

Investigación sobre conexiones matemáticas en España y México

Research on mathematical connections in Spain and Mexico

Vicenç Font ¹ 

Javier García-García ² 

Flor M. Rodríguez-Vásquez ³ 

Yuly Vanegas ⁴ 

Resumen

En este capítulo se explican primero las investigaciones realizadas por el grupo de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), México, en el marco de la Teoría Ampliada de las Conexiones, contribuyendo a la caracterización de las conexiones matemáticas y a establecer tipologías de conexiones, así como al estudio de estas para la comprensión de diferentes objetos matemáticos. Después se describen las investigaciones sobre conexiones del grupo de la Universitat de Barcelona, en las que se usa como referente teórico un marco general de la actividad matemática, específicamente el Enfoque Ontosemiótico (EOS). A continuación, se resumen las investigaciones realizadas por algunos de estos grupos o bien conjuntamente en las que se utilizan de manera combinada el EOS con alguna tipología específica de conexiones.

¹ vfont@ub.edu

Universitat de Barcelona (SEIEM)

² jagarcia@uagro.mx

Universidad Autónoma de Guerrero (RED CIMATE)

³ flor.rodriguez@uagro.mx

Universidad Autónoma de Guerrero (RED CIMATE)

⁴ ymvanegas@ub.edu

Universitat de Barcelona (SEIEM)

Palabras clave

Conexiones matemáticas, teoría ampliada de las conexiones, enfoque ontosemiótico.

Abstract

This chapter first explains the research carried out by the group from the Autonomous University of Guerrero (UAGro), Mexico, within the framework of the Extended Theory of Connections, contributing to characterize mathematical connections and to establish typologies of connections, as well as to study these connections to understand different mathematical objects. Then, the research on connections by the group from the University of Barcelona is described in which a general framework of mathematical activity is used as a theoretical reference, specifically the Ontosemiotic Approach (OSA). Next, the research carried out by some of these groups or jointly, in which the OSA is used in a combination with some specific typology of connections, is summarized.

Keywords

Mathematical connections, extended theory of connections, ontosemiotic approach.

Introducción

Las investigaciones sobre el proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas han puesto de manifiesto la importancia que tienen las conexiones en dicho proceso. Una mirada global a la literatura evidencia que la investigación sobre las conexiones matemáticas es una temática cada vez más relevante para la Educación Matemática y, también, que sus referentes teóricos están cada vez más desarrollados.

En el inicio del interés por las conexiones matemáticas podemos situar las investigaciones de tipo cognitivo que consideran que la comprensión se consigue con la integración/conexión de representaciones mentales del sujeto (Hiebert & Carpenter, 1992) y los Principios y Estándares del NCTM (2000), ya que en esta publicación se considera que el establecimiento de conexiones matemáticas es importante para que los estudiantes comprendan conceptos matemáticos, relacionen significados, representaciones, usen fórmulas adecuadamente para completar procedimientos y vinculen las matemáticas con situaciones de la vida real. La publicación de los Principios y Estándares del NCTM (2000) fue un gran impulso para que las conexiones alcanzaran un papel relevante en la Educación Matemática y para aumentar el interés en investigarlas.

La revisión de la literatura de Educación Matemática sobre las conexiones, sobre todo la realizada en Iberoamérica, evidencia diferentes grupos de investigaciones. Un primer grupo está enfocado en el desarrollo de herramientas teóricas específicas para el estudio de la actividad matemática relacionada con el proceso de conexión. Un segundo grupo de investigaciones se centra en el desarrollo de herramientas teóricas para el análisis de la

actividad matemática en general. Ahora bien, dado que en la actividad matemática el establecimiento de conexiones es un aspecto clave, este segundo grupo ha desarrollado, en particular, herramientas para analizar la actividad matemática relacionada con el proceso de conexión.

En este capítulo se explican primero las investigaciones realizadas por el grupo de la UAGro en el marco del primer grupo de investigaciones recién comentado; se trata de investigaciones enfocadas en caracterizar qué son las conexiones matemáticas y a establecer tipologías de conexiones. Después se describen las investigaciones sobre conexiones del grupo de la UB, que han usado como referente teórico un marco general de la actividad matemática (el segundo tipo comentado anteriormente), específicamente el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS). A continuación, se resumen las investigaciones realizadas por algunos de estos grupos, o bien conjuntamente, en las que se usan de manera combinada el EOS con alguna tipología específica de conexiones.

El trabajo conjunto entre el grupo de la UAGro y el de la UB tuvo su origen, por una parte, en el interés de ambos grupos sobre la problemática de las conexiones matemáticas y, por otra parte, por la colaboración que surgió de las estadias de Vicenç Font en 2018 en la Universidad Autónoma de Guerrero y por las estadias de los doctorandos Karen Campo-Meneses y Camilo Rodríguez-Nieto de la UAGro en Barcelona en 2019. De estas dos últimas estadias se derivó que Vicenç Font fuese codirector de ambas tesis.

