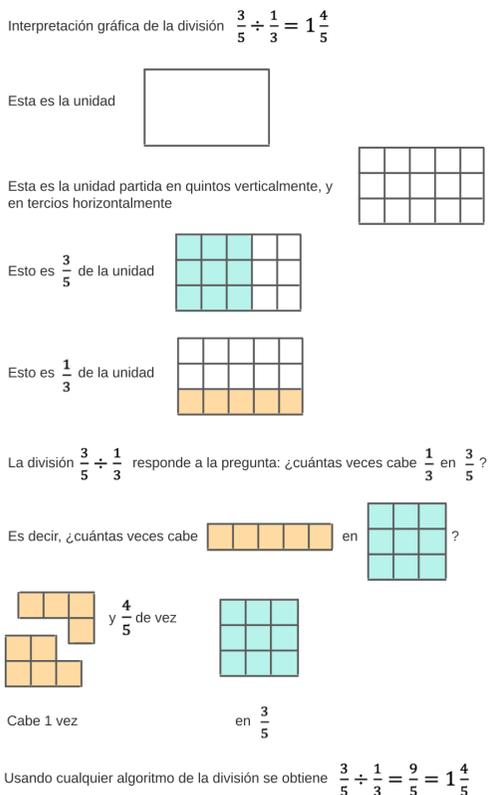
Nociones, contenidos y estrategias relacionados con los componentes del MTL en la sesión 2

Componentes del MTL	Nociones, contenidos y estrategias
1. Modelos de competencia formal	1a. Algoritmo de la multiplicación y la división de fracciones
	1b. Fracciones mixtas
	1c. Simplificación de fracciones
	1d. Fracciones arbitrarias
	1e. Representación decimal de las fracciones
2. Modelos de enseñanza	2a. Representación gráfica de la multiplicación de fracciones con el modelo de área
	2b. Los diferentes algoritmos para dividir fracciones
3. Modelos de comunicación	3a. Uso de lápiz y papel para hacer multiplicaciones y divisiones con fracciones
4. Modelos de procesos cognitivos	4a. La demostración en matemáticas
	4b. El uso de contraejemplos

Como parte de la discusión que originó el uso de la representación gráfica, se pidió a los asistentes que reflexionaran acerca de la pregunta ¿cuántas veces cabe una fracción en otra?, y sobre la posibilidad de plantearnos la pregunta en los mismos términos de ‘cuántas veces cabe un número en otro’. Se concluyó que esa pregunta es válida para cualquier clase de números y que, en el caso de las fracciones, incluso plantearse esa pregunta puede proporcionarnos el cociente sin tener que usar un algoritmo escrito para encontrarlo. Por ejemplo, en el caso de la división $\frac{1}{2}$ entre $\frac{1}{4}$, si uno se pregunta ¿cuántas veces cabe un cuarto en un medio?, la pregunta se puede responder en virtud de que $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{2}{4}$, y por lo tanto, $\frac{1}{4}$ cabe dos veces en un $\frac{1}{2}$. Esta cuestión se asocia al significado de la división cuotitiva, en contraparte de la división partitiva, en la que la pregunta se relaciona con cuánto le toca a cada quién en un reparto, por ejemplo.

Figura 6

Representación gráfica de la división de fracciones usando un modelo de área



En la Tabla 3 se resumen las nociones, contenidos y estrategias que se observaron en la sesión 3.

Tabla 3

Nociones, contenidos y estrategias relacionados con los componentes del MTL en la sesión 3

Componentes del MTL	Nociones, contenidos y estrategias
1. Modelos de competencia formal	1a. Significado de la fracción como parte todo
	1b. Equivalencia de fracciones
	1c. Definición de dividendo, divisor y cociente
	1d. La división coutitiva y partitiva
2. Modelos de enseñanza	2a. Modelo de área para representar la división de fracciones
3. Modelos de comunicación	3a. Representación gráfica para la división de fracciones
	3b. Visualización en matemáticas
4. Modelos de procesos cognitivos	4a. Interpretación del dividendo, divisor y cociente

CONCLUSIONES

Aunque la hoja de cálculo no fue diseñada específicamente para el ámbito educativo, en este documento hemos destacado su propuesta de uso tanto en Telesecundaria, como en diversos proyectos de investigación. Es esencial seguir explorando el diseño de tareas que integren su aplicación, con el fin de identificar sus potenciales beneficios. Esto nos orientará hacia una comprensión más profunda del papel de la hoja de cálculo en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En este capítulo se muestra parte de una secuencia de actividades que involucra el uso de esa hoja de cálculo para multiplicar y dividir fracciones. Las fracciones que el usuario digita en Excel no siempre son las mismas que las que aparecen en pantalla, pues en las actividades que se analizan en este capítulo se señalan al menos tres procesos que efectúa el software: 1) simplificar, 2) aproximar y 3) reescribir. Esto induce al usuario de la hoja de cálculo a un proceso de descodificación, que en el estudio exploratorio para validar la secuencia de actividades se observó que se da de manera espontánea en el razonamiento de algunos usuarios, pero no para todos, porque no todos verifican los cálculos de Excel. Sin embargo, luego de las discusiones y reflexiones colectivas, todos los usuarios pudieron participar de ese proceso de descodificación.

