

# Pensamiento funcional desarrollado por estudiantes de secundaria al resolver dos tareas asociadas al concepto de función escalonada

Carlos Enrique Flores Gasca <sup>1</sup> 

Verónica Vargas Alejo <sup>2</sup> 

## Resumen

Este capítulo presenta los resultados de una investigación cualitativa cuyo objetivo fue identificar los tipos de pensamiento funcional que exhiben y desarrollan estudiantes de secundaria al resolver tareas relacionadas con la función escalonada. El referente teórico utilizado se conforma de conceptualizaciones sobre el pensamiento funcional. Se diseñaron e implementaron dos tareas apoyadas en SimCalc MathWorlds, contextualizadas en el movimiento de un automóvil. Participaron seis estudiantes de tercer grado de secundaria. Los resultados muestran que los tipos de pensamiento funcional asociados con la recursividad y la covariación cualitativa, exhibidos en la primera tarea, se desarrollaron, de tal forma que en la segunda surgieron tipos de pensamiento funcional vinculados con la covariación cuantitativa y la correspondencia.

## Palabras clave

Pensamiento funcional, función escalonada, nivel secundaria, tarea

---

<sup>1</sup> carlos.flores@unaq.mx

<sup>1</sup>Universidad Aeronáutica en Querétaro, Querétaro, México

<sup>2</sup> veronica.vargas@academicos.udg.mx

Universidad de Guadalajara, Jalisco, México

Flores Gasca, C. E., & Vargas Alejo, V. (2025). Pensamiento funcional desarrollado por estudiantes de secundaria al resolver dos tareas asociadas al concepto de función escalonada. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebolgar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2025* (pp. 135–153). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2025/01-06>

## Introducción

Diversos estudios (Billings & McClure, 2005; De Villiers, 1988; Flores-Gasca & Vargas-Alejo, 2021, 2023, 2024; Kaput & Roschelle, 2013; Vargas-Alejo et al., 2016) han documentado las dificultades que enfrentan estudiantes de distintos niveles educativos al resolver problemas relacionados con funciones escalonadas. En particular, se ha identificado que este tipo de funciones, utilizadas con frecuencia para modelar fenómenos discontinuos en contextos reales, presentan retos significativos tanto en su interpretación como en su construcción gráfica.

Por ejemplo, Morge y Pusey (2010) reportan que estudiantes de secundaria experimentaron dificultades para transitar entre diversas representaciones, explicar el comportamiento de funciones definidas por partes e interpretar gráficas en contextos significativos. De manera similar, De Villiers (1988) y Vargas-Alejo et al. (2016) destacan que incluso en el nivel universitario persisten obstáculos cuando los estudiantes se enfrentan al análisis de funciones discontinuas o constantes. Vargas-Alejo et al. (2016) observó que algunos estudiantes universitarios tienen dificultades básicas como subdividir correctamente los ejes del plano cartesiano al representar gráficamente una función escalonada. Con frecuencia, transfieren mecánicamente los datos de una tabla a la gráfica sin considerar la naturaleza de la función, lo que da lugar a representaciones erróneas, como gráficas lineales, sin sentido en cuanto al comportamiento de la situación representada, ya que los estudiantes unen puntos mecánicamente o bien elaboran gráficas de barras.

Billings y McClure (2005) así como De Villiers (1988) vinculan estas dificultades con el enfoque tradicional de enseñanza del concepto de función y función escalonada, respectivamente, en el cual predomina la representación algebraica y se minimiza el análisis de la relación funcional subyacente. Este enfoque limita las oportunidades de los estudiantes para dar sentido a las variables involucradas, explorar la relación entre ellas y darles significado al construir conexiones entre distintas representaciones (gráficas, tabulares, verbales o algebraicas) de la función.

Ante este panorama, Smith (2008) señala la necesidad de ofrecer a los estudiantes, desde niveles escolares tempranos, experiencias distintas a las tradicionales que les permitan desarrollar pensamiento funcional, entendido como “una actividad cognitiva que se centra en la relación entre dos (o más) cantidades variables, específicamente en los tipos de pensamiento que, a partir de una relación específica, conducen a generalizaciones de esa relación entre instancias” (Smith, 2008, p. 143).

En esta línea, con la necesidad de ofrecer a los estudiantes experiencias distintas a las tradicionales que inclusive fueran más allá de comprender conceptos matemáticos complejos como el de función escalonada, está la

investigación de Kaput y Roschelle (2013) quienes en sus estudios buscan la democratización de la enseñanza del cálculo. Estos investigadores propusieron el uso del software *SimCalc MathWorlds* para, entre otros fines más complejos, facilitar el análisis de fenómenos al permitir que los estudiantes visualizaran cómo cambian las variables y cómo se relacionan entre sí. Estos investigadores señalan que conviene aprovechar la capacidad de la tecnología para vincular las representaciones gráficas con los fenómenos físicos y con ello conseguir el desarrollo de conocimiento por los estudiantes.

Derivado de lo anterior, el objetivo de esta investigación, de tipo estudio de caso, fue analizar el pensamiento funcional que exhiben estudiantes de secundaria de una escuela pública marginada al resolver tareas centradas en funciones escalonadas y apoyadas en el uso de la simulación del movimiento de un automóvil de *SimCalc MathWorlds*. Estas tareas fueron diseñadas a partir de las propuestas de Smith (2008) y Panorkou y Maloney (2016). La pregunta que orienta este estudio es: ¿Cuáles son los tipos de pensamiento funcional que exhiben y desarrollan estudiantes de nivel secundaria al realizar dos tareas relacionadas con la función escalonada y apoyadas en el uso de *SimCalc MathWorlds*?

