

Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos de profesores noveles para la enseñanza de las razones trigonométricas

Rosalía Belén Bouix ¹ 

Belén Giacomone ² 

Manuel Alejandro Verón ³ 

Resumen

En este trabajo se presentan las ideas principales de una investigación en curso que describe y evalúa los conocimientos didáctico-matemáticos que manifiesta un grupo de 15 profesores noveles en la enseñanza de las razones trigonométricas. Se abordan el planteamiento del problema, los objetivos, el marco teórico, la metodología y una primera versión del instrumento de recolección de datos. A partir de una síntesis de estudios previos, se analiza la complejidad de los objetos y procesos matemáticos implicados y se justifica la relevancia de ciertos conocimientos para su enseñanza. La sistematización y la evaluación de estos conocimientos se realizan con herramientas de la perspectiva ontosemiótica, entre ellas la idoneidad didáctica y la configuración de prácticas, objetos y procesos. Se espera que los resultados permitan identificar dificultades frecuentes y fundamentar acciones formativas dirigidas a futuros docentes de matemáticas.

Palabras clave: razones trigonométricas, conocimientos didáctico-matemáticos, profesores noveles, perspectiva ontosemiótica, educación secundaria.

¹ rosaliabouix@gmail.com

Universidad Nacional de La Plata, Buenos Aires, Argentina

² belen.giacomone@unirmsm

Università della Repubblica di San Marino, Dogana, San Marino

³ averon@ub.edu

Universitat de Barcelona, Barcelona, España

Introducción

En el campo de la educación matemática, la literatura ubica la trigonometría como un ámbito propicio para explorar, conectar y relacionar ideas matemáticas, además de integrar distintas disciplinas científicas. Su estudio ofrece oportunidades para resolver problemas y requiere habilidades de razonamiento, así como competencias para la demostración de teoremas. También cumple un papel relevante en el desarrollo del pensamiento matemático, pues favorece el discurso matemático, la creatividad y la innovación en los estudiantes (Thomas & Finney, 1996).

En un plano más específico, Weber (2005) señala que la trigonometría es uno de los primeros campos matemáticos en los que convergen razonamientos algebraicos, geométricos y gráficos. Flores (2008) también resalta su relevancia por su aporte a la resolución de problemas del mundo real mediante aplicaciones prácticas de las matemáticas. Dada su relevancia y sus aplicaciones inter e intradisciplinarias, conviene identificar las dificultades presentes en su enseñanza y aprendizaje para orientar de mejor modo la gestión del conocimiento por parte de docentes y estudiantes.

Diversas investigaciones avanzan en esta línea e identifican dificultades en la enseñanza de la trigonometría que afectan de forma directa la comprensión de los estudiantes. Uno de los problemas recurrentes es la escasa conexión entre conocimientos previos y nuevos, lo que dificulta la integración de los aprendizajes. Este fenómeno se manifiesta en lo que Cruz-Márquez y Montiel Espinosa (2022) y Espinosa y Cortés (2014) denominan “arritmetización trigonométrica”, una orientación que prioriza las operaciones algebraicas sobre las construcciones geométricas y limita la comprensión conceptual de las razones trigonométricas. Coincidimos con estos estudios, puesto que el trabajo centrado solo en fórmulas restringe la comprensión contextual del contenido.

A su vez, estudios como los de Domínguez Hernández y Ossa Marín (2020) y Triana y Tobar (2015) muestran que los vacíos conceptuales y las metodologías de enseñanza poco pertinentes contribuyen a la confusión de nociones centrales entre los estudiantes. Esto refuerza la necesidad de una formación docente que articule el conocimiento matemático con el didáctico-matemático y ayude al profesor a tomar decisiones fundamentadas en el aula.

Fernández et al. (2016) resaltan la importancia de diversificar los significados y los contextos al enseñar trigonometría, con una propuesta más dinámica y contextualizada que favorezca la conexión con situaciones prácticas y cotidianas. De modo complementario, Malambo (2021) indica que muchos futuros docentes muestran un razonamiento superficial y carecen de conexiones conceptuales necesarias dentro del campo de la

trigonometría, lo que vuelve necesaria una formación didáctica más consistente, tanto en el plano conceptual como en el pedagógico.