Investigaciones del grupo de la UAGro para el desarrollo de la Teoría Ampliada de Conexiones

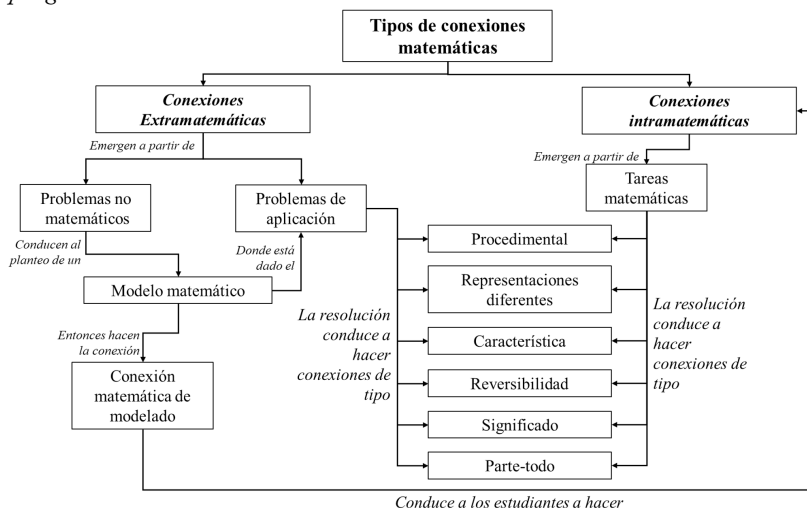
Como resultado del primer grupo de investigaciones comentadas en la introducción, destaca la Teoría Ampliada de las Conexiones (TAC), en cuyo desarrollo ha tenido un papel fundamental el grupo de investigación de la Universidad Autónoma de Guerrero en México. Se trata de una teoría que inicialmente consideró que una conexión matemática es una relación verdadera entre dos ideas matemáticas A y B y que ha propuesto algunas tipologías para el estudio de las conexiones matemáticas. Esta teoría considera dos grandes grupos de conexiones, las intra-matemáticas y las extra-matemáticas, aunque se ha centrado sobre todo en las intra-matemáticas, ya que solo se considera un tipo de conexión extra-matemática: la conexión de modelado (Evitts, 2004). Se puede considerar que con las cinco categorías de conexiones matemáticas propuestas por Evitts (2004) (Modelado, Estructural, Representación, Procedimental-conceptual y entre Conceptos Matemáticos) y las seis propuestas por Businskas (2008) (Modelado, Orientada a la instrucción, Procedimental, Representaciones diferentes, Parte-todo e Implicación) se inicia la Teoría de las Conexiones. Estas primeras categorías se han ido ampliando, en diferentes artículos, con los siguientes tipos:

Característica (Eli et al., 2011), Reversibilidad y significado (García, 2018; García-García, 2019; García-García & Dolores-Flores, 2021a; 2021b) e Inter-conceptual (García-García, 2024).

El grupo de la UAGro realizó inicialmente sus investigaciones en el contexto del Cálculo. En los hallazgos teóricos de sus trabajos, García (2018), García-García y Dolores-Flores (2018; 2021a, 2021b) han propuesto y organizado tipologías de conexiones matemáticas que fueron confrontadas con las investigaciones de Evitts (2004), Businskas (2008) y Eli et al. (2011). En este sentido, García (2018) clasificó las conexiones matemáticas en dos grandes tipologías: extra-matemáticas e intra-matemáticas (ver Figura 1), generando un primer esbozo de lo que aquí llamaremos Teoría Ampliada de las Conexiones (TAC), dado que los tipos de conexiones matemáticas presentadas en la Figura 1, se pueden considerar una ampliación del modelo de Businskas (2008). Además de dicha tipología de conexiones, en García-García (2024) se considera la conexión interconceptual recientemente incorporada a la TAC.

Figura 1

Tipología de conexiones matemáticas



Nota. Tomado de García (2018), p. 166

La TAC es una teoría que se desarrolla por extensión y que se seguirá, previsiblemente, ampliando con nuevos tipos de conexiones. Esta extensión por ampliación de tipologías se debe a que su aplicación a un contenido enseñado en un determinado contexto escolar, en algunos casos, resulta limitada. Por ejemplo, Hatisaru et al. (2024), al investigar las conexiones matemáticas activadas por futuros profesores de matemáticas de secundaria cuando resuelven problemas de álgebra, usaron la TAC como referente

teórico, pero en el análisis de datos se encontraron con que los participantes establecían conexiones que no se podían clasificar en alguno de los tipos de conexiones consideradas en la TAC, bien por algunas limitaciones de esta teoría o bien por el tipo de problemas propuestos. Ante esta situación, estos autores concluyen que la TAC debe robustecerse y matizar sus categorías de conexiones, de manera que se genere una tipología más amplia que ayude a los docentes e investigadores a identificarlas mejor.

En esta línea de proponer nuevas tipologías de conexiones en el marco de la TAC, tenemos un primer trabajo conjunto entre investigadores de la UAGro y de la UB. En Rodríguez-Nieto et al. (2022) se analizaron las conexiones que se dan en la transcripción del desarrollo de una clase sobre derivadas, con una metodología cualitativa de análisis del contenido, a partir de unas categorías a priori suministradas por la TAC. Ahora bien, el hecho de que en algunos párrafos la aplicación de la TAC resultó especialmente ambigua, llevó a los autores a argumentar que es necesario matizar y ampliar las categorías de la TAC para un estudio más profundo de las conexiones que se dan en la transcripción; en particular, proponen considerar, como un nuevo tipo de conexión, las metafóricas. Asimismo, en la tesis doctoral de Rodríguez-Nieto (2021), dirigida por Flor Rodríguez (UAGro) y Vicenç Font (UB) se recopilan las diez tipologías de conexiones consideradas en la TAC las cuales se recogen en la Tabla 1.