Las hojas de cálculo que usaron los participantes en el taller no estaban prediseñadas, pues no se les proporcionó ningún archivo elaborado previamente. Tampoco hubo una introducción con respecto al uso de Excel, de modo que las actividades propuestas en las hojas de trabajo sirvieron como guías para los asistentes al taller en su recorrido al explorar las funciones del software. La secuencia de actividades que se diseñó es una propuesta de cómo se pueden superar las dificultades que surgen al usar Excel para multiplicar y dividir fracciones, tomando como base sus áreas de oportunidad para reflexionar acerca del funcionamiento de esa calculadora particular.

Los participantes se involucraron en las actividades, reflexiones y discusiones; de esta manera tuvieron la oportunidad de probar sus ideas, así como de desarrollar otras como resultado de sus reflexiones personales y colectivas. Esto apunta a que el enfoque reflexión-discusión con el que se diseñó la secuencia de actividades ha favorecido el uso de Excel como herramienta cognitiva. Más aún, de las demás tecnologías digitales que se emplearon, y también de las hojas de trabajo.

La interacción de los asistentes con los recursos educativos de Telesecundaria se percibe como una oportunidad de aprendizaje. La interactividad de Excel, su adaptabilidad en la ejecución de tareas y cuestionamientos planteados en los ítems motivaron a los participantes a formularse preguntas e involucrarse en la ampliación de sus propios conocimientos acerca de los conceptos de multiplicación y división de fracciones. Se ha observado que

Excel puede ser usado como herramienta cognitiva para estudiar estos conceptos dada la forma en que el software opera con las fracciones. Así mismo, induce un proceso de decodificación por parte de los usuarios que los lleva a formular hipótesis acerca de su funcionamiento y de la relación que guardan las fracciones que el usuario digita y las que Excel escribe.

En cuanto al diseño de la recopilación de datos, se notó que la información reunida en las hojas de trabajo ayudó a identificar aspectos que no se manifestaron durante las discusiones. Estos aspectos están principalmente vinculados a concepciones erróneas por parte de los participantes.

Para concluir la segunda fase en la construcción del MTL, el taller se deberá llevar a cabo con la participación de profesores de Telesecundaria en servicio. Se considera que habría que incluir en las discusiones, las ideas erróneas que se identificaron con el grupo que participó en el estudio exploratorio, y que tienen que ver con los procesos de simplificación y aproximación de fracciones.

Al concluir el recurso audiovisual “Tutorial para calcular el producto de fracciones”, se destaca que dentro del Drive asociado a las cuentas de Gmail, se dispone de una aplicación gratuita que funciona como hoja de cálculo y que puede utilizarse en línea, dada la consideración de Excel como una marca registrada. En el marco de la investigación en curso, se examinó no solo Excel, sino también las hojas de cálculo de GeoGebra y Google Sheets en relación con la multiplicación de fracciones. Se identificó que el empleo de diferentes hojas de cálculo ofrece variadas oportunidades reflexivas, ya que cada una representa y opera las fracciones de manera particular.

El componente de Modelos de Competencia Formal ha servido, entre otras cosas, como una herramienta para caracterizar el componente de Modelos de Enseñanza de Telesecundaria sobre la multiplicación y división de fracciones. Conocer el Modelo de Enseñanza ha permitido formular la hipótesis de la investigación, así como el diseño de la secuencia de actividades. La validación de la secuencia ha implicado el desarrollo de un taller en el que los usuarios de Excel piensen en un proceso de decodificación de su funcionamiento como calculadora configurable; esto ha dado información respecto a su uso como herramienta cognitiva en el sentido de Arcavi (2020) y se relaciona con el Componente de Modelos de Comunicación.

Finalmente, el estudio exploratorio ha informado sobre las competencias de los usuarios de acuerdo con Puig (2008), es decir, ha proporcionado un catálogo de las actuaciones de los participantes que, a su vez, ha permitido identificar las nociones, contenidos y estrategias que emergen al desarrollar las actividades propuestas, lo cual forma parte del Componente de los Procesos Cognitivos.

