

Contribuciones y perspectivas en la resolución y formulación de problemas matemáticos: El uso sistemático de tecnologías digitales en escenarios de enseñanza

Contributions and perspectives in mathematical problem posing and problem-solving approaches: The systematic use of digital technologies in learning scenarios

Matías Camacho-Machín ¹ 

Luz Manuel Santos-Trigo ² 

Fernando Barrera-Mora ³ 

Resumen

En este capítulo se presentan aspectos que han sustentado y guiado la colaboración entre la Universidad de La Laguna y el Cinvestav en los últimos 25 años, así como las perspectivas futuras de trabajo. Se identifican resultados obtenidos y se incorporan nuevos elementos basados en las tendencias actuales, que consideran la importancia del desarrollo y uso sistemático y coordinado de diversas tecnologías y plataformas digitales para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Se enfatizan los procesos de resolución y formulación de problemas mediante el uso de herramientas tecnológicas, a partir de un cuestionamiento sistemático que promueve el planteamiento y discusión de preguntas como un medio para que los estudiantes desarrollen una comprensión de conceptos y competencias en resolución de problemas.

¹ mcamacho@ull.edu.es

Universidad de La Laguna (SEIEM)

² msantos@cinvestav.mx

Centro de Investigación y Estudios Avanzados (SOMIDEM)

³ fbarrera10147@gmail.com

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (SOMIDEM)

Palabras clave

Formulación de problemas, matemáticas, tecnologías digitales, aprendizaje.

Abstract

This chapter presents key aspects that have characterized the collaboration between the University of La Laguna and Cinvestav (Center for Research and advanced studies) during the last 25 years, as well as future perspectives for joint work. It includes some of the results obtained and incorporates new elements based on current trends, emphasizing the importance of the systematic and coordinated development and use of various technologies and digital platforms for the teaching and learning of Mathematics. Our shared interest is particularly focused on problem formulation and solving through the use of technological tools, based on systematic questioning to enhance the understanding of mathematical concepts.

Keywords

Problem posing, mathematics, digital technologies, learning.

Introducción

Es reconocido ampliamente que la colaboración entre grupos de investigación contribuye directamente al desarrollo de conocimiento disciplinar. En este contexto, el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional y el Departamento de Análisis Matemático (área de Didáctica de las Matemáticas) de la Universidad de La Laguna iniciaron una fructífera colaboración desde la década de los 80, la cual continúa desarrollándose de manera sostenida en distintos temas de la educación matemática. Ha incluido visitas o estancias académicas recíprocas de profesores y estudiantes en las dos instituciones, la codirección de tesis doctorales, la impartición de cursos y seminarios, la participación en congresos internacionales y la generación de publicaciones de trabajos conjuntos.

La coincidencia en temas de investigación ha propiciado la construcción de una agenda común que ha sustentado el desarrollo de diversos proyectos de investigación y práctica. El área de investigación que ha sido el soporte académico de estas colaboraciones académicas se relaciona con la importancia de las actividades de resolución de problemas en los procesos de construcción de conocimiento matemático, tanto en los profesores como en los estudiantes.

¿Cuáles son los temas y resultados importantes en el dominio de la resolución de problemas y cómo se relacionan con los avances y desarrollos de la Educación Matemática? En términos generales, la Educación Matemática, en su agenda de investigación y práctica, reconoce la importancia de analizar cómo los profesores/estudiantes construyen o desarrollan conoci-

miento matemático y aplican formas de pensar consistentes con las prácticas propias del quehacer matemático en la resolución de problemas.

En esta dirección, los procesos de formulación de problemas y la búsqueda de diversas formas de resolverlos son actividades esenciales asociadas con el desarrollo de las matemáticas (Santos-Trigo, 2020, 2024). ¿Cómo se formula un problema matemático? ¿Qué significa comprender el enunciado de un problema o un concepto matemático? ¿Cómo influye el uso de herramientas concretas o materiales (regla y compás; papel y lápiz), tecnologías digitales (GeoGebra, Wolfram Alpha, Mathematica, ChatGPT o DeepSeek, etc.) o simbólicas (Sistema Cartesiano, representaciones simbólicas, etc.) en las formas de razonamiento matemático que construye el profesor/estudiante en la resolución de problemas o en la comprensión de conceptos? Estas y otras preguntas han guiado y sustentado diversos proyectos de investigación desarrollados en colaboración entre instituciones mexicanas y la Universidad de La Laguna (Tenerife, España).

En este capítulo, se muestran rasgos del origen y evolución de la colaboración, señalando los resultados importantes y las tendencias recientes que consideran el desarrollo y uso sistemático de tecnologías y plataformas digitales en el estudio de las matemáticas. En las actividades de resolución de problemas, los estudiantes tienen la oportunidad de desarrollar un método de indagación que les permite explorar el significado de conceptos matemáticos y su aplicación en la resolución de problemas. En esta dirección, los estudiantes plantean y analizan constantemente preguntas como un medio para comprender conceptos y desarrollar competencias en resolución de problemas.

Antecedentes y racionalidad

La resolución de problemas matemáticos es un campo de investigación y práctica, en la Educación Matemática, que sustenta y relaciona el quehacer y el desarrollo de las matemáticas con las actividades de aprendizaje que promueven y guían la construcción de conocimiento matemático en los profesores y estudiantes. En esta perspectiva, el estudio de las prácticas de la disciplina (¿cómo se desarrolla una idea o concepto matemático?, ¿cómo se formula y resuelve un problema en la disciplina?) proporciona bases para caracterizar lo que significa pensar matemáticamente, y ofrece información importante sobre qué actividades son esenciales durante el desarrollo de un pensamiento matemático robusto de los estudiantes. Así, la formulación de problemas y la búsqueda sistemática de diversos caminos o formas de resolver problemas son actividades esenciales e interconectadas que impulsan el desarrollo del conocimiento matemático.

En la comunidad matemática, la identificación y presentación de listas de problemas abiertos ha sido una tradición que ha inspirado a los matemá-

ticos en la búsqueda de soluciones y en el desarrollo de conocimiento en la disciplina (Santos-Trigo, 2020; 2024). Así, los intentos de resolución, el desarrollo de métodos y las soluciones proveen información relevante sobre qué áreas y contenidos de la disciplina se han desarrollado en distintas etapas de la historia de las matemáticas. Por ejemplo, al tratar de probar el Teorema de Fermat que establece: $x^n + y^n = z^n$ la ecuación no tiene soluciones enteras diferentes de cero, para todo entero $n > 2$, se desarrolló una de las ramas importantes de la teoría de números, la Teoría de Números Algebraicos.