Tabla 1
Conexiones matemáticas propuestas en la TAC

CM	Descripción
OI	Se refiere a la comprensión de un concepto C con base en dos o más conceptos previos A y B , requeridos para ser entendidos por un estudiante. Además, estas conexiones se pueden identificar de dos formas: 1) la asociación de un nuevo tema con conocimientos previos, y, 2) los conceptos y procedimientos matemáticos conectados entre sí se consideran prerequisites o habilidades que los estudiantes deben dominar antes del desarrollo de un nuevo concepto (Businskas, 2008). Por ejemplo, cuando se relaciona la interpretación geométrica de la derivada con la pendiente de una recta.
MD	Son relaciones entre las matemáticas y la vida real y se evidencian cuando el sujeto resuelve problemas no matemáticos o de aplicación donde tiene que plantear un modelo o expresión matemática (Evitts, 2004). Por ejemplo, cuando un sujeto puede construir una función que modela el crecimiento de un cultivo de bacterias está empleando esta conexión matemática.
P	Se manifiestan mediante el uso de reglas, algoritmos o fórmulas para resolver una tarea matemática. Estas conexiones son de la forma A es un procedimiento utilizado para trabajar con el concepto B (Businskas, 2008; García-García y Dolores-Flores, 2021a, 2021b). Por ejemplo, un sujeto emplea esta conexión cuando utiliza el gráfico de una función lineal para determinar la solución de la ecuación lineal asociada y argumenta el proceso seguido (García-García, 2024).
RD	Son identificadas cuando el sujeto representa los objetos matemáticos usando representaciones equivalentes y alternas (Businskas, 2008). Las representaciones equivalentes implican el tratamiento entre representaciones en un mismo registro. Las alternas se refieren a representaciones de un mismo objeto donde se modifica el registro en el cual fueron formadas inicialmente (e.g., gráfica-algebraica) (Businskas, 2008). Por ejemplo, cuando un sujeto construye un gráfico de la función $f(x) = 2x + 1$ (dado algebraicamente), está empleando la conexión de tipo RD en su forma alterna. Mientras que, cuando un sujeto parte de una ecuación en la forma $ax + b = cx + d$ realiza operaciones y la transforma en otra forma de la forma $a'x = b'$ (para encontrar el valor de x) en el registro algebraico, está usando esta conexión matemática RD de tipo representaciones equivalentes (García-García, 2024).

Tabla 1 (Continúa)
Conexiones matemáticas propuestas en la TAC

CM	Descripción
P-T	Se presentan cuando el sujeto establece relaciones lógicas de dos maneras: 1) la relación de generalización es de la forma A y es una generalización de B y B es un caso particular de A (Businskas, 2008); 2) La relación de inclusión viene dada cuando un concepto matemático está contenido en otro, por ejemplo, los números enteros están contenidos en los reales (Businskas, 2008). Por ejemplo, cuando un sujeto argumenta que el sistema $2x + 3y = 0, 4x + y = 0$, es un caso particular del sistema de la forma $ax + by = n, cx + dy = m$, está empleando esta conexión matemática (León et al., 2024).
I	Se identifican cuando un concepto P conduce a otro concepto Q mediante una relación lógica ($P \rightarrow Q$) (Businskas, 2008). Por ejemplo, cuando un sujeto argumenta que, si <i>un sistema de ecuaciones lineales es consistente y las gráficas de las ecuaciones se superponen</i> , entonces <i>el sistema tiene infinitas soluciones</i> (León et al., 2024).
C	Se identifica cuando el sujeto expresa características del concepto o describe sus propiedades en términos de otros conceptos que los hace diferente o similar a otro (Eli et al., 2011; García-García y Dolores-Flores, 2021a). De acuerdo con García-García (2024), esta conexión puede incluir descripciones verbales o escritas de los componentes de una representación (algebraica, geométrica, gráfica, etc.) o incluso características de un teorema. Por ejemplo, cuando un sujeto indica que una ecuación lineal de la forma $ax + b = c$ tiene una incógnita x establece esta conexión matemática (García-García, 2024).
R	Se presentan cuando el profesor o el estudiante parte de un concepto P para llegar a un concepto Q e invierte el proceso partiendo de Q para volver a P (García-García & Dolores-Flores, 2021a, 2021b). Por ejemplo, cuando un estudiante construye para $f(x) = 2x + 1$ su inversa $g(x) = \frac{x - 1}{2}$ y a partir de esta puede regresar a $f(x)$ está estableciendo esta conexión (García-García, 2024)
S	Se identifica cuando el estudiante o el profesor atribuye un sentido a un concepto matemático (<i>expresión/contenido</i>), es decir, lo que significa para él o ella. Incluye aquellos en los que un estudiante da una definición que él o ella ha construido para estos conceptos. Este tipo de conexión es diferente del tipo de conexión característica porque no se describen las propiedades y cualidades de los conceptos matemáticos (García-García & Dolores-Flores, 2021a, 2021b). Por ejemplo, cuando un estudiante define que el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales como el conjunto de valores de las incógnitas que satisfacen simultáneamente las ecuaciones del sistema, está empleando esta conexión matemática (León et al., 2024).
MT	Son entendidas como la proyección de las propiedades, características, etc., un dominio conocido para estructurar otro dominio menos conocido (abstracto) (Rodríguez-Nieto et al., 2022). Por ejemplo, cuando el profesor o el alumno usa expresiones metafóricas como “recorrer la gráfica sin levantar el lápiz del papel” que implícitamente sugieren la metáfora conceptual “la gráfica es un camino” (Rodríguez-Nieto et al., 2022)