Los resultados del estudio exploratorio nos permiten concluir que la hipótesis global de la investigación es plausible: el Modelo de Enseñanza

para la multiplicación y división de las fracciones de Telesecundaria es un ambiente potencial para que los profesores enriquezcan sus conocimientos acerca de esos conceptos, su enseñanza y la integración de tecnología digital en su práctica docente. Se trata de una hipótesis que tuvo origen una vez que se construyó el componente Modelos de Enseñanza del MTL, y que en virtud del estudio exploratorio se refuerza. Con la salvedad de que los elementos de reflexión y discusión que se han incorporado al análisis de Excel, en este caso, así como la ampliación del contenido hacia el concepto división de fracciones, parecen ser relevantes en términos de la producción de sentido que menciona Puig (2008), que consiste en la descodificación de los mensajes emitidos por Excel, y los otros recursos digitales mencionados que tratan sobre varios conceptos vinculados con las fracciones.

REFERENCIAS

- Angel, A., Figueras, O. & Valenzuela, C. (2022). Una herramienta para analizar recursos educativos de Telesecundaria: el caso de la división de fracciones. En T. F. Blanco, C. Nuñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 139–147). SEIEM. <https://bit.ly/3KKfMfu>
- Arcavi, A. (2020). From tools to resources in the professional development of mathematics teachers: General perspectives and crosscutting issues. En O. Chapman & S. Llinares (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (Volume 2, pp. 421–437). Brill. https://doi.org/10.1163/9789004418967_016
- Ball, D. L. (1990). The mathematical understanding that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, 90(4), 449–466. <https://doi.org/10.1086/461626>
- Calixto, R., & Rebollar, A. M. (2008). La telesecundaria ante la sociedad del conocimiento. *Revista Iberoamericana de Educación*, 44(7), 1–11. <https://doi.org/10.35362/rie4472187>
- Drier, H. S. (2001). Teaching and learning mathematics with interactive spreadsheets. *School science and mathematics*, 101(4), 170–179. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2001.tb18020.x>
- Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Fuglestad, A. B. (2008). Developing tasks and teaching with ICT in mathematics in an inquiry community. En Pitta-Pantazi, D. & Philippou, G. (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1409–1418). CERME. <https://bit.ly/3QLUXnV>
- Hegedus, S. J., & Moreno-Armella, L. (2009). Introduction: The transformative nature of “dynamic” educational technology. *ZDM*, 41(4), 397–398. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0201-9>

- Lamon, S. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Routledge.
- Pepin, B., Guedet, G. & Trouche, L. (2013). Re-sourcing teachers' work and interactions: a collective perspective on resources, their use and transformation. *ZDM*, 45, 929–943. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-05342>
- Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 2(3), 87–107. <https://doi.org/10.30827/pna.v2i3.6199>
- Rezat, S. (2012). Interactions of teachers' and students' use of Mathematics textbooks. En G. Guedet, B. Pepin & L. Trouche (Eds.), *From text to 'lived' resources: mathematics curriculum materials and teacher development*, *Mathematics Teacher Education* (Vol. 7, pp. 231–446). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-1966-8>
- Secretaría de Educación Pública. (2010). *La telesecundaria en México: un breve recorrido histórico por sus datos y relatos*. SEP. <https://bit.ly/45fRIJJ>
- Secretaría de Educación Pública. (2019a). *Libro para el maestro. Matemáticas. Primer grado. Telesecundaria* (2.ª ed.). SEP. <https://bit.ly/3Oz65la>
- Secretaría de Educación Pública. (2019b). *Matemáticas. Telesecundaria. Primer grado* (2.ª ed.). Secretaría de Educación Pública. <https://bit.ly/45CjzDV>
- Secretaría de Educación Pública. (2000). *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo. Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología*. SEP.
- Secretaría de Educación Pública. (2021). *Principales cifras del sistema educativo nacional 2020–2021*. SEP. <https://bit.ly/44ogvu8>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2017). Hard Lessons: Why Rational Number Arithmetic Is So Difficult for So Many People. *Current Directions in Psychological Science*, 26(4), 346–351. <https://doi.org/10.1177/0963721417700129>
- Tirosh, D. (2000). Prospective Teachers' Knowledge of Children's Conceptions: The Case of Division of Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 5–25. <https://doi.org/10.2307/749817>
- Whitehead, A. N., & Walkowiak, T. A. (2017). Preservice Elementary Teachers' Understanding of Operations for Fraction Multiplication and Division. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 18(3), 293–317. <https://doi.org/10.4256/ijmtl.v18i3>