En la Educación Matemática interesa analizar y documentar el desarrollo cognitivo de los estudiantes y la influencia del ambiente social durante la construcción de conocimiento matemático y competencias en resolución de problemas (Liljedahl & Cai, 2021). Santos-Trigo (2024) argumenta que existen diferentes caminos e interpretaciones sobre cómo diseñar e implementar actividades de resolución de problemas en escenarios de aprendizaje. Sin embargo, existen principios comunes que sustentan y distinguen un acercamiento que privilegie la resolución de problemas en el aprendizaje de la disciplina. En este contexto, las experiencias, la disponibilidad y el comportamiento de los estudiantes al abordar una tarea matemática se orientan alrededor de una forma de pensar que es consistente con las prácticas de la disciplina. Las formas de razonamiento se expresan o manifiestan a partir de las actividades que los estudiantes desarrollan durante las fases de resolución de problemas. Pólya (1945) propone un método de indagación donde el estudiante problematiza el proceso de comprender conceptos y resolver problemas. Reconoce la importancia de que los estudiantes formulen preguntas durante las cuatro fases que caracterizan el proceso de resolver problemas: *comprensión* del enunciado y búsqueda de sentido y significado del problema (¿de qué trata el problema?, ¿qué datos incluye?, ¿qué se pregunta?); *diseño* de un plan de solución (¿cómo se puede representar el problema?, ¿se puede pensar en un problema más simple?, ¿se puede construir un modelo dinámico del problema?); *implementación* del plan para resolver el problema (¿qué relaciones o patrones surgen en la exploración del modelo del problema?, ¿existen soluciones parciales que aportan a la solución global?); *revisión* o *análisis retrospectivo* del proceso de resolución del problema (¿qué datos se usaron en la resolución del problema?, ¿las unidades son consistentes y la solución tiene sentido?, ¿se puede generalizar el método de solución o extender el problema inicial?).

Así, durante los procesos de formulación y resolución de problemas, el profesor/estudiante identifica conceptos, recursos y estrategias para analizar propiedades o atributos de objetos matemáticos, construye modelos y explora el comportamiento de sus elementos, formula conjeturas o relaciones y busca argumentos para validar relaciones, formular teoremas y resultados. Además, desarrolla una notación y lenguaje para enunciar y presentar conceptos y

operaciones, así como la solución de problemas o justificación de resultados. Entre las actividades del quehacer matemático se destaca la búsqueda de múltiples caminos para modelar y explorar conceptos y resolver problemas, la formulación de preguntas y la búsqueda de diversos argumentos para validar conjeturas y resultados.

Leung et al. (2024) afirman que los enfoques de aprendizaje basados en problemas promueven en los estudiantes un método de cuestionamiento abierto que les permite involucrarse en ciclos múltiples e iterativos para resolver un problema. En este proceso, los estudiantes tienen la oportunidad de refinar su comprensión de conceptos y así robustecer los métodos y estrategias de resolución de problemas. Por esto, es importante explicar y caracterizar cómo los estudiantes desarrollan competencias en resolución de problemas en sus experiencias de aprendizaje. Con esto se establece un puente entre la investigación en Resolución de Problemas y la práctica de enseñanza (Fried, 2014). “La resolución de problemas es un dominio de investigación central para los educadores matemáticos, quienes han desarrollado marcos conceptuales para formular ideas generales sobre los procesos de resolución de problemas (más allá de ideas puntuales necesarias en la resolución de problemas específicos)” (Fried, 2014, p. 17).

Sobre la comprensión de conceptos matemáticos

¿Cómo se desarrolla la comprensión de un concepto matemático? ¿Qué actividades promueven la comprensión y aplicación de un concepto matemático en la resolución de problemas? Santos-Trigo et al. (2024) afirman que el proceso de comprensión de un concepto matemático implica que los estudiantes analicen, concilien y reflexionen sobre sus diversos significados incluyendo el tránsito entre acercamientos intuitivos, geométricos, operacionales y formales. Además, reconocen que siempre existen diversas maneras de caracterizar e interpretar el significado y las formas de analizar un concepto matemático. Por ejemplo, Thurston (1994) identifica varias dimensiones asociadas con la comprensión del concepto de *derivada* de una función, que permiten a los estudiantes estudiar el concepto desde perspectivas distintas y complementarias. En ese camino, un acercamiento “infinitesimal” centra la atención en el cociente del cambio infinitesimal en el valor de una función y el cambio infinitesimal en una variable, el tratamiento *simbólico* enfatiza las reglas y operaciones para derivar funciones, el significado *geométrico* de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función; la derivada como una *razón de cambio* o la velocidad instantánea de la función con respecto al tiempo o la definición *formal de derivada* que involucra el concepto de límite. Así, durante el proceso de comprensión de un concepto, todas las dimensiones y significados son importantes y demandan que el estudiante identifique y active diferentes recursos y estra-

tegias para representar, explorar, operar y aplicar el concepto en la resolución de problemas. Además, el proceso de comprensión de un concepto se desarrolla de manera gradual y en el camino los estudiantes continuamente analizan y contrastan los significados asociados con cada una de las dimensiones del concepto. Así, la integración de los diversos significados o dimensiones del concepto es importante para que los estudiantes desarrollen una comprensión global del concepto que les permita aplicarlo en la resolución de problemas.

En términos generales, la resolución de problemas ofrece bases y principios para estructurar ambientes de enseñanza/aprendizaje alrededor de hábitos y formas de pensar asociados con el quehacer y desarrollo de la disciplina (Cuoco et al., 1996; Santos-Trigo, 2024). En este camino, el profesor o estudiante se involucra en decisiones estratégicas sobre qué hacer durante la comprensión de un concepto o la resolución de un problema (¿qué material o recursos consultar?, ¿con quién dialogar y discutir ideas?, ¿cómo interactuar con pares o expertos?, ¿cómo usar herramientas generativas de inteligencia artificial?). En el estudio de la disciplina, un principio integrador es conceptualizar a las matemáticas como un conjunto de dilemas que el profesor/estudiante problematiza durante su estudio y en el desarrollo de competencias en resolución de problemas. La problematización se manifiesta a partir de las preguntas que el profesor/estudiante plantea durante los procesos de comprensión de conceptos y en las distintas fases de resolución de problemas (Polya, 1945). Además, el uso de distintas herramientas resulta esencial en las formas de razonar y responder las preguntas.

Sobre el uso de sistemas de geometría dinámica (SGD)

El desarrollo de Sistemas de Geometría Dinámica como GeoGebra representa una contribución importante en la representación y exploración de conceptos matemáticos y en la resolución de problemas. Las representaciones estáticas de objetos matemáticos, que se construyen con el uso de lápiz y papel, se transforman en modelos dinámicos donde la herramienta permite mover elementos dentro del modelo y así buscar relaciones o propiedades asociadas con el comportamiento de los atributos de los objetos. Una característica relevante en el uso de un SGD es que la precisión en la representación de objetos matemáticos no depende de las habilidades del estudiante en el uso de un instrumento como el compás, regla u otro artefacto. La herramienta provee al estudiante de un camino para representar objetos como rectas, segmentos, ángulos, polígonos o construir paralelas, perpendiculares, bisectrices, entre otros, de manera precisa. Además, permite mover ordenadamente objetos, cuantificar atributos, trazar lugares geométricos, etc., que resultan importantes en la búsqueda de propiedades o relaciones matemáticas. Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009; 2013) proponen un

marco para estructurar prácticas y estrategias de resolución de problemas que permite a los estudiantes transformar problemas rutinarios en una serie de actividades y tareas que extiendan la naturaleza rutinaria de la actividad. En este proceso, el uso coordinado de tecnologías digitales (GeoGebra) y plataformas en línea (Wikipedia, Khan Academy, etc.) resulta importante para extender los problemas y métodos de resolución. Así, de manera explícita, se recomienda que los estudiantes construyan modelos dinámicos de los problemas y consulten recursos en línea como un camino para revisar y extender su comprensión de conceptos (Santos-Trigo et al., 2021). Un ejemplo de un modelo dinámico que involucra figuras u objetos simples (líneas, puntos, circunferencia, etc.) se muestra en las Figuras 1 y 2. En este modelo, al mover el punto P sobre la circunferencia se genera una sección cónica (elipse) (Figura 1) y al mover el punto Q sobre la recta AB , otras cónicas aparecen (Figura 2).