Nota: Orientada a la instrucción (OI), Modelado (MD), Procedimental (P), Representaciones diferentes (RD), Parte-Todo (P-T), Implicación (I), Característica (C), Reversibilidad (R), Significado (S) y Metafórica (MT)

Estos tipos de conexiones descritos en la tabla 1 no son conjuntos disjuntos ya que, por ejemplo, algunas conexiones metafóricas, como las de tipo “linking” se pueden considerar conexiones de significado, parte-todo o de representaciones diferentes. En nuestra opinión, de acuerdo con Font (2007), si bien estas tipologías tienen un aire de familia, son tipologías distintas.

El grupo de la UAGro ha realizado numerosas investigaciones sobre diferentes objetos matemáticos y en diferentes niveles educativos, usando algunas tipologías de la TAC. A título de ejemplo, tenemos la investigación de Barragán et al. (2024), en la que se estudian, usando como referente teó-

rico cinco categorías de conexiones contempladas en la TAC y mediante un análisis temático, las conexiones matemáticas que establecen cuatro estudiantes mexicanos de primer semestre de bachillerato cuando resuelven tareas que involucran la ecuación lineal.

Las conexiones en el marco del EOS

Del segundo grupo de investigaciones comentado en la introducción, queremos destacar las fundamentadas en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, 2024; Godino et al., 2007), en el que se considera que, para estudiar la actividad matemática, es necesario recurrir a la ontología, es decir, considerar los objetos matemáticos que intervienen en la actividad matemática y cómo se relacionan entre sí mediante funciones semióticas. En esta sección se describen brevemente los elementos del EOS que se han utilizado en la investigación del grupo de la Universitat de Barcelona en el estudio de las conexiones matemáticas.

El EOS considera que, para describir la actividad matemática desde un punto de vista institucional y personal, es esencial tener en cuenta los *objetos* involucrados en tal actividad y las relaciones semióticas entre ellos (Font et al., 2013; Godino et al., 2007). La actividad matemática se modeliza en términos de *prácticas*, una *configuración de objetos primarios*, y procesos que se activan por las prácticas. En esta teoría, una práctica matemática se considera como una secuencia de acciones reguladas por normas establecidas institucionalmente y guiadas hacia un objetivo (usualmente, resolver un problema). En la ontología del EOS, el término *objeto* se utiliza en un sentido amplio para referirse a cualquier entidad que esté, de alguna manera, involucrada en una *práctica matemática* y que se pueda aislar del resto de la actividad matemática e identificar como una unidad. Por ejemplo, al llevar a cabo y evaluar una *práctica* de resolución de problemas, se puede identificar el uso de diferentes lenguajes (verbal, gráfico, simbólico, etc.), los cuales son la parte ostensiva de una serie de definiciones, proposiciones, y procedimientos que están involucrados en la argumentación y justificación de la solución del problema. Los problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos son considerados como *objetos*, específicamente, como los seis *objetos matemáticos primarios* los cuales, en conjunto, forman la *configuración de objetos primarios*. El término configuración es utilizado para designar un conjunto o sistema heterogéneo de objetos que están interrelacionados. Toda *configuración de objetos primarios* se puede ver tanto desde una perspectiva personal como institucional, lo cual lleva a la distinción entre *configuraciones cognitivas* (personales) y *epistémicas* (institucionales) de *objetos primarios*.

Los *objetos matemáticos* que intervienen en las prácticas matemáticas y aquellos que emergen de estas, se pueden considerar desde la perspectiva de

las siguientes formas de estar presentes en la actividad matemática, las cuales se agrupan en facetas o dimensiones duales (Font et al., 2013; Godino et al., 2007):

- Extensivo/Intensivo: Los *objetos* intensivos corresponden a aquellas colecciones o conjuntos de entidades, de cualquier naturaleza, que se producen ya sea extensivamente (al enumerar los elementos cuando es posible) o intensivamente (al formular la regla o propiedad que caracteriza la membresía de una clase o tipo de *objetos*).
- Expresión/Contenido: Los *objetos* pueden estar participando como representaciones o como *objetos* representados.
- Personal/Institucional: Los *objetos* institucionales emergen de sistemas de *prácticas* compartidas dentro de una institución, mientras que los objetos personales emergen de prácticas específicas de un individuo.
- Ostensivo/No ostensivo: Algo que se puede mostrar directamente a otra persona, versus algo que no puede mostrarse directamente por sí mismo y debe, por lo tanto, complementarse con otra entidad que sí pueda mostrar.
- Unitario/Sistémico: Los *objetos* pueden participar en las *prácticas matemáticas* como *objetos* unitarios o como un sistema.

