

Libro interactivo sobre métodos numéricos para solución de ecuaciones no lineales

José Alberto Gutiérrez-Robles ¹ 

José de Jesús Nuño-Ayón ² 

Verónica Adriana Galván-Sánchez ³ 

Eduardo Salvador Bañuelos-Cabral ⁴ 

Resumen

Cuando se tiene una función no lineal no polinomial, el problema se enuncia como: *dada una función $f(x)$, determine, si es posible, algún valor x^* para el cual se cumple que $f(x^*) = 0$* ; es decir, encontrar un valor para la función tal que al evaluarla el resultado sea cero. Con esta premisa, el objetivo de crear un Recurso Educativo Abierto es que el estudiante, interactuando con elementos gráficos, tenga de manera visual el problema, el comportamiento de la función y cómo los métodos (bisección, regla falsa, secante, punto fijo y Newton-Raphson) se acercan a la solución de manera iterativa. El resultado del uso de este recurso fue que les ayudó a los estudiantes en la comprensión del problema, los métodos numéricos y la solución, así como de la parte matemática al relacionar de una manera visual las funciones y metodologías con la secuencia gráfica de la solución.

Palabras clave

Ecuaciones no lineales, REA

¹ jose.groble@academicos.udg.mx

Universidad de Guadalajara

² jose.nuno@academicos.udg.mx

Universidad de Guadalajara

³ veronica.galvan@academicos.udg.mx

Universidad de Guadalajara

⁴ eduardo.banuelos@academicos.udg.mx

Universidad de Guadalajara

Gutiérrez-Robles, J. A., Nuño-Ayón, J. de J., Galván-Sánchez, V. A., & Bañuelos-Cabral, E. S., (2025). Libro Interactivo Sobre Métodos Numéricos Para Solución De Ecuaciones No Lineales. En C. M. Orozco Rodríguez, M. G. Vera Soria, A., M. S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Recursos Educativos en Abierto basados en Metodologías Activas para la Enseñanza de las Ciencias* (pp. 95–107). Editorial SOMIDEM.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S2/2025/02-07>

Introducción

Existen ecuaciones de tipo no lineal (no polinomial) que son muy familiares debido a que algunos métodos analíticos conducen a una fórmula para su solución; por ejemplo, la solución de ecuaciones trigonométricas simples. Sin embargo, muchas ecuaciones no lineales no se pueden resolver directamente por métodos analíticos, por lo que se deben usar métodos basados en aproximaciones numéricas (Gutiérrez-Robles et al., 2017). Para iniciar el proceso de creación del capítulo, primero se hace una breve descripción de cada apartado, así se tiene:

ANÁLISIS: Se hace una descripción del problema enseñanza aprendizaje y de cómo se aborda de manera cotidiana, así como la forma en que se debe implementar un Recurso Educativo Abierto (REA).

DISEÑO: Se describe el objeto de aprendizaje y cada uno de los métodos que se implementan en el REA; asimismo, se presenta un organizador gráfico de la forma en que se hace la implementación en sitio.

DESARROLLO: Se describe la actividad de forma estricta, es decir, se presenta un ejemplo de cómo está construido el REA y cada una de sus partes.

IMPLEMENTACIÓN: Se describe cómo es que se lleva a cabo la distribución del recurso a los estudiantes.

EVALUACIÓN: Se analiza la evaluación inicial por pares del REA y se da una descripción de la experiencia docente utilizando el recurso educativo en abierto.

CONCLUSIONES: Se evalúan los resultados obtenidos de la implementación y la experiencia docente en la utilización del REA.

Creación del recurso educativo en abierto

Análisis

La mayoría de los métodos numéricos son complejos debido a que en el proceso de enseñanza, el profesor se limita a mostrar cómo se hace la implementación del método en la computadora y a resolver ejercicios en esa dirección. Sin embargo, al no tener apoyo gráfico o herramientas visuales se limita el aprendizaje para los estudiantes y, finalmente, todo lo expuesto en las aulas de clase termina por olvidarse.