Figura 1

El lugar geométrico del punto R cuando P se mueve sobre la circunferencia es una elipse

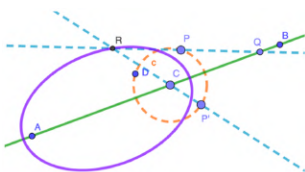
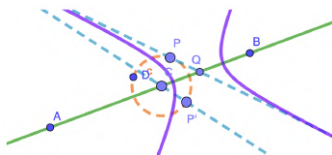


Figura 2

Al mover el punto Q sobre la recta AB , otras secciones cónicas aparecen, una hipérbola



Santos-Trigo et al. (2024) analizan el comportamiento de un tractocamión (camión con remolque) al pasar por debajo de un puente con una altura conocida (Figura 3). La idea es determinar las dimensiones y condiciones del tractocamión para que pueda librar o cruzar la avenida sin afectar el puente. En el modelo dinámico (Figura 4) se observa que debido a la inclinación del camino que se produce al reparar la vía, la altura del remolque, medida desde la superficie de la vía hasta el pie del puente a la parte superior del tractocamión (PR) al pasar el puente, cambia.

En la gráfica se observa la variación de PK y, en este caso, con las dimensiones dadas de la caja del tractocamión, el valor máximo que alcanza PK es 2.219 unidades. Lo que significa es que la altura del puente debe ser mayor que 2.219 unidades para que el tractocamión pase y libere el puente

sin problemas. English (2023) propone extender los dominios y contextos de los problemas de tal manera que los estudiantes desarrollen acercamientos multidisciplinarios en los caminos de resolución. Propone un marco que integra Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (modelo STEM) para abordar problemas complejos como el cambio climático, migración, movilidad, etc.

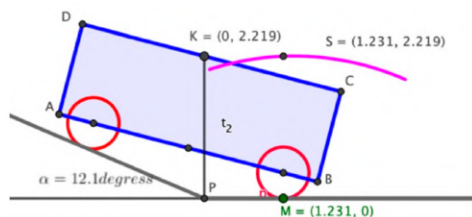
Figura 3

Un tractocamión cruzando por debajo de un puente



Figura 4

Modelo dinámico que muestra la variación de la altura PK



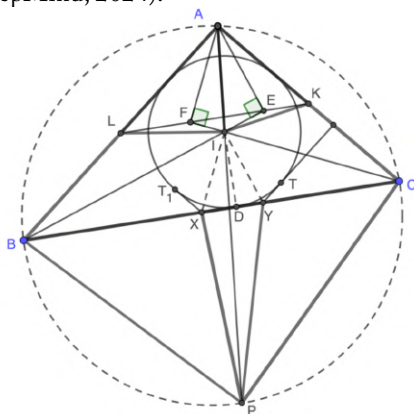
Existe evidencia de que el uso de un SGD (GeoGebra) en la representación y exploración de problemas demanda no solo una reestructuración de los contenidos del currículo; sino que también amplía las rutas didácticas asociadas con el diseño e implementación de actividades de aprendizaje. En el estudio de la geometría analítica, generalmente los temas se presentan en un orden que incluye una breve introducción sobre el uso de un sistema de coordenadas, una caracterización general de lugares geométricos, el estudio de la recta y posteriormente se analiza la ecuación de la circunferencia, la parábola, la elipse, la hipérbola, etc. (Lehmann, 1985). Con un acercamiento dinámico, ese orden se modifica y ahora el estudiante no solo tiene la oportunidad de analizar todas las secciones cónicas en su conjunto; sino también las relaciona con otros conceptos estudiados previamente como perpendicularidad, propiedades de triángulos, mediatrices, paralelas, entre otros. Además, el uso de GeoGebra privilegia el significado geométrico de los conceptos y ofrece una oportunidad para que los estudiantes analicen e interpreten gráficamente propiedades y relaciones entre atributos de los objetos o elementos del modelo dinámico (Santos-Trigo et al., 2021).

Sobre el uso de herramientas de la Inteligencia Artificial

Recientemente, el desarrollo y disponibilidad de herramientas de Inteligencia Artificial Generativa, como el ChatGPT, AlphaGeometry, DeepSeek, y AlphaProof, ha propiciado una discusión abierta sobre cómo usarlas en ambientes de resolución de problemas. Se argumenta que este tipo de aplicaciones pueden generar información relevante en el diseño e implementación de actividades de resolución de problemas y en el proceso mismo de encontrar la solución. En particular, las respuestas y acercamientos que proporcionan estas herramientas deben ser analizados en términos de la coherencia y pertinencia de la respuesta o solución que proporcionan al responder las preguntas planteadas inicialmente. Es decir, los estudiantes deben desarrollar estrategias y métodos para identificar posibles caminos de solución, y respuestas incorrectas que la herramienta produzca al responder o resolver un problema.

Los sistemas AlphaGeometry y AlphaProof están diseñados para resolver problemas matemáticos de los llamados “tipo olimpiada”. En la International Mathematical Olympiad 2024 (IMO2024), AlphaProof junto con AlphaGeometry 2 lograron un resultado de medalla de plata al resolver cuatro de los seis problemas que tradicionalmente se plantean a los competidores. El problema de geometría que resolvió AlphaProof es:

Sea ABC un triángulo con $AB < AC < BC$. Sean I y Ω el incentro y el círculo inscrito (incírculo) respectivamente. Consideremos un punto X sobre el lado BC distinto de C tal que la recta paralela a AC que pasa por X es tangente a Ω . Análogamente, sea Y un punto sobre el lado BC distinto de B cumpliendo que la recta paralela a AB que pasa por Y es tangente a Ω . La recta AI interseca a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en el punto $P \neq A$. Si K y L son los puntos medios de AC y AB respectivamente, probar $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ que (GoogleDeepMind, 2024).



Los principales pasos que sigue la herramienta en la resolución del problema consisten en demostrar semejanzas entre una colección de

triángulos, más precisamente, mostrar que las parejas de triángulos (AKI, BPY), (ALI, CPX), (BXI, BIA) y (CYI, CIA) son semejantes. Debe mencionarse que en la justificación de las semejanzas anteriores hay una buena cantidad de pasos intermedios y la aportación principal de la herramienta consiste en identificar la existencia del ángulo recto en el punto E, que se obtiene de la intersección de las rectas BI y LK. Otro elemento que conviene destacar en el enunciado del problema es que la hipótesis sobre las medidas de los lados no es necesaria, como puede ser observado en la justificación de la semejanza de triángulos y también en demostraciones hechas por humanos, que vale decir, son más simples que la que propone el sistema de IA.