Estos antecedentes evidencian la necesidad de continuar con el estudio del conocimiento de los profesores de matemáticas para comprender sus dificultades en la enseñanza de la trigonometría y, a la vez, revisar acciones pertinentes desde la formación inicial. En este contexto, el presente trabajo propone un estudio para describir el conocimiento didáctico-matemático de profesores noveles de educación secundaria en ejercicio, con atención en las dimensiones epistémica, cognitiva y ecológica de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El problema de investigación se aborda desde la perspectiva ontosemiótica del conocimiento y la instrucción matemáticos, desarrollada por Godino y colaboradores desde hace varios años (Godino et al., 2007; Godino, 2024).

Teniendo en cuenta esta concepción ontosemiótica del conocimiento necesario para la enseñanza, a continuación, se describe el problema específico de investigación.

Problema específico de investigación

Desde este marco, nos planteamos indagar qué conocimientos didáctico-matemáticos manifiesta un grupo de profesores noveles de matemáticas de educación secundaria para la enseñanza de las razones trigonométricas. Para ello, se formulan dos preguntas específicas. La primera busca determinar qué conocimientos didáctico-matemáticos, epistémicos, cognitivos y ecológicos, debería desarrollar un profesor para optimizar los procesos de enseñanza de las razones trigonométricas. La segunda se centra en analizar las configuraciones de objetos y procesos que un grupo de profesores utiliza al resolver una serie de problemas seleccionados sobre este tema. Las herramientas teórico-metodológicas que sustentan el análisis y la interpretación de los resultados se describen a continuación.

Marco teórico

La perspectiva ontosemiótica se centra en la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje a través de la interrelación entre los conocimientos matemáticos, los significados y los contextos de uso. Desde esta perspectiva, se adopta el modelo de conocimiento didáctico-matemático (CDM) del profesor de matemáticas (Godino, 2009; Pino-Fan & Godino, 2015), que interpreta y caracteriza los conocimientos didáctico-matemáticos que el profesor debería desarrollar para una enseñanza pertinente de las matemáticas. Este modelo considera seis facetas de este conocimiento, a saber, epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional.

En esta investigación, se aplican los principios del EOS al análisis de cómo los profesores noveles de matemáticas construyen y movilizan sus conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de las razones trigonométricas. Con herramientas de la perspectiva ontosemiótica, como los sistemas de indicadores y la noción de idoneidad didáctica, se identifican las competencias que estos docentes desarrollan y los significados que atribuyen a los conceptos trigonométricos en distintos contextos educativos.

Sistemas de prácticas ligadas a tipos de problemas

Para el EOS, la actividad de resolución de situaciones-problemas es central en la construcción del conocimiento. En esa actividad se pone en juego un sistema de prácticas matemáticas, entendido como “toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino & Batanero, 1994, p. 334). Las prácticas introducen la noción de significado de los objetos matemáticos, personal cuando las realiza una persona e institucional cuando se comparten en el seno de una institución. Es importante la noción de significado institucional de referencia de un tema de estudio, en este caso las razones trigonométricas, porque orienta el análisis sistemático de la literatura hacia la identificación de los diversos significados contextuales de los objetos y su articulación en un significado global. Ese significado global se considera la población de referencia de situaciones-problemas, de la cual se seleccionarán muestras pertinentes a las circunstancias particulares de los procesos que se pretende diseñar y que servirán de base para la construcción del cuestionario con el que se describirán los conocimientos de los profesores implicados.

Configuración de prácticas, procesos y objetos matemáticos

La configuración ontosemiótica responde a la necesidad de identificar los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas resolutivas (Godino et al., 2011). En el EOS se postulan seis tipos de objetos matemáticos primarios, tipos de problemas, lenguajes, conceptos-definiciones, procedimientos, proposiciones y argumentos.