Debido a esto se pretende hacer un cambio de paradigma donde los estudiantes a los que va dirigido este recurso (se implementó en un grupo de 13 estudiantes que cursan el séptimo semestre de la carrera de Licenciatura en Matemáticas) y el profesor interactúen con recursos educativos gráficos y visuales. Se propone que su implementación sea en modalidad virtual, es decir, el instructor crea un video o cualquier recurso electrónico con la

descripción de cada actividad y genera un chat o similar para resolver dudas y revisar avances y/o ejercicios de aplicación.

En este cambio de paradigma de educación se propone que los estudiantes hagan trabajo grupal, en donde analizarán los métodos que contiene el recurso y, adicionalmente, van a resolver problemas específicos con cada método propuesto (bisección, regla falsa, secante, punto fijo y Newton-Raphson). Se pretende que en forma cooperativa detecten cuáles son las similitudes y diferencias entre los métodos y aprendan a aplicarlos de forma manual para la resolución de problemas, y de esa forma, obtener la experiencia y preparación necesarios para poder hacer la implementación en la computadora con un lenguaje de programación cualesquiera.

Así pues, el recurso está enfocado a los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas que llevan la clase de Análisis Numérico. Normalmente esta clase se imparte en el penúltimo semestre, es decir, los estudiantes ya llevaron todas sus clases relacionadas con programación. El prerrequisito de la materia de Análisis Numérico es haber cursado programación para ciencias y álgebra lineal con computación.

Diseño

Objetivo de aprendizaje: Analizar métodos numéricos para la solución de ecuaciones no lineales no polinomiales e interpretar resultados numéricos para aplicarlos en la solución de problemas, empleando programación.

Objetivos de la actividad: Deducir y analizar métodos iterativos para la resolución de ecuaciones no lineales. Interpretar resultados numéricos para establecer la solución completa en problemas de aplicación en ingeniería y ciencias.

El REA contiene cinco secciones que corresponden a los métodos numéricos de bisección, regla falsa, secante, punto fijo y Newton-Raphson, que se implementaron en el recurso para determinar las soluciones reales de ecuaciones de la forma $f(x) = 0$. A continuación se da una breve descripción de cada uno de los métodos que vienen en el recurso propuesto.

BISECCIÓN: En matemáticas, el método de bisección es una estrategia de búsqueda de cruces por cero que trabaja dividiendo el intervalo a la mitad y seleccionando el subintervalo que tiene el cruce por cero; si este proceso se repite n -veces, como resultado se tendrá un valor de x , para el cual la función evaluada, es decir $f(x)$, dará un resultado cero o casi cero (Mathews, 1992; Maron y López, 1995; Nieves y Domínguez, 2002; Burden y Faires, 2002; Chapra y Canale, 2007; Nakamura, 1992; Mathews y Fink, 2000).

REGLA FALSA: La estrategia que sigue esta metodología es un cambio de función, es decir, se cambia una función no lineal por una lineal dentro

de un intervalo específico. Como se puede determinar el cruce de esta función lineal con el eje de referencia (en forma analítica), esta sería la solución que se busca. Se vuelve válido si el intervalo de búsqueda fuera infinitesimal, pues en esta circunstancia el comportamiento de una función no lineal se puede aproximar por el de una función lineal. Así pues, el intervalo de búsqueda se va reduciendo hasta tener esta circunstancia (Mathews, 1992; Maron y López, 1995; Nieves y Domínguez, 2002; Burden y Faires, 2002; Chapra y Canale, 2007; Nakamura, 1992; Mathews y Fink, 2000).

SECANTE: Este método utiliza la recta secante para aproximarse al punto solución; el proceso es tener dos puntos de solución y hacer una proyección al eje de referencia. Después se desecha el punto más antiguo y con los dos restantes se hace el mismo proceso; esto se repite n -veces hasta que se encuentra el punto donde la evaluación de $f(x)$ es cercana a cero (Mathews, 1992; Maron y López, 1995; Nieves y Domínguez, 2002; Burden y Faires, 2002; Chapra y Canale, 2007; Nakamura, 1992; Mathews y Fink, 2000).

PUNTO FIJO: Este método se basa en la descomposición de una función $f(x)$ en dos sumandos, es decir, $f(x) = x - g(x)$. Como el concepto es encontrar la condición de $f(x) = 0$, entonces se tiene que $x = g(x)$. De esta manera, si se tiene un punto de arranque para evaluar $g(x)$, cuya evaluación se vuelve a utilizar de manera iterativa hasta que no hay un cambio, el resultado final cumple con el concepto de solución, en otras palabras, si se evalúa en $f(x)$ se obtendrá cero o casi cero (Mathews, 1992; Maron y López, 1995; Nieves y Domínguez, 2002; Burden y Faires, 2002; Chapra y Canale, 2007; Nakamura, 1992; Mathews y Fink, 2000).

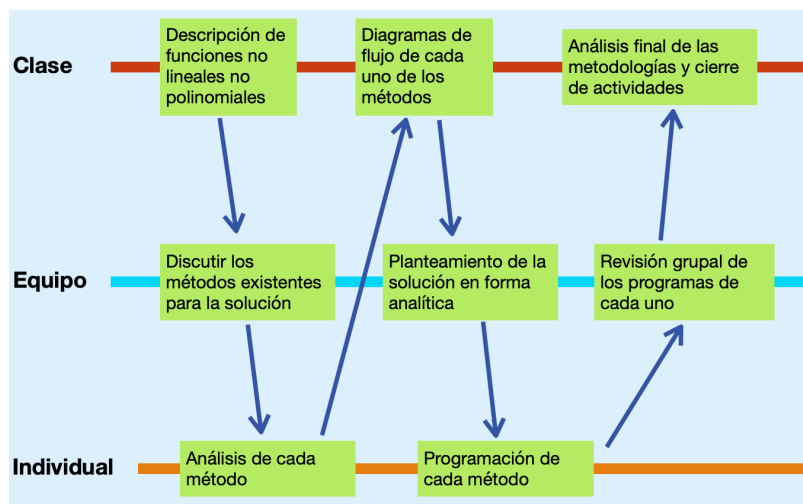
NEWTON-RAPHSON: Este método se basa en la expansión de la función $f(x + \Delta x)$ en una serie de Taylor de dos términos; como el resultado es sólo una aproximación, se utiliza de manera iterativa hasta que $\Delta x = 0$, así se tendrá que $f(x) = f(x + \Delta x) = 0$, que es lo que se busca como solución (Mathews, 1992; Maron y López, 1995; Nieves y Domínguez, 2002; Burden y Faires, 2002; Chapra y Canale, 2007; Nakamura, 1992; Mathews y Fink, 2000).

Las actividades propuestas promueven la interacción entre los estudiantes y el profesor. Por un lado, el análisis y la solución de problemas se hace de manera grupal. Aunque la explicación y evaluación de resultados las hace el profesor, el trabajo de programación se hace de manera individual.

Lo enunciado anteriormente se presenta en un organizador gráfico mostrado en la Figura 1, ahí se explica cómo interactúa el profesor con los estudiantes y a nivel grupal. Igualmente se hace una breve descripción de cada una de las actividades propuestas.

Figura 1

Organizador gráfico que se corresponde a la ejecución del capítulo propuesto



1. Descripción de funciones no lineales no polinomiales
El profesor, con ayuda de elementos digitales (videos, infografías, textos, etc.), explica el concepto de lo que es una función no lineal no polinomial que se mueven en plano real y cada uno de los métodos numéricos aquí propuestos, utilizados para su solución.
2. Discutir métodos existentes para la solución de ecuaciones no lineales
El profesor genera un espacio electrónico de discusión en donde todos los estudiantes abordan las similitudes y diferencias entre los métodos numéricos correspondientes al capítulo aquí propuesto.
3. Análisis de cada método
De forma individual, cada estudiante revisa y estudia el recurso educativo aquí generado. El estudiante responde un cuestionario sobre los métodos numéricos que contiene el recurso y lo envía al profesor.
4. Diagramas de flujo de cada uno de los métodos
El profesor, con ayuda de elementos digitales (videos, infografías, textos, etc.), explica cómo es que cada método se puede programar y genera un diagrama de flujo para los estudiantes, que es una explicación esquemática de cómo se implementa un método en una computadora.
5. Planteamiento de la solución en forma analítica
El profesor genera un espacio electrónico donde los estudiantes comparten cómo es que se utiliza cada método y cómo se implementa de forma manual (por escrito) para resolver un problema en específico, propuesto en el recurso educativo en abierto.

6. Programación de cada método

Cada estudiante, con ayuda del diagrama de flujo que el profesor generó y los ejemplos que se compartieron, hace un programa para cada método lo más general posible; es decir, que fácilmente se acople en la solución de cualquier problema del mismo tipo.

7. Revisión grupal de la programación de cada método

El profesor genera un espacio (repositorio electrónico) donde los estudiantes comparten sus programas, a fin de tener una retroalimentación general. Todos los estudiantes ven los esquemas computacionales de todos y así se toman nuevas ideas entre sí.

8. Análisis final de las metodologías y cierre de actividades

El profesor, con ayuda de elementos digitales (videos, infografías, textos, etc.), hace un análisis final de los métodos y los programas. De este análisis se obtienen conclusiones para emitir calificaciones y hacer el análisis final del curso.

Desarrollo

Introducción a la actividad: Es común que en ciencias e ingeniería deban resolverse ecuaciones no lineales de una variable, las cuales se representan genéricamente en la forma $f(x) = 0$. Esta forma de simbolizar las ecuaciones no lineales permite interpretar de manera sencilla el problema matemático a resolver: “Dada una función $f(x)$ determine, si es posible, algún valor x^* para el cual se cumple que $f(x^*) = 0$ ” (Gutiérrez-Robles et al., 2017, pág. 3).

El desarrollo se lleva a cabo de acuerdo a cómo se describe en el organizador gráfico mostrado en la Figura 1. El paso número 3 corresponde a la utilización del REA por parte del estudiante. Aunque el recurso contiene los cinco métodos numéricos enunciados, aquí sólo se presenta la explicación del contenido en el ExeLearning de uno de ellos (bisección), sobre cómo se utiliza y el objetivo de cada sección.

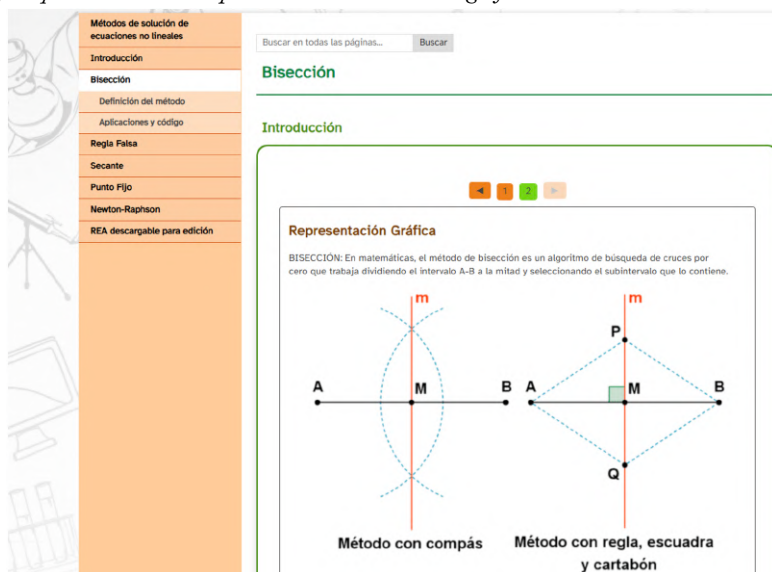
Bisección

Se hacen capturas de pantalla de la implementación en ExeLearning de método de bisección, esto se muestra de la Figura 2 a la figura 6, todas tomadas del REA construido. Adicionalmente se explica cada una de ellas y la razón de porque son trascendentes para la comprensión del método que se esté explicando.

La Figura 2 muestra con claridad qué es bisectar, es decir, cómo es que se puede encontrar el punto medio M en la recta A-B. Este principio gráfico es la base del método de bisección. Aquí, el primer paso es encontrar este punto pero con una fórmula matemática; la parte gráfica sirve para visualizar qué es lo que se debe programar.

Figura 2

Figura que muestra el concepto de bisección de manera gráfica



La Figura 3 muestra una explicación del método de bisección, a través de la cual se espera que el estudiante entienda el concepto formal del método y, de esa manera, aprenda no sólo la parte del comportamiento gráfico, sino de la formalidad matemática.

Figura 3

Figura que muestra una descripción de la metodología

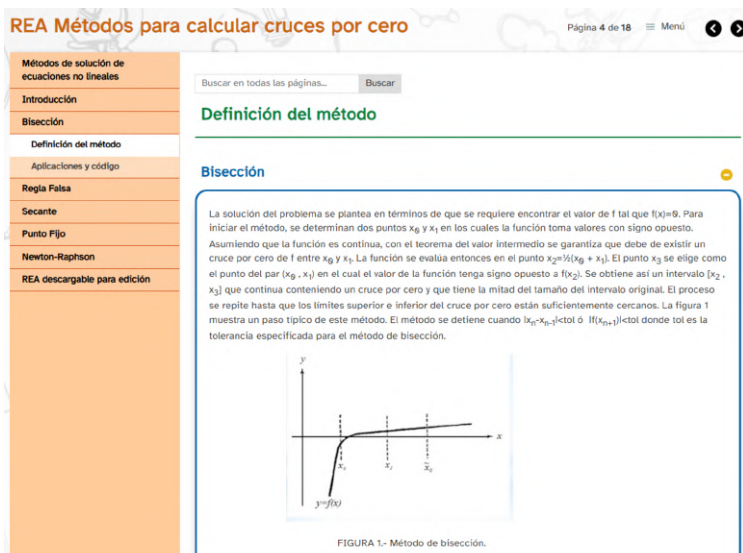
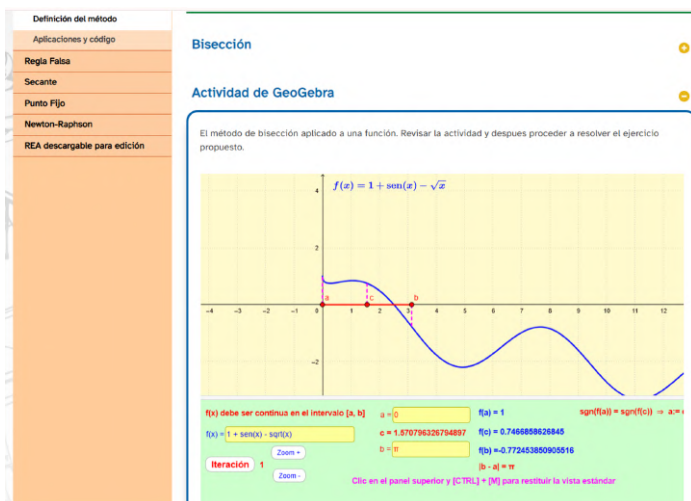


Figura 4

Figura que muestra una actividad Geogebra del método de bisección



La Figura 4 muestra en el software Geogebra cómo es que el método de bisección se comporta paso a paso con una vista gráfica de la implementación. Es decir, se presenta la solución numérica paso a paso acompañada de una vista de la función que se está resolviendo, del intervalo que se está utilizando y de cómo el método se aproxima al cruce por cero de la función en cada iteración.

Figura 5

Figura que muestra un ejercicio a resolver y un video alusivo al método de bisección

REA Métodos para calcular cruces por cero

Página 5 de 18

Buscar en todas las páginas... Buscar

Aplicaciones y código

Ejercicio para resolver

INSTRUCCIÓN CODIGO MATLAB

Antes de resolver el ejercicio vea el video donde se explica el método de bisección.

Tutorial Metodo de Biseccion
ITERACIÓN 3

Ver más ta... Compartir

$x^4 + 3x^3 - 2 = 0$

$Xa = 0.75$ $Xb = 1$

$Xr = \frac{0.75 + 1}{2} = 0.87$

$E_r = \left| \frac{0.87 - 0.75}{0.87} \right| (100) = 13\%$

$f(Xr) = (0.87)^4 + 3(0.87)^3 - 2 = 0.54$

$f(Xa) = f(0.75) = -22 < 0$

Mirar en YouTube

Si se tiene $f(x) = x^3 - 2x^2 \sin(x)$ con $a=1$ y $b=3$, calcular el cruce por cero

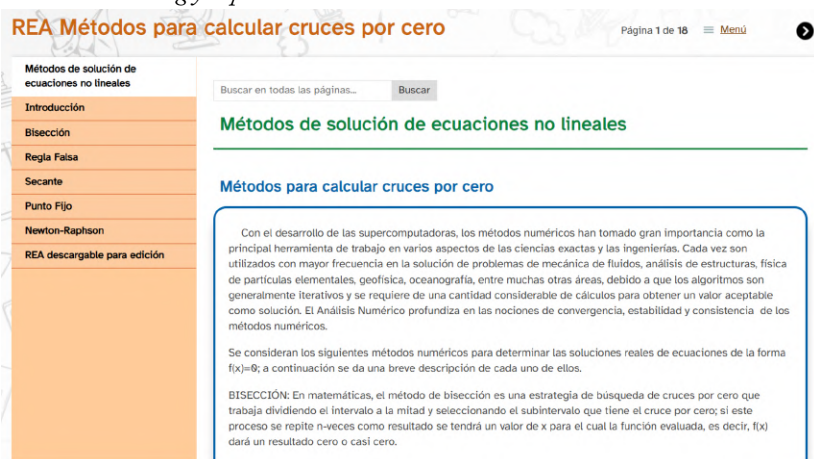
La Figura 5 propone un ejercicio para practicar el método de bisección. Antes de iniciar con la solución del problema propuesto, se recomienda ver un video en YouTube donde se da una explicación formal del método. El video provee de una explicación matemática del método de bisección y cómo se hace el proceso numérico paso a paso; de esta manera, siguiendo el mismo procedimiento, se puede resolver cualquier problema.

Implementación

Una vez que se tiene un recurso educativo, este se distribuyó a los interesados pasando el enlace donde se deposita el recurso educativo en abierto. Cada recurso, o en este caso cada apartado, es para un tema que normalmente se ve en una clase de dos horas. Se implementó en salón de clases con los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas en el ciclo escolar 2024, del 6 de febrero del 2024 hasta el 1 de abril del 2024.

Figura 6

Recurso ExeLearning y la portada del recurso en internet



Nota. Disponible en: https://depmate.cucei.udg.mx/REA_Metodos_Numericos_Solucion_Ecuaciones_NoLineales/

Evaluación

La evaluación por pares se hizo en función de la lista de comprobación que se describe en la página de internet¹. Los resultados del recurso educativo en abierto se muestran en la Figura 7. La calidad de los recursos educativos se evalúa con trece indicadores, los cuales son:

- i. Portada
- ii. Metodología didáctica
- iii. Contenido

¹ <https://cedec.intef.es/rubrica/lista-de-comprobacion-para-valorar-la-calidad-de-un-rea/>

- iv. Tareas
- v. Guía didáctica
- vi. Capacidad para generar aprendizaje
- vii. Adaptabilidad
- viii. Interactividad
- ix. Requisitos técnicos
- x. Formato y estilo
- xi. Accesibilidad
- xii. Licencias y derechos de autor
- xiii. Comunicación inclusiva

Evaluación por pares

Las recomendaciones se hacen en función de las evaluaciones. Entre estas se menciona que al REA le faltan actividades más concretas, videos y más secciones para facilitar la navegación, que es necesario mejorar el texto para que aparezca homogéneo, que el REA parece más una página de libro con una sola actividad Geogebra y que se necesita incluir más material que ayude a entender el tema. Finalmente se hace la observación de que el REA se necesita adaptar a los lineamientos y principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA).

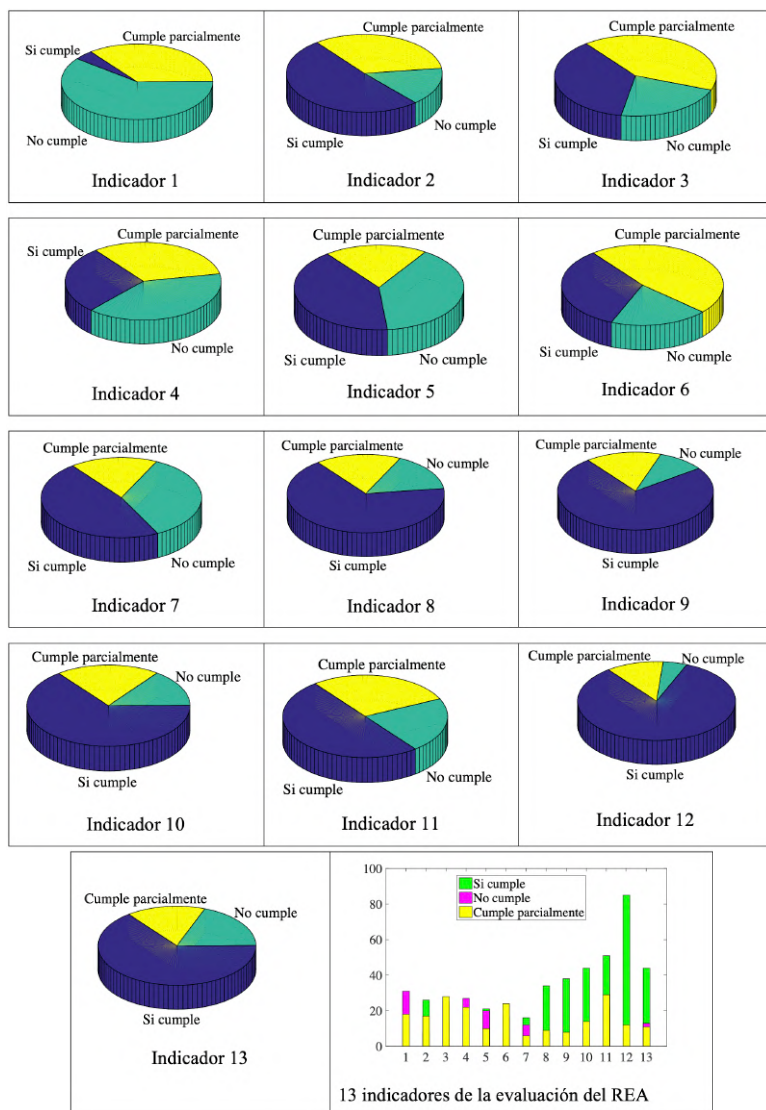
En la Figura 7 se muestran de forma individual los resultados de las evaluaciones para cada indicador en formato pastel. Se pueden apreciar los resultados de los trece indicadores evaluados de forma visual, y de manera natural se puede observar cuál es la evaluación que más prevalece; si cumple (en azul), no cumple (en verde) o cumple parcialmente (en amarillo).

Al final de la Figura 7 se muestra el resultado de la evaluación superpuesta a fin de notar qué indicadores están deficientes; por ejemplo, se puede resaltar que la mayoría se cumple, sin embargo, el indicador 1, 4, y 5 claramente no se cumplen satisfactoriamente. Asimismo, los indicadores 3 y 6 se cumplen parcialmente y el resto sí se cumplen. En esta gráfica se nota con claridad cuál es la evaluación dominante.

A partir de las observaciones se hace la modificación al REA, agregando todos los detalles técnicos necesarios para que cumpla con los lineamientos que se requieren, incluyendo una explicación más detallada del tema y agregando videos y recursos de GeoGebra. Esto a fin de que el usuario del recurso pueda navegar con facilidad por el programa.

Según la evaluación por pares, los indicadores que no se cumplen son: 1) la portada, 4) Tareas y 5) Guía didáctica.

Acción de corrección: El recurso generado inicialmente no tenía un nombre apropiado, no contenía ejercicios propuestos y estaba construido en una sola página secuencial. Para cumplir con los lineamientos, primero se cambió el aspecto de la página inicial, con el propósito de que mostrara de manera clara qué se espera que contenga el recurso.

Figura 7*Evaluación del recurso educativo en abierto de acuerdo a los indicadores*

Igualmente se incluyeron ejercicios propuestos para los usuarios del recurso, así como dos ejercicios resueltos por cada método numérico, uno mediante una plataforma gráfica GeoGebra y el otro en código MatLab. De esta manera, el estudiante puede visualizar dos formas de solución y/o programación de cada uno de los métodos numéricos. El REA se separó en cinco pestañas, una por método; cada una de ellas se organiza de tal manera que la navegación a través del recurso sea más práctica y didáctica.

Los indicadores que se cumplen parcialmente son: 3) Contenido y 6) Capacidad para generar aprendizaje.

Acción de corrección: El REA inicial evaluado contenía una sola actividad GeoGebra, un video de apoyo y una sola tarea propuesta. Después de las observaciones se incluyeron cuatro actividades GeoGebra adicionales, cinco videos de apoyo y cuatro ejercicios propuestos adicionales, además de un código MatLab con un ejercicio resuelto para cada uno de los temas. Con esta modificación en el REA, se prevé que se cumplan adecuadamente los indicadores 3 y 6 que se cumplían solo parcialmente.

El resto de los apartados se cumplen, por lo que no se hicieron modificaciones en esos aspectos.

Resultados de la experiencia docente

La efectividad de un recurso solo se puede evaluar en función de los usuarios de dicho recurso. Así pues, se hizo la implementación en tres etapas dentro de un grupo de estudiantes de matemáticas que asisten a la clase de análisis numérico, obteniendo los siguientes resultados:

ETAPA 1: Se les pide a los estudiantes que vean el recurso educativo en abierto y al final resuelvan el ejercicio propuesto como objetivo final de aprendizaje. Se les da una semana de tiempo para concluir el proceso.

RESULTADO: Los estudiantes no pudieron resolver el ejercicio propuesto en el tiempo en el que normalmente se hace si se tienen clases presenciales (una semana). Así pues, los estudiantes o necesitaban más tiempo para completar el proceso de aprendizaje o necesitaban apoyo para aprender a resolver el problema y a implementar los métodos propuestos.

ETAPA 2: Se les pide a los estudiantes que vean nuevamente el recurso educativo en abierto y se les da otra semana para hacerlo.

RESULTADO: Los estudiantes no pudieron resolver el ejercicio propuesto, incluso con el tiempo adicional.

ETAPA 3: Se les explica presencialmente cada uno de los métodos numéricos. Al final se les pide que vayan de nuevo al REA y resuelvan el ejercicio propuesto, incluyendo la programación de este.

RESULTADO: Los estudiantes resolvieron el ejercicio propuesto para cada método en tiempo y forma. El comentario general fue que una vez que recibieron una explicación de cada método numérico, el recurso fue muy simple de entender y de gran utilidad, pues podían regresar una y otra vez a él cuando lo necesitaran.

Conclusiones

El aprendizaje en el área de las ciencias depende en gran medida de la ejercitación y la retroalimentación. En este sentido, el utilizar un recurso

electrónico sirve de apoyo para los estudiantes al ser un complemento adecuado a la explicación del profesor. Así pues, en este caso resultó que la utilidad de estos recursos fue en extremo limitada cuando están dirigidos a personas que no tienen experiencia en el tema, pues no tienen un instructor que les resuelva las dudas y responda a sus preguntas. Igualmente, de acuerdo con los resultados de la implementación, se puede suponer que para el caso de usuarios expertos estos recursos son muy efectivos porque se retoman o recuerdan conocimientos ya adquiridos de manera rápida y efectiva, sin necesidad de buscar o tener un instructor de forma presencial. Así pues, estos recursos serían de gran ayuda para estudiar y recordar detalles de cada tema, que de otra forma se ven diluidos al no tener una retroalimentación.

Igualmente, los recursos electrónicos pueden ser de gran utilidad en áreas blandas donde el aprendizaje no está supeditado a la práctica constante. Es decir, nadie aprende a hacer una silla de madera viendo mil tutoriales, pero sí pueden mejorar su técnica o conocimiento. Por otro lado, se puede aprender de historia viendo documentales sin necesidad de un instructor. Así pues, tal vez en áreas del conocimiento menos especializadas o que no requieren de la ejercitación en forma exhaustiva estos recursos puedan incluso sustituir al instructor.

Referencias

- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2002). *Análisis Numérico* (7º Ed.). Thomson Learning.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). *Métodos Numéricos para Ingenieros* (5ª Ed.). McGraw Hill Interamericana.
- Gutiérrez-Robles J. A., Olmos Gómez M. A., & Licea Salazar J. A. (2017) *Unidad de aprendizaje denominada Análisis Numérico*. Departamento de Matemáticas, Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías, Universidad de Guadalajara.
- Maron, M. J., & López R. J. (1995). *Análisis Numérico. Un enfoque practico*. Editorial Continental S. A. de C. V.
- Mathews, J. H. (1992). *Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering* (2nd. Ed.). Prentice-Hall.
- Mathews, J. H., & Fink, K. D. (2000). *Métodos Numéricos con MatLab*. Pearson-Prentice-Hall.
- Nakamura, S. (1992). *Métodos Numéricos Aplicados con Software*. Prentice-Hall.
- Nieves, A., & Domínguez, F. C. (2002). *Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería*. CECSA.