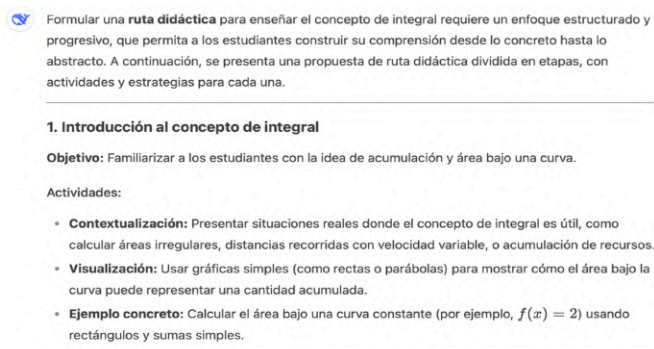
Las herramientas ChatGPT y DeepSeek funcionan a partir de un diálogo continuo con el usuario que se inicia con un prompt que la herramienta recibe y que puede ser un enunciado de un problema, una pregunta o un conjunto de datos para formular un problema. La herramienta produce una respuesta y el usuario la analiza en términos de su viabilidad, consistencia o validez, de acuerdo con el enunciado inicial del problema.

Dependiendo de la respuesta, el usuario puede plantear otras preguntas para intentar corregir o redireccionar la respuesta inicial. También se le puede solicitar que busque otros caminos para abordar la actividad y este diálogo puede continuar hasta que el usuario considere que la herramienta le ha proporcionado información importante para resolver el problema. Además, el usuario puede preguntar qué conceptos y estrategias resultaron importantes en la resolución de los problemas.

A partir de la información generada por la herramienta durante la interacción con el usuario o profesor, se le puede preguntar acerca de una ruta didáctica para presentar el problema a los estudiantes. Por ejemplo, a DeepSeek se le interroga sobre el diseño de una ruta de enseñanza para estudiar el concepto de *integral* y responde:

Figura 5

Respuesta de DeepSeek a la petición de una ruta didáctica



Formular una **ruta didáctica** para enseñar el concepto de integral requiere un enfoque estructurado y progresivo, que permita a los estudiantes construir su comprensión desde lo concreto hasta lo abstracto. A continuación, se presenta una propuesta de ruta didáctica dividida en etapas, con actividades y estrategias para cada una.

1. Introducción al concepto de integral

Objetivo: Familiarizar a los estudiantes con la idea de acumulación y área bajo una curva.

Actividades:

- **Contextualización:** Presentar situaciones reales donde el concepto de integral es útil, como calcular áreas irregulares, distancias recorridas con velocidad variable, o acumulación de recursos.
- **Visualización:** Usar gráficas simples (como rectas o parábolas) para mostrar cómo el área bajo la curva puede representar una cantidad acumulada.
- **Ejemplo concreto:** Calcular el área bajo una curva constante (por ejemplo, $f(x) = 2$) usando rectángulos y sumas simples.

En su respuesta, la aplicación presenta ejemplos que el profesor puede considerar en el diseño e implementación de actividades, al final resume o presenta ideas esenciales para organizar las sesiones de clase:

Figura 6
Resumen de la ruta que presenta DeepSeek

Figura 6. Resumen de la ruta que presenta DeepSeek

Resumen de la ruta didáctica

1. Introducir el concepto de integral mediante ejemplos concretos y visualizaciones.
2. Enseñar las sumas de Riemann como aproximación al área bajo una curva.
3. Presentar la definición formal de la integral definida.
4. Conectar la integral con la derivada mediante el Teorema Fundamental del Cálculo.
5. Enseñar técnicas de integración para resolver problemas más complejos.
6. Aplicar la integral en contextos reales.
7. Evaluar y reforzar el aprendizaje.

Si ahora utilizamos el ChatGPT y le hacemos el mismo cuestionamiento, la aplicación de inteligencia artificial propone seis etapas para desarrollar la ruta e incorpora un elemento o enfoque más robusto que el que proporciona la aplicación DeepSeek. Por ejemplo, explícitamente menciona el sentido de acumulación del concepto de integral.

Figura 7
La ruta didáctica propuesta por ChatGpt (resumen)

🌐 Aquí tienes la tabla con las **etapas y objetivos** de la ruta didáctica:

Etapas	Objetivo
1. Introducción Intuitiva a la Integral	Comprender la integral como acumulación y área bajo la curva sin formalismos.
2. La Integral como Suma de Partes Pequeñas (Sumas de Riemann)	Entender la integral como la suma de pequeñas áreas bajo la curva.
3. Definición Formal de la Integral Definida	Introducir la notación matemática y la idea de límite en la integración.
4. Integral Indefinida y Regla Fundamental del Cálculo	Relacionar la integral con la derivada y calcular integrales indefinidas.
5. Aplicaciones de la Integral	Aplicar la integral en contextos reales.
6. Extensión a Problemas Más Complejos	Explorar aplicaciones avanzadas en geometría y física.

✅ Este resumen permite visualizar la estructura del proceso de enseñanza de la integral de manera clara y progresiva.

🎨 ¿Te gustaría agregar algún detalle más? 😊

A partir de la información generada por las aplicaciones de IA, se identifican diversos significados o dimensiones del concepto de integral que deben incluirse en el diseño de actividades y un plan de enseñanza. Siguiendo las ideas de Thurston (1994), se identifican significados importantes en el estudio de la integral.

Acercamiento geométrico. El área bajo la curva de una función en el sentido estático (áreas de rectángulos- Integral de Riemann) o en el sentido dinámico, el área como acumulación de segmentos que cubren una región (Principio de Cavalieri).

Figura 8
Riemann: Rectángulos

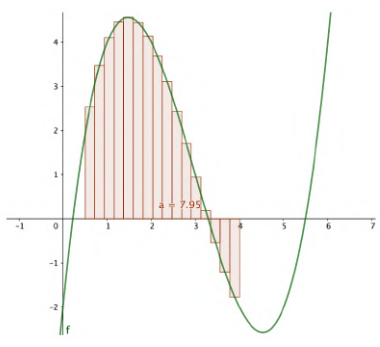
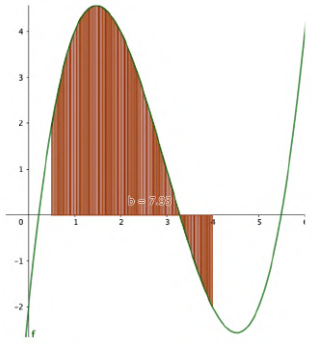


Figura 9
Cavalieri: Segmentos



Lógico o formal. Definición de sumas superiores ($\overline{S}(f, P)$) y sumas inferiores ($\underline{S}(f, P)$) para el conjunto de particiones $\mathcal{P}([a, b])$ del intervalo $[a, b]$,