El uso y/o la emergencia de los *objetos primarios* de la *configuración* (problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos, y argumentos) tiene lugar a través de los respectivos *procesos matemáticos* de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, etc.), y argumentación (aplicando la dualidad proceso-producto). Mientras tanto, las dualidades antes descritas dan origen a los siguientes *procesos* (Font et al., 2013): institucionalización–personalización; generalización–particularización; análisis/descomposición–síntesis/reificación; materialización/concreción–idealización/abstracción; expresión/representación–significación (ver Figura 2).

Esta lista de procesos se deriva de la tipología de *objetos primarios* y de facetas duales utilizadas como herramientas para analizar la actividad matemática en el EOS. Si bien se contemplan algunos de los *procesos* considerados como importantes en la actividad matemática, no se pretende incluir todos los *procesos* involucrados en dicha actividad. Esto se debe a que, entre otras razones, algunos de los *procesos* más importantes, como la resolución de problemas y la modelización matemática, son *macroprocesos* que involucran *procesos* más elementales, como la representación, argumentación, idealización.

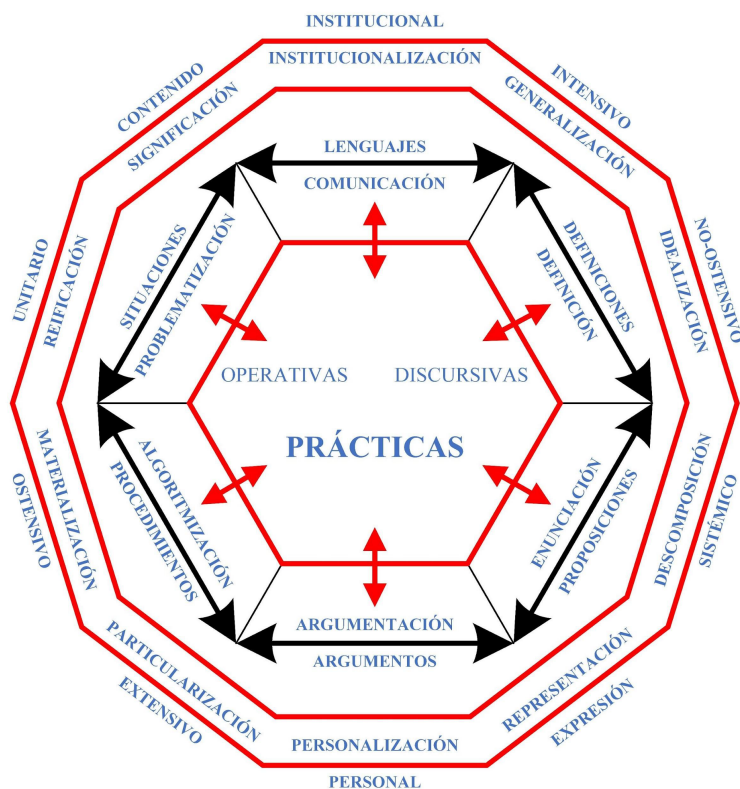
Las herramientas teóricas antes descritas permiten analizar la actividad matemática mediante diferentes tipos de análisis didácticos (véase Breda et al., 2021; Campo-Meneses et al., 2024; Garcés, 2021).

Una noción clave para relacionar las prácticas con los objetos primarios y los procesos activados en ellas es la noción de *función semiótica*, que

permite relacionar las *prácticas* con los *objetos primarios* que se activan en estas. Una *función semiótica* es una relación triádica entre un antecedente (expresión/objeto inicial) y un consecuente (contenido/objeto final), establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

Figura 2

Representación onto-semiótica del conocimiento matemático



Nota. Adaptado de Font y Contreras (2008, p. 35)

En el EOS, las funciones semióticas se conciben, de manera metafórica, como una correspondencia entre conjuntos que pone en juego tres componentes: un plano de expresión (objeto inicial), un plano de contenido (objeto final), un criterio o regla de correspondencia (Godino et al., 2007). La función semiótica (FS) se relaciona, de entrada, con la dualidad expresión/contenido y con el proceso de significación; un ejemplo, es cuando a alguien se le pregunta qué entiende por derivada en un punto (expresión) y responde que es la pendiente de la recta tangente en este punto (contenido). Pero en

el EOS se amplía esta manera de entender la FS y se considera que tanto el plano de la expresión como el del contenido pueden ser objetos materiales o mentales, que pueden ser cualquiera de los seis tipos de objetos primarios de la configuración y, además, cualquiera de las maneras de estar participando en la práctica matemática consideradas en las dualidades. Teniendo en cuenta los objetos primarios que son la expresión o el contenido de una FS, se contemplan treinta y seis tipos de FS básicas, las cuales se aumentan si se tienen en cuenta las facetas duales—por ejemplo, a la FS que relaciona una propiedad con otra (por ejemplo en el caso de la FS que relaciona el teorema de Pitágoras con el teorema de Pitágoras generalizado, una FS que relaciona una proposición con otra, al contemplar la dualidad extensivo-intensivo, se puede convertir, si es el caso, también en una FS que relaciona un particular (un extensivo) con un general (un intensivo). Además, al cruzar las facetas aparecen nuevas FS, por ejemplo, si consideramos la faceta dual extensivo/intensivo desde la perspectiva de expresión/contenido, aparecen cuatro nuevas FS.

