

Referentes teóricos para el diseño de situaciones variacionales. Un ejercicio reflexivo desde el Pensamiento y Lenguaje Variacional

Luis Manuel Cabrera Chim¹ 

Resumen

Incorporar el estudio de la variación en el ámbito didáctico de la matemática es relevante para incidir en el aprendizaje de conocimientos matemáticos ligados con el cambio y para la formación matemática de las personas. Sin embargo, aún es una cuestión abierta cómo promover que los estudiantes desarrollen habilidades para estudiar la variación. Así, en este trabajo, fundamentado en el Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar), se presenta un ejercicio de reflexión teórica sobre el empleo de un esquema propuesto para desarrollar el Pylvar y una rúbrica de evaluación elaborada con base en este, para determinar si proporcionan directrices para diseñar y/o rediseñar situaciones variacionales enfocadas en desarrollar tales habilidades. Para este ejercicio, se retoman actividades reportadas en la literatura diseñadas explícitamente bajo el Pylvar y se contrastan con lo establecido en el esquema y rúbrica señalados, determinando la pertinencia de tales situaciones o respectivas propuestas de cambio. Los resultados evidencian que las situaciones no cubren todos los estadios que componen al esquema, ni proporcionan evidencia completa del desarrollo del Pylvar. Ante esto, los niveles de desempeño de la rúbrica proporcionan referentes para rediseñar las situaciones y subsanar las dificultades detectadas.

Palabras clave

Situación variacional, pensamiento variacional, desarrollo, diseño

¹ luis.cabrera@inaoep.mx

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Puebla, México

Cabrera Chim, L. M. (2025). Referentes teóricos para el diseño de situaciones variacionales. un ejercicio reflexivo desde el Pensamiento y Lenguaje Variacional. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2025* (pp. 113–133). Editorial SOMIDEM.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2025/01-05>

Introducción

El estudio de lo que cambia ha sido un aspecto central dentro de las ciencias y las matemáticas. Esto para poder generar modelos de fenómenos o situaciones dinámicas que permitan comprender, analizar y anticipar su comportamiento o intervenir en este. En este sentido, dentro de las matemáticas se han elaborado un sinnúmero de herramientas para poder desarrollar dichas acciones, que a la postre se han convertido en conceptos u objetos matemáticos. Por su parte, en los últimos años se ha propuesto que el análisis del cambio, es decir, la variación, es importante para poder resignificar los objetos matemáticos con fines didácticos, recuperando la importancia que tenía este análisis en su surgimiento y evolución histórica y que poco a poco quedó relegado (Cantoral, 2019; Thompson & Carlson, 2017). Por ejemplo, se ha propuesto repensar el estudio de la función desde una concepción variacional (Kafetzopoulos & Psycharis, 2022; Paoletti & Moore, 2018; Thompson & Carlson, 2017) o de la derivada desde dicha perspectiva (Antonio et al. 2019; Dolores, 2013). Por tanto, desarrollar habilidades o razonamientos que permitan comprender la variación de las variables e incorporar esto como parte de los procesos de enseñanza de los contenidos matemáticos incidirá en mejorar su aprendizaje. Sin embargo, cómo lograr el desarrollo de esto por parte de los estudiantes y la sociedad en general, aun es una cuestión abierta y en debate.

Para generar explicaciones teóricas y prácticas sobre cómo la incorporación de la variación en el trabajo didáctico matemático permite significar a los conocimientos matemáticos, se han desarrollado diferentes enfoques. Por ejemplo, el Razonamiento Variacional y Covariacional (Thompson & Carlson, 2017; Carlson et al., 2002), el Pensamiento Variacional (Jiménez-Rodríguez, 2020) y el Pensamiento y Lenguaje Variacional (Cantoral, 2019). Cada uno de estos enfoques, presenta resultados relevantes y propuestas teóricas para el trabajo de investigación y de aula. Sin embargo, cada uno se fundamenta en sus propios marcos teóricos y perspectivas educativas de la enseñanza, el aprendizaje y la matemática. Esto sucede incluso en los dos últimos enfoques mencionados antes, lo cual va más allá de solo una palabra en sus títulos. No obstante, los tres enfoques también tienen puntos de encuentro.

En concordancia con lo que establece Jiménez-Rodríguez (2020), postulamos que el pensamiento variacional y/o el pensamiento y lenguaje variacional involucra tanto al razonamiento variacional como al covariacional. Esto plantea una primera diferencia de tales enfoques con el Razonamiento Variacional y Covariacional (RVC). Por su parte, desde el Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar) se plantea que la significación de los saberes matemáticos depende del uso que se hace de dichos objetos en un escenario determinado (ver la siguiente sección), lo cual establece una diferencia con

el enfoque del Pensamiento Variacional y también del enfoque RVC. No obstante, los tres enfoques comparten su interés por comprender cómo las personas razonan sobre el cambio y cómo su estudio puede contribuir a transformar los procesos educativos de la matemática asociada al cambio.

El grado de desarrollo teórico también es diferente en cada enfoque. Por ejemplo, para el razonamiento variacional y covariacional, Thompson y Carlson (2017) plantean niveles de desempeño para cada tipo de razonamiento que permiten establecer fundamentaciones teóricas e inferencias sobre el desarrollo de estos razonamientos. En este mismo sentido, para el pensamiento variacional, Jiménez-Rodríguez (2020) plantea que, para desarrollar dicho pensamiento, el razonamiento variacional debe ser visto como una especie de nivel cero del razonamiento covariacional. Por su parte, acciones análogas se han comenzado a desarrollar para el Pylvar a través de trabajos como los de Cabrera y Zaldívar (2021), Cabrera y Martínez (2022), Cabrera et al. (2023) y Cabrera (2024). En estos se propone y emplea un esquema para el desarrollo del Pylvar para el análisis de actividades con este fin y para analizar el desempeño de los estudiantes al resolverlas (Cabrera & Zaldívar, 2021; Cabrera & Martínez, 2022), acciones que llevaron a la necesidad de formular una rúbrica de evaluación (Cabrera et al., 2023).

En este trabajo se pretende reflexionar y ejemplificar cómo el empleo de ambos referentes puede proporcionar directrices para el diseño de situaciones variacionales, así como para su análisis y posterior propuesta de rediseño o mejora. Con esto se busca pasar de una simple pretensión establecida al momento de formular ambos referentes, a dar evidencia, al menos teórica, de que sí pueden proporcionar tales directrices.

También se realiza un proceso de reflexión para explicar, sin ser exhaustivo, cómo algunos elementos de los otros enfoques son compartidos con el Pylvar y por tanto pueden reflejarse en los procesos y acciones que se desarrollan en los estadios del esquema. Con esto no se busca establecer si alguno de los enfoques es mejor que el otro, sino mostrar que aun basados en posturas diferentes comparten elementos en la forma de promover el desarrollo del pensamiento variacional o de los razonamientos variacional y covariacional, al menos desde un plano teórico y cada uno con sus propios objetivos.

Esquema de desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional

El Pylvar establece que la construcción y la significación de varios saberes matemáticos (por ejemplo, funciones y derivadas) se fundamentan en el estudio del cambio situado en escenarios normados por prácticas predictivas (Cantoral, 2019). Por estas prácticas predictivas se hace referencia, en un sentido amplio, a aquellas acciones que deben desarrollarse con la finalidad de determinar estados o comportamientos desconocidos de una situación o

fenómeno dinámico. Por tanto, por Pylvar se entiende como la forma de pensar y comunicar el análisis de las variaciones de las variables que determinan el comportamiento de un fenómeno dinámico, con la finalidad de su comprensión y/o, en su caso, realizar estimaciones, anticipaciones o predicciones sobre el mismo (Cabrera & Zaldívar, 2021). Este se manifiesta y desarrolla cuando se enfrentan situaciones variacionales, es decir, aquellas donde el estudio del cambio de las variables tiene un rol central (Caballero, 2018). No obstante, cabe preguntarse ¿qué características deben tener esas situaciones variacionales para desarrollar el Pylvar?

La pregunta anterior motivó el desarrollo de un esquema que sintetizara varios elementos del Pylvar y sus relaciones, dando como resultado el esquema de la Figura 1. Este está organizado a partir de cuatro estadios, los cuales se proponen como unidades mínimas sobre las cuales puede fundamentarse el desarrollo del Pylvar (Cabrera & Zaldívar, 2021). El primer estadio denominado “Tomar conciencia de aquello que cambia” plantea la necesidad de que se pueda reconocer qué es lo que cambia en el fenómeno o situación que se analiza, es decir, reconocer esos cambios siendo parte de variables e identificar aquellas que pueden ser de interés para dicho análisis. En este primer estadio comienza el desarrollo del razonamiento variacional. Esto implica, según Jiménez-Rodríguez (2020), comprender que las cantidades varían, es decir, que no se producen únicamente cambios aleatorios en sus estados y que estos son únicos en cada estado (principio de unicidad), así como que estos se desarrollan bajo una continuidad (principio de continuidad). En estas acciones, la comparación de diferentes estados de las variables (a través de diferencias, cocientes, etc.), que ocurre en un primer momento de forma aleatoria o sin una estrategia estable, adquiere un papel relevante (estrategia variacional de comparación).

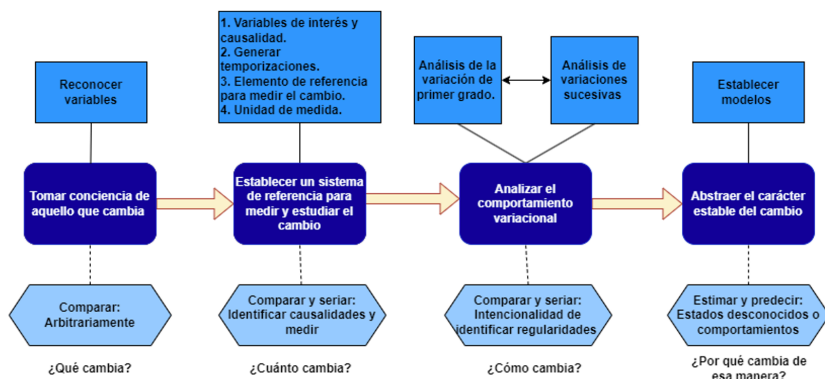
El segundo estadio denominado “Estudiar un sistema de referencia para medir y estudiar el cambio” postula la necesidad de establecer los elementos necesarios para estudiar el cambio. Aquí se consolida el razonamiento variacional y comienza a desarrollarse el razonamiento covariacional, que de acuerdo con Thompson y Carlson (2017), implica la capacidad de identificar y comprender las relaciones dinámicas que se establecen entre dos variables, es decir, cómo las variaciones de una afectan a la otra, lo cual puede describirse cualitativa o cuantitativamente. En este sentido, desde el Pylvar se plantea que para que esto ocurra es necesario establecer un elemento de referencia (1) que permita reconocer cuantitativa o cualitativamente el cambio de las variables; establecer la unidad de medida (2) que permita establecer la intensidad de ese cambio, y generar temporizaciones¹ (3) de estados de tales

¹ Al hablar de temporización no implica que una de las variables sea el tiempo, sino determinar valores que la variable puede tomar en su continuo y que permitan comprender su variación.

variables (ya sea que se identifiquen o construyan). Estos elementos permitirán consolidar el razonamiento variacional según lo descrito antes, además que serán la base para comenzar a establecer y determinar la relación causal entre las variables (4), lo cual permitirá comprender el comportamiento de una situación o fenómeno dinámico. Una vez que se consoliden los cuatro elementos anteriores (indicados entre paréntesis), se podrá analizar el comportamiento covariacional de las variables a través del sistema de referencia variacional establecido (Caballero, 2018). En este estadio, comparar los valores que toman las variables en diferentes momentos y contrastar esos resultados para diferentes momentos (estrategia variacional de seriación), es la base para comprender la causalidad de las variables y comenzar a entender cómo covarían.

Figura 1

Esquema para el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional



Nota: Tomado y ajustado de Cabrera y Zaldivar (2021)

El tercer estadio denominado “Analizar el comportamiento variacional” se enfoca en establecer las particularidades de la covariación de las variables bajo análisis. En este sentido, para determinar cómo están relacionados los cambios de una variable con los cambios en la otra, se procede a comparar algunos estados de la variable y, posteriormente, analizar o contrastar los resultados de esos cambios. Es decir, las estrategias variacionales de comparación y seriación se plantean como medios que permiten determinar dichas relaciones (comportamiento variacional). Esto puede realizarse desde la primera aplicación de las estrategias (variación de primer grado) o aplicar dichas estrategias a los resultados de las comparaciones tantas veces como sea necesario (variaciones sucesivas). Es en este momento, que se puede identificar la covariación que se establece entre las variables causales en análisis.

El último estadio denominado “Abstraer el carácter estable del cambio” establece que, con fines de desarrollar prácticas predictivas, es necesario

reconocer que el comportamiento variacional de las variables permite determinar, anticipar o intervenir en el comportamiento de la situación o fenómeno del que forman parte estas. De este modo, dicho comportamiento variacional, que puede presentarse de diferentes formas (gráfica, expresión algebraica, tabla, descripción, etc.) se convierte en un modelo que permite incidir en aquello que modela (Arrieta & Díaz, 2015). En consecuencia, el desarrollo de las estrategias de estimación o predicción (desarrollada según la precisión de esta acción que permite el modelo establecido) conducen este último estadio. Así, estudiar la covariación de las variables se presenta como un medio para intervenir en el fenómeno bajo análisis.

Como se señaló antes, se pretende que el esquema de la Figura 1 pueda servir de sustento teórico para el diseño de situaciones variacionales que permitan el desarrollo del Pylvar; a la vez que apoye a la construcción y significación de saberes matemáticos. Para esto último (que no es un objetivo de este trabajo), es necesario señalar que dicho desarrollo requiere generar situaciones variacionales en diversidad de contextos. Esto debido a que, derivado del origen y conexión del Pylvar con la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, se establece que los objetos matemáticos se construyen y significan a partir de su uso al enfrentar situaciones o fenómenos de cambio. Sin embargo, este uso puede adoptar características diferentes de acuerdo con las normas o formas de acción particulares que rigen a las comunidades (médicos, albañiles, ingenieros, etc.) dentro de las cuales se desarrollan dichas situaciones o fenómenos. Estos espacios junto con dichas normas son caracterizados como prácticas de referencia, las cuales se identifican a través de la triada: uso – usuario – contexto (Cantoral, 2019). De este modo, no se reconoce un único significado del conocimiento matemático, sino que este está vinculado con la práctica de referencia y, por tanto, la construcción de dicho conocimiento implica una constante significación (resignificación) de este a través de diferentes prácticas de referencia (Montiel & Buendía, 2012).

Rúbrica para valorar el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional

Debido a que todo proceso de enseñanza y aprendizaje debe incorporar procesos de evaluación para determinar si se han alcanzado los objetivos establecidos, a partir del esquema de la Figura 1 se concibió el desarrollo de un instrumento para valorar el desempeño ante las situaciones variacionales que se elaboren bajo su sustento. Cabe recordar que el proceso de evaluación puede entenderse como la recopilación de evidencia del logro de ciertos criterios de referencia establecidos previamente y a partir de los cuales formular juicios de valor sobre los avances de aprendizaje (De la Orden, 2009; Chávez-Ruiz & Martínez-Rizo, 2018). Por tanto, para poder recopilar dicha evidencia, es necesario que desde el diseño mismo del proceso de

enseñanza y aprendizaje se defina la forma y los momentos para obtenerla (Cardeñoso, 2006; Sanmartí, 2007).

Con base en la perspectiva anterior, se elaboró la rúbrica de la Tabla 1, la cual fue validada por expertos en el Pylvar. Esta es una versión ampliada de la publicada en Cabrera (2024), con descripciones más detalladas de los niveles de desempeño de cada indicador y ejemplos de desempeños tipo para estos. Así, con esta rúbrica se busca “operacionalizar” el esquema de desarrollo al establecer criterios de desempeño sobre los que se debe obtener evidencia de su logro por parte del estudiante y que dan cuenta de un progreso en el desarrollo del Pylvar. Esto permitirá tanto valorar y retroalimentar el desempeño de los estudiantes (Andrade, 2000), como analizar el proceso seguido para alcanzar el objetivo evaluado (Savic et al., 2017). Estos dos aspectos no se abordan en este escrito.

Una consideración importante que debe realizarse sobre la rúbrica es que esta fue elaborada considerando que la situación variacional que se proponga a los estudiantes cubre todos los elementos y relaciones del esquema de la Figura 1. Sin embargo, es posible que, por las características de la situación, los objetivos de aprendizaje, el nivel de desarrollo de los estudiantes, entre otras razones, no suceda esto y no sea posible valorar todos los indicadores establecidos. En estos casos se deberá emplear solo la parte de la rúbrica correspondiente. Pero, si esto no se justifica de acuerdo con el objetivo de la situación, podría indicar que la situación variacional requiere rediseñarse para promover todos los elementos del esquema de la Figura 1.

Tabla 1
Rúbrica para valorar el desempeño ante situaciones variacionales

Indicador	Niveles			
	3	2	1	0
Identifica las variables y sus relaciones	Reconoce las variables que intervienen en el fenómeno o situación, así como sus relaciones de causalidad y puede argumentar cuáles son las más pertinentes en términos del estudio a realizar.	Establece las relaciones causales entre algunas de las variables del fenómeno o situación. Sin embargo, no es capaz de determinar si son las más pertinentes para describir o caracterizar su comportamiento e incluso puede resultar no serlo.	Reconoce algunas de las variables que intervienen en la situación, pero no identifica las relaciones causales entre ellas.	Identifica que hay elementos que cambian, pero no los reconoce como variables o que existen relaciones de dependencia entre ellas.
	<i>Por ejemplo: puede explicar por qué la relación entre altura del agua y tiempo o de volumen y tiempo, es la mejor para modelar gráficamente el llenado de los recipientes</i>	<i>Por ejemplo: relaciona que la altura del agua cambia con respecto al tiempo, pero esto no le permite comprender el tiempo de llenado como si hubiera elegido el volumen con el tiempo</i>	<i>Por ejemplo: puede identificar que la altura del agua cambia, así como el volumen de agua dentro del recipiente, pero no la relación de estas variables con el tiempo</i>	<i>Por ejemplo: ante el llenado de recipientes y solicitud de graficar el comportamiento, solo señala que la altura del agua en el recipiente cambia</i>

Tabla 1
Rúbrica para valorar el desempeño ante situaciones variacionales (continúa)

Indicador	Niveles			
	3	2	1	0
Determina los valores de la variable para diferentes temporizaciones	Calcula o determina correctamente los valores de las variables o interpreta adecuadamente los valores de estas temporizaciones que le son dadas (tablas, gráficas, ...) a la vez que puede determinar si en cada caso si los valores dados son o no suficientes para la tarea solicitada. Así, establece un adecuado sistema de referencia y puede determinar si los valores que tiene son pertinentes para la tarea solicitada. <i>Por ejemplo: Calcula o interpreta adecuadamente los valores de la altura del agua con respecto al tiempo y es capaz de argumentar si es, o no, necesario realizar otros cálculos para poder hacer análisis adecuados de los cambios de las variables</i>	Calcula o determina correctamente los valores que toma la variable independiente para diferentes temporizaciones o interpreta adecuadamente los valores de estas temporizaciones que le son dadas (tablas, gráficas, ...). Así, se establece un adecuado sistema de referencia, pero los valores determinados no le permiten analizar los comportamientos variacionales de las variables. <i>Por ejemplo: Calcula o interpreta adecuadamente los valores de la altura del agua con respecto al tiempo, pero no se da cuenta que al estar desigualmente espaciados los tiempos, las comparaciones de las alturas podrían arrojar resultados incorrectos</i>	Calcula o determina incorrectamente los valores que toma la variable independiente para diferentes temporizaciones o interpreta incorrectamente los valores de estas temporizaciones que le son dados (tablas, gráficas, ...). <i>Por ejemplo: establece de forma incorrectamente la altura que tendrá el agua en cierto momento al interpretar inadecuadamente el llenado o interpreta los datos de las tablas de manera acumulativa, siendo esto incorrecto; así, por ejemplo, al sumar dos tiempos considera que es el resultado de la altura en el tiempo resultante</i>	No es capaz de establecer cómo calcular o determinar los valores que toma la variable dependiente en diferentes temporizaciones (momentos de la situación o fenómeno) o no interpreta los valores que le son dados (tablas, gráficas, etc.) como temporizaciones de este. <i>Por ejemplo, se dan valores aleatorios respecto la altura del agua para diferentes tiempos o no logra interpretar la relación entre tiempo y altura que le es dada en gráficas o tablas</i>
Reconoce el comportamiento variacional de las variables	Caracteriza los comportamientos variacionales de grados o mayor e interpreta estos en términos del contexto de referencia y sus particularidades. <i>Por ejemplo: asocia los diferentes tipos de variación de la altura de llenado a sus respectivas formas o viceversa</i>	Es capaz de caracterizar el comportamiento (ya sea lineal y no lineal) de la variable, pero sólo puede interpretar la variación lineal en términos de la práctica de referencia. <i>Por ejemplo: al analizar el llenado de un recipiente no cilíndrico, puede señalar que su altura no crecerá de forma constante y puede caracterizar el crecimiento, pero no logra vincular que ese comportamiento aplica a recipientes con forma similar</i>	Reconoce que las variables tienen una variación lineal o no lineal. Así, no puede identificar características de la variación no lineal, ni interpretar la variación identificada en el contexto de referencia. <i>Por ejemplo: reconoce que la altura del agua cambia de forma constante, pero no es capaz de asociar que esto es por la particularidad del cilindro bajo estudio</i>	Compara valores de las variables para diferentes temporizaciones, pero no reconoce ningún patrón o regularidad de comportamiento de éstas. <i>Por ejemplo: al hacer las comparaciones de las alturas en diferentes momentos, se puede encontrar una constante, pero no logra interpretar qué significa esto o no le da importancia</i>

Tabla 1
Rúbrica para valorar el desempeño ante situaciones variacionales (continúa)

Indicador	Niveles			
	3	2	1	0
Establece o interpreta modelos para estimar o predecir	Establece uno o más modelos correctos del comportamiento variacional de las variables o interpreta correctamente los modelos dados y a partir de ellos estima o predice comportamientos para estimar o predecir valores de largo alcance, es decir, reconoce que estos caracterizan al comportamiento del fenómeno o situación en su totalidad. <i>Por ejemplo: reconocer que en el cilindro la altura de agua crece de forma constante y es capaz de emplear esto y el modelo elaborado para calcular valores o comportamientos en cualquier momento. Además, reconoce que este comportamiento es para todos los cilindros, aunque con diferencias según su forma y tamaño</i>	Establece uno o más modelos correctos del comportamiento variacional de las variables o interpreta correctamente los modelos dados y a partir de ellos estima o predice comportamientos, pero solo de corto alcance del fenómeno o situación, es decir, cercanos al intervalo de estudio, no visualiza ese comportamiento como característica global del fenómeno. <i>Por ejemplo: sabe que en el cilindro la altura de agua crece de forma constante y lo emplea para calcular valores de la altura en momentos próximos a aquel donde se hizo el estudio del llenado. Además, no puede extender este comportamiento a otros cilindros</i>	Establece un modelo incorrecto del comportamiento variacional de las variables o interpreta incorrectamente un modelo dado, por lo que sus estimaciones o predicciones del fenómeno o situación son incorrectas. <i>Por ejemplo: sabe que en el cilindro la altura de agua crece de forma constante, pero no se percata que para el valor que se solicita estimar, el intervalo no crece en la misma unidad de tiempo y eso lo lleva a cometer errores</i>	Identifica el comportamiento variacional de las variables, pero no puede emplear tales características para realizar estimaciones o predicciones del fenómeno o situación. <i>Por ejemplo, reconoce que en un cilindro la altura cambia de forma constante, pero no es capaz de emplear esta situación para estimar la altura del agua en un determinado momento del llenado. No sabe cómo emplear la relación encontrada para esta tarea</i>

Nota. Los ejemplos que se proponen se desarrollan considerando la actividad de graficar la altura de llenado de recipientes cilindros y cónicos. Elaboración propia

Por ejemplo, si una situación variacional parte de la presentación de datos a partir de tablas o gráficas, las variables de interés y su relación causal ya se proporcionan de forma explícita, lo que impide el desarrollo del primer estadio del esquema y, quizás de parte, del segundo estadio. No obstante, como se señala en Cabrera y Martínez (2022), el desarrollo de los dos primeros estadios es decisivo para interpretar correctamente los modelos que se puedan generar en el cuarto estadio y su empleo para intervenir en el fenómeno que se modela. En dicho trabajo se solicitó a estudiantes de secundaria elaborar el modelo gráfico del comportamiento de la altura del agua dentro dos recipientes cilíndricos con la misma capacidad, que son llenados con el mismo flujo constante. Cuando se preguntó a los estudiantes por qué ambos recipientes se llenan al mismo tiempo y cómo se refleja esto

en la gráfica, solo quien consideró como variables de interés a volumen-altura, y no a altura-tiempo, pudo explicar esta situación.

Análisis de situaciones variacionales y valoración de desempeño

Para el desarrollo de este trabajo se retomó un conjunto de situaciones variacionales diseñadas por Caballero-Pérez y Moreno-Durazo (2017) para bachillerato y bajo el enfoque del Pylvar, las cuales tenían como objetivo su desarrollo entre los estudiantes. Así, analizarlas bajo la perspectiva del esquema propuesto en la Figura 1 y de la rúbrica de evaluación de la Tabla 1, permitirá determinar si estos referentes están en correspondencia con dichas situaciones o si estas presentan las características necesarias para alcanzar el objetivo de desarrollar el Pylvar. Con base en estos análisis se espera determinar si tales referentes proporcionan directrices o elementos que deben ser considerados para el diseño de nuevas situaciones variacionales y/o cómo mejorar situaciones variacionales ya elaboradas.

Las situaciones variacionales desarrolladas por Caballero-Pérez y Moreno-Durazo (2017) se reportan en cuatro momentos:

El primero se refiere al llenado de un recipiente cilíndrico a flujo constante, donde la atención se centra en identificar la cantidad de altura que aumenta cada segundo y la asociación con la gráfica correspondiente. En el segundo se trabaja el llenado de dos recipientes cilíndricos, comparando la velocidad de llenado al variar la forma del recipiente (más ancho menor pendiente, más angosto mayor pendiente). En el tercer momento, se compara el llenado de dos recipientes desde un enfoque numérico, con el fin de predecir cuál se llena primero. En el último momento se contrastan las gráficas del crecimiento de la altura de recipientes cilíndricos (a razón constante) con el llenado de recipientes de forma cónica, a modo de contrastar lo lineal con lo no lineal (p. 1070-1071).

Como puede observarse en la cita anterior, en los primeros tres momentos se habla del llenado de recipientes cilíndricos, fenómeno que se modela con funciones lineales y que constituye el contenido matemático de interés para los autores. Pero, en el cuarto momento, a partir de recipientes de forma cónica, se busca confrontar el comportamiento lineal y el no lineal, como recurso para profundizar en la comprensión de lo lineal. A continuación, por cuestiones de espacio y de que los resultados de los análisis entre momentos son similares (el primer y tercer momento y el segundo y cuarto momento), se presentan con detalle los análisis correspondientes con los momentos primero y segundo (ver Figuras 2 y 3) y una breve descripción de los otros dos momentos.

Para el primer momento, como puede observarse en la Figura 2, la segunda pregunta solicita establecer el tiempo de llenado del recipiente, lo cual corresponde con una práctica predictiva y que constituye un aspecto decisivo para el desarrollo del Pylvar. Ahora bien, tomando como base el esquema de la Figura 1, las preguntas de las situaciones y los análisis esta-

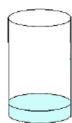
blecidos por los autores de la situación sobre los desempeños esperados de los estudiantes para resolverla, se puede observar que esta no establece condiciones para poder desarrollar las acciones involucradas en el estadio 1

Figura 2

Situación variacional para el primer momento de la propuesta de Caballero-Pérez y Moreno-Durazo (2017)

Primer Momento

Un recipiente vacío de forma cilíndrica es llenado mediante una llave que deja salir agua a flujo constante. En la imagen siguiente se muestra la altura que alcanza el cuerpo del agua al transcurrir un segundo.



1. Marca sobre la imagen la altura que alcanzará el agua a los 3 segundos.
2. ¿Cuántos segundos tardará en llenarse el recipiente? Justifica tu respuesta
3. Realiza el bosquejo de la gráfica que muestra altura del líquido al paso del tiempo. Considera que el eje horizontal corresponde al tiempo y el eje vertical a la altura. Explica cómo es el crecimiento de la altura en este recipiente.

Las instrucciones de la situación variacional ya plantean el interés por la correlación entre la altura del agua en el recipiente y el tiempo transcurrido. Además, no se plantea ninguna pregunta o momento de reflexión para analizar si estas variables son pertinentes o en si en verdad están correlacionadas. En cuanto la pregunta 1, base para responder la pregunta 2, busca que los estudiantes comiencen a construir la forma en que están correlacionadas tales variables. En este sentido, los autores señalan que los estudiantes podrían dibujar en la botella el nivel de agua para diferentes momentos a partir de la marca dada de inicio, lo cual corresponde con establecer el sistema de referencia del estadio 2 del esquema. Cada marca del nivel de agua representa una temporización de estados del llenado y para realizar su adecuada medición e interpretación se requiere establecer un elemento de referencia, en este caso la base del recipiente. Así, sobreponer la altura de la marca de inicio e indicar que la nueva altura en cada superposición se alcanza al transcurrir la misma cantidad de tiempo (estrategia de comparación) son las acciones que se ponen en juego para desarrollar el estadio 2. A la par de esto, los estudiantes deben tomar conciencia de que lo anterior es posible porque el flujo de agua es constante y el recipiente es cilíndrico, lo que posibilita que la longitud de las alturas sea igual para el mismo periodo de tiempo. Es decir, comparar que las alturas son las mismas para los mismos tiempos (estrategia de seriación), permite llegar a estas conclusiones. Esto refleja el estadio 3 del esquema de la Figura 1 referente al análisis variacional a partir de la primera seriación. Por último, el reconocer que el comporta-

miento anterior será el mismo durante todo el proceso de llenado, corresponde con abstraer el carácter estable del cambio (estadio 4), y esto permitirá hacer el cálculo del tiempo que tardará el recipiente en llenarse. Es decir, dicho comportamiento se convierte en un modelo de la forma de llenado y este permite intervenir en la situación. Posterior a esto, para la pregunta 3 del primer momento, los estudiantes deben transformar este modelo en uno gráfico. Esto presenta desafíos propios de un cambio de representación a otro, lo cual no es objeto de este análisis, pero contribuye a desarrollar habilidades para manejar diferentes modelos que puedan ayudar a desarrollar prácticas predictivas.

En el momento 3 también se plantea una pregunta que conduce al desarrollo de prácticas predictivas y su análisis contrastado con el esquema de la Figura 1 evidencia que tampoco se desarrolla el estadio 1. En esta situación variacional se presentan tablas numéricas con datos faltantes, las cuales describen el llenado de dos recipientes cilíndricos iguales y se solicita determinar cuál recipiente se llenará primero. En este caso, también ya están dadas las variables relacionadas causalmente, ya se proporcionan los valores de las variables que deberán analizarse (las temporizaciones de interés ya están establecidas en la tabla) y ya está establecida la unidad de medida. Por tanto, el estadio 2 no se desarrolla por completo. Sin embargo, al igual que con la actividad anterior, los estadios 3 y 4 toman relevancia y permiten contestar lo solicitado. Además, la actividad permite que el modelo del llenado del cilindro pueda generalizar a cualquier otro cilindro.

Figura 3

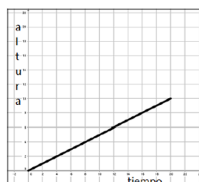
Situación variacional para el segundo momento de la propuesta de Caballero-Pérez y Moreno-Durazo (2017)

Momento 2

1. Considera los recipientes cilíndricos A y B que tienen diferentes **dimensiones** pero misma **capacidad**, los cuales son llenados con agua con el mismo flujo constante. Bosqueja la gráfica de la altura del agua al paso del tiempo para cada recipiente. ¿Qué diferencia hay en la forma en cómo crece la altura en cada uno?



2. El siguiente plano cartesiano muestra la gráfica del llenado de un recipiente C. Construya, sobre el mismo plano cartesiano, la gráfica del llenado del recipiente D sabiendo que ambos recipientes son llenados a flujo constante y, además, la altura del líquido en el recipiente D aumenta el doble respecto al recipiente C.



Por su parte, en la situación variacional del segundo momento (Figura 3), el énfasis está en caracterizar el comportamiento covariacional de las variables y reflejarlo en su modelo gráfico. No se plantea ninguna pregunta o cuestión que lleve a realizar alguna práctica predictiva, lo cual contraviene el aspecto decisivo del Pylvar: su vínculo con tales prácticas. Para la primera pregunta, los autores dan por hecho que, dada la situación variacional planteada en el primer momento, los estudiantes podrán determinar que el crecimiento de la altura en cada recipiente es constante o reproducir parte del procedimiento realizado para el momento 1. De nuevo, las variables que están correlacionadas ya están establecidas: altura del agua y tiempo. Por tanto, las acciones asociadas con el estadio 1 del esquema de desarrollo del Pylvar no se desarrollan. Por otra parte, para diferenciar la forma en que crecen las alturas en cada recipiente, se podría dibujar la altura que alcanzaría el líquido al transcurrir un segundo en uno de los recipientes y determinar la altura que alcanzaría la misma cantidad de agua en el otro recipiente. A partir de esto se espera que se identifique que el incremento en el recipiente angosto es mayor que en el ancho. En este caso se comparan estados de un recipiente contra estados del otro para un mismo tiempo, es decir, se contrastan las temporizaciones realizadas. Esto implica poder establecer un elemento de referencia para realizar las mediciones: la base de los recipientes y la cantidad de agua que entra en cada recipiente en el mismo tiempo.

Esto permite desarrollar el estadio 2 al establecer un sistema de referencia variacional. A la par de este análisis, al considerar que el flujo de agua es constante y ambos recipientes son cilíndricos, se debe llegar a la conclusión de que el crecimiento de la altura es constante dentro de cada recipiente. Esto al comparar cuanto crece la altura del agua para los mismos tiempos (estrategia de seriación para un mismo recipiente). Asimismo, se llega a una segunda conclusión de que para el recipiente angosto la altura crece más rápido que para el recipiente ancho (estrategias de comparación y seriación entre recipientes). Esto se asocia con el análisis variacional establecido en el estadio 3 y permite responder a la primera parte del momento 2.

No obstante, aquí no hay preguntas que permitan generar evidencias de que los estudiantes reconocen que las conclusiones identificadas corresponden con un modelo del llenado, pues en este momento no se emplea este para incidir sobre la situación que se analiza (Arrieta & Díaz, 2015). No obstante, se pretende alcanzar lo anterior con la segunda parte de este momento. Para responder dicha parte, se debe reconocer que el comportamiento anterior (las dos conclusiones) se replican para cualquier par de cilindros, es decir, se consolida la idea del carácter estable del cambio para el llenado de cilindros con flujo constante y usar el comportamiento para generar la gráfica solicitada (modelo gráfico), es decir, “realizar una práctica predictiva”. Esto abarca el desarrollo del estadio 4. Sin embargo, esta práctica

podría no realizarse, pues para realizar la gráfica solicitada es posible que los estudiantes solo sigan la regla (“aumenta el doble”) de forma mecánica, sin percibir que esta es producto de abstraer cómo cambia el llenado del recipiente D, es decir, sin comprender que es su modelo de llenado. Esto puede ocurrir porque los procesos de graficación, por lo general, no se desarrollan bajo la perspectiva de modelación, sino de unir puntos del plano cartesiano que se generan a partir de una fórmula o regla. Conviene replantear la pregunta o la actividad en general para evitar el problema mencionado. Por ello, se señaló al inicio de este párrafo que no hay una práctica predictiva.

Para el momento cuatro, el proceso de resolución es similar a lo descrito para la primera pregunta del segundo momento, es decir, se centra en los estadios 2 y 3, y ofrece poca evidencia de que se alcance el estadio 4, pues no es claro si se abstrae el carácter estable del cambio del llenado de los recipientes cónicos bajo estudio. Los estudiantes deben concluir que el comportamiento de los recipientes cónicos no es lineal, aunque sigue un patrón identificado a partir del análisis variacional de cómo cambian sus alturas: “para el recipiente A [en forma de cono invertido] la altura crece cada vez menos” y “para el recipiente B [en forma de cono] la altura crece cada vez más”.

El análisis anterior evidencia que solo en dos de las situaciones variacionales planteadas por Caballero-Pérez y Moreno-Durazo (2017) se promueven prácticas predictivas explícitas o alcanzables (momentos 1 y 3), en las cuales se desarrollan parcialmente las acciones establecidas en el estadio 2 y de forma completa las de los estadios 3 y 4. Por su parte, para las otras dos situaciones solo se solicita el planteamiento del modelo de cómo cambian las variables (momentos 2 y 4), pero no queda claro si el estudiante reconoce que el comportamiento identificado constituye un modelo, ya que este no se utiliza para intervenir en la situación modelada, es decir, desarrollar prácticas predictivas.

Este aspecto ha sido señalado por Arrieta y Díaz (2015) para la conformación de un modelo. Para estas dos situaciones sólo se establecen completamente las acciones del estadio 3 y parcialmente las del estadio 2 y 4. Sin embargo, en ninguna de las cuatro situaciones se trabaja el desarrollo de las acciones del estadio 1, correspondiente con tomar conciencia de lo que es una variable e identificar las distintas variables que se encuentran implícitas en diversas situaciones y fenómenos. Además, se dice que se trabaja parcialmente el estadio 2, pues las variables que están relacionadas causalmente (correlacionadas) ya se proporcionan como un dato de la situación variacional. Si bien es cierto que los estudiantes deben tomar conciencia de cómo es esa correlación, no se permite discutir qué variables serían las pertinentes para el estudio que se plantea. Esto último, como se señaló antes, resulta importante de acuerdo con los resultados de Cabrera y Martínez (2022).

Las reflexiones del párrafo anterior resultan relevantes. En primer lugar, porque dichas actividades fueron diseñadas para desarrollar el Pylvar como se declara explícitamente en Caballero-Pérez y Moreno-Durazo (2017). En segundo lugar, los hallazgos coinciden con lo reportado por Cabrera et al., (2023) al analizar los libros de texto gratuitos de primaria en México. Estos autores señalan que en dichos libros existen actividades que requieren de estudiar como cambian las variables, lo que potencialmente puede desarrollar el Pylvar. Sin embargo, casi todas las actividades se centran en desarrollar lo establecido en los estadios 3 y 4 del esquema, y ninguna abre el espacio para reflexionar sobre las variables implicadas y las relaciones de causalidad entre ellas que son de interés para el estudio.

En tercer lugar, porque desde el planteamiento teórico del Pylvar se establece que identificar qué cambia y el desarrollo de prácticas predictivas constituyen la base del estudio del cambio (Cantoral, 2019). De acuerdo con estos resultados, el esquema de la Figura 1 se convierte en un referente teórico que permite analizar la pertinencia de las características de las situaciones variacionales para el desarrollo del Pylvar, pues ha permitido determinar vacíos o acciones que podrían no estarse promoviendo y que se consideran fundamentales para dicho desarrollo desde los aspectos teóricos.

Ahora, se ejemplificará cómo la rúbrica de evaluación (Tabla 1) puede ser empleada con un fin similar o complementario al análisis de la pertinencia de las características de las situaciones variacionales y, sobre todo, para su rediseño al establecer aspectos que, como se mencionó antes, operacionalizan el esquema de desarrollo del Pylvar (Figura 1). Esto permitirá que los elementos de evaluación se incorporen desde el diseño mismo de la planeación del proceso de enseñanza, como señalan Cardeñoso (2006) y Sanmartí (2007). Para esto, y por cuestiones de espacio, solo se analizará la situación variacional descrita en el primer momento (Figura 2). Como se indicó en el análisis anterior, esta situación no aborda las acciones correspondientes al estadio 1 del esquema de desarrollo del Pylvar. Este estadio se relaciona con el primer indicador de la rúbrica “Identifica las variables y sus relaciones” (Tabla 1), que establece entre sus niveles el reconocer las variables implicadas y determinación de cuáles son pertinentes para el análisis de la situación. Por tanto, para revertir la carencia identificada en la redacción de la situación variacional podría omitirse cuál es la variable independiente que interesa vincular con la variable dependiente: altura de llenado.

Así, se podría omitir la indicación de que se busca conocer la altura del agua al transcurrir el tiempo, cuestionar cuáles son todas las variables intervinientes y cuáles están relacionadas para describir el fenómeno (correlación). En el trabajo de Cabrera y Martínez (2022) se evidencia que cuando se realiza esto, es probable que algunos estudiantes establezcan como variable independiente al volumen de líquido dentro el recipiente. A su vez,

estos análisis permitirán que los estudiantes tomen conciencia de que las variables implicadas cambian de forma continua y que además no lo hacen de forma aleatoria, sino dependen de la situación. En otras palabras, se desarrollará el estadio 1. Además, esto será la base para establecer cuáles son las variables que están correlacionadas y para la cuales interesa conocer su correlación. Esto es importante para el desarrollo de las acciones del estadio 2, en particular determinar que los cambios en una variable afectan a la otra, lo cual es relevante para establecer un sistema de referencia variacional.

Con respecto al segundo indicador de la rúbrica “Determina los valores de la variable para diferentes temporizaciones”, los autores de la situación señalan que para resolverla es necesario hacer temporizaciones del llenado a partir de dibujar en el cilindro segmentos de altura similar a la proporcionada en la imagen, es decir, es necesario determinar los “valores” de la variable en diferentes momentos. Estas acciones y las demás implicadas para realizar esto, permitirán valorar dicho indicador, pero, dados los descriptores de los niveles de desempeño establecidos, sería importante cuestionar, como parte de la situación variacional, qué altura se tendría para un tiempo que no sea múltiplo de tres segundos. Esto para poder obtener evidencia de si el estudiante solo reproduce la altura marcada en el cilindro o comprende cómo obtener los valores de la variable para diferentes temporizaciones. Otra acción que podría permitir lo anterior, sería proporcionar en la imagen un cilindro cuyo llenado no ocurra en un tiempo múltiplo de tres y poner énfasis en discutir la mejor estimación del tiempo de llenado.

Con respecto al indicador “Reconoce el comportamiento variacional de las variables”, la situación variacional exige un análisis de la primera variación para identificar el comportamiento constante de la variable. Esto permitirá responder la pregunta 2 y se espera que facilite realizar la gráfica solicitada en la pregunta 3. Si bien, determinar este comportamiento constante es el objetivo de la situación variacional de este momento, las acciones implicadas podrían no ser suficientes para obtener evidencia que ubique a los estudiantes en alguno de los niveles de logro de este indicador, como lo muestran los descriptores de sus niveles de logro. Así, se tendría duda de si un estudiante que contesta correctamente se ubica en el nivel 1 o 2, pues no sería claro si reconoce que este comportamiento depende de las características del recipiente y no es solo para este recipiente en sí.

Para superar esta limitación y contribuir a profundizar en el desarrollo del Pylvar, podría cuestionarse a los estudiantes, en esta misma actividad, qué pasaría con la gráfica si el recipiente no fuera cilíndrico, es decir, ¿también podría ser una gráfica similar o cambiaría? Si bien esto se desarrolla en las situaciones variacionales de los momentos 2 y 4, incorporarlo en este momento podría reducir el número de actividades a plantear a los estu-

diantes y/o reforzar las discusiones de este punto. Por otra parte, cabe señalar que, por el objetivo de la actividad, no se lograría tener evidencia del nivel 3 de este indicador, pues no están implicadas variaciones sucesivas. Esto en sí no es problemático, pero es necesario considerar que deben plantearse situaciones variacionales que requieran poner en acción estas variaciones sucesivas, como en el momento 4; estudiar sólo fenómenos o situaciones de variación constante, sí sería problemático para el desarrollo del Pylvar. No obstante, también debe señalarse que el Pylvar no puede desarrollarse por completo a partir de una sola situación variacional.

Con respecto al último indicador de la rúbrica “Establece o interpreta modelos para estimar o predecir”, ocurre algo similar a lo señalado en el indicador anterior en relación con la dificultad de alcanzar el nivel de desempeño más alto. Debido a las características de la situación de llenado y las preguntas formuladas, la predicción que se solicita puede considerarse de corto alcance y podría no aportar evidencia suficiente de si el estudiante puede reconocer que el comportamiento variacional está vinculado con la forma cilíndrica, sin importar su tamaño, o solo lo reconoce para el cilindro particular bajo estudio.

Por tanto, en caso de que un estudiante responda correctamente, solo se le podría ubicar en el nivel de desempeño 2 de la rúbrica para este indicador. La sugerencia dada antes, respecto a cuestionar a los estudiantes qué pasaría con la gráfica si el recipiente no fuera cilíndrico, podría llevar a asociar este tipo de comportamiento a cualquier cilindro, contribuyendo a avanzar hacia el nivel 3. De nuevo, si bien el nivel 3 puede ser alcanzado con la situación variacional del momento 2, incluir la pregunta en el momento 1 puede reducir el número de actividades que se plantean a los estudiantes.

Al combinar el análisis de la situación variacional mediante el esquema de desarrollo del Pylvar y la confrontación de los posibles desempeños de los estudiantes en la situación del primer momento utilizando la rúbrica, se puede establecer que, con dicha situación, si bien se abordan aspectos de los estadios 2, 3 y 4 del esquema de desarrollo del Pylvar, no siempre se reúne evidencia suficiente para determinar si el estudiante está desarrollando “altos niveles” de desempeño en los indicadores de la rúbrica correspondientes. Los descriptores de esos niveles altos sirvieron como base para proponer modificaciones a la situación y poder obtener evidencia más precisa del desarrollo del Pylvar.

Con base en las etapas de análisis de las situaciones variacionales desarrolladas aquí, se evidencia cómo el esquema de desarrollo del Pylvar y la rúbrica de evaluación permiten determinar la pertinencia de las preguntas y características que conforman una situación variacional y si los desempeños esperados de los estudiantes al resolverla dan evidencia de un buen desarrollo de este pensamiento. En este sentido, los descriptores de los niveles de logro

orientan las modificaciones a realizar en tales situaciones variacionales para obtener evidencia suficiente de altos niveles de desarrollo del Pylvar.

Reflexiones finales

El ejercicio de reflexión desarrollado en este documento ejemplifica la importancia de contar con referentes teóricos y/o prácticos que orienten guiar el diseño de situaciones variacionales enfocadas en el desarrollo del Pylvar, los cuales no eran explícitos ni concretos antes de las propuestas descritas aquí (esquema y rúbrica). Esto quizá explica en parte las dificultades para incorporar el Pylvar al aula y su desarrollo en general entre los estudiantes. Si bien, como se señaló antes, no todas las actividades deben transitar por todos los estadios del esquema de desarrollo del Pylvar, pero sí es importante que el estudiante desarrolle las habilidades y formas de razonamiento que le permitan enfrentarlos todos. En este último sentido, la rúbrica desempeña un papel relevante, pues como se ejemplificó, sus niveles de desempeño se convierten en los criterios sobre los que se buscará evidencia de su alcance por parte del estudiante y si esta no se puede obtener, tales criterios orientan las modificaciones a realizar para obtenerla. Así, esto permite decidir qué preguntas, acciones o contextos podrían emplearse y/o plantearse dentro la situación variacional para generar y obtener dicha evidencia. Por tanto, el esquema de la Figura 1 y la rúbrica de la Tabla 1 sí proporcionan directrices para el diseño de situaciones variacionales que favorezcan el desarrollo del Pylvar y/o para analizar si situaciones variacionales ya diseñadas son pertinentes para esto o en su caso hacerles los cambios requeridos.

Por otra parte, los resultados de los análisis también dejan reflexiones relevantes para el desarrollo de la línea de investigación del Pylvar. Por ejemplo, las dificultades evidenciadas respecto al escaso desarrollo del estadio 1 para las situaciones variacionales analizadas aquí, diseñadas bajo el enfoque del Pylvar, son similares a las identificadas en Cabrera et al. (2023) al analizar las actividades de libros de texto de primaria, las cuales no fueron elaboradas bajo el Pylvar. Por tanto, cabe preguntarse, ¿por qué se presentan las mismas dificultades? Aunque responder a esto requiere análisis adicionales, demuestra la necesidad de referentes de diseño (el esquema y la rúbrica) en continua mejora y refinamiento. Asimismo, el identificar que pareciera que no siempre las prácticas predictivas guían las preguntas y acciones solicitadas en las situaciones variacionales, plantea la necesidad de cuestionar qué se está entendiendo por dichas prácticas² y qué papel tiene la caracterización de

¹ En el apartado de descripción del esquema de desarrollo del Pylvar se establece que las prácticas predictivas hacen referencia, en un sentido amplio, a aquellas acciones que deben desarrollarse con la finalidad de determinar estados o comportamientos desconocidos de una situación o fenómeno dinámico.

modelo establecida al momento de interpretar la frase “determinar ... comportamientos desconocidos de una situación o fenómeno dinámico”. Por ejemplo, ¿basta describir un comportamiento o es necesario que este comportamiento sea reconocido como un modelo, lo que implica intervenir en la situación bajo estudio? Por otra parte, se declara que comprender qué es lo que varía constituye el núcleo del desarrollo del Pylvar, pero no se atiende en las situaciones variacionales el desarrollo del estadio 1, donde esta comprensión se desarrollaría. Estos aspectos que deben ser discutidos en la comunidad de investigadores del Pylvar, también son aportes derivados de este trabajo.

Para finalizar estas reflexiones, postulamos como continuidad del trabajo realizado aquí, la pertinencia de pasar de un nivel teórico a un nivel práctico. En otras palabras, valorar y analizar si lo aquí desarrollado también tiene la misma utilidad y efecto en la práctica docente en el aula o, por el contrario, requiere mayores precisiones en los referentes mencionados para poder apoyar a los profesores en la promoción y alcance del desarrollo del Pylvar entre los estudiantes.

Agradecimientos

Agradezco a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación por el financiamiento para el desarrollo de este trabajo a través de la estancia posdoctoral académica-continuidad para desarrollar el proyecto “Diseño de situaciones de aprendizaje como estrategia de desarrollo profesional docente”.

Referencias

- Andrade, H. G. (2000). Using Rubrics to Promote Thinking and Learning. *Educational Leadership*, 57(5), 13–18. <https://bit.ly/49mNXmZ>
- Antonio, R., Escudero, I. & Medrano, E. (2019). Una introducción al concepto de derivada en estudiantes de bachillerato a través del análisis de situaciones de variación. *Educación Matemática*, 31(1), 258–280. <https://doi.org/10.24844/EM3101.10>
- Arrieta, J. & Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), 19–48. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1811>
- Caballero, M. (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje variacional* [Tesis de doctorado]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.
- Caballero-Pérez, M. & Moreno-Durazo, G. (2017). Diseño de una situación de aprendizaje para el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 30, 1066–1074. <https://www.clame.org.mx/documentos/alme30.pdf>

- Cabrera, L. M. (2024). Rúbrica para evaluar el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Casaña (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 243–248). Editorial SOMIDEM.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-26>
- Cabrera, L., Ruiz, P., Galaviz, P., & González, J. (2023). Estudio exploratorio sobre el Pensamiento y Lenguaje Variacional en los libros de texto gratuitos de primaria en México. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 8, 1–24. <https://doi.org/10.46618/iime.181>
- Cabrera, L. & Martínez, J. (2022). Esquema para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en secundaria. Un estudio exploratorio. En B. Rodríguez, E. García, & A. Cano (Coord.) *Los estudios sobre la enseñanza del Español y las Matemáticas en educación básica, hoy* (pp. 167–195). Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Universidad Autónoma de Querétaro y Benemérita Escuela Normal Veracruzana.
- Cabrera, L. & Zaldívar, J. D. (2021). Esquema de desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 34(2), 189–199. https://www.clame.org.mx/documentos/alme34_2.pdf
- Cantoral, R. (2019). *Caminos del saber. Pensamiento y Lenguaje Variacional*. Editorial Gedisa.
- Cardenoso, J. (2006). La evaluación como elemento de instrucción y sus peculiaridades en el área de matemáticas. En J. Chamoso, & J. Durán (Eds). *Enfoques actuales en la didáctica de las matemáticas* (pp. 157–186). Ministerio de Educación y Ciencia de España.
- Carlson, M. P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352–378.
<https://doi.org/10.2307/4149958>
- Chávez-Ruiz, Y. & Martínez-Rizo, F. (2018). Evaluar para aprender: hacer más compleja la tarea a los alumnos. *Educación Matemática*, 30(3), 211–246.
<https://doi.org/10.24844/EM3003.09>
- De la Orden, A. (2009). Evaluación y calidad: análisis de un modelo. *Estudios sobre Educación*, 16, 17–36.
- Dolores, C. (2013). *La variación y la derivada* (2.a ed.). Díaz de Santos.
- Jiménez-Rodríguez, J. R. (2020). Level-zero covariational reasoning in secondary school mathematics. En Sacristán, A.I., Cortés-Zavala, J.C. & Ruiz-Arias, P.M. (Eds.), *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 301–304). Cinvestav, AMIUTEM y PME-NA. <https://doi.org/10.51272/pmena.42.2020>

- Kafetzopoulos, G.I. & Psycharis, G. (2022). Conceptualization of function as a covariational relationship between two quantities through modeling tasks. *The Journal of Mathematical Behavior*, 67, 10099. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100993>
- Montiel G. & Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas & A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* (pp. 61–88). Lectorum.
- Paoletti, T. & Moore, K. C. (2018) A covariational understanding of function: Putting a horse before the cart. *For the Learning of Mathematics*, 38(3), 37–43. <https://digitalcommons.montclair.edu/mathsci-facpubs>
- Sanmartí, N. (2007). *10 ideas Clave. Evaluar para aprender* (1er. Ed). Editorial GRAÓ.
- Savic, M., Karakok, G., Tang, G., Turkey, E. H., & Naccarato, E. (2017). Formative Assessment of Creativity in Undergraduate Mathematics: Using a Creativity-in-Progress Rubric (CPR) on Proving. En R. Leikin, & B. Sriraman (Eds.), *Creativity and Giftedness, Advances in Mathematics Education* (pp. 23–46). Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-38840-3_3
- Thompson, P. W. & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics.