La función f es Riemann integrable si $\forall \epsilon > 0$, $\left| \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \right| < \epsilon$ siendo

$$\overline{\int_a^b} f = \inf \{ \overline{S}(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b]) \}$$

y

$$\underline{\int_a^b} f = \sup \{ \underline{S}(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b]) \}$$

Simbólico. Utilización de los conceptos de antiderivada o integral definida, por ejemplo, si $f(x) = x^n$, entonces

$$\int f(x) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Conexión entre la integral y la derivada. En el sentido de la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo para funciones continuas (Wassermann et al., 2021). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Entonces F tiene derivada y $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$ entendiendo que la derivada de F en a es la derivada lateral derecha; similarmente en b . Más aún, si existe una función g tal que $g' = f'$, en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

Conexión entre la derivada y la integral. En el sentido de la segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo para funciones continuas. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y definamos

$$F(x) = \int_a^x f,$$

existirá un $c \in [a, b]$, cumpliendo que $F'(c) = f(c)$, esto es

$$F'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\int_c^x f}{x - c}.$$

(Wasserman et al., 2021).

La integral como un operador. Dado el intervalo $I = [a, b]$, V el espacio vectorial de las funciones Riemann-integrables en I , y W el espacio de las funciones continuas en I , se declara al operador $T: V \rightarrow W$ por

$$T(f) = \int_a^x f.$$

Medida de otras magnitudes. Lineales (longitudes de arcos de curvas) y volúmenes (método de secciones o método de anillos).

Modelización de fenómenos. Físicos, biológicos (trabajo, momentos de inercia, crecimiento o decrecimiento de poblaciones).

Otras interpretaciones y aplicaciones se obtienen al considerar integrales de funciones de R^n a R^m .

Al igual que para el caso de la derivada (Thurston, 1994), se pueden considerar diversos significados y maneras de interpretar el concepto de integral. La lista de significados se puede extender, por ejemplo, en la Teoría

de Operadores, el concepto de integral resulta importante en el estudio y solución de ecuaciones diferenciales, ecuaciones y transformadas integrales que son temas de los cursos de análisis real y complejo.

Podría considerarse, por otra parte, que las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la integral definida se basan en dos concepciones diferentes del concepto (Jones & Ely, 2023). De un lado se considera la integral como “*adding up pieces*” (AUP), y de otro “*accumulation from rate*” (AR). En las investigaciones realizadas a partir de la primera consideración, la integral definida se considera como el área bajo una curva que se particiona en trozos infinitesimales que al sumarse cuando se suman estas áreas y se da el paso al límite (sobre el número de particiones), da lugar al concepto de la integral definida. En la otra concepción (AR) también se tiene el sentido del área bajo la curva, pero está centrada en la covariación entre dos variables que se relacionan a través del análisis de la acumulación producida por su tasa de variación al acumularse en la otra variable. La mayor parte de las investigaciones desarrolladas en España se han centrado en los aspectos del AUP (e.g., Camacho et al., 2010; Camacho & Moreno, 2015).

Dreyfus et al. (2021) consideran que se debe hacer más hincapié en la segunda concepción para aproximarse al concepto de integral definida, ya que incrementa la diversidad de interpretación, la cual muchas veces está limitada al sentido de área bajo una curva. Se ilustra que el sentido de acumulación se puede observar en el siguiente modelo dinámico (ver Figura 10):

Figura 10

Storm problem

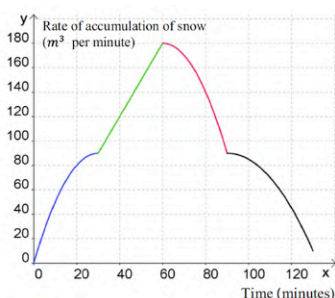
La gráfica de la derecha muestra la variación de la cantidad de nieve acumulada ($\text{m}^3/\text{min.}$) durante una tormenta, el tiempo está en minutos

1. ¿Cuándo es máxima la cantidad de nieve?

Si la representación algebraica de la función es.

$$f(x) = \begin{cases} -0.1(x-30)^2 + 90, & 0 \leq x \leq 30 \\ 3x, & 30 \leq x \leq 60 \\ -0.1(x-60)^2 + 180, & 60 \leq x \leq 90 \\ -0.05(x-90)^2 + 90, & x > 90 \end{cases}$$

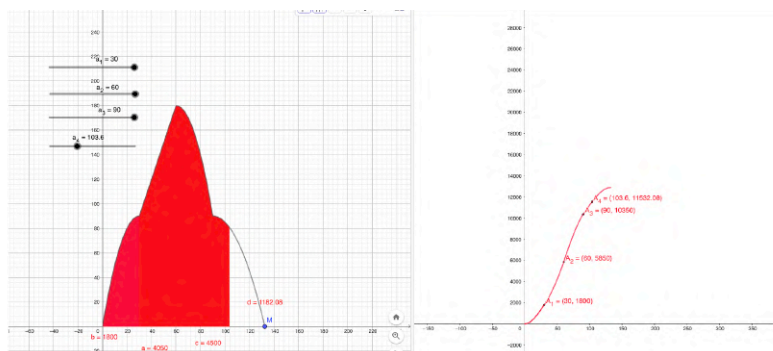
2. ¿Cuál es la cantidad de nieve acumulada entre los minutos 0-120?
3. Expresar algebraicamente una nueva función $V(x)$ que represente la cantidad acumulada de nieve entre los instantes $0 \leq x \leq 120$



Usando GeoGebra, el problema podría resolverse e incorporar otra serie de preguntas que profundizarán en la comprensión de la situación planteada. Utilizando la visión de doble gráfica que permite el DGS se observa (ver Figura 11):

Figura 11

Problema de la tormenta



En la gráfica de la derecha se representa la función de acumulación que se corresponde con la integral de la función definida a trozos $y = f(x)$. Para resolver la cuestión 2, bastaría con mover los deslizadores que permiten observar la variación de la acumulación de las áreas. Moviendo el deslizador a_4 hasta 120, el resultado se obtiene de inmediato, que será justamente el punto de la curva que representa la función $V(x)$ (parte derecha de la gráfica).

El uso de aplicaciones de la Inteligencia Artificial Generativa como el ChatGPT o el DeepSeek ofrece a los profesores/estudiantes información importante tanto en el estudio de conceptos matemáticos y la resolución de problemas, como en el diseño de rutas didácticas sobre cómo enseñar/aprender la disciplina. En el ejemplo que involucra el estudio del concepto de integral, la herramienta identifica temas esenciales que se deben considerar en el diseño de actividades de aprendizaje. Se destaca el diálogo interactivo que se basa en el método inquisitivo para iniciar y mantener una comunicación entre el usuario y la herramienta. Así, el usuario analiza las respuestas con la finalidad de ampliar el grado de comprensión del concepto en estudio. En esta dirección, el papel del profesor resulta esencial en términos de guiar a los estudiantes en el análisis de las respuestas que genera la herramienta y en la búsqueda de posibles caminos para detectar respuestas incompletas o erróneas durante la interacción con la herramienta. En algunos casos, es necesario que el estudiante busque otros caminos de resolución de los problemas y los contraste con aquellos que genera la herramienta. En particular, el uso de un SGD puede extender las formas de representar y explorar los conceptos y los métodos de resolución de los problemas.

La resolución de problemas y el diseño de libros interactivos

Los desarrollos y disponibilidad de diversas herramientas y plataformas digitales están transformando el diseño y uso de materiales con la intención de favorecer el desarrollo de un pensamiento matemático en los estudiantes. En general, los estudiantes, al trabajar una tarea o problema matemático, consultan recursos en línea para aclarar dudas, extender su comprensión de conceptos, revisar problemas resueltos, etc. Johnson et al. (2017) señalan que las actividades y los tipos de problemas que resuelven y discuten los estudiantes permean sus formas de razonar y de resolver las tareas matemáticas. Santos-Trigo y Camacho-Machín (2018) formulan un conjunto de preguntas sobre los posibles cambios que el uso sistemático de tecnologías digitales en las propuestas del currículum y en los escenarios de enseñanza/aprendizaje incluyendo el desarrollo de materiales que propicien y promuevan diversas formas de razonar y resolver problemas en las experiencias de los estudiantes.

¿Seguirán siendo trascendentales los contenidos que se estudian en matemáticas y ciencias en la educación preuniversitaria? o ¿habrá una geometría distinta que incluya el estudio del movimiento de las figuras o un álgebra con poco énfasis en las operaciones o cálculos algebraicos y su significado? ¿Será todavía necesario que el niño en la educación primaria haga copias y copias para aprender a escribir? o ¿es mejor guiar al joven en el uso de los ordenadores y tabletas que lo ayuden a desarrollar o presentar un argumento estructurado y comprender lo que leen? ¿Desaparecerá el modelo de enseñanza donde, en general, un profesor, al frente de la clase, promueve actividades de aprendizaje en un ambiente controlado? ¿Deben considerarse desde ahora aquellos escenarios de enseñanza donde los estudiantes puedan ellos mismos diseñar su propio menú de aprendizaje que incluya una interacción en línea con otros estudiantes y asesores? (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2018, p. 23).

Existen diversos modelos o formas de utilizar las tecnologías en el diseño de materiales para los estudiantes. Santos-Trigo y Camacho-Machín (2018) identifican tres tipos de materiales que transforman la naturaleza de un libro de texto tradicional con el uso de tecnologías digitales:

(i) La digitalización de un libro tradicional y que ahora presenta una serie de uniones o conexiones con otros objetos de aprendizaje [plataformas o desarrollos digitales en línea] que el maestro considera importantes para los estudiantes; (ii) un libro digital en constante revisión y desarrollo a partir de los comentarios recibidos por otros maestros; y (iii) el tipo de libro digital interactivo que se basa en un conjunto de objetos de aprendizaje que incluye tareas y herramientas que el estudiante usa en la comprensión de los conceptos y en la resolución de problemas (p. 26).

En el diseño de materiales, la idea es que los estudiantes tengan la oportunidad de consultar recursos en línea con el propósito de revisar o ampliar la comprensión de conceptos involucrados en la actividad o

problema. Así, durante todo el proceso de interacción con la actividad, se proponen videos cortos o enlaces a plataformas en línea que incluyen explicaciones o ejemplos de problemas resueltos relacionados con la tarea o actividad que van a resolver. Se propone una estructura que identifica una serie de fases o episodios alrededor del proceso de solución. En el problema “El gato en la escalera” se ilustran las fases de resolución de la actividad (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2018).

1. **Presentación del problema.** Con un video corto se puede explicar los objetivos de la actividad y hacer explícito un plan para abordar el problema.



2. **Comprensión del problema.** La idea es analizar el enunciado del problema en términos de su sentido y significado con la intención de esbozar un posible método de resolución.



3. **La construcción de un modelo dinámico del problema.** En este modelo, el estudiante tiene la oportunidad de explorar el comportamiento de los objetos o atributos al mover elementos dentro del modelo con el propósito de identificar patrones o relaciones que después valida con argumentos matemáticos.

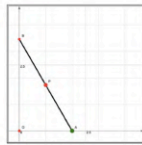
La construcción de un modelo matemático

PREGUNTAS RELEVANTES

1. ¿Se puede representar la escalera con un segmento?
2. ¿Se puede representar la posición del gato con el punto medio del segmento?
3. ¿Cómo representar la pared y el camino por donde se desliza la escalera?

La comprensión del problema provee información importante para la construcción de un modelo matemático que permita explorar el problema a partir de recursos y relaciones matemáticas.

La discusión de este tipo de preguntas puede conducir a establecer un modelo geométrico del problema ([Construcción 4](#))



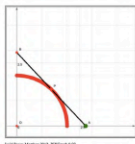
Construcción 4 Un modelo dinámico del problema.



4. La construcción y exploración del modelo dinámico del problema

Una exploración dinámica

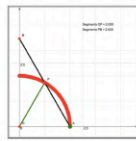
En la figura 3 el segmento AB representa la longitud de la escalera, P es el punto medio, el eje y es la pared, el eje x es el camino por donde se desliza la escalera. Con la ayuda de un software dinámico es posible determinar el lugar geométrico que deja el punto P al mover el punto A sobre el eje x.



Construcción 1 ¿Cuál es el lugar geométrico del punto P cuando el punto A se mueve sobre el eje x?



Un análisis de los casos extremos cuando el segmento AB coincide con los ejes ([Construcción 5](#)) conduce a formular la conjetura: El lugar geométrico del punto P cuando el punto A se mueve sobre el eje x es un arco de circunferencia.



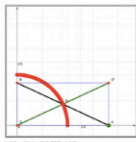
Construcción 5 ¿Qué ocurre cuando el punto A coincide con el origen O? Cuando el punto A se desliza sobre el eje-x se cumple que $d(O, P) = d(P, B)$

Un hábito importante en el quehacer matemático es que toda conjetura se necesita explorar y sustentar matemáticamente. En este contexto, es necesario buscar propiedades y argumentos que permitan justificar la conjetura.

5. Un acercamiento geométrico

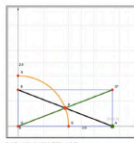
Un argumento geométrico

En la [Construcción 6](#), a partir del triángulo rectángulo AOB se puede construir el rectángulo AOB'O'. Se observa que el punto P es la intersección de las diagonales del rectángulo AOB'O'. Así, se tiene que $d(O, P) = d(B, P) = d(A, P)$. Con esta información se concluye que el camino que sigue el punto P cuando el punto A se mueve sobre el eje x es un arco de circunferencia con radio OP y centro el punto O (origen).



Construcción 6 Completando el rectángulo a partir del triángulo AOB.

Se observa que si se escoge cualquier punto en el arco RS, entonces se puede trazar el rayo OP. Y sobre este rayo se ubica un punto O' de tal forma de $OP = PO'$. Desde el punto O' se trazan perpendiculares con los ejes. El segmento AB representa la longitud de la escalera y P su punto medio ([Construcción 7](#))

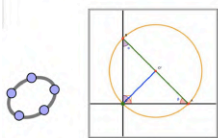


Construcción 7 Encontrar el segmento asociado con el lugar geométrico

6. Búsqueda de relaciones o propiedades. La exploración del comportamiento de los objetos dentro el modelo lleva a los estudiantes a la identificación de nuevas relaciones matemáticas.

La escalera y el ángulo recto

La escalera y el ángulo recto. Si A y B son dos puntos fijos en el plano cuya distancia representa la longitud de la escalera, ¿cuál es el lugar geométrico del punto O para lo cual el ángulo AOB es siempre un ángulo recto? La [Construcción 8](#) muestra que el lugar geométrico es una circunferencia con radio la mitad del segmento.



Construcción 8 El ángulo recto y el segmento

Los estudiantes podrían ver la demostración del Teorema de Thales en el siguiente video.



YouTube 1 Teorema de Thales.

7. Un acercamiento algebraico

Un modelo algebraico

La construcción de un modelo simbólico se basa en el empleo del sistema cartesiano para representar la información importante del problema. El objetivo es representar algebraicamente el lugar geométrico del punto P(x,y) cuando el punto A se mueve sobre el eje-x ([Construcción 9](#))



Construcción 9 Construcción de un modelo algebraico.

De la Construcción 9 se tiene que:

1. P es el punto medio de AB, entonces $x = 2t$, $y = b/2$
2. En el triángulo rectángulo AOB, se tiene que $t^2 + b^2/2 = k^2/2$ y al sustituir los valores de x e y, se tiene que $(2x)^2/2 + (2y)^2/2 = k^2/2$ lo cual puede escribirse como $x^2 + y^2 = (k/2)^2$. Esta ecuación representa un círculo con radio $k/2$ y centro el origen. En términos del problema, el dominio y rango de la expresión es el $[0, k/2]$.

8. Extensiones y conexiones del problema inicial

Extensiones y conexiones

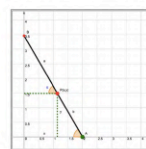
¿Qué lugar geométrico describe el gato si ahora permanece sentado en una posición distinta del punto medio y la escalera se desliza sobre el piso? Un primer acercamiento para responder esta pregunta puede basarse en el uso del modelo dinámico del problema. Con la ayuda de la herramienta directamente se obtiene el lugar geométrico que describe el punto P (ubicado fuera del punto medio) cuando el punto A se desliza sobre el eje x ([Construcción 10](#)). En esta modelo se muestran dos caminos que deja el punto P cuando

se localiza en dos posiciones distintas.

De la Construcción 10 se plantea una conjetura: El lugar geométrico del punto P (P no es el punto medio) cuando el punto A se desliza sobre el eje x es una elipse. Como toda conjetura matemática es necesario presentar un argumento matemático que la sustente. En la construcción del argumento utilizamos otra vez



Construcción 10 ¿Cuál es el lugar geométrico del punto P cuando el punto A se mueve sobre el eje x?



Construcción 11 Un argumento algebraico que sustente que el lugar geométrico es una elipse.

Con el uso coordinado de tecnologías digitales, es posible diseñar materiales interactivos donde los estudiantes tengan la oportunidad de consultar diversos recursos y plataformas en línea durante las fases de resolución de problemas. En el diseño se sustenta un método de indagación que promueve la búsqueda constante de diversos caminos o formas de representar y explorar conceptos y resolver tareas matemáticas. Se destaca la construcción de modelos dinámicos de los problemas y la formulación de preguntas como un hábito para comprender un concepto o analizar el sentido y pertinencia del enunciado de un problema. También, en el diseño de un plan y su implementación el estudiante puede consultar ejemplos resueltos y preguntarse sobre las estrategias que puede usar en la resolución del problema. Además, la formulación de nuevos problemas o la extensión del problema inicial son actividades que el estudiante debe integrar en la resolución de los problemas. Por otro lado, el SGD GeoGebra permite desarrollar libros interactivos (LIGG) que pueden aportar elementos importantes en la formación de futuros profesores de Matemáticas de Educación Secundaria. Por ejemplo, en el año 2021, una estudiante del Grado (licenciatura) en Matemáticas diseñó varias actividades en forma de LIGGs en las que se revisitaban algunos teoremas geométricos que habitualmente no se estudian en su formación (Teoremas de los senos generalizados, Ceva, Morley, Menelao y Pascal), abordados cada uno de ellos con la siguiente estructura:

- Introducción
- Conocimientos previos
- Enunciado formal
- Actividades de comprobación y demostración
- Relación con el currículum de Educación Secundaria y
- Ejercicios

Figura 12

Teorema de Ceva-Video construcción

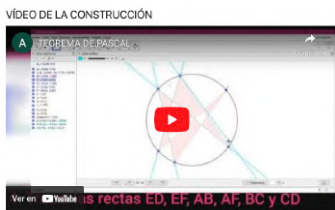


- 1.- Construir un triángulo ABC , usando el comando .
- 2.- Utilizar la herramienta  para construir un punto X del lado a , un punto Y del lado b y un punto Z del lado c del triángulo ABC .
- 3.- Trazar las semirrectas, utilizando , que unen el vértice A con el punto X , el vértice B con el punto Y y el vértice C con el punto Z , que representan las cevianas del triángulo.
- 4.- Construir el punto P , que se obtiene de intersectar dos de las cevianas, mediante .
- 5.- Obtén las razones: $\frac{BX}{XC}$, $\frac{CY}{YA}$ y $\frac{AZ}{ZB}$, y calcula sus productos.
- 6.- Observa la variación del producto a medida que arrastras los distintos vértices del triángulo de partida. Investiga si se cumple el teorema para cualquier triángulo ABC .

En las figuras 12 y 13 se muestran los videos del apartado de construcción. En el siguiente enlace, presenta la estructura de cada capítulo para el Teorema de Menelao (<https://www.geogebra.org/m/h94v3snh>)

Figura 13

Teorema de Pascal. Video de su construcción



- 1.- Construir una circunferencia de centro cualquiera y que pase por el punto A , usando el comando .
- 2.- Utilizar la herramienta  para construir los puntos C, E, B, F y D sobre la circunferencia.
- 3.- Construir un hexágono estrellado $ABCDEF A$, mediante .
- 4.- Trazar las rectas, utilizando , ED, EF, AB, AF, BC y CD .
- 5.- Construir los puntos N, L y M que se obtienen de intersectar las rectas EF y BC, ED y $AB, y CD$ y AF , respectivamente, usando el icono .
- 6.- Observa a medida que arrastras los distintos vértices del hexágono que los puntos L, M y N están alineados. Investiga si el teorema se cumple para cualquier hexágono $ABCDEF A$.

Análisis retrospectivo y conclusiones

La colaboración académica entre grupos de investigación de instituciones mexicanas (Cinvestav y la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo) y la Universidad de la Laguna se ha centrado alrededor de la resolución de problemas como un dominio de investigación que conecta las prácticas y quehacer de la disciplina con las propuestas del currículo y los escenarios o ambientes de enseñanza y aprendizaje. En este capítulo, se enfatiza la importancia de caracterizar el estudio de las matemáticas como un conjunto de dilemas o problemas que el estudiante tiene que identificar y resolver en términos de recursos y estrategias propias de la disciplina. En este camino surge la idea de problematizar la tarea de comprender conceptos y de desarrollar competencias de resolución de problemas. La problematización se manifiesta por medio de las preguntas que el estudiante formula y responde durante el proceso de comprender conceptos y resolver problemas matemáticos. En esta dirección, el uso sistemático y coordinado de diversas herramientas no solo influye en las formas en que los estudiantes razonan y resuelven problemas, sino también en las maneras de compartir sus ideas o discutir sus acercamientos de resolución con sus pares y profesores.

En el capítulo, se presentan algunos ejemplos sobre cómo un SGD (GeoGebra) ofrece a los estudiantes una oportunidad de construir y explorar modelos dinámicos de conceptos o problemas. Durante la exploración de

los modelos surgen nuevas preguntas y problemas que amplían el dominio inicial del problema y sus formas de resolverlos. Los acercamientos dinámicos propician conexiones entre conceptos y demandan una reestructuración de las propuestas del currículum. Con el uso de herramientas de la Inteligencia Artificial Generativa, el estudiante entra en un diálogo que demanda un análisis de las respuestas que proporciona la herramienta con la intención de orientar la discusión hacia la comprensión de conceptos o la resolución de los problemas. Se argumenta que el uso coordinado de las herramientas abre diversos caminos sobre cómo construir conceptos y aplicarlos en la resolución de problemas. Además, en el capítulo se presenta un modelo para el desarrollo e implementación de materiales interactivos que guíen a los estudiantes durante el desarrollo de sus experiencias de aprendizaje. Se esboza un marco que ilustra las dimensiones relevantes en la resolución de problemas y la importancia de consultar desarrollos en línea con la intención de revisar y extender la comprensión de conceptos y buscar diversos caminos para resolver un problema.

Finalmente, es importante señalar que el uso sistemático de herramientas digitales, como el ChatGPT, DeepSeek, AlphaGeometry y AlphaProof, demanda una discusión profunda no solo de las prácticas de enseñanza y los escenarios de aprendizaje; sino también de los marcos conceptuales y protocolos de investigación que sustentan y proporcionan las bases para la comprensión de conceptos y el desarrollo de competencias de resolución de problemas de los profesores y estudiantes. En esta perspectiva, el trabajo de colaboración entre grupos de investigación de instituciones mexicanas y españolas debe ampliar la agenda académica y visitar los avances y resultados en el dominio de la resolución de problemas con la intención de integrar el uso coordinado de tecnologías digitales en el desarrollo de actividades de aprendizaje y las formas de evaluar el aprendizaje de los estudiantes.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido subvencionada por el Proyecto de Investigación de referencia PID2022-139007NB-I00 aprobado por el MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ FEDER, UE.

Referencias

- Camacho, M., Depool, R., & Santos-Trigo, L.M. (2010) Students' use of DERIVE software in comprehending and making sense of definite integral and area concepts. En F. Hitt, D. Holton, & P. W. Thompson (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education VII, CBMS series* (Vol. 16, pp. 29–61). American Mathematical Society. Providence. USA.

- Camacho, M., & Moreno, M. (2015) Investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del concepto de integral. En Azcárate, C., M. Camacho, M.; González, & M. Moreno (Eds.), *Didáctica del Análisis Matemático: Una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 121–135). Servicio de publicaciones de la ULL. S/C de Tenerife.
- Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 375–402.
- Dreyfus, T., Kouropatov, A., & Ron, G. (2021). Research as a resource in a high-school calculus curriculum. *ZDM—Mathematics Education*, 53, 679–693. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01236-3>
- English, L. D. (2023). Ways of thinking in STEM-based problem solving. *ZDM – Mathematics Education*, 55(7). <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01474-7>
- Fried, M. N. (2014). Mathematics y mathematics education: Searching for common ground. En M.N. Fried, T. Dreyfus (Eds.), *Mathematics y Mathematics Education: Searching for 3 Common Ground, Advances in Mathematics Education* (pp. 3–22). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7473-5_1
- GoogleDeepMind (2024). <https://bit.ly/4pTUePN>
- Johnson, H. L., Coles, A., & Clarke, D. (2017). Mathematical tasks and the student: Navigating “tensions of intentions” between designers, teachers, and students. *ZDM – Mathematics Education*, 49(6), 813–822. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0894-0>
- Jones, S. R., & Ely, R. (2023). Approaches to Integration based on quantitative reasoning: adding up pieces and accumulation from rate. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 9, 121–148.
- Lehmann, C. H. (1985). *Geometría Analítica*. Limusa.
- Leung, A., Baccaglini-Frank, A., Mariotti, M. A., & Miragliotta, E. (2024). Enhancing geometry skills with digital technology: The case of Dynamic geometry. En B. Pepin, G. Gueudet, & J. Choppin (eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education* (pp. 410–437) Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-45667-1_15
- Liljedahl, P., & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: A look at the state of the art. *ZDM—Mathematics Education*, 53(4), 723–735. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w>
- Pólya, G. (1945). *How to solve it* (2nd edition). Princeton University Press.
- Santos-Trigo, M. (2020). Problem-solving in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 686–693). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0>
- Santos-Trigo, M. (2024). Problem solving in mathematics education: tracing its foundations and current research-practice trends. *ZDM—Mathematics Education*, 56(2), 211–222. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01578-8>

- Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2009) Towards the construction of a Framework to deal with routine problems to foster mathematical Inquiry. Problems, *Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies (PRIMUS)*, 19(3), 260–279.
- Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2013). A Problem-Solving Framework that enhances the use of computational technology. *The Mathematics Enthusiast Journal*, 10(1–2), 279–302.
- Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2018). La Resolución de Problemas matemáticos y el uso de la tecnología digital en el diseño de libros interactivos. *Educatio Siglo XXI*, 36(3), 21–40. <https://doi.org/10.6018/j/349451>
- Santos-Trigo, M., Barrera-Mora, F., & Camacho-Machín, M. (2021). Teachers' use of technology affordances to contextualize and dynamically enrich and extend mathematical problem-solving strategies. *Mathematics*, 9(793), 1–21. <https://doi.org/10.3390/math9080793>
- Santos-Trigo, M., Camacho-Machín, M., & Barrera-Mora, F. (2024). Focusing on foundational Calculus ideas to understand the derivative concept via problem-solving tasks that involve the use of a Dynamic Geometry System. *ZDM-Mathematics Education*, 56(6), 1287–1301. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01607-6>
- Thurston, P. W. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of American Mathematical Society*, 30(2), 161–177.
- Wasserman, N. H., Fukawa-Connelly, T., Weber, K., Mejía Ramos, J. P., & Abbot, S. (2021). *Understanding Analysis and its connections to Secondary Mathematics Teaching*. Springer