Las FS son un instrumento relacional entre los objetos primarios activados en las prácticas matemáticas. Esta relación puede entenderse como una única FS o bien como el resultado de un encadenamiento semiótico. Por ejemplo, si a alguien se le pregunta cuál es la definición de derivada y responde con una definición correcta. Se puede considerar que esta persona ha realizado una función semiótica, donde la expresión es el término derivada (considerado como un objeto primario de tipo lingüístico) y el contenido es la definición de derivada (considerado como otro objeto primario).

Ahora bien, la tipología de funciones semióticas que contempla el EOS permite entender esta función semiótica lenguaje -definición como el resultado de una trama de funciones semióticas que el alumno ha puesto en funcionamiento para poder expresar este significado. Dicho de otra manera, se puede establecer una recursividad o un zoom a esta función semiótica y entenderla como el resultado de una trama de otras funciones semióticas. El establecimiento de una función semiótica se puede considerar como una conexión no categorizada.

El grupo de la UB ha realizado muchas investigaciones sobre conexiones en las que se ha profundizado en el análisis de las funciones semióticas implicadas en la actividad matemática. Por ejemplo, en Rondero y Font (2015) se consideran las conexiones matemáticas como funciones semióticas sin categorizar, las cuales se pueden agrupar en tres grandes categorías 1) trama de funciones semióticas que determina niveles de generalización, 2) trama de funciones semióticas que determinan proyecciones metafóricas y 3) tramas de funciones semióticas en general. La primera categoría lleva (entre otras) a las conexiones parte-todo, la segunda lleva a las conexiones de tipo metafórico y el tercer grupo lleva a una variedad de tipos de conexiones.

Investigaciones que combinan categorías de conexiones de la TAC con el EOS

La mayoría de los estudios que usan como marco teórico la TAC se enmarcan en el contexto intra-matemático y pocos en el contexto extra-matemático, donde solo se contemplan las conexiones de modelado. Por otra parte, las investigaciones que usan como referente teórico categorías de conexiones de la TAC presentan, entre otros, dos aspectos problemáticos. Primero, la exigencia de que la conexión sea verdadera, lo cual lleva implícito un problema filosófico que no es menor (¿qué hay que entender por verdadero en matemáticas?) y, segundo, el problema de explicar por qué algunas de las conexiones que hacen los alumnos no son correctas y, por tanto, no se pueden considerar conexiones. Estas dos limitaciones han llevado a algunos de los investigadores que usan la TAC a ampliar este referente teórico, recurriendo al segundo grupo de investigaciones comentado en la introducción.

En esta línea, en esta sección comentaremos algunas investigaciones que combinan algunos tipos de conexiones de la TAC con el uso de herramientas de análisis del EOS.

Agenda de investigación iniciada en Vanegas y Giménez (2018)

Se puede considerar que la investigación de Vanegas y Giménez (2018) es un primer intento de combinar algunas categorías de la TAC con el EOS. Estos autores, con relación a las conexiones extra-matemáticas, siguiendo la clasificación de conexiones de Businskas (2008) y elementos del Enfoque Ontosemiótico (Godino et al, 2007), plantean las siguientes categorías:

- **Conexión Modelizadora:** Se refiere a las relaciones establecidas entre un contexto extra-matemático y una idea matemática, relación que requiere de un modelo matemático para existir.
- **Conexión Mediadora:** Establece la relación entre un concepto extra-matemático y una idea o procedimiento matemático mediante el uso de un elemento mediador que permita interpretar mejor un determinado significado de la idea matemática, suponiendo que esto mejora la representatividad de dicho significado.
- **Conexión Interdisciplinar Genérica:** Referida a las relaciones establecidas entre elementos de una disciplina, que funciona como contexto extra-matemático y varias representaciones de un objeto matemático que suelen expresarse de manera genérica o poco profundizada. Con estas relaciones es posible mostrar algunas características y/o propiedades de un conocimiento matemático o problemas asociados.
- **Conexión semiótica:** Indica establecimiento de relaciones explícitas entre diferentes representaciones de una misma noción matemática con ayuda de distintas representaciones de un elemento perteneciente

a un contexto extra-matemático, de tal forma que emergen características o propiedades de dicha idea matemática.

- **Conexión metafórica:** Describe aquellas conexiones en que un elemento extramatemático se usa como una metáfora que permite reconocer elementos particulares o generales implícitos de alguna noción matemática.
- **Materialización:** Se refiere a las relaciones en que un contexto extra-matemático se presenta para materializar una definición o proceso matemático, o bien para ser abstraído.

Esta línea de trabajo ha continuado en la tesis doctoral de Vargas (2024) y en Vargas et al., (2024). En este último artículo se describen las conexiones extra-matemáticas que emergen al enfrentar a un grupo de 250 futuros docentes de Educación Primaria a dos tareas profesionales que abordan diversas nociones geométricas. En el análisis desarrollado se considera la teoría de conexiones extra-matemáticas (Vanegas & Giménez, 2018) y herramientas del Enfoque Ontosemiótico: configuración epistémica y función semiótica, para evidenciar la emergencia de conexiones metafóricas e interdisciplinarias genéricas; las primeras referidas a la constitución de una metáfora como herramienta para acceder desde una idea extramatemática a un objeto intra-matemático; mientras que las segundas, indican el uso de elementos pertenecientes a una disciplina particular y por tanto extra-matemáticos, para comprender un objeto intra-matemático. Los resultados y conclusiones giran en torno a la evidencia presentada sobre la emergencia de dichas conexiones. Por otra parte, se da cuenta del potencial del diseño de tareas escolares en los procesos de formación de maestros de Educación Primaria.