Estos objetos intervienen en las prácticas matemáticas en su faceta personal e institucional y se relacionan mediante procesos matemáticos. “La constitución de los objetos lingüísticos, problemas, conceptos-definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos primarios de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, etc.) y argumentación” (Godino, 2024, p. 77).

Se trata de una herramienta teórica y metodológica útil para describir el conocimiento implicado en las prácticas matemáticas tanto institucionales,

previstas en el cuestionario que se aplicará, como también, personales, para describir el conocimiento de los participantes de este estudio.

Idoneidad didáctica

Para evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos, es necesario sistematizar los resultados de investigaciones previas y obtener criterios que orienten los procesos de enseñanza de las razones trigonométricas. Esto implica centrar la atención en la reconstrucción de una parte del sistema global de referencia del tema. A través de la revisión de investigaciones previas y documentos oficiales, se busca analizar los CDM de las facetas epistémica, cognitiva y ecológica que inciden en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Los indicadores de idoneidad sirven de base para formular criterios e indicadores específicos con foco en las facetas epistémica, cognitiva y ecológica, que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas en educación secundaria. Además, orientan la revisión y el análisis de documentos oficiales, como el Diseño Curricular Jurisdiccional (DCJ) y los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP). De este modo, se podrá elaborar un marco de referencia con los aspectos más relevantes de la formación vinculada con la enseñanza y el aprendizaje de las razones trigonométricas. De este análisis se desprende que los significados seleccionados para la construcción del cuestionario deben ser representativos de ese significado global y ofrecer riqueza de procesos en su desarrollo (Breda et al., 2018).

El enfoque ontosemiótico propone un sistema de criterios e indicadores generales de idoneidad didáctica (Godino, 2013), que orientan juicios de valor tales sobre cómo los procesos debería de hacer esto y no aquello, especialmente en situaciones donde estos juicios tienen una dimensión social y cuentan con una base explícita para su formulación. Para evaluar, conocimientos didáctico-matemáticos guiarán la revisión del DCJ y de los profesores NAP participantes, para construir los resultados de investigaciones previas y obtener criterios específicos que optimicen los procesos de enseñanza de las razones trigonométricas.

Esto implica centrar la atención en la reconstrucción de una parte del sistema global de referencia del tema. ¿Cómo? Los indicadores generales guiarán la revisión y análisis de los documentos oficiales como el DCJ y NAP, lo cual permitirá conocer y elaborar un marco de referencia con los aspectos más relevantes que se espera tornen a la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas.

A este análisis se sigue que los significados seleccionados para la construcción del cuestionario que se aplicará a los profesores participantes deben ser representativos de dicho significado global del contenido y

ofrecer variedad de procesos en su desarrollo, como señalan Breda et al. (2018).

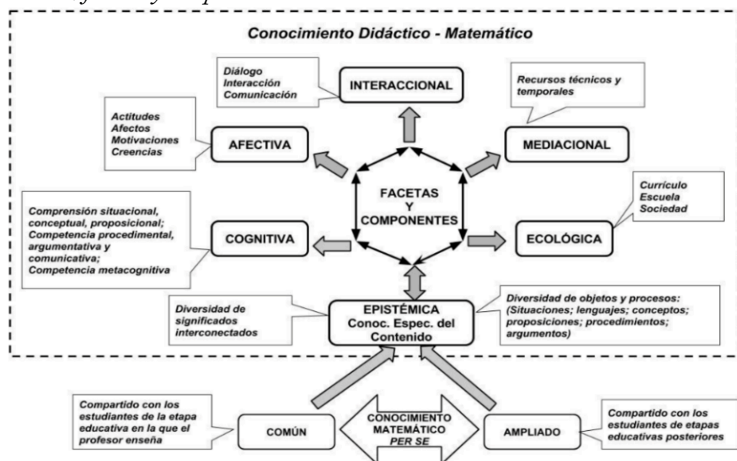
Modelo de conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemáticas

En el campo de la formación de profesores de matemáticas, se proponen diversos modelos teóricos para analizar el conocimiento necesario para enseñar la disciplina (Ball et al., 2008; Shulman, 1986; Van Es & Sherin, 2008). Se opta por la perspectiva ontosemiótica por su capacidad para articular, de forma específica, los elementos de estos modelos (Godino, 2009). A diferencia de las propuestas que analizan los componentes por separado, el EOS ayuda a analizar la interacción de estos conocimientos en el contexto real del aula (Pino-Fan & Godino, 2015), aspecto relevante para valorar las competencias didáctico-matemáticas de los profesores en la enseñanza de las razones trigonométricas.

En el EOS se plantea un sistema de categorías de análisis de los conocimientos matemáticos y didácticos del profesor. Se trata de una modelización del conocimiento matemático, en su doble faceta epistémica (institucional) y cognitiva (personal), “basada en una aproximación antropológica (la matemática como actividad humana) y ontosemiótica (en la que la noción de objeto y significado son centrales)” (Godino et al., 2017, p. 95).

El sistema de categorías establecido determina el modelo del conocimiento didáctico-matemático (Figura 1) descrito en Godino et al. (2016).

Figura 1
Dimensiones, facetas y componentes del Modelo CDM



Nota. Fuente: Godino et al. (2016, p. 292)

El profesor debe conocer las matemáticas que enseña a sus estudiantes (*conocimiento matemático per se*) que en el modelo propuesto desde el EOS constituyen *los conocimientos matemáticos común* (correspondiente al nivel en que se enseña) y *ampliado* (relativos a niveles superiores).

La literatura señala que el dominio exclusivo de los contenidos matemáticos no basta para una enseñanza pertinente de las matemáticas (Ball et al., 2001; Hill et al., 2008; Shulman, 1987). Los factores que intervienen en estos procesos son complejos, por lo que es necesario que los docentes cuenten con un conocimiento más amplio tanto de las matemáticas como de su enseñanza. A ese conocimiento se lo denomina didáctico-matemático y se distingue del que adquieren los estudiantes.

Así, con la dimensión didáctico-matemática se delinearán otros conocimientos que debería tener el profesor, caracterizados por seis facetas, a partir del contenido matemático que se quiere enseñar. La *faceta epistémica* es el conocimiento de los diferentes significados de los objetos matemáticos según el contexto y los procesos involucrados. En el caso de las razones trigonométricas, implica conocer cómo se definen en el círculo unitario o en un triángulo rectángulo, y cómo esas definiciones cambian según el punto de vista algebraico o geométrico.

La *faceta cognitiva* implica el conocimiento de cómo los estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas, y cómo progresan en su aprendizaje. Para las razones trigonométricas, implica comprender cómo los estudiantes pasan de memorizar fórmulas a entender conceptualmente la relación entre las razones, los ángulos y los lados de un triángulo.

La *faceta afectiva* reúne conocimientos sobre los aspectos emocionales, actitudinales y las creencias de los estudiantes en relación con los objetos matemáticos y con el proceso de aprendizaje. En este caso, implica reconocer las actitudes negativas de los estudiantes hacia las matemáticas o la trigonometría y considerar vías para superar esos bloqueos emocionales.

La *faceta interaccional* se refiere al conocimiento sobre las interacciones entre alumnos, docente y contenido, junto con la organización de tareas, la resolución de problemas y las posibles interacciones en el aula. Para las razones trigonométricas, esto podría suponer el diseño de actividades en las que los estudiantes trabajen con gráficos y cálculos trigonométricos, así como propuestas de trabajo colaborativo para resolver problemas prácticos en contextos reales.

La *faceta mediacional* es el conocimiento sobre los recursos apropiados para potenciar el aprendizaje. En el caso de las razones trigonométricas, podría implicar el uso de software gráfico para ayudar a los estudiantes a visualizar las relaciones entre ángulos y lados en un triángulo.

Finalmente, la faceta ecológica se refiere al conocimiento del currículo y de su relación con otros currículos, así como con los aspectos sociales,

políticos y económicos. En este caso, podría implicar cómo las razones trigonométricas se relacionan con otros temas del currículo de matemáticas, como el cálculo, o cómo se aplican en áreas como la ingeniería.

Como se observa en la Figura 1, todas estas facetas se relacionan entre sí, y forman parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En el EOS, este conocimiento corresponde al conocimiento didáctico-matemático, en la medida en que tales procesos implican el uso de algún contenido matemático, sea común o ampliado. En la enseñanza de las razones trigonométricas, el profesor debe activar diversos significados a partir de situaciones problemáticas, identificar posibles conflictos semióticos, propios de la faceta epistémica, y resolver la tarea con distintos procedimientos, justificaciones y adaptaciones según el conocimiento de los estudiantes, en relación con las facetas interaccional y cognitiva.

Método

Diseño metodológico

El presente estudio se desarrolla desde la investigación cualitativa, ya que busca comprender, desde una perspectiva interpretativa, las dinámicas subyacentes en el conocimiento didáctico-matemático de los profesores noveles en el contexto de la enseñanza de las razones trigonométricas. Esta opción metodológica se centra en el análisis de fenómenos complejos en contextos específicos y favorece una exploración detallada de las percepciones, actitudes y conocimientos de los docentes. A su vez, el diseño de estudio de caso se alinea con esta perspectiva cualitativa, dado que se trata del análisis detallado de un grupo de docentes en un contexto particular. Este diseño descriptivo-exploratorio busca abrir nuevas perspectivas sobre la enseñanza de la trigonometría.

Técnica e instrumentos

La recolección de datos se llevará a cabo mediante la técnica de análisis de contenido, orientada por los criterios de idoneidad didáctica (CID). El análisis de contenido es una metodología ampliamente utilizada en estudios cualitativos, tal como se describe en los trabajos de Mayring (2000) y Krippendorff (2004), y ayuda a organizar, categorizar e interpretar los datos con el fin de comprender fenómenos específicos de enseñanza y aprendizaje. En este estudio, se utilizará para analizar textos de investigaciones previas sobre la enseñanza de la trigonometría, documentos curriculares y respuestas a los cuestionarios, con el fin de identificar los criterios de idoneidad didáctica relacionados con las facetas epistémica, cognitiva y ecológica de la enseñanza.

El análisis de contenido se centrará en aspectos que inciden en la enseñanza de las razones trigonométricas y tomará como referencia el

modelo de conocimiento didáctico-matemático de Godino et al. (2016). Esta perspectiva ayuda a identificar cómo se articulan los conocimientos matemáticos, didácticos y pedagógicos en la práctica docente. Investigaciones previas, como la de Pino-Fan y Godino (2015), muestran que esta metodología sirve para analizar las dimensiones epistémica y cognitiva implicadas en la enseñanza.

Contexto y descripción de la muestra

Los participantes de esta investigación son profesores noveles de matemáticas egresados entre 2017 y 2023 de un Instituto Superior de Formación Docente de la provincia de Misiones, Argentina. Este instituto, creado en 2014, forma docentes de matemáticas para escuelas secundarias de la región. La muestra está compuesta por 15 profesores en ejercicio que enseñan en distintas instituciones secundarias, tanto urbanas como rurales. La elección de este grupo se justifica por tratarse de docentes recientes, con experiencia práctica y con una trayectoria profesional todavía acotada, situación que hace posible observar las primeras relaciones entre la formación y la práctica educativa en un contexto real.

Fases de investigación

El proceso de investigación se estructura en las cinco fases siguientes.

Fase 1. Establecer los CDM de las razones trigonométricas. En esta fase inicial se lleva a cabo un análisis de contenido orientado por los criterios de idoneidad didáctica (CID) y basado en investigaciones previas, como las de Ball, et al. (2008), que discuten el papel del conocimiento didáctico-matemático en la práctica educativa. Este análisis tiene como objetivo identificar los aspectos principales de la enseñanza de las razones trigonométricas y establecer los criterios que guiarán la práctica pedagógica de los docentes.

Fase 2. Analizar los significados de referencia en los documentos oficiales. Se revisan documentos oficiales, como el Diseño Curricular Jurisdiccional (DCJ) y los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP), para comprender cómo se espera que se enseñen las razones trigonométricas en la escuela secundaria. A partir de este análisis se identifican los significados parciales del contenido que deben enseñarse en las instituciones educativas, lo cual orienta el diseño del cuestionario y el análisis de las respuestas. Esta fase tiene como objetivo que el marco de referencia quede alineado con los requerimientos y objetivos curriculares nacionales.

Fase 3. Diseñar un cuestionario para describir los CDM. Los datos recogidos en las fases previas guían la definición de las tareas o problemas

del cuestionario. En particular, los significados identificados en el análisis curricular y los criterios de idoneidad didáctica sirven para seleccionar situaciones que convoquen conocimientos relevantes. Así, cada ítem se construye a partir de su orientación hacia las facetas epistémica, vinculada con significados y procesos matemáticos, cognitiva, asociada con la anticipación de dificultades, y ecológica, referida al ajuste al contexto y al currículum. De este modo, se evalúa cómo los docentes integran estos aspectos en la toma de decisiones.

Fase 4. Implementar el cuestionario. Se aplica en línea a 15 profesores noveles de educación secundaria. Esta fase sigue la metodología propuesta por autores como Creswell (2014), quien resalta la utilidad del cuestionario como herramienta para recoger datos de forma sistemática y coherente, con el fin de obtener un panorama más definido de los conocimientos y las prácticas de los docentes.

Fase 5. Evaluar los resultados y el cuestionario. Una vez aplicado el cuestionario, se analizan los resultados obtenidos a partir de las distintas facetas del conocimiento didáctico-matemático. Esta evaluación se centra en identificar fortalezas y debilidades en la enseñanza de las razones trigonométricas, con el fin de formular propuestas argumentadas para el diseño de posibles acciones formativas.

Resultados esperados

La revisión sistemática de la bibliografía y la reconstrucción del estado del arte buscan sintetizar los resultados de investigaciones sobre los significados epistémicos, cognitivos e instruccionales de las razones trigonométricas en la educación matemática. Los lineamientos curriculares nacionales y provinciales, como los NAP y el DCJ de Misiones, promueven una enseñanza de la trigonometría que articule aspectos algebraicos, geométricos y aplicaciones reales. En los NAP para 4.º y 5.º año del nivel secundario se propone la modelización de situaciones intra y extramatemáticas mediante relaciones trigonométricas, con triángulos diversos y, cuando corresponde, con recurso al teorema del seno y al del coseno (Ministerio de Educación, 2012, p. 19). Con estos primeros resultados se pretende contribuir al estado del arte sobre el problema general de estudio, es decir, sobre los conocimientos que se espera que tenga un profesor de matemáticas. A partir de este análisis se busca describir un planteamiento ontosemiótico del contenido razones trigonométricas que sustente el diseño del instrumento de evaluación y el análisis de los resultados. Esta línea de investigación se ha aplicado en la evaluación del conocimiento didáctico-matemático sobre distintos contenidos educativos (Burgos & Godino, 2021; Espinoza & Pochulu, 2020; Godino et al., 2018; Gonzato et al., 2011).

En el análisis de resultados, se espera identificar dificultades vinculadas con las facetas epistémica y cognitiva del conocimiento, dos facetas del conocimiento especializado del contenido que consideramos necesarias para la enseñanza del tema en la escuela secundaria. Esta expectativa se apoya en los estudios revisados, por ejemplo Domínguez Hernández y Ossa Marín (2020), Malambo (2021) y Espinosa y Cortés (2014), que muestran vacíos conceptuales, tratamientos algorítmicos descontextualizados y obstáculos en la comprensión de significados básicos de las razones trigonométricas. Además, se espera reconocer conflictos referidos al papel de las prácticas matemáticas en la resolución de problemas asociados, al tipo de configuraciones que caracterizan el conocimiento presente en tales prácticas y a la falta de conexiones entre los distintos significados asociados a las razones trigonométricas y otros conceptos. En consecuencia, se espera identificar posibles conflictos epistémicos y cognitivos al dar sentido a los problemas, sobre todo al identificar los objetivos que plantea el Diseño Curricular Jurisdiccional de la provincia de Misiones.

La aplicación del instrumento podría contribuir, además, a revelar dificultades procedimentales y errores conceptuales de los profesores de la muestra, resultados que podrían dialogar con investigaciones previas. El instrumento construido y los conocimientos aportados pueden orientar el diseño y la evaluación de acciones formativas de futuros profesores de educación secundaria sobre el contenido específico investigado.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco de los proyectos PID2021-122326OBI00 (España), 16/Q1706-PI (FCEQyN – UNaM, Argentina) y PRIU (República de San Marino)

Referencias

- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Ball, D., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). The unsolved problems of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching mathematics* (4th ed., pp. 433–456). Macmillan.
- Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la didáctica de las matemáticas. El caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, 32, 255–278. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- Burgos, M., & Godino, J. D. (2021). Assessing the epistemic analysis competence of prospective primary school teachers on proportionality tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20, 367–389. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10143-0>

- Creswell, J. W. (2014). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4th ed.). Sage.
- Cruz-Márquez, G., & Montiel Espinosa, G. (2022). Medición indirecta de distancias y el trabajo geométrico en la construcción de las nociones trigonométricas. *Acta Scientiae*, 24(4), 81–108.
<https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6911>
- Domínguez Hernández, O. J., & Ossa Marín, E. D. (2020). *Obstáculos epistemológicos en el aprendizaje relacionados con la resolución de problemas que implican razones trigonométricas*. [Tesis de licenciatura, Universidad del Atlántico]. Repositorio Uniatlántico.
<https://hdl.handle.net/20.500.12834/1211>
- Espinosa, G., & Cortés, G. J. (2014). Significado trigonométrico en el profesor. *Bolema*, 28(50), 1193–1216. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a10>
- Espinoza, R. F., & Pochulu, M. D. (2020). Diseño de un instrumento para valorar la comprensión alcanzada en divisibilidad por futuros profesores de matemática. *Bolema*, 34(66), 294–313. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a14>
- Fernández, E. M., Ruiz Hidalgo, J. F., & Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las Ciencias*, 34(3), 51–71.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1871>
- Flores, F. (2008). *Historia y didáctica de la trigonometría*. Ittakus.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13–31.
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 111–132.
- Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw Hill-Aula Magna.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127–135.
<https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., & Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. El modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández, & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285–294). SEIEM.

- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77, 247–265.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90–113.
<https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>
- Godino, J. D., Giacomone, B., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. AIEM. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 63–83.
<https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.224>
- Gonzato, M., Godino, J. D., & Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, 23(3), 5–37.
- Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. (2008). Unpacking “pedagogical content knowledge”: Conceptualizing and measuring teachers’ topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372–400. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.39.4.0372>
- Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology* (2nd ed.). Sage Publications.
- Malambo, P. (2021). Implicit misconceptions in prospective mathematics teachers’ reasoning about trigonometric concepts. *Contemporary Mathematics and Science Education*, 2(2), ep21011. <https://doi.org/10.30935/conmaths/11054>
- Mayring, P. (2000). Qualitative content analysis. *Forum: Qualitative Social Research*, 1(2), Art. 20. <https://doi.org/10.17169/fqs-1.2.1089>
- Ministerio de Educación. (2012). *Núcleos de aprendizajes prioritarios de matemática: ciclo orientado/educación secundaria*.
<https://www.educ.ar/recursos/132578/nap-matematica-educacion-secundaria-ciclo-orientado>
- Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87–109.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.
<https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–22.
<https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>
- Thomas, G., & Finney, R. (1996). *Calculus and analytic geometry* (9th ed.). Addison-Wesley Publishing Company.

- Triana, W. E. N., & Tobar, M. A. T. (2015). Las razones trigonométricas a través del trabajo experimental en matemáticas. Reflexiones de una indagación en el aula. *Revista Ejes* (3), 67–73.
- Van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 217–239. <https://doi.org/10.1080/10986060802229695>
- Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17(3), 91–112. <https://doi.org/10.1007/BF03217423>