

El esquema gráfico de la derivada. Una colaboración entre investigadoras de España y México

The graphic schema of the derivative. A collaborative work between Spanish and Mexican researchers

María Trigueros ¹ 

Edelmira Badillo ² 

Gloria Sánchez-Matamoros ³ 

Lidia Aurora Hernández-Rebollar ⁴ 

Resumen

En este capítulo se hace un recorrido por las contribuciones al esquema de la derivada realizadas por las autoras, que dan cuenta de una fructífera colaboración entre investigadores de España y México. Este trabajo se ha ido desarrollando a través de la formación de este equipo, que ha ido abordando conceptos del cálculo diferencial usando las herramientas de APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema). A través del capítulo se muestra la evolución del foco de las investigaciones, comenzando por el desarrollo y refinamiento de una descomposición genética de la derivada, seguido de un estudio riguroso sobre el esquema gráfico de la derivada, hasta profundizar en los mecanismos de la tematización de dicho esquema.

¹ trigue@itam.mx

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

² edelmira.badillo@uab.cat

Universidad Autónoma de Barcelona, España

³ gsanchezmatamoros@us.es

Universidad de Sevilla, España

⁴ lidia.hernandez@correo.buap.mx

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Palabras clave

Cálculo diferencial, esquema gráfico de la derivada, teoría APOE, tematización del esquema, mecanismos de tematización.

Abstract

This chapter presents an overview of the contributions to the concept of the derivative made by the authors, which reflect a fruitful collaboration between researchers from Spain and Mexico. The specific topics addressed have been driven by the needs and interests of the team of authors, so they have addressed differential calculus concepts using APOS theory tools. Through the chapter it is possible to follow the evolution of the researchers focus on the different research studies, starting from the development and refinement of a genetic decomposition for derivatives. followed by a rigorous approach to the graphic derivative schema and leading to a deep analysis of the thematization mechanisms involved in the thematization of the mentioned schema.

Keywords

Differential calculus, graphic derivative Schema, APOS theory, Schema thematization, thematization mechanisms.

Historia de la colaboración

Las diversas colaboraciones que han llevado a la formación del equipo de investigación que conforman las autoras de este trabajo estuvieron motivadas por el interés compartido en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), especialmente en su aplicación a los contenidos del cálculo diferencial, con un énfasis particular en la comprensión de la derivada. Los encuentros entre las investigadoras tuvieron lugar a lo largo de diferentes etapas de su trayectoria profesional, lo que permitió que el grupo se consolidara gradualmente. Al igual que otros equipos de colaboración, este se fue formando mediante encuentros académicos a lo largo de su formación predoctoral y en su posterior consolidación como investigadoras en el área.

El primer contexto de encuentro se remonta a la etapa de formación doctoral de dos de las autoras. Desde 1999 y hasta la fecha, Gloria Sánchez-Matamoros y Edelmira Badillo han coincidido en el Grupo de Investigación de Análisis Matemático (GIDAM) de la Sociedad Española de Educación Matemática (SEIEM). Este seminario permanente anual del GIDAM, que reúne a investigadores expertos y noveles interesados en el estudio de teorías para abordar problemas de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de temas relacionados con el pensamiento matemático avanzado, les permitió conocer y profundizar, entre otras teorías, en las herramientas teóricas y metodológicas de la teoría APOE.

El interés común en el estudio de la derivada, centrado en la comprensión mostrada por los estudiantes de bachillerato y primer curso de universidad (en el caso de Gloria) y en la comprensión de los profesores de matemáticas

en ejercicio (en el caso de Edelmira), les permitió avanzar juntas y profundizar en la lectura de los trabajos que publicaban los participantes del grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), del cual María formaba parte. De manera especial, en el GIDAM se discutían e incorporaban las contribuciones centradas en la comprensión del esquema de la derivada y el esquema gráfico de la derivada, estudios en los que María había participado como autora (por ejemplo, Asiala et al., 1997; Cooley et al., 2007). Es así como desde diferentes enfoques de investigación, se profundiza y se hacen aportaciones a la teoría APOE, refinando algunas de sus herramientas a partir de los resultados de los estudios realizados en el seno del GIDAM y de las ideas discutidas en los espacios de encuentro anual sobre diversos aspectos relacionados con la comprensión de la derivada: tipos de tareas, enriquecimiento de las descomposiciones genéticas de la derivada, contribuciones al análisis de los esquemas de la derivada, entre otros.

En octubre de 2010, Vicenç Font y Edelmira Badillo fueron invitados por la Embajada de España en México a participar en las Jornadas Binacionales México-España para la Enseñanza de las Matemáticas en el Colegio Madrid de México. Estas jornadas fueron el contexto en el que coincidieron con María Trigueros e Ivonne Sandoval, quienes también participaron como ponentes representantes de México. Este encuentro marcó un itinerario de colaboración entre Edelmira, María y Vicenç, centrado en la revisión de la descomposición genética (DG) de la derivada, que era uno de los resultados de la tesis doctoral de Edelmira (Badillo, 2003). Esta DG de la derivada fue refinada de la propuesta por RUMEC, incorporando elementos semióticos del Enfoque Ontosemiótico de la instrucción matemática (EOS). De aquí nacen las primeras colaboraciones conjuntas que se inician con una conversación en el evento y, posteriormente, se sella en una cena agradable en la que decidieron compartir sus conocimientos sobre APOE y el EOS, asumiendo el reto de usar el contexto de la revisión de la DG de la derivada propuesta por Edelmira para establecer un diálogo entre dichas teorías.

Poco tiempo después se reúnen en Barcelona para continuar este trabajo que resultó muy interesante y que les acercó mucho. Satisfechos con los resultados obtenidos decidieron presentarlos como comunicación en el Simposio de la SEIEM (Font et al., 2012). Un avance sobre el uso comparativo del EOS y APOE, mostrando tanto similitudes y diferencias como dificultades y potencialidades en el uso conjunto de las herramientas teóricas y analíticas fue publicado en el capítulo del libro de GIDAM de la SEIEM (Badillo et al., 2015) y, finalmente, el artículo dedicado a las aportaciones sobre la conexión entre teorías en el refinamiento de la DG de la derivada se publicó en la revista *Educational Studies in Mathematics* (Font et al., 2016).

Gloria conoció a María en el congreso PME de 2006, después de haber estudiado a fondo los trabajos que María había realizado junto a Bernie Baker y Laurel Cooley, miembros del grupo RUMEC, sobre el uso de la derivada en el esbozo de las gráficas de funciones. Estas investigadoras exploraron la interacción de dos esquemas de la teoría APOE y analizaron las relaciones entre los distintos conceptos involucrados en este problema (Baker et al. 2000). En estos trabajos, las autoras antes mencionadas, abordaron el tema de la derivada y de su uso en la construcción de gráficas utilizando límites, continuidad y derivadas sucesivas para comprender el comportamiento de la gráfica de una función. Su colaboración consistió en mostrar las dificultades de los estudiantes ante este tipo de problemas, identificados como construcción del “esquema gráfico de la derivada”, y al analizar sus respuestas, surgió la necesidad de considerar, además de las propiedades de la derivada definidas en el esquema de este concepto, el esquema de los intervalos y subintervalos del dominio de la función y su relación con el comportamiento de la función en estudio.

Posteriormente, las mismas autoras, Baker, Cooley y Trigueros, se preguntaron por la posibilidad de estudiar la tematización del Esquema propuesto para el gráfico de la derivada, considerando la posibilidad de cambiar las condiciones iniciales en diferentes intervalos del dominio de la función para que los estudiantes actuaran sobre el esquema en términos de los cambios en las relaciones encontradas (Cooley et al., 2007). En esa ocasión trabajaron con estudiantes avanzados en el curso de cálculo y en un curso de análisis.

Los resultados encontrados mostraron la dificultad de este problema, que únicamente pudo ser resuelto por una estudiante que había terminado con éxito un curso de análisis. Por su parte, más adelante, Gloria retomó el mismo tema, centrándose en el análisis de las relaciones lógicas que se establecen en y entre los elementos matemáticos implicados en el esbozo de los gráficos de funciones y su derivada (García et al., 2011; Sánchez-Matamoros et al., 2006, 2008, 2013).

Este interés común dio lugar a que, unos años después, Gloria y Edelmira invitaran a María a Barcelona para colaborar en el análisis de la tematización del problema de esbozar la gráfica de una función, junto con Claudio Fuentealba, un estudiante chileno que estaba realizando su tesis doctoral bajo su dirección (Fuentealba et al., 2019). Aclaramos que, en la teoría APOE, la tematización de un esquema se entiende como el mecanismo mediante el cual dicho esquema se transforma en un objeto. Esta transformación tiene lugar cuando es posible ejercer acciones o procesos sobre el propio esquema. Por ejemplo, al operar con él, se puede descomponer y reconstruir en función de los cambios en las condiciones de un problema, lo que permite comparar esquemas que comparten los mismos componentes, pero presentan relaciones

distintas entre ellos (Cooley et al., 2007). El resultado de esta colaboración fue un par de artículos sobre el análisis del esquema de la derivada de estudiantes universitarios (Fuentealba et al., 2016; Fuentealba et al., 2017) y la participación con comunicaciones en congresos del área. Además, surgió la necesidad de integrar los mecanismos de tematización del concepto propuestos por Piaget y la teoría APOE, con el fin de explicar las distintas estrategias adoptadas por los estudiantes que participaron en el estudio al resolver tareas complejas que involucran el esquema gráfico de la derivada (Fuentealba et al., 2022).

El primer encuentro entre Lidia Hernández-Rebollar y María tuvo lugar en la ciudad de Puebla, México. Una colega en común le mencionó a María el interés de Lidia por adentrarse en el campo de la Educación Matemática. La relación entre ellas surgió con facilidad y juntas estudiaron el axioma del supremo. El fruto de esta colaboración fue un artículo publicado en la revista *Educación Matemática* (Hernández & Trigueros, 2012). A esta colaboración le siguieron otras relacionadas con la participación de María en congresos y eventos desarrollados en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). En 2022, María se integró a esta universidad como profesora visitante e inmediatamente se reanudó su colaboración con Lidia. En esta ocasión, realizaron una descomposición genética del límite de una función en un punto, que difiere de otras publicadas anteriormente porque en ella se incluye el papel que juegan las representaciones en el estudio del límite, considerando los tipos de representaciones semióticas de Duval (1996). Los resultados de este análisis se publicaron en la revista *Enseñanza de las Ciencias* (Hernández et al., 2023).

La última colaboración en el tiempo y la primera de las cuatro autoras juntas surgió a partir de la invitación para escribir un artículo en un número especial de la revista *ZDM*, dedicado a la colaboración entre investigadores de España y Latinoamérica. Este artículo se basó en los estudios realizados previamente sobre la comprensión del esquema de la derivada y las líneas abiertas sobre la tematización del esquema. La incorporación de Lidia al equipo, dada su experiencia en la teoría APOE y su interés por analizar la comprensión de la derivada exhibida por profesores de matemáticas que realizaban estudios de posgrado en Educación Matemática en la BUAP, se alineó con el interés de las otras autoras de analizar altos niveles de comprensión del esquema de la derivada con estudiantes del máster en formación del profesorado de matemáticas en España. Las aportaciones más relevantes del estudio sobre el esquema gráfico de la derivada incluyen el análisis en profundidad de la construcción de relaciones entre las estructuras del Esquema y los mecanismos de asimilación y acomodación involucrados en la tematización según la teoría APOE (Trigueros et al., 2024).

Investigaciones desarrolladas por el grupo

Refinar una descomposición genética de la derivada: EOS-APOE

En el primer encuentro de María con Edelmira y Vicenç conversaron sobre la teoría APOE, que era un tema de interés para ellas y él y, en particular, sobre el trabajo de doctorado de Edelmira que versó sobre la noción de derivada en el cálculo (Badillo, 2003). Durante esa conversación surgieron dos cuestiones de interés común: ¿Cómo comparar y coordinar los resultados de las teorías EOS y APOE como lentes del análisis didáctico? ¿es posible relacionar estas teorías a través de la comparación del significado de “objeto” y “esquema” que aparecen como estructuras en ambas teorías? Ambas preguntas se dirigen a la comprensión de la naturaleza de los objetos matemáticos y su participación central en la actividad matemática y, por ende, en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Conscientes de que las diferentes teorías conceptualizan estas nociones de distinta manera, los problemas de investigación que se proponen estudiar cada una de ellas y la interpretación de los resultados que se obtienen son asimismo distintos. La clarificación de los aspectos que cada una de ellas atribuye al “objeto”, su naturaleza, su proceso de formación, sus distintos tipos y la forma en que se utilizan en la actividad matemática, que son centrales en la enseñanza y aprendizaje, se consideraron de importancia y de utilidad en la comparación y la posibilidad de coordinación de ambas teorías. Así, se utilizan los principios de comprensión de ambas teorías y de comparación y contrastación para estudiar la posibilidad de llevar a cabo una coordinación local entre ellas (Bikner-Ahsbahr & Prediger, 2010).

En la teoría EOS, la actividad matemática se modela en términos de configuraciones de objetos y procesos primarios puestos en juego en la práctica. Una práctica consiste en una serie de acciones orientadas hacia un objetivo y reguladas institucionalmente. El término “objeto” se usa para referirse a una entidad que está involucrada en una práctica matemática. Los objetos primarios son: problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. A través de relaciones, estos objetos primarios forman una configuración. Además, cada objeto tiene asociado un proceso y cualquier configuración se puede describir desde una perspectiva personal o institucional. En la teoría APOE, en cambio, el foco principal es la actividad del sujeto, y en ella las estructuras Acción, Proceso, Objeto y Esquema se definen para determinar la forma en que el sujeto se aproxima a la actividad matemática. Estas estructuras describen la construcción del Objeto y, en el caso del Esquema, la construcción de relaciones entre todas estas estructuras. En APOE no se distingue la estructura objeto de la teoría del objeto matemático, puesto que entre ellos hay una dialéctica que no permite distinguir uno del otro. La construcción del conocimiento en la teoría APOE sigue una secuencia de construcciones de distinto nivel, pero que no

se construye de manera lineal: se construyen Acciones que se interiorizan en Procesos, los Procesos pueden coordinarse con otros Procesos para formar uno nuevo e invertirse en las Acciones que les dieron lugar, los Procesos se encapsulan en Objetos sobre los cuales pueden aplicarse nuevas Acciones. Un Esquema es una colección de Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas entre las cuales se construyen relaciones de correspondencia, de transformación y de conservación que determinan su nivel de evolución. Cuando el Esquema se tematiza, el resultado es un nuevo Objeto sobre el cual pueden hacerse nuevas Acciones. Los mecanismos que intervienen en los cambios del conocimiento de un sujeto se relacionan todos con la abstracción reflexiva definida en la teoría del conocimiento de Piaget (Piaget & García, 1983). En la teoría APOE, el aprendizaje requiere de la aplicación de transformaciones a Objetos previamente contruidos y a través de esas transformaciones se construyen nuevos objetos cognitivos.

Siguiendo la recomendación de la metodología mencionada anteriormente, se decidió usar el objeto matemático derivada en el Cálculo Diferencial de funciones reales como contexto para la reflexión y el análisis requeridos en la comparación y posible coordinación entre estas teorías. De esta manera se abrió la puerta a una posible complementación de las dos teorías a través de cómo la noción de "Objeto" se describe en ambas teorías y de su papel en la construcción y comprensión del Objeto derivada.

Dado que Edelmira y Vicenç habían trabajado sobre el concepto de derivada con la teoría APOE y con la teoría EOS (Badillo et al., 2011), respectivamente, y María había estudiado la construcción de la gráfica de una función a través del uso de la derivada (Baker et al., 2000), se consideró que era un objeto matemático propicio para guiar el trabajo de análisis con las dos teorías y se invitó a Norma Rubio, quien trabajaba con Vicenç en ese momento a colaborar con el grupo. Además, Edelmira había desarrollado una DG del concepto y en la discusión se consideró conjuntamente que, si bien ésta es un elemento de la metodología de APOE, podría jugar un papel fundamental como contexto de reflexión dado que proporcionaba, de manera detallada, la descripción de la construcción del objeto matemático y esta facilitaría el uso de EOS como una lupa para conducir el análisis desde su perspectiva y retroalimentar el conocimiento de los elementos clave de las dos teorías para todos los autores de este trabajo.

Más aún, dado que en la DG se especifican los mecanismos requeridos en cada una de las construcciones, consideramos que, en términos de la teoría EOS, la comparación podría hacerse con los procesos y objetos primarios de dicha teoría. Por ejemplo, determinar el papel de los mecanismos entre las estructuras de APOS y contrastar con las prácticas y configuraciones que describen la emergencia de objetos en EOS, y así intentar una coordinación local entre las dos teorías y lograr con ello una comprensión más profunda de

la dinámica del aprendizaje. Además, la DG permite identificar y dar sentido a las dificultades de los estudiantes, así que la comparación de esta información con la que puede obtenerse utilizando EOS, permitiría abrir nuevas perspectivas de reflexión, entender sus causas y encontrar nuevas formas de abordarlas a partir de los principios fundamentales de esta teoría (Godino et al., 2007) y de incluir el punto de vista institucional que está ausente en la teoría APOE, aunque no en su metodología de investigación ni en su metodología didáctica.

Un resultado obtenido de esta comparación fue una reflexión profunda sobre la naturaleza de las nociones de “objeto” y “esquema” en ambas teorías. Para EOS la dualidad institucional-personal es central en la distinción de las configuraciones epistémicas de los objetos primarios desde el punto de vista institucional, así como distinguirlas de las configuraciones cognitivas de los objetos primarios desde el punto de vista individual. Los objetos matemáticos se consideran como el resultado del trabajo de los matemáticos quienes muestran sus construcciones mentales explícitamente a través de la comunidad matemática. En APOE, las estructuras mentales se consideran simultáneamente mentales y matemáticas debido a la relación dialéctica entre ellas, de manera que el objeto estudiado y el construido es el mismo (Dubinsky, 1997; Arnon et al., 2014). Por otra parte, la teoría APOE tiene una componente didáctica, el ciclo ACE (Actividades, discusión en Clase y Ejercicios), que ofrece múltiples oportunidades a los aprendices de reflexionar en un ambiente colaborativo y construir así las estructuras cognitivas, incluyendo al objeto. El ciclo ACE articula una propuesta didáctica basada en tres tipos de actividades que fomentan la construcción progresiva del pensamiento matemático. Este ciclo inicia con Actividades que los estudiantes resuelven en grupos pequeños, seguidos de una discusión grupal en Clase con el profesor y Ejercicios que se hacen en casa. Por su parte, la posición de EOS es el constructivismo convencionalista inspirado en Wittgenstein (1976). Los objetos emergen de la práctica en dos niveles. En el primer nivel, las representaciones (lenguaje), las definiciones, proposiciones, procedimientos, problemas y argumentos, que son los objetos primarios, emergen y, posteriormente, en un segundo nivel emerge un único objeto, la configuración, que puede asociarse con diferentes representaciones, definiciones equivalentes, propiedades, etc.

Los objetos en APOE resultan de las construcciones de los individuos cuando reflexionan sobre sus acciones en las distintas tareas matemáticas relacionadas con el objeto en cuestión, hacen suyas esas acciones y las interiorizan en un proceso, y este se encapsula en un objeto. El punto de vista institucional se toma en consideración de dos maneras: mediante el reconocimiento de que son el resultado del trabajo de los matemáticos, que informa la DG y a través del ciclo ACE, la componente didáctica de esta teoría.

Desde el principio, los autores discutieron la forma de llevar a cabo el análisis. Se consideró que tomar un concepto específico que hubiera sido estudiado desde las dos teorías podría apoyar la reflexión, y se decidió que un concepto apropiado era el de derivada, en parte por su importancia en el cálculo diferencial y, por otra parte, porque dicho objeto matemático había sido estudiado utilizando tanto APOE como EOS como marcos teóricos. Además, se consideró que la DG elaborada por Edelmira (Badillo, 2003) mostraba algunas posibles concordancias entre las dos teorías.

La posición de ambas teorías sobre la relación de las matemáticas con el mundo es constructivista, la matemática se considera en ambas como una construcción humana, aunque cada teoría toma un punto de vista distinto en relación con la naturaleza de las construcciones. Asimismo, ambas teorías toman en cuenta la dimensión institucional, pero, en EOS esta se toma de manera explícita y en APOE queda implícita en su metodología, tanto de investigación como de enseñanza. En ambas teorías la actividad de los estudiantes es fundamental para el aprendizaje, e incluso cuentan con formas de describirla. Del análisis conjunto surgió la posibilidad de refinar esta DG a partir de la comparación entre las teorías.

El análisis nos condujo a enfocar la reflexión en la noción de objeto y, con menor énfasis, en el esquema. En APOE, el objeto es el resultado de la encapsulación de un proceso y como se mencionó anteriormente, la teoría no distingue entre el objeto matemático y el objeto construido por el sujeto que aprende. En la descripción con EOS el aprendiz debe entender que existen procedimientos ordenados y específicos de acciones (regla o algoritmo) que deben hacerse para alcanzar un objetivo y que, para ello, es necesario un cierto nivel de reificación dado que el procedimiento puede tratarse como una unidad, es decir, en un objeto. Posteriormente, el estudiante necesita considerar un nuevo objeto que resulta de la encapsulación de un proceso y, cuando esto sucede, puede entender el significado de la definición de ese nuevo objeto. Desde el punto de vista de EOS, la encapsulación de un proceso es un mecanismo en el que se consideran dos aspectos: diferentes objetos primarios y la intervención de un entrelazamiento denso de funciones semióticas que relaciona acciones y procesos con procedimientos, y objeto con definiciones. El objeto se produce cuando ocurre el cambio en la naturaleza del objeto primario de un procedimiento a una definición, y la encapsulación del proceso de acuerdo con APOE. Esta doble transformación se puede aplicar en todos los casos de encapsulación mencionados en la DG en estudio, aunque en otras ocasiones el cambio en la naturaleza del objeto primario consiste en un procedimiento de conversión en una propiedad.

En APOE los objetos pueden también construirse mediante la tematización de un esquema. Estos se incluyen en la DG conjunta. Cuando, por ejemplo, el esquema de derivada en un punto se tematiza, las diferentes

representaciones de la derivada se consideran como un mismo objeto. Además, en el caso de la tematización del esquema de función derivada se requiere más tiempo, dado que implica la construcción de numerosas relaciones entre los componentes del esquema. De acuerdo con EOS, el objeto correspondiente a la tematización se debe situar en un segundo nivel de objetos, dado que requiere de la emergencia de una referencia global asociada a distintas configuraciones desarrolladas por los estudiantes. Las nociones de configuración cognitiva y esquema pueden también considerarse como complementarias. En el caso de la derivada, la descripción específica de esas dualidades permite entender por qué el proceso de tematización es lento, como se refiere en APOE (Cooley et al., 2007).

Un esquema está formado por distintas estructuras de APOE relacionadas entre ellas y la configuración cognitiva incluye una tipología de objetos y procesos matemáticos que puede considerarse como un esquema cuando se usa en una situación dada. El esquema se considera como una estructura que permite al individuo responder a una situación problemática, así que puede relacionarse con la organización mental de un sujeto que se usa para responder a problemas o situaciones semejantes. Al analizar la implementación del esquema en un contexto, es posible reconocer una estructura que puede describirse sistemáticamente en términos de EOS mediante configuraciones cognitivas. Este análisis mostró que no hay contradicciones intrínsecas entre estas dos teorías y que es posible establecer relaciones entre ellas.

En relación con la tematización en APOE y el segundo nivel de emergencia de un objeto en EOS, se consideró que, de acuerdo la teoría APOE, un objeto emerge de la tematización de un esquema, es decir, cuando un esquema evoluciona como resultado de un cambio en la naturaleza de las relaciones entre sus estructuras componentes hacia una estructura coherente que puede considerarse como un todo, como un objeto, y se pueden hacer acciones sobre él. Desde el punto de vista de EOS la tematización es un mecanismo que se puede relacionar con el segundo nivel de emergencia de objetos. El objeto que puede relacionarse con el Esquema se puede considerar como una referencia global asociada a varias configuraciones cognitivas de EOS. De nuevo, APOE y EOS se complementan. Mientras APOE describe detalladamente las componentes y sus relaciones, en EOS se analiza cada tarea a través de una configuración cognitiva que indica las diferencias específicas que distinguen a esas tareas y que podrían explicar especificidades de las dificultades de los estudiantes. En ambas teorías, los objetos matemáticos no existen independientemente de las personas que los aprenden, y ambas usan nociones apropiadas para dar seguimiento a su desarrollo. Todos estos hallazgos pueden influir en el diseño de intervenciones didácticas que estimulen la construcción por parte de los estudiantes, así como la formación del profesorado.

Investigaciones centradas en el Esquema de la derivada

En conversaciones de Gloria, Edelmira y Claudio Fuentealba con María se trató el desarrollo del esquema de la derivada desde la teoría APOE. El uso que los estudiantes hacen de las relaciones lógicas en y entre elementos matemáticos evidencia el desarrollo del esquema de la derivada, que era un tema de interés para los tres. En particular, sobre el trabajo de doctorado de Claudio, que trató sobre el análisis del esquema de la derivada en estudiantes universitarios de último curso de diferentes Ingenierías y del grado en Matemáticas.

El primer trabajo sobre el análisis del desarrollo del esquema de la derivada lo realizó María junto con otros investigadores (Baker et al., 2000). En este trabajo se analizó el desarrollo del esquema de la derivada centrándose en la comprensión gráfica de la conexión entre una función y su derivada, siguiendo la aproximación piagetiana del desarrollo de un esquema realizado por Baker et al. (2000). Estos investigadores conjeturan que el esquema gráfico de la derivada está formado por dos esquemas que denominaron el “esquema propiedades” y el “esquema intervalos”, lo que permitía subrayar, por un lado, los diferentes niveles de los estudiantes para coordinar las propiedades del gráfico dadas por condiciones analíticas, y por otro lado, los diferentes niveles de los estudiantes para coordinar una propiedad gráfica a través de intervalos contiguos. Baker et al. (2000) indican varios aspectos que causaron dificultades constantes a los estudiantes como son la existencia de puntos cúspides en la gráfica de la función (y su derivada), la existencia de una tangente vertical y el significado asociado, y la supresión de la condición previa de continuidad. Además, los resultados mostraron que un número significativo de estudiantes tenía una comprensión muy limitada de la segunda derivada, lo que llevó a Baker et al. (2000) a indicar que los estudiantes necesitan considerar la primera derivada en sí misma como una función para entender la importancia de la segunda derivada. Como se mencionó anteriormente, en este trabajo se subrayó la necesidad de incorporar el Esquema de los intervalos del dominio de la función, al constatar que los estudiantes mostraban dificultades para subdividir, unir o intersecar intervalos cuando se añadía una nueva propiedad de la función en estudio. Se definió de esa manera el esquema del gráfico de la derivada, en el que los esquemas antes mencionados interaccionan entre sí.

Por otra parte, Gloria en su trabajo de doctorado, para explicar el desarrollo del esquema de derivada hace uso de la perspectiva piagetiana. Según Piaget y García (1983), el desarrollo de un esquema se caracteriza por tres etapas o niveles: Intra, Inter y Trans. Se considera que un Esquema se encuentra en un nivel Intra de desarrollo cuando sus componentes están aislados. El nivel Inter del desarrollo del esquema aparece cuando comienzan a aparecer agrupaciones de diferentes componentes, a través de relaciones.

El nivel Trans del Esquema se caracteriza por la construcción de relaciones entre todas las estructuras del Esquema, evidenciándose la coherencia del Esquema. Además, Piaget y García (1983) señalan que, al analizar el desarrollo de un esquema, usando la tríada, se observa que cada nivel contiene subniveles que siguen un mismo orden y solo se puede pasarse de uno a otro cuando se ha alcanzado el previo.

Desde esta perspectiva, el desarrollo de un Esquema a través de los niveles Intra, Inter, Trans se caracteriza por el tipo de relación -coordinación de operaciones en términos piagetianos- que los estudiantes son capaces de establecer entre los elementos matemáticos (componentes) del esquema cuando resuelven un problema (Baker et al., 2000; Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros et al., 2006). Desde estas caracterizaciones generales, se considera que un esquema es una manera de comprender un concepto que implica considerar coherentemente las relaciones entre los diferentes elementos matemáticos que lo constituyen (estructura matemática formada por las relaciones lógicas que se establecen en y entre los elementos matemáticos que constituyen una noción matemática, y que puede ser evocado para la resolución de un problema). En este trabajo se han considerado elementos matemáticos de diferente naturaleza. Están por una parte los vinculados a la definición de función derivada. Por ejemplo, la derivada en un punto como límite del cociente incremental o como pendiente de la recta tangente. Y, por otro lado, los elementos matemáticos referidos a las propiedades, teoremas, lemas y corolarios. Siendo un indicador del desarrollo del esquema el tipo de relación (conjunción lógica, contrarrecíproco y equivalencia lógica) que los estudiantes son capaces de establecer entre los elementos matemáticos cuando resuelven problemas (Sánchez-Matamoros, 2004).

Entre los resultados obtenidos de este trabajo de doctorado destacan que el desarrollo del esquema de derivada no está necesariamente vinculado a conocer muchos elementos constitutivos del concepto, sino a ser capaces de coordinarlos durante la resolución de problemas. También, que el desarrollo del esquema es progresivo y que influyen los registros de representación para poder establecer relaciones. En este contexto, la síntesis de la información gráfica y analítica se considera una característica del nivel de desarrollo de la comprensión de la derivada. Asimismo, dicha investigación revela la existencia de dos subniveles anidados, tanto para el nivel Intra como para el Inter. Estos surgen de la progresión en el desarrollo del esquema, caracterizada en términos de la incorporación de un mayor número de elementos matemáticos y relaciones lógicas entre ellos, así como de la paulatina síntesis de los registros de representación (Sánchez-Matamoros et al., 2006).

Tanto en la investigación de Baker et al. (2000), como en la de Sánchez-Matamoros (2004) se pone de manifiesto que hay una construcción progresiva

del esquema y que los registros de representación influyen en la constitución de los mecanismos de transición de un nivel al siguiente.

Uno de los resultados más importantes de este trabajo relacionado con la investigación de Baker et al. (2000), es que se evidenció que los estudiantes de un alto nivel de comprensión del concepto de derivada son capaces de trasladar las relaciones entre el par (f, f') al par de funciones (f', f'') . Es decir, en esta investigación, se tuvo evidencia de la tematización del esquema de derivada cuando los estudiantes eran capaces de trasladar las relaciones entre una función y su derivada a las relaciones entre la función derivada y la función derivada segunda, y hacer uso de ello para tomar decisiones en la resolución de problemas. Esto les llevó a indicar que el estudiante, cuando ha tematizado el esquema de derivada, toma conciencia que el operador derivado corresponde a una transformación lineal que se puede generalizar, es decir, el estudiante es capaz de transferir todas las relaciones e implicaciones que ha construido y organizado para el par (f, f') al par de funciones (f', f'') y luego al par (f'', f''') y, así sucesivamente (Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros et al., 2006; García et al., 2011).

Desde este contexto, en el trabajo de doctorado de Claudio se realizó, en primer lugar, un análisis exploratorio/confirmatorio para identificar y caracterizar, por medio de métodos de análisis mixtos, los distintos subniveles de desarrollo del esquema de derivada, considerando como población del estudio a estudiantes universitarios con instrucción previa en Cálculo Diferencial. Los resultados muestran la utilidad de estos métodos ya que, unidos a los de Gloria, permitieron identificar los nueve subniveles de desarrollo del esquema de derivada (3 subniveles anidados en cada nivel). Además, la investigación realizada por Claudio permitió caracterizar cinco de los nueve subniveles en función de las variables dominantes y sus elementos matemáticos asociados (Fuentelba et al., 2019).

Uno de los aportes más relevantes sobre la tematización del esquema de la derivada, realizados por Fuentelba et al. (2017), tomando como referencia la investigación de Sánchez-Matamoros et al. (2006), fue encontrar evidencias de que el operador derivado corresponde a una transformación lineal que se puede generalizar. Es decir, los estudiantes que llegaron a la tematización del esquema fueron capaces de transferir todas las relaciones e implicaciones que han construido y organizado para el par (f, f') al par de funciones (f', f'') y luego al par (f'', f''') y así sucesivamente.

Otros estudios, centrados también en el análisis de las relaciones entre las propiedades de la función derivada, han caracterizado el desarrollo del esquema a través de las relaciones de correspondencia, transformación o equivalencia construidas entre las componentes del esquema (Trigueros et al., 2024). Las relaciones de correspondencia son aquellas que resultan de la comparación superficial de estructuras en términos de semejanzas o

diferencias. Pueden surgir de la observación repetida de pares de componentes que aparecen conjuntamente en situaciones de resolución de problemas, de modo que el individuo sabe que están relacionadas de una u otra manera, pero aún no es capaz de justificar la relación. Las relaciones de transformación se desarrollan cuando el individuo descubre que algunas estructuras del Esquema pueden agruparse y relacionarse entre sí en términos de otras estructuras, que desempeñan un papel en el razonamiento y la justificación de las conexiones. Una relación entre dos componentes que desempeñan un papel en la explicación o justificación de dicha interrelación entre otras estructuras se considerará una relación de transformación. Las relaciones de transformación se pueden distinguir cuando la relación está justificada de alguna manera. Las relaciones de equivalencia o conservación implican la conservación de propiedades que se ponen en evidencia cuando una estructura puede utilizarse en lugar de otra sin cambiar el significado del análisis o en la formación de grupos de estructuras. Las relaciones de equivalencia pueden distinguirse cuando una estructura se utiliza indistintamente como sustituto de otra (Trigueros, 2019).

Tematización del esquema

El interés por profundizar en la tematización del Esquema de la derivada y en el papel que desempeñan los mecanismos de equilibración de dicho Esquema surge a partir de los resultados de la tesis doctoral de Claudio (Fuentealba, 2017; Fuentealba et al., 2019; Fuentealba et al., 2017), de los trabajos previos realizados por Gloria (García et al., 2011) y, con especial énfasis en las aportaciones de María (Trigueros, 2019). En el contexto de una invitación para participar en un monográfico de la Revista AIEM sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la universidad, se lleva a cabo un estudio que tuvo como objetivo analizar la evidencia de comprensión del Esquema de la derivada mostrada por estudiantes avanzados al enfrentarse a tareas diseñadas para desafiar el equilibrio de sus esquemas y obtener pruebas de su posible tematización (Fuentealba et al., 2022). Con esta investigación se aporta al estudio de la tematización de un Esquema, centrándose en los mecanismos que se activan cuando los estudiantes deben realizar acciones sobre su Esquema de la derivada. En este estudio participaron 40 universitarios de la provincia de Barcelona de la doble titulación de matemáticas y física que habían cursado y aprobado con altas calificaciones, asignaturas de cálculo diferencial. En cuanto a los objetivos de este estudio, se buscó identificar posibles diferencias en los mecanismos que los estudiantes evidencian al tematizar el Esquema. Para ello, se usaron las herramientas teóricas y analíticas proporcionadas por la teoría APOE para caracterizar dicha tematización, basándonos en los trabajos de Baker et al. (2000) y en los resultados de García et al. (2011).

Una aportación metodológica de este estudio para profundizar en la tematización del Esquema de la derivada, utilizando las herramientas de APOE, es el diseño de dos instrumentos de recogida de datos: un cuestionario (Figura 1) y una entrevista clínica semiestructurada (Figura 2). El primer instrumento utilizado fue un cuestionario aplicado a los 40 estudiantes (Figura 1), que incluía tareas diseñadas para evaluar el nivel de desarrollo del Esquema de la derivada. Estas tareas fueron tomadas y, en algunos casos, adaptadas de propuestas previas realizadas en investigaciones sobre el tema (Baker et al., 2000; García et al., 2011; Sánchez-Matamoras et al., 2006). Un aspecto innovador del cuestionario para ahondar en la tematización del Esquema de la derivada es la existencia intencionada de una contradicción entre las condiciones (c, f, g, b, e, i) del enunciado de la Tarea 1 (Figura 1). La percepción de esta contradicción está relacionada con la construcción de una relación entre la información proporcionada por f'' y la que proporciona f' , entendida como la función que describe el comportamiento de la curva representada por la función en los diferentes intervalos de su dominio.

Figura 1

Cuestionario aplicado.

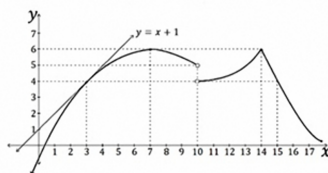
Tarea 1

Esboza la gráfica de una función f que satisfice las siguientes condiciones:

- | | |
|---|---|
| a) f es continua en su dominio | b) $f(2) = 0$ |
| c) $f'(2) = f'(5) = 0$ | d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow -8^-} f(x) = -\infty$ | f) $f'(x) < 0$ cuando $5 < x < 8$ |
| g) $f'(x) \geq 0$ cuando $x < 5$ | h) $f''(x) < 0$ cuando $3 < x < 8$ |
| i) $f''(x) > 0$ cuando $x < 3$ | |

Tarea 2

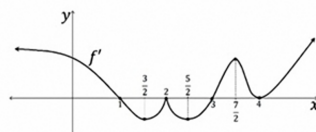
Dada la gráfica de la función f , formada por las ramas de parábolas



- Obtener los valores de $f'(3)$, $f'(7)$, $f'(10)$, $f'(14)$ y $f'(15)$. Explicando cómo los obtienes.
- Realiza un esbozo de la gráfica de f' . Explica cómo los has obtenidos.

Tarea 3

La figura muestra la gráfica de la derivada de f , esboza las posibles gráficas de f .



El análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario permitió, por un lado, identificar el nivel de desarrollo del Esquema de la derivada (Intra-derivada, Inter-derivada, Trans-derivada) que cada uno de los estudiantes mostraba. Por otro lado, también sirvió como base para la elaboración del segundo instrumento, que fue aplicado a los estudiantes que presentaron un nivel de desarrollo Trans-derivada del Esquema. Este segundo instrumento consistió en una entrevista clínica diseñada para: (i) profundizar en el proceso de resolución de las tareas propuestas a los estudiantes, y (ii) explorar los mecanismos involucrados en la posible necesidad de reconstrucción del Esquema de derivada para permitir su tematización. La entrevista semiestructurada constó de dos partes. En la primera parte, se proponen modificaciones en las condiciones de las tareas del cuestionario. En la Tabla 1 se muestran algunos ejemplos de los tipos de modificaciones en cada tarea, con el objetivo de observar si los estudiantes eran capaces de movilizar las relaciones que habían construido y que formaban parte de su Esquema, aplicándolas a una situación diferente y cómo lo hacían.

Tabla 1
Ejemplo de modificaciones a las tareas del cuestionario

Tarea	Pregunta	Justificación de la modificación
1	¿Existe algún cambio significativo en la gráfica de la tarea 1 si eliminamos la condición c ?	Buscar evidencias de si el estudiante es capaz de darse cuenta de la contradicción del enunciado de la tarea. Para ello se incide en el apartado donde el enunciado presenta dicha contradicción (apartado ‘c’). De esta forma se pretende dar la oportunidad al estudiante, que no lo hizo, de que se fije en dicha contradicción o, en el caso no hacerlo, que la justifique
2	Si la gráfica corresponde a f'' y no a f : ¿Cómo determinarías el crecimiento y decrecimiento de f''' ?	Buscar evidencias de si el estudiante es capaz de relacionar el crecimiento y decrecimiento de f''' con la curvatura de $f(f'')$. Es decir, si es capaz de establecer la monotonía de f' a partir del signo de f'' , y trasladar las relaciones entre los elementos matemáticos del par (f'', f''')
3	Si modificamos la gráfica de f'' en $x = 2$ ¿Qué sucedería con la gráfica de f en $x = 2$, si sabemos que f' es continua?	Buscar evidencia de si el estudiante es capaz de identificar que en $x = 2$ existe un máximo local de la función f', correspondiente a un punto anguloso en donde la función no es derivable

El análisis se llevó a cabo en tres fases sucesivas. En la primera fase, se identificaron los niveles de desarrollo del Esquema de la derivada que los estudiantes participantes exhiben. La segunda fase consistió en identificar a los estudiantes con un nivel de desarrollo denominado Trans-derivada. Finalmente, en la tercera fase, se caracterizaron los mecanismos de asimilación y acomodación, analizando cómo estos se vinculan con la tematización del Esquema. En particular, esta última fase se enfocó en el análisis de las relaciones construidas entre las derivadas sucesivas, las cuales se evidencian a

través de la resolución de las tareas y las entrevistas realizadas con los estudiantes.

La información recopilada en la primera parte de la entrevista clínica permitió confirmar que 9 de los 40 estudiantes habían alcanzado un nivel de desarrollo Trans-derivada del Esquema, con indicios de posible tematización. En este nivel, el Esquema mostraba coherencia y flexibilidad en el uso de las relaciones construidas entre las distintas estructuras que lo componen, especialmente cuando los estudiantes se enfrentaban a situaciones distintas. Además, la tematización requiere evidencia de que es posible realizar Acciones sobre el Esquema, lo que implica la reconstrucción de las relaciones previamente establecidas. El hecho de haberlo construido como un Objeto sobre el que se puede operar facilitará al estudiante la transferencia de las relaciones del par (f, f') al par (f'', f''') .

De los 9 estudiantes ubicados en el nivel Trans-derivada del Esquema, solo 4 decidieron participar voluntariamente en las entrevistas clínicas. El análisis de las entrevistas de los 4 estudiantes que presentaron una construcción en el nivel Trans-derivada del Esquema de la derivada mostró que, al enfrentarse a una situación nueva que desafiaba el equilibrio del Esquema construido, solo 3 de estos estudiantes demostraron la tematización del Esquema y adoptaron diversas estrategias para abordarlo. Estas estrategias evidencian que, ante la necesidad de realizar Acciones sobre el Esquema y mostrar su posible tematización, los estudiantes, en ocasiones, requieren equilibrar el Esquema construido mediante mecanismos de asimilación o acomodación.

Los resultados de este estudio muestran que, efectivamente, dos estudiantes demostraron la capacidad de equilibrar el Esquema y de operar sobre él mediante la construcción, en un caso, de una función auxiliar, y en otro, mediante la comparación de diferentes pares de derivadas sucesivas. Esta estrategia les permitió acomodar estos Objetos en su Esquema, reconstruirlo, dar sentido a las relaciones entre sus componentes y operar sobre él. Además, otro estudiante mostró, a través de sus respuestas, la posibilidad de asimilar nuevas estructuras y relaciones a su Esquema, evidenciando de manera más directa la tematización del Esquema. Las respuestas de este estudiante dan cuenta de cómo, al enfrentarse a las preguntas de la entrevista, utilizó las estructuras del Esquema construido, reconstruyendo las relaciones entre ellas para responder a cada desafío planteado.

A partir de los resultados obtenidos, este trabajo contribuye al desarrollo de la teoría APOE al ir más allá del análisis de las estructuras que los estudiantes muestran a partir del aprendizaje de diversos conceptos, enfocándose en los mecanismos que permiten dichas construcciones. El estudio proporciona evidencias claras de los mecanismos de equilibración del Esquema y su relación con el mecanismo de tematización de este.

El más reciente trabajo realizado por el equipo fue, como en el presente artículo, resultado de una invitación para un número especial de colaboraciones entre España y Latinoamérica, pero en esta ocasión para la Revista ZDM. El equipo de María, Edelmira y Gloria invitó a Lidia a aplicar un cuestionario a sus estudiantes de la maestría en educación matemática y a participar en este nuevo proyecto, cuya finalidad era continuar profundizando sobre la tematización del esquema, usando los mecanismos de asimilación y acomodación y las relaciones entre los elementos del esquema (Trigueros et al., 2024).

Para llevar a cabo esta investigación se aplicó un cuestionario (Figura 2) a 26 estudiantes que estudiaban una maestría en educación matemática, 19 de ellos eran de España y 7 eran de México. Este primer cuestionario se tomó de Baker et al. (2000) y buscaba conocer el nivel de construcción del Esquema gráfico de la derivada. Se seleccionó a 9 estudiantes que respondieron el primer cuestionario y que mostraban el nivel más alto de construcción del Esquema en estudio, así como relaciones de conservación. A estos 9 estudiantes (seis eran de España y tres de México) se les aplicó un segundo cuestionario con tres tareas que fueron adaptadas de trabajos previos (Fuentealba, 2017; García et al., 2011; Sánchez-Matamoros et al., 2006). Las tareas buscaban evidencias de una tematización del Esquema gráfico de la derivada. Dos estudiantes de España y dos de México respondieron correctamente el segundo cuestionario y se les invitó a participar en una entrevista semiestructurada. Solo tres de ellos (dos de México y uno de España) fueron entrevistados. El objetivo de la entrevista fue profundizar sobre las relaciones que estos estudiantes establecieron al resolver dos de las tareas y sobre los mecanismos implícitos que ellos utilizaron para hacer Acciones sobre el Esquema, es decir, para tematizar el Esquema.

En la Figura 2 se muestra el cuestionario que se aplicó a los 26 estudiantes de la población inicial y que buscaba conocer el nivel de construcción del esquema gráfico de la derivada, en particular, se buscaba a estudiantes que mostraran el nivel Trans, por ser el nivel más alto de construcción, como ya se ha mencionado antes. Para esbozar la gráfica de la función que se solicita en el cuestionario, los estudiantes deben establecer relaciones entre las diferentes componentes del esquema. En este caso, las relaciones que se requieren son entre los esquemas intervalos y derivada. El éxito en esta tarea hace necesario el uso de relaciones de conservación entre la función, la primera y la segunda derivada en todos los intervalos. Así también, la relación entre intervalos contiguos, mediante uniones, intersecciones y subdivisiones en términos de las propiedades de la función.

El segundo cuestionario contenía tres problemas. El primero es similar al problema del primer cuestionario (Figura 2), y los problemas 2 y 3 son los que siguen y los que se analizaron en este trabajo.

Figura 2*Problema aplicado a estudiantes de posgrado de España y México*

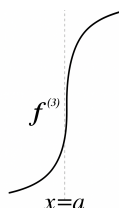
Traza la gráfica de una función h que satisfice las condiciones siguientes:

h es continua;

- a) $h(0) = 2, h'(-2) = h'(3) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} h'(x) = \infty$;
- b) $h'(x) > 0$ cuando $-4 < x < -2$ y cuando $-2 < x < 3$;
- c) $h'(x) < 0$ cuando $x < -4$ y cuando $3 < x$;
- d) $h''(x) < 0$ cuando $x < -4$, cuando $-4 < x < -2$, y cuando $0 < x < 5$;
- e) $h''(x) > 0$ cuando $-2 < x < 0$ y cuando $5 < x$;
- f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -2$.

Problema 2

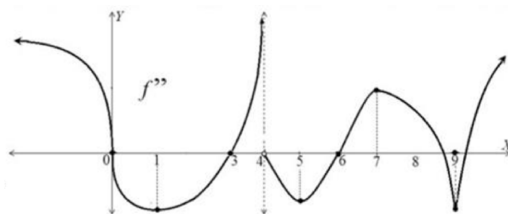
Considera la gráfica de la derivada de tercer orden de una función sobre un intervalo alrededor de , como se muestra en la figura siguiente:



Describe y explica las gráficas de las derivadas de orden dos y cuatro sobre el mismo intervalo alrededor de $x = a$.

Problema 3

Dada la gráfica de la segunda derivada de una función, dibuja, describe y explica la gráfica de la tercera derivada de la función y la de su primera derivada.



Se hallaron diferentes aproximaciones de solución a los dos problemas complejos de la derivada que se analizaron. Los dos estudiantes mexicanos iniciaron siempre con la construcción de la gráfica de la derivada de la función dada, mientras que el estudiante español abordó primero la gráfica de la antiderivada de la función. Sin embargo, los tres coincidieron en utilizar el hecho de que la gráfica de la función dada informaba sobre el comportamiento de la pendiente de las rectas tangentes en cada punto de la función cuya gráfica se buscaba. Uno de los estudiantes mexicanos requirió definir

una función auxiliar y los otros dos lo hicieron de manera directa. Así, se obtuvo información de dos maneras de tematizar el Esquema gráfico de la derivada, pues dos de los estudiantes entrevistados tematizaron el esquema a través del mecanismo de asimilación y el otro lo hizo por acomodación, al requerir de la función auxiliar.

En cuanto al tipo de relaciones establecidas, se identificó que dos de los estudiantes conectaron las propiedades de la derivada con los diferentes intervalos del dominio, mientras que el otro las conectaba, primero con los puntos críticos, y después con los diferentes intervalos. Lo anterior aportó evidencias de relaciones de equivalencia, en dos de los estudiantes y de transformación en el tercero de los participantes.

En este estudio se han utilizado las relaciones específicas necesarias para tematizar este Esquema, así como los mecanismos de asimilación y acomodación. En consecuencia, esta investigación contribuye a la literatura sobre el aprendizaje del cálculo diferencial al mostrar cómo estudiantes avanzados utilizan sus conocimientos para construir relaciones entre conceptos cuando se enfrentan a situaciones complejas. Además, es útil para desarrollar estrategias didácticas que fomenten la comprensión de las derivadas por parte de estudiantes universitarios, lo cual puede facilitar su transición a estudios avanzados de matemáticas.

Líneas futuras de colaboración

Un análisis de los datos existentes en las investigaciones que utilizan la teoría APOE en el estudio de la comprensión de la derivada de funciones reales de variable real y del Esquema de la gráfica de funciones y de su tematización nos conduce a preguntarnos ¿Por qué es este Esquema tan difícil de construir? ¿Es necesario contar con conocimientos avanzados de Cálculo Diferencial y de Análisis Matemático para establecer relaciones de transformación entre sus componentes, entender su coherencia y tematizarlo? ¿Hay posibilidades de que los estudiantes construyan un Esquema coherente de la gráfica de la derivada en un primer acercamiento al Cálculo Diferencial en la universidad? ¿Qué factores se deberían tomar en consideración para lograr una comprensión más profunda de la derivada y del Esquema gráfico de la derivada?

El análisis de la literatura muestra que, a pesar de los diferentes esfuerzos relacionados con la construcción del concepto de derivada en el primer acercamiento al Cálculo diferencial en la universidad, los estudiantes continúan mostrando dificultad para alcanzar niveles altos de comprensión. Estos resultados evidencian la necesidad de diseñar nuevos acercamientos o fortalecer los existentes para lograr que más estudiantes construyan la derivada como un Objeto, tan temprano como sea posible. La comprensión de la derivada como Objeto permitiría la construcción de relaciones entre sus

propiedades y su relación con la continuidad para lograr la construcción del Esquema gráfico de la derivada.

Uno de los proyectos futuros que tenemos en mente es diseñar ciclos de enseñanza de la derivada que partan de una descomposición genética que subraye el papel de la relación entre la recta tangente a una curva y el concepto de derivada, de la relación de las propiedades de la derivada con los intervalos, así como del tránsito entre derivadas sucesivas. Los resultados de los estudios previos que hemos realizado evidencian que los estudiantes que mostraron una comprensión profunda de estas relaciones las utilizaron en la resolución de los problemas sobre la gráfica de la derivada, manifestando la tematización de dicho Esquema (Fuentealba, et al., 2022; Trigueros et al., 2024)

Otro proyecto posible de investigación que toma como base los resultados relativos a la construcción del Esquema gráfico de la derivada sería analizar la influencia de los ciclos de enseñanza diseñados para profundizar sobre el tránsito entre derivadas sucesivas en términos de los mecanismos, las relaciones y los intervalos, y valorar si aumenta el número de estudiantes que tematizan dicho Esquema. Todo lo anterior podría determinar si es necesario o no el refinamiento de la DG inicial.

Estos proyectos pueden desarrollarse a largo plazo, aunque seguramente habrá proyectos parciales que surjan de ellos y que puedan realizarse en un lapso de tiempo más corto.

Agradecimientos

Este estudio se ha realizado con financiamiento de PID2023-149580NB-I00 y PID2023-149624NB-I00 (MICINN-España) y GIPEAM-2021-SGR-00159. Se agradece a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla el apoyo a este trabajo.

Referencias

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.
- Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behaviour*, 16(4), 399–431.
- Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia* [Tesis doctoral]. Universidad Autónoma de Barcelona.

- Badillo, E., Azcárate, C., & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ de profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(2), 191–206. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n2.546>
- Badillo, E., Trigueros, M., & Font, V. (2015). Dos aproximaciones teóricas en Didáctica del Análisis Matemático: APOE y EOS. En C. Azcárate (Coord.), *Didáctica del análisis matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM: periodo 1997–2014* (pp. 31–51). SEIEM.
- Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), 557–578.
- Bikner-Ahsbahr, A., & Prediger, S. (2010). Networking of theories—an approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. En B. Sriraman, & L. English (Eds.), *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers. Advances in Mathematics Education series* (Vol. 1. pp. 483–506). Springer.
- Cooley, L., Trigueros, M., & Baker, B. (2007). Schema thematization: A framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 370–392.
- Duval, R. (1996). Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage', En *Actes de la 46ème Rencontre Internationale de la CIEAEM* (Tome 1, pp. 3–15). Université Paul Sabatier, Toulouse.
- Dubinsky, E. (1997). A reaction to a critique of the selection of mathematical objects as a central metaphor for advanced mathematical thinking by Confrey and Costa. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2, 67–91.
- Font, V., Badillo, E., Trigueros, M., & Rubio, N. (2012). La encapsulación de procesos en objetos analizada desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. En A. Estepa Castro, A. Contreras de la Fuente, J. Deulofeu Piquet, M. del C. Penalva Martínez, F. García García, & L. Ordóñez Cañada (Eds.), *Investigación en educación matemática XVI* (Vol. 2, pp. 239–248). SEIEM.
- Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97–124. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0>
- Font, V., Trigueros, M., Badillo, E., & Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, 91(1), 107–122. <https://doi.org/n3d3>
- Fuentealba, C., Badillo, E., & Sánchez-Matamoros, G. (2016). Las conexiones entre las derivadas sucesivas de una función: Un estudio exploratorio sobre la existencia de matices en la tematización del Esquema de la derivada. *Avances en Matemática Educativa teorías y enfoques*, 3, 47–59.
- Fuentealba Aguilera, C. (2017). *Análisis del esquema de la derivada en estudiantes universitarios* [Tesis doctoral]. Universidad Autónoma de Barcelona.

- Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G., Badillo, E., & Trigueros, M. (2017). The-matization of the derivative schema in university students: a study about the existence of nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48, 374–392. doi.org/10.1080/0020739X.2016.1248508
- Fuentealba, C., Trigueros M., Sánchez-Matamoros G., & Badillo E. (2022). Los mecanismos de asimilación y acomodación en la tematización de un Esquema de derivada. *AIEM Avances de investigación en educación matemática*, 21, 23–44. https://doi.org/10.35763/aiem21.4241
- Fuentealba, C., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G., & Cárcamo, A. (2019). Los subniveles de desarrollo del esquema de derivada: un estudio exploratorio en el nivel universitario. En A. Carvalho (Ed.), *Educação Matemática e suas Tecnologias* (Vol. 2, pp. 133–141). Atena Editora.
- García, M., Llinares, S., & Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9, 1023–1045. https://doi.org/b886xk
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM - Mathematics Education*, 39(1–2), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1
- Hernández-Rebollar, L. A., & Trigueros-Gaisman, M. (2012). Acerca de la comprensión del concepto del supremo. *Educación Matemática*, 24(3), 67–87.
- Hernández-Rebollar, L. A., Gaisman, M. T., Estrada, H. R., & Ruiz, E. J. (2023). La concepción dinámica del límite de una función desde APOE y los registros semióticos. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 41(2), 117–135.
- Piaget J., & García R. (1983). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. Siglo veintiuno editores.
- Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de Bachillerato y primer año de la Universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto)* [Tesis Doctoral]. Universidad de Sevilla.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(1), 85–98.
- Trigueros, M. (2019). The development of a Linear Algebra schema: learning as result of the use of a cognitive theory and models. *ZDM - Mathematics Education*, 51(7), 1055–1068. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01064-6
- Trigueros, M., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G., & Hernández, L. (2024). Contributions to the characterization of the Schema using APOS theory: Graphing with derivative. *ZDM - Mathematics Education*, 56(6), 1093–1108. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01615-6
- Wittgenstein, L. (1976). *Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas*. Alianza.