La metáfora del iceberg

Podemos considerar que la tesis de Rodríguez-Nieto (2021) y el artículo de Rodríguez-Nieto et al., (2022) derivado de dicha tesis, constituyen una articulación entre los dos grupos de investigaciones comentados en la introducción, ya que integran un tipo de análisis pensado para cualquier actividad matemática (propuesto por el EOS) con herramientas de análisis para un tipo específico de actividad matemática (conexiones) propuestas por la TAC. En términos metafóricos se puede decir, como resultado de esta articulación, que el proceso de conexión puede ser entendido como un *iceberg* donde, para explicar cómo un individuo establece conexiones, es necesario tener en cuenta la parte sumergida del iceberg, la cual consiste en un conglomerado de prácticas matemáticas, objetos matemáticos primarios activados en ellas, funciones semióticas que relacionan estos objetos primarios, y otros procesos matemáticos. Este conglomerado es necesario para que se activen las conexiones intra y extra-matemáticas y es en este conglomerado dónde hay

que buscar la principal explicación del no establecimiento de alguna conexión por parte del alumnado. Por otra parte, el hecho de considerar la dualidad personal/institucional permite situar las conexiones “verdaderas” de la TAC en el ámbito institucional y considerar también como conexiones las que establece el alumnado que no son verdaderas, y que en este caso serían conexiones personales.

Esta línea de trabajo ha continuado con numerosas investigaciones (Rodríguez-Nieto et al., 2023, Rodríguez-Nieto et al., 2024, entre otras) con la participación de profesores de la UAGro y de la UB. Entre estos artículos queremos destacar primero el de Rodríguez-Nieto et al. (2023). Dado que la literatura reporta que los estudiantes tienen dificultades para conectar significados parciales, múltiples representaciones de la derivada y realizar procesos de reversibilidad entre representaciones de una función f y su derivada f' estos autores se proponen como objetivo de su investigación analizar las conexiones matemáticas que establecen los estudiantes universitarios al resolver tareas que involucran las gráficas de f y f' , cuando ninguna de las dos funciones tiene una expresión simbólica asociada. Para ello realizaron una investigación cualitativa y de estudio de caso en el que participaron siete estudiantes del primer año de licenciatura en matemáticas de una universidad del sur de México. Para la recolección de datos se aplicaron dos tareas que involucran el contexto gráfico de la derivada. Para el estudio de los datos se realizó un análisis de la actividad matemática de los participantes con el modelo de análisis propuesto por el Enfoque Ontosemiótico, y un análisis temático con tipos de conexiones matemáticas de la TAC para inferir las conexiones realizadas en la resolución de las dos tareas, lo que permitió considerar la conexión de reversibilidad entre las gráficas de f y f' como el encapsulamiento de una porción de la actividad matemática. Se concluye que, si bien algunos estudiantes pueden establecer la conexión de reversibilidad entre las gráficas de f y f' , la complejidad de la actividad matemática que encapsula la conexión explica por qué otros estudiantes no pueden establecerla.

También queremos resaltar los trabajos relacionados con la tesis doctoral de Campo-Meneses (2024), dirigida por Javier García-García (UAGro) y Vicenç Font (UB). Por ejemplo, en Campo-Meneses et al., (2021) se usa como referente teórico un networking entre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática y la Teoría Ampliada de las Conexiones Matemáticas para estudiar las conexiones matemáticas activadas por diez estudiantes mexicanos de secundaria al resolver tareas que implican el uso de las nociones de función exponencial y logarítmica. Se concluye que la conexión de reversibilidad es importante para lograr que los alumnos comprendan plenamente la relación existente entre la función exponencial y la logarítmica; sin embargo, esto requiere una red de otras conexiones.

En Campo-Meneses y García-García (2025) también se usa como referente teórico un *networking* entre el EOS y TAC para realizar una investigación cualitativa (un estudio de caso), sobre la comprensión matemática evidenciada por estudiantes de secundaria respecto a las funciones exponencial y logarítmica. Para ello, se estudiaron las producciones y las respuestas a un cuestionario de tres estudiantes de secundaria. Los datos fueron analizados primero con herramientas del EOS; en particular se analizó con estas herramientas la práctica matemática, después se usaron categorías de la TAC para caracterizar las conexiones activadas por los estudiantes en sus resoluciones. Los resultados mostraron que el *networking* entre el EOS y TAC permitió valorar el nivel de comprensión de los estudiantes, quienes a través del establecimiento de conexiones matemáticas mostraron un nivel de comprensión diferente respecto a las funciones exponencial y logarítmica. Los casos estudiados que no evidenciaron un alto nivel de comprensión, según los autores, se debieron a la falta de tiempo para socializar y profundizar algunas características de las funciones durante las sesiones realizadas.