## Antecedentes

Los conceptos de función y función escalonada son relevantes en las matemáticas porque constituyen nociones básicas de la disciplina. Permiten interpretar, explicar y predecir fenómenos que ocurren con frecuencia a nuestro alrededor. Datey (2015), por ejemplo, encontró que la función escalonada permite interpretar el fenómeno de *flujo de caja*, entendido como movimiento de efectivo (ingresos y egresos) dentro y fuera de una empresa durante un período de tiempo específico. Este investigador señala que, aunque en ocasiones es útil pensar en funciones continuas para describir el comportamiento de situaciones, la función escalonada puede ofrecer una descripción más precisa del flujo de caja. En su estudio, criticó varios enfoques matemáticos de otros investigadores por su dificultad para describir y explicar el fenómeno y como resultado propuso la función escalonada como base para explicar de manera más adecuada el comportamiento del fenómeno.

El concepto de función escalonada es también relevante en la educación matemática. Llaría (2011) menciona, por ejemplo, que las funciones escalonadas pueden servir como apoyo para el aprendizaje del cálculo. Sin embargo, este concepto se aborda con poca frecuencia en los cursos de matemáticas previos al cálculo. Al respecto existen varias investigaciones que documentan experiencias sobre el aprendizaje de esta función en el aula.

Morge y Pusey (2010), por ejemplo, exploraron cómo estudiantes de secundaria y del nivel universitario concebían a las funciones no lineales, en particular las funciones escalonadas, al transitar entre distintas representa-

ciones (tablas, gráficas, expresiones). Estos investigadores otorgaron importancia al contexto para promover la comprensión profunda de las relaciones funcionales. Entre sus resultados encontraron que los estudiantes de secundaria usaron modelos físicos, diagramas y tablas. La mayoría identificó un patrón correcto, aunque señalaron que muchos de los estudiantes no lograron escribir una regla simbólica formal. En cambio, los estudiantes universitarios tendieron a usar reglas simbólicas rápidamente (dividir entre 3 y redondear hacia arriba), pero en ocasiones razonaron incorrectamente sobre los residuos.

En su estudio, Morge y Pusey (2010) concluyeron que trabajar con funciones escalonadas en secundaria es valioso, pero desafiante. Los contextos pertinentes y el uso de modelos físicos fueron útiles para el abordaje del problema, sin embargo, para futuras implementaciones, sugirieron incluir tablas y gráficos para favorecer la comprensión, ya que los estudiantes que representaron el problema de múltiples formas (tabla y gráfico) tuvieron más éxito.

Billings y McClure (2005) realizaron una investigación con estudiantes de séptimo grado de secundaria para ayudarlos en el desarrollo de una comprensión profunda de las funciones lineales y escalonadas. Utilizaron un contexto real significativo que permitiera a los estudiantes vincular las representaciones tabulares, gráficas, verbales y simbólicas de las funciones. Se basaron en la idea de que comprender una función implicaba analizar la relación entre variables, más allá de sus representaciones. Entre sus resultados identificaron que los estudiantes identificaron patrones en tablas (Peso vs. Número de hojas) y los emplearon para hacer predicciones precisas; comprendieron la diferencia entre funciones lineales (peso total en función del número de hojas) y funciones escalonadas (costo postal en función del peso). Lograron generalizar verbal y simbólicamente las relaciones: por ejemplo, al señalar que el peso del paquete se podía calcular como  $0.16 \times (\text{número de hojas}) + 0.53$ . Entendieron el concepto de que, en la función escalonada, el costo *salta* al siguiente nivel solo cuando se supera cierto umbral de peso.

Billings y McClure (2005) concluyeron que el contexto real y las representaciones, así como la manipulación de datos, la predicción de valores y la formulación de generalizaciones verbales y simbólicas resultan importantes para que los estudiantes, incluso de secundaria, construyan una comprensión profunda de las funciones lineales y escalonadas.

Kaput y Roschelle (2013), por su parte, exploraron cómo a través de tecnologías podría democratizarse el acceso al pensamiento matemático complejo, particularmente el de cambio y variación (asociado al cálculo), y transformar el currículo escolar de matemáticas para que más personas comprendan y apliquen las ideas fundamentales del cálculo. Utilizaron el software SimCalc MathWorlds para que estudiantes de secundaria mani-

pularan gráficas dinámicas vinculadas con animaciones (por ejemplo, elevadores o payasos que se mueven). Las tareas diseñadas contemplaban representar funciones de velocidad, comparar áreas bajo curvas (como distancia), y explorar conceptos de valor medio, continuidad y límite, a partir del movimiento real de los estudiantes y su representación gráfica digital. Entre las funciones trabajadas se incluyó la función escalonada.

Sus hallazgos indican que los estudiantes atribuyeron un significado más preciso a conceptos complejos del cálculo como el valor medio, continuidad y límites, mediante la experiencia corporal y visual, antes de trabajar con notación formal. Las gráficas, entre ellas las de funciones escalonadas, fueron comprendidas con mayor precisión en términos de los fenómenos físicos representados.

El proyecto SimCalc (Kaput & Roschelle, 1994), inspirado principalmente en James Kaput, se creó con el objetivo de hacer accesibles a todos los estudiantes, desde los niveles básicos, las ideas fundamentales del cálculo, como la tasa de cambio y acumulación. Su planteamiento no parte de símbolos abstractos, sino de representaciones basadas en movimientos familiares, mediante gráficos similares a juegos.

SimCalc MathWorlds se distingue de otros programas como GeoGebra (Mumcu, 2024) porque en lugar de generar gráficas y ecuaciones a partir de fórmulas escritas por los estudiantes, son las animaciones de los objetos creados en el *mundo matemático* las que generan automáticamente las tablas, gráficas y ecuaciones. Esto permite que los alumnos observen de manera simultánea cómo el cambio de posición y velocidad de los objetos (automóviles, por ejemplo) afecta la pendiente en las gráficas. SimCalc MathWorlds se describe, por lo tanto, como un entorno intuitivo y simultáneo.

Una investigación reciente en la que se utilizó SimCalc MathWorlds es la de Mumcu (2024) quien trabajó con 12 estudiantes de octavo grado para analizar el desarrollo de su pensamiento funcional a través de un experimento de enseñanza que integraba este software. Sus hallazgos mostraron un progreso en las estrategias para dibujar gráficas, escribir una ecuación de dos variables y hallar la pendiente de la gráfica y ecuaciones solicitadas. Además, aumentó el número de estudiantes que pudieron explicar la pendiente al observar la tabla, la gráfica y la ecuación. Concluyó que las tablas, gráficas y ecuaciones presentadas simultáneamente en los mundos matemáticos pudieron haber contribuido al desarrollo de su conocimiento. En su estudio se trabajó únicamente con la función lineal, no la escalonada.

En este estudio interesa, de manera específica, analizar el pensamiento funcional de estudiantes de secundaria, al resolver tareas apoyadas en SimCalc MathWorlds relacionadas con la función escalonada. Se toman como referentes teóricos las aportaciones de Smith (2008) y Panorkou y Maloney (2016) sobre el Pensamiento funcional, a continuación, se describen.

## Referentes teóricos

De acuerdo con Blanton y Kaput (2011), aprender matemáticas implica que los estudiantes construyan, relacionen, manipulen y generalicen patrones, relaciones y funciones mediante el uso y la transición entre distintas representaciones. En esta misma línea, Kaput (2008) y Smith (2008) señalan que también supone que los estudiantes desarrollen competencias y habilidades que les permitan resolver “situaciones funcionales”, entendidas como problemas cercanos a la vida cotidiana, que pueden describirse o predecirse a partir del uso de una o más funciones.

Pittalis et al. (2020) por su parte, señalan que, al involucrar a los estudiantes en la resolución de situaciones funcionales, desarrollan procesos cíclicos de conjeturas y acciones que les permiten: *a)* analizar el cambio cualitativo y cuantitativo de las variables involucradas, *b)* establecer la relación entre ellas y *c)* resolver la situación mediante dicha relación.

## Pensamiento Funcional

Smith (2008) propuso un marco para describir los tipos de pensamiento funcional que pueden exhibir los estudiantes al participar en la resolución de situaciones problema asociadas a funciones. De acuerdo con este investigador, los tipos de pensamiento funcional (Tabla 1) son:

- 1) Pensamiento funcional de recursividad
- 2) Pensamiento funcional de covariación
- 3) Pensamiento funcional de correspondencia

**Tabla 1**  
*Tipos de pensamiento funcional*

| Tipos de pensamiento funcional           | Descripción                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Pensamiento Funcional de Recursividad    | Se refiere a encontrar el patrón de una secuencia de valores de una variable                                                                                                                                                                                                                    |
| Pensamiento Funcional de Covariación     | Se centra en el análisis de cómo dos o más cantidades varían simultáneamente y se analiza la forma en la que una varía con respecto a otra                                                                                                                                                      |
| Pensamiento Funcional de Correspondencia | Hace referencia sobre la relación entre pares de variables correspondientes. De acuerdo con Confrey y Smith (1995) este pensamiento ocurre cuando los estudiantes forman o relacionan las dos cantidades variables y construyen una regla que relacione la variable independiente y dependiente |

*Nota.* Adaptado de Smith (2008)

Estos tipos de pensamiento funcional fueron ampliados por Panorkou y Maloney (2016), con base en investigaciones de Confrey y Smith (1995) y de Smith (2008), mediante una clasificación de los tipos de pensamiento funcional (Tabla 2) que también pueden exhibir los estudiantes. Los inves-

tigadores señalan que esta extensión posibilita clasificar “las respuestas de los estudiantes desde representaciones o descripciones menos sofisticadas a más sofisticadas” (Panorkou & Maloney, 2016, p. 96).

**Tabla 2**  
*Tipos de pensamiento funcional*

| Nivel | Tipo de Pensamiento Funcional                                                                     |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4     | Correspondencia y Covariación                                                                     |
| 3     | Covariación cuantitativa y visualización de la relación como una línea en el plano de coordenadas |
| 2     | Covariación Cuantitativa                                                                          |
| 1     | Covariación Cualitativa                                                                           |

*Nota.* Extracto tomado de Panorkou y Maloney (2016)

Estos niveles de pensamiento funcional (Tabla 2) se utilizaron en esta investigación para analizar las respuestas de los estudiantes y a partir de los resultados se elaboró una nueva propuesta de niveles de pensamiento funcional, derivados y adaptados de Smith (2008) y Panorkou y Maloney (2016), la cual se presenta en la sección de metodología (Tabla 3).

**Metodología**

La investigación fue de tipo cualitativa, específicamente un estudio de caso de carácter instrumental (Stake, 1994), ya que el objetivo fue comprender en profundidad cómo un grupo de estudiantes de secundaria de una escuela marginada exhibía y desarrollaba su pensamiento funcional al resolver tareas diseñadas con apoyo del software SimCalc MathWorlds. Según Stake (1994), los estudios de caso instrumentales permiten explorar un fenómeno particular para obtener una comprensión más profunda de un tema o problema educativo. En este caso, el fenómeno de interés fue el pensamiento funcional de los estudiantes en contextos de simulaciones matemáticas con tecnología educativa.

De acuerdo con Yin (2018), un estudio de caso se justifica metodológicamente cuando se busca responder preguntas del tipo “cómo” o “por qué”. Los casos no deben considerarse como una muestra representativa, sino oportunidades para explorar y comprender un fenómeno en profundidad en contextos reales. Estas condiciones se cumplen en este estudio, en el cual se analizaron las producciones de los estudiantes durante su interacción con una herramienta tecnológica en el entorno escolar.

*Participantes*

El estudio de caso se llevó a cabo en una escuela secundaria pública. La población de estudio estuvo conformada por un grupo de seis estudiantes,

lo que permitió un análisis detallado de sus procesos de pensamiento. Los participantes provenían de diferentes grupos de tercer grado de secundaria, quienes fueron seleccionados aleatoriamente por el director de la institución. Una vez elegidos se les preguntó si deseaban participar, y aceptaron.

### *Las Tareas*

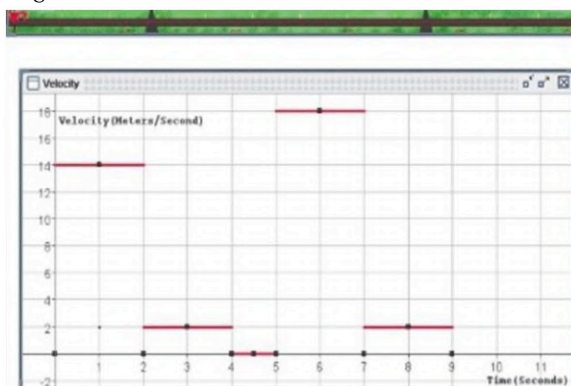
Se diseñaron dos tareas expresas para este estudio de caso. Estas tareas se relacionaban con el fenómeno del movimiento de un automóvil y fueron elaboradas por un investigador y un profesor-investigador. Para su diseño se consideraron los aportes de Smith (2008) y Panorkou y Maloney (2016). El propósito fue conocer cómo los estudiantes identificaban las variables, algún patrón de cambio, la covariación, es decir, si reconocían cómo las cantidades variaban de manera simultánea y, finalmente, si lograban construir la regla de correspondencia entre las variables. Estas tareas fueron implementadas mediante el software SimCalc MathWorlds, que posibilita la visualización de relaciones funcionales a través de representaciones gráficas y animaciones dinámicas.

La primera tarea consistió en:

- a) Una simulación del movimiento de un automóvil en el programa Carsz de SimCalc MathWorlds (Figura 1) y una discusión grupal para describir de manera verbal el movimiento del automóvil en términos de las variables velocidad promedio y tiempo, involucradas en el contexto del problema. Los fenómenos simulados presentaban distintos comportamientos, es decir, variaciones en su velocidad promedio en distintos intervalos de tiempo.
- b) Una hoja de trabajo (Figura 2) elaborada a partir del uso de una nueva simulación (Figura 3) del programa Carsz.

### **Figura 1**

*Simulación del Programa Carsz de SimCalc MathWorlds*



*Nota.* Extracto tomado de Panorkou y Maloney (2016)



Figura 2

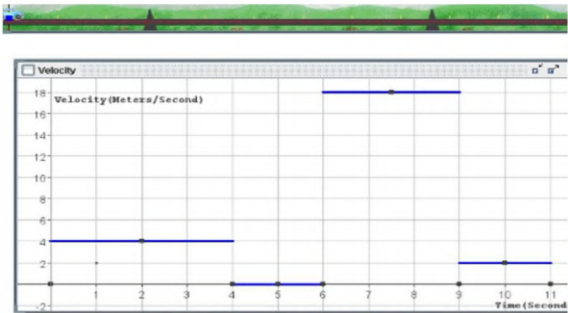
Extracto de Hoja de trabajo de la Tarea 1

- 1. ¿Cuáles son las variables que te permiten describir el movimiento del automóvil en la gráfica?
- 2. ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente?
- 3. Describe el comportamiento del automóvil con base en la gráfica que se observa en el video. Es decir, *describe* ¿cómo varía la velocidad media del automóvil con respecto al tiempo?
- 4. Describe la velocidad media que lleva el automóvil en los intervalos de 0 a 4 segundos, de 4 a 6 segundos, de 6 a 9 segundos y de 9 a 11 segundos.  
¿Cambió la velocidad media que llevaba el automóvil del segundo 5 al segundo 8? Si fue así, ¿cuánto cambio?

Nota. Imagen tomada de la Hoja de trabajo. Fuente propia

Figura 3

Extracto de la Simulación asociada a la hoja de trabajo de la Tarea 1



Nota. Imagen tomada de la simulación del programa. Fuente propia

La segunda tarea consistió en:  
Una nueva hoja de trabajo elaborada exprofeso (Figura 4), donde los estudiantes tenían que responder varias preguntas a partir de la descripción del movimiento de un autobús durante un trayecto determinado.

Figura 4

Extracto de Hoja de trabajo de la Tarea 2

- 1. La siguiente tabla describe el movimiento de un autobús RTP que recorre la Av. Tláhuac desde la estación del metro Tezonco.

| Tiempo (segundos) | Velocidad Media (metros/segundos) |
|-------------------|-----------------------------------|
| (0, 3)            | 3                                 |
| [3,5]             | 5                                 |
| (6, 9]            | 1                                 |
| (9, 10)           | 0                                 |

Describe con tus propias palabras el movimiento del RTP, en términos de lo que ocurre en cada intervalo. Escribe algebraicamente y gráficamente cómo es la velocidad del autobús RTP.

El objetivo de la implementación de ambas tareas fue analizar el pensamiento funcional de los estudiantes de secundaria, apoyado en la simulación SimCalc MathWorlds a la vez que se promovía su desarrollo.

La implementación

Un investigador y un profesor-investigador organizaron el cronograma de implementación de las tareas. Todas las tareas fueron resueltas de forma individual por los estudiantes de secundaria. La duración total de la implementación fue de dos horas con cincuenta minutos, distribuidas de la siguiente manera (Tabla 3), durante aproximadamente 140 minutos los estudiantes trabajaron individualmente y los últimos 30 minutos lo hicieron en forma grupal.

Tabla 3  
*Duración de la implementación de las tareas*

| Tareas                        | Descripción                                          | Duración   |
|-------------------------------|------------------------------------------------------|------------|
| Tarea 1                       | Implementación de la Tarea 1 y cierre de la Tarea 1. | 80 minutos |
| Tarea 2                       | Implementación de la Tarea 2 y cierre de la Tarea 2. | 60 minutos |
| Cierre de la sesión Plenaria. |                                                      | 30 minutos |

La implementación de la Tarea 1 consistió en lo siguiente. Inicialmente, el profesor-investigador realizó una simulación con el apoyo del programa SimCalc MathWorlds Carsz y preguntó a los estudiantes sobre el comportamiento del automóvil durante su recorrido. También les preguntó por las variables que intervinieron en este. Posteriormente, les proporcionó la hoja de trabajo de la Tarea 1 (Figura 2) para que la resolvieran individualmente.

Al concluir la resolución de la hoja de trabajo de la Tarea 1, el profesor-investigador organizó una discusión grupal donde los estudiantes compartieron y discutieron sus respuestas. A continuación, el profesor-investigador les proporcionó la hoja de trabajo de la Tarea 2 (Figura 4).

El papel del profesor-investigador durante la implementación fue formular preguntas a los estudiantes de secundaria que le brindaran información respecto a su pensamiento funcional, en términos de cómo resolvían las tareas: ¿qué estás haciendo? ¿entiendes la situación? ¿puedes describir este segmento de línea utilizando el contexto de la situación? Asimismo, promovió las interacciones grupales y las discusiones finales.

Recopilación de datos

De acuerdo con Yin (2018) es fundamental aplicar la triangulación de datos en los estudios de caso, es decir, recurrir a múltiples fuentes de evidencia (documentos, observaciones, etc.) para validar los hallazgos de un estudio y

obtener una visión más completa y profunda del caso. En esta investigación se recopiló información detallada durante las dos sesiones de implementación, mediante:

- a) Observación directa del trabajo de los estudiantes.
- b) Hojas de trabajo individuales.
- c) Grabaciones de audio de las sesiones.
- d) Notas de campo del profesor-investigador.

Los audios fueron transcritos para su posterior análisis, y las respuestas escritas se organizaron por tarea y por estudiante para facilitar la codificación.

**Análisis de los datos**

El análisis de los datos se efectuó mediante una clasificación emergente (Tabla 4), derivada del examen sistemático de las respuestas de los estudiantes. La clasificación incorporó elementos de los tipos de Pensamiento Funcional (PF) propuestos por Panorkou y Maloney (2016) y por Smith (2008). Esta categorización permitió identificar patrones en la forma en que los estudiantes interpretaban y utilizaban relaciones funcionales en el contexto de las tareas propuestas.

**Tabla 4**  
*Tipos de Pensamiento Funcional*

| Pensamiento Funcional | Descripción              | Tipo de Pensamiento Funcional                                                                                                                                                                  |
|-----------------------|--------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| PF1                   | Variación                | El estudiante exhibe pensamiento de recurrencia, es decir, puede identificar el patrón de cambio de una o más cantidad que varían en el contexto de un problema                                |
| PF2                   | Covariación Cualitativa  | El estudiante no solo exhibe pensamiento de recurrencia, sino que identifica y relaciona las variables que están involucradas en la situación problema cualitativamente                        |
| PF3                   | Covariación Cuantitativa | El estudiante no solo exhibe covariación cualitativa, sino que identifica y relaciona cuantitativamente las variables que están involucradas en la situación problema                          |
| PF4                   | Regla de Correspondencia | El estudiante, además de exhibir covariación cuantitativa, puede establecer una relación (algebraicamente) entre el par correspondiente de la variable dependiente y la variable independiente |

*Nota.* Tipos de pensamiento funcional, adaptado de Panorkou y Maloney (2016)

**Resultados y Discusión**

Se analizan y discuten los resultados derivados del estudio de caso. El análisis se presenta a partir del pensamiento funcional observado y su desarrollo.

*Tarea 1. Pensamiento funcional inicial*

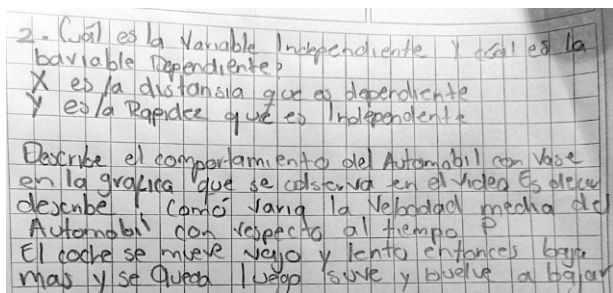
Se identificaron principalmente tres tipos de pensamiento funcional: PF1, PF2 y PF3 en las respuestas de los estudiantes a la Tarea 1 (Figura 2). Enseguida se describe en detalle al respecto.

Los estudiantes  $a_1$  y  $a_2$  describieron el comportamiento del automóvil en términos de la rapidez y la distancia. En la Figura 5 se observa cómo el estudiante  $a_1$  identificó la rapidez como variable de tipo independiente y la distancia como variable de tipo dependiente [PF1]. Asimismo, logró describir el movimiento del automóvil cualitativamente al escribir *el coche...baja, luego sube y vuelve a bajar* [PF2]

Es decir, el estudiante  $a_1$  exhibió pensamiento funcional de recurrencia, al identificar el patrón de cambio de las cantidades rapidez y distancia, que variaban en el contexto de un problema. Además, relacionó ambas variables, debido a la simulación observada en la que el automóvil se desplazaba.

### Figura 5

Descripción del movimiento del automóvil por  $a_1$



Nota. Respuestas de  $a_1$  las preguntas 2 y 3 de la Tarea 1. Fuente propia

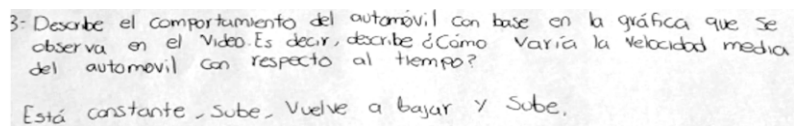
El estudiante  $a_2$ , por su parte, también describió el movimiento del automóvil en términos de rapidez y distancia. Esto se evidenció durante la sesión cuando el estudiante mencionó lo siguiente:

Estudiante  $a_2$ : *la rapidez del coche es constante y depende de la distancia que recorre* [PF1]

Asimismo, se observa en la Figura 6 que el estudiante describió el movimiento del automóvil cualitativamente al escribir que la rapidez de este *está constante, sube, vuelve a bajar y sube de nuevo* [PF2]. El estudiante relacionó las variables distancia y rapidez.

### Figura 6

Descripción del movimiento del automóvil por  $a_2$



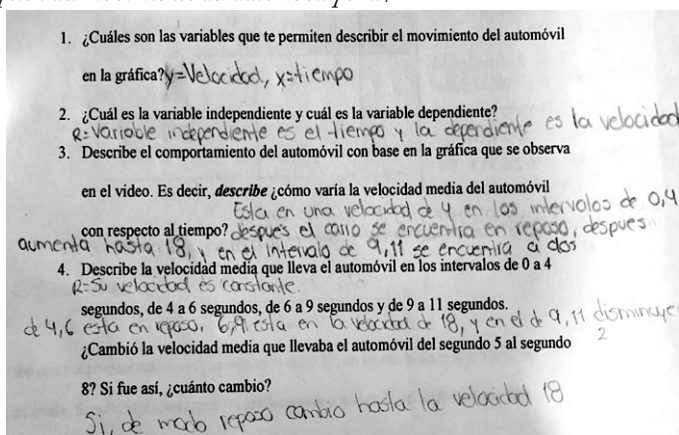
Nota. Respuesta de  $a_2$  a la pregunta 3 de la Tarea 1. Fuente propia

Los estudiantes  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $a_5$  y  $a_6$  por su parte, describieron el movimiento del automóvil en términos de la velocidad y el tiempo. Al respecto, en la

Figura 7 se observa cómo el estudiante  $a_4$  describió el movimiento del automóvil en esos términos de la velocidad y tiempo [PF1]. Este estudiante al igual que logró describir cualitativa y cuantitativamente [PF2 y PF3] las variables involucradas en el contexto del problema.

### Figura 7

*Descripción del movimiento del automóvil por  $a_4$*

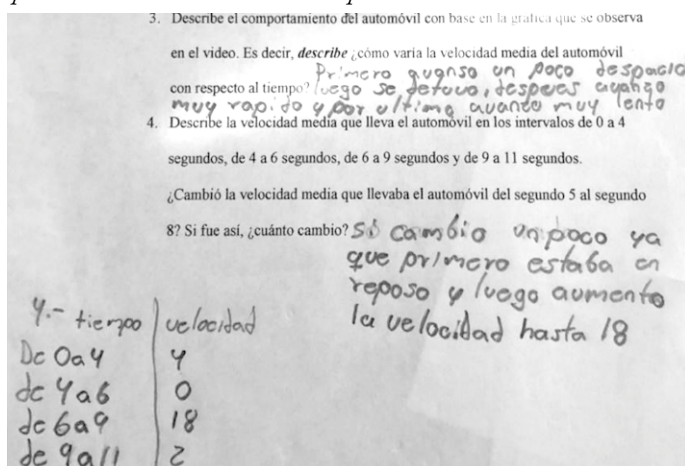


*Nota.* Respuestas de  $a_4$  a las preguntas de la Tarea 1. Fuente propia

Los estudiantes  $a_5$  y  $a_6$  también lograron describir el movimiento del automóvil en términos de la velocidad y tiempo [PF1], sin embargo, ellos elaboraron, adicionalmente, tablas para responder a la pregunta cuatro (Figura 8 y Figura 9)

### Figura 8

*Descripción del movimiento del automóvil por  $a_5$*



*Nota.* Respuesta de  $a_5$  a la pregunta 4 de la Tarea 1. Fuente propia

**Figura 9**

*Tabla complementaria para describir el movimiento del automóvil por  $a_6$*

4.

| tiempo  | velocidad |
|---------|-----------|
| de 0,4  | 4         |
| de 4,6  | 0         |
| de 6,9  | 18        |
| de 9,11 | 2         |

*Nota.* Respuesta de  $a_6$  a la pregunta 4 de la Tarea 1. Fuente propia

Los estudiantes  $a_5$  y  $a_6$  lograron describir las variables involucradas en el contexto del problema de forma cualitativa y cuantitativa [PF2 y PF3] utilizando dos representaciones (escrita y tabular) para describir la situación.

### *Reflexión sobre las respuestas a la Tarea 1*

Los estudiantes  $a_1$  y  $a_2$  describieron la situación de manera cualitativa, en términos de la rapidez y la distancia. Ambos emplearon la rapidez como sinónimo de velocidad, esto se constató cuando el profesor-investigador les preguntó *¿Qué es la rapidez?* A lo que ellos respondieron: *es la velocidad de un automóvil*. Esto coincide con los hallazgos de De Villiers (1988), en el sentido de que suele ser común que los estudiantes confundan el término de rapidez con el de velocidad cuando se encuentran describiendo un problema asociado a este concepto.

En la descripción de sus respuestas se observa un PF inestable, ya que sus respuestas fueron en términos de rapidez y velocidad y no las descritas en el contexto del problema, además se trató de respuestas escasas y cualitativas, por lo que podemos decir que los estudiantes se encuentran en un nivel PF1.

Los estudiantes  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $a_5$  y  $a_6$  describieron sus respuestas en términos de la velocidad y el tiempo de forma cualitativa y cuantitativa. Sin embargo, se observa que presentaron dificultades para describir los extremos de los intervalos. Esto coincide con Kaput y Roschelle (2013), en el sentido de que los estudiantes suelen tener dificultades para describir los extremos de los intervalos cuando se describen funciones definidas a trozos. Otro aspecto relevante es que emplearon el término velocidad como sinónimo de velocidad media.

### *Tarea 2. Pensamiento funcional final*

Se identificaron principalmente tres tipos de pensamiento funcional PF1, PF2 y PF3, en las respuestas de los estudiantes a la Tarea 2 (Figura 4). Enseguida se describe en detalle.

Los estudiantes  $a_1$  y  $a_2$  (Figura 10 y Figura 11) describieron el movimiento del autobús en términos de las variables velocidad y tiempo [PF1]. Se observa que relacionaron cualitativa [PF2] y cuantitativamente [PF3] las variables involucradas en el contexto del problema.

**Figura 10**

*Descripción del movimiento del autobús por  $a_1$*

Primero el bus tiene una velocidad de 0 en un rango de 0 a 3, en el rango de 3 a 5 segundos. Después la velocidad del bus disminuye a 1, en el intervalo de 6 a 9 segundos. Finalmente, el bus tiene una velocidad de 0 en el rango de 9 a 10.

*Nota.* Respuesta de  $a_1$  de la Tarea 2. Fuente propia

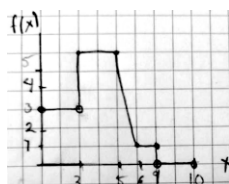
Complementariamente, ambos estudiantes construyeron una gráfica de tipo poligonal como la que se muestra enseguida (Figura 10), la cual fue difícil de explicar, como se puede observar en el siguiente extracto.

Profesor Investigador: ¿Qué representa la unión de los puntos en cada extremo dentro del contexto del problema?

Estudiante: No hay otra forma de describir funciones de este estilo, debe de ser continua

**Figura 11**

*Descripción gráfica del movimiento del autobús por  $a_2$*

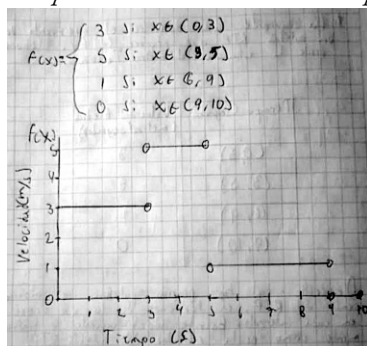


*Nota.* Gráfica poligonal construida por  $a_2$ . Fuente propia

Por su parte, los estudiantes  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $a_5$  y  $a_6$  no solo describieron cualitativa y cuantitativamente la variable velocidad en función del tiempo, sino que además construyeron representaciones tabular y algebraica para complementar sus respuestas. En la Figura 12 y Figura 13 se observan procedimientos representativos de lo que hicieron estos cuatro estudiantes.

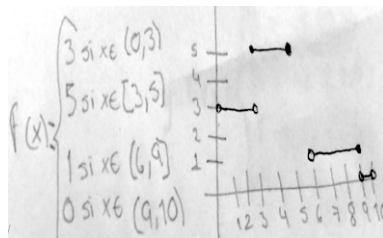
**Figura 12**

*Descripción del movimiento del autobús por  $a_3$*



En el primer intervalo el bus se mueve a 3 metros sobre segundo, luego sube su velocidad a 5 m/s hasta el segundo 5, luego baja su velocidad media a 1 m/s de 6 a 9 s. Finalmente tiene velocidad media de 0 del segundo 9 al segundo 10.

*Nota.* Respuesta de de la Tarea 2. Fuente propia

**Figura 13***Descripción del movimiento del autobús por  $a_6$* 

*Nota.* Función representada en forma algebraica y gráfica, construida por  $a_6$ . Fuente propia

Los estudiantes establecieron una relación de correspondencia entre las variables involucradas en la Tarea 2, de manera gráfica y algebraica [PF4] para describir sus resultados. De esta forma construyeron la función escalonada subyacente a la situación problema.

### *Reflexión sobre las respuestas a la Tarea 2*

Los estudiantes  $a_1$  y  $a_2$  desarrollaron su manera de pensar, sus descripciones para la Tarea 2 mejoraron respecto de las descripciones para la situación incluida en la Tarea 1. Las respuestas para la Tarea 2 se formularon en términos de la velocidad con respecto al tiempo, de forma cualitativa y cuantitativa, por lo que puede afirmarse que los estudiantes lograron exhibir un PF3. Sin embargo, sus respuestas de forma tabular las complementaron con una gráfica de tipo poligonal, la cual resultó difícil de explicar. Esto coincide con los hallazgos de De Villiers (1988) y Kaput y Roschelle (2013) en el sentido de que los estudiantes presentan dificultades para describir y representar funciones de carácter discontinuo y constante.

Por su parte, los estudiantes  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $a_5$  y  $a_6$  describieron sus respuestas en términos de las variables velocidad y tiempo y las relacionaron de forma cualitativa y cuantitativa [PF3]. Además, establecieron una regla de correspondencia que expresaba sus resultados de forma algebraica lo cual indica que su pensamiento funcional evolucionó a un PF4.

Al finalizar la Tarea 2, el profesor-investigador dirigió una discusión de retroalimentación con los estudiantes sobre sus respuestas y los conceptos implicados. En esta retroalimentación aplicó un cuestionario de reflexión. Todos los estudiantes señalaron que les habían gustado mucho las tareas y la interacción con SimCalc MathWorlds. Además, pudieron describir lo aprendido. A manera de ejemplo, el estudiante  $a_3$  escribió *aprendí qué es una gráfica de una función escalonada, sus representaciones algebraicas y tabulares; qué es una variable independiente y dependiente, así como qué es una función*. De forma verbal, los estudiantes  $a_5$  y  $a_6$  manifestaron que no podían creer que fueran capaces de graficar y expresar algebraicamente una función tan



*extraña y linda*. Los estudiantes  $a_2$  y  $a_4$  mencionaron que *la próxima vez que se suban a un autobús ya saben cómo describir su velocidad usando gráficos, tablas y de manera algebraica*. En general, señalaron que el uso del programa dinámico les permitió describir la función en términos de las variables involucradas en el problema.

## Conclusiones

Mediante la descripción y discusión de los resultados, se respondió a la pregunta de investigación planteada en este capítulo: ¿Cuáles son los tipos de pensamiento funcional que exhiben y desarrollan los estudiantes de nivel secundaria al realizar dos tareas relacionadas con la función escalonada y apoyadas en el uso de SimCalc MathWorlds? Se observó que los estudiantes  $a_1$  y  $a_2$  comenzaron con un PF inestable al identificar, relacionar y describir variables, de forma cualitativa, y utilizar variables como rapidez y distancia, sin un entendimiento. Sin embargo, desarrollaron su manera de pensar al identificar las variables velocidad y distancia, y relacionarlas entre sí, cualitativa y cuantitativamente, por lo que puede afirmarse que iniciaron con PF1 y PF2 y finalizaron con un PF3. Además, recurrieron a una representación gráfica, aunque de tipo poligonal, lo que evidenció dificultades para describir una función de carácter discontinuo.

Los estudiantes  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $a_5$  y  $a_6$  describieron inicialmente la situación mediante el uso de las variables velocidad y tiempo [PF3], acompañada, en el caso de los estudiantes  $a_5$  y  $a_6$  de una representación tabular. Sin embargo, aunque en la Tarea 1 presentaron dificultades para describir los extremos de los intervalos de la función, que representaban en el contexto del problema, posteriormente, los cuatro desarrollaron su manera de pensar y establecieron una relación de correspondencia que les permitió describir la situación mediante una función escalonada. En consecuencia, puede afirmarse que el PF del grupo de estudiantes evolucionó de un PF1, PF2 y PF3 a un PF4.

Los hallazgos de esta investigación, tipo estudio de caso, confirman por un lado, resultados previos como los descritos en la introducción, especialmente aquellos que mencionan que es común que los estudiantes enfrenten dificultades para describir situaciones problema que implican el uso de funciones de carácter discontinuo y constante.

Por otro lado, evidencia cómo el uso de SimCalc MathWorlds puede favorecer el desarrollo de ideas propias del pensamiento funcional de estudiantes de niveles básicos, en este caso de secundaria, quienes desarrollaron conocimiento sobre las funciones de carácter discontinuo y constante, así como aprendieron a representarlas con intervalos de tipo semiabierto. Esto permite sugerir que simuladores como SimCalc MathWorlds deberían seguir utilizándose en el aula para apoyar el desarrollo del pensamiento funcional de estudiantes, o bien que se recurra a simuladores semejantes

que describan de manera dinámica este y otros contextos, eventualmente contruidos con GeoGebra, por ser un software de libre acceso.

### Agradecimientos

Agradecimiento a SECIHTI por su apoyo de becas para posgrado, Campus Viviente por su apoyo para esta investigación y al director Ángel Gasca Borja y a la Escuela Secundaria Diurna No. 316 Francisco Gonzales Bocanegra por brindarnos el espacio para llevar a cabo la investigación en sus instalaciones.

### Referencias

- Billings, E. M., & McClure, M. S. (2005). Mailing a Publication: Exploring Linear and Step Functions in a Real-World Context. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 10(7), 349–355.
- Blanton, M., & Kaput, J. J. (2011). Functional Thinking as a Route into Algebra in the Elementary Grades. En J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization, Advance in Mathematics Education* (pp. 5–23). Springer.
- Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66–86.
- Datey, V. C. (2015). Step Function Model For Forecasting Project Cash Flow. *International Journal of scientific research and management*, 3(5), 2812–2815.
- De Villiers, M. D. (1988). Modelling with Step-Functions. *Mathematics in School*, 17(5), 8–10.
- Flores-Gasca, C., E. & Vargas-Alejo, V. (2021). Interpretación de gráficas en contexto por estudiantes universitarios. En D. Olanoff, K. Johnson, & S. Spitzer (Eds.), *Proceedings of the 43th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1297–1305). PME-NA.
- Flores-Gasca, C., E. & Vargas-Alejo, V. (2024). Pensamiento Funcional de estudiantes universitarios al resolver una tarea donde subyace la función escalonada. En K. Kosko, J. Caniglia, M. Zolfaghari, & G. Morri (Eds.), *Proceedings of the 45th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 148–152). PME-NA.
- Kaput, J. J. (2008). What is Algebra? What is Algebraic Reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5–18). Routledge.
- Kaput, J. J., & Roschelle, J. (1994). *SimCalc MathWorlds* (Versión 6.1) [Software]. Center for Technology in Learning. <https://simcalc.sri.com/index.html>
- Kaput, J. J., & Roschelle, J. (2013). The mathematics of change and variation from a millennial perspective: New content, new context. En S. J. Hegedus, & J. Roschelle (Eds.), *The SimCalc Vision and Contributions* (pp. 13–26). Springer.

- Morge, S. P., & Pusey, E. L. (2010). Take time for action: Step Up to Nonlinear Functions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(6), 310–313.
- Llaría, D. R. (2011). Piecewise-Defined Functions on the TI-Nspire. *MatheMatics teacher*, 104(8) 626–628.
- Mumcu, K. T. (2024). *Investigating development of eighth-grade students' functional thinking through a SIMCALC MATHWORLDS integrated teaching experiment* [Tesis inédita de maestría]. Orta Doğu Teknik Üniversitesi.
- Panorkou N., & Maloney A. (2016). Early algebra: Expressing Covariation and Correspondence. *Teaching Children Mathematics*, 23(2), 90–99.
- Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2020). Young Students' Functional Thinking Modes: The Relation Between Recursive Patterning, Covariational Thinking, and Correspondence Relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 51(5), 631–674.
- Smith, E. (2008). Representational Thinking as a Framework for Introducing Functions in the Elementary Curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133–160). Routhledge.
- Stake, R. E. (1994). Case studies. En N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 236–247). Sage.
- Vargas-Alejo, V., Reyes-Rodríguez, A., V., & Cristóbal-Escalante, C. (2016). Ciclos de entendimiento de los conceptos de función y variación. *Educación Matemática*, 28(2), 59–83.
- Vargas-Alejo, V., & Flores-Gasca, C., E. (2023) Razonamiento covariacional por universitarios al usar SimCal MathWorlds. En S. Patrick, Y., Morales, & A. Ruíz (Eds.), *Comité Interamericano de Educación Matemática (2023). Educación Matemática en las Américas 2023* (pp. 347–354). CIAEM.
- Yin, R. K. (2018). *Case Study Research and Applications: Design and Methods* (6th ed.). Sage Publications.