El desarrollo teórico sobre el estudio de las conexiones se ha centrado, sobre todo, en las conexiones intra-matemáticas, quedando pendiente el desarrollo teórico de las conexiones extra-matemáticas, ya que para esta tipología en la TAC inicialmente solo se considera la categoría de modelado. Los trabajos de Vargas (2024) y Vargas et al. (2024), comentados anteriormente profundizan en el desarrollo de la tipología de conexiones extra-matemáticas, al igual que el trabajo de Ledezma et al. (2024). Estos últimos autores formulan la siguiente pregunta: ¿cuál es el papel de las conexiones, en particular el de las extra-matemáticas, en el proceso de modelización? Para responderla se consideran tres referentes teóricos y se sigue la metodología usada en dos articulaciones teóricas previas desarrolladas entre el EOS y la TAC (Rodríguez-Nieto et al., 2022) y entre el EOS y el Ciclo de Modelización Matemática desde una Perspectiva Cognitiva (Ledezma et al., 2022).

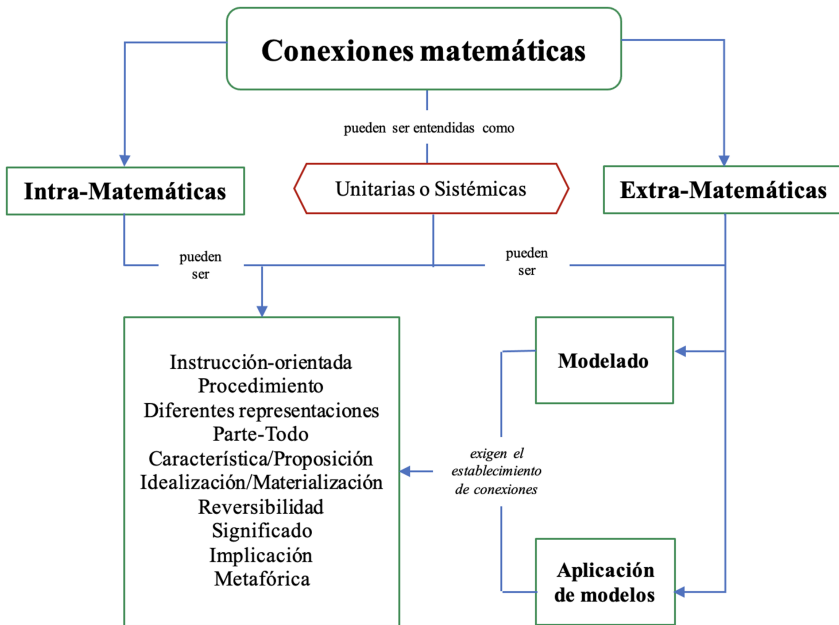
Esta metodología se basa en el uso del modelo de análisis de la actividad matemática propuesto por el EOS para analizar la actividad matemática implicada en el establecimiento de conexiones y en el proceso de modelización. Los principales resultados de este estudio son, por una parte, la evidencia del papel que juegan las conexiones en las diferentes fases del proceso de modelización y, por otra parte, la propuesta de una clasificación más detallada de las conexiones, tanto de las intra como de las extra-matemáticas.

En este artículo las conexiones se estudian desde la dualidad unitaria/sistémica del EOS; y esta última perspectiva lleva a entender el ciclo de modelización también como un iceberg, de manera que las fases del ciclo de modelización estarían en la superficie y su establecimiento dependería de un conglomerado sumergido formado conexiones, prácticas matemáticas,

objetos matemáticos primarios activados en ellas, funciones semióticas que relacionan estos objetos primarios, y otros procesos matemáticos.

En la Figura 3 se presenta la tipología de conexiones propuesta en Ledezma et al. (2024) matizada con la incorporación de la conexión de materialización propuesta en Vargas (2024):

Figura 3
Tipología de conexiones



Nota. Adaptada de Ledezma et al. (2024) y Vargas (2024)

Consideración final

En este momento podemos observar que se está produciendo un doble desarrollo teórico para el estudio de las conexiones. En el caso de la TAC observamos cómo se va ampliando el número de tipos de conexiones, lo que describimos como una ampliación por extensión, con una mirada unitaria a las conexiones; mientras que con la articulación entre el EOS y la TAC podríamos hablar de una ampliación por profundización ya que la conexión, además de ser mirada de manera unitaria, pasa a ser mirada de una forma sistémica.

Una mirada global a los artículos comentados en este documento evidencia que la investigación sobre las conexiones matemáticas es una temática cada vez más relevante para la Educación Matemática y, también, que sus referentes teóricos cada vez más desarrollados. También evidencia

que la colaboración conjunta de investigadores de la UAGro y de la UB ha generado investigaciones con un alto impacto internacional.

La colaboración entre los grupos de la UAGro y de la UB continúa vigente como se puede ver en numerosas publicaciones recientes, siendo las conexiones etnomatemáticas una de las líneas que se están explorando en estos momentos (por ejemplo, Olivero-Acuña et al., 2025).

Agradecimientos

Proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por “FEDER Una manera de hacer Europa”

Referencias

- Barragán-Mosso, G., Campo-Meneses, K. G., & García-García, J. (2024). Conexiones matemáticas asociadas a la ecuación lineal que establecen estudiantes de bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 25, 9–31. <https://doi.org/10.35763/aiem25.4616>
- Breda, A., Hummes, V., da Silva, R. S., & Sánchez, A. (2021). El papel de la fase de observación de la implementación en la metodología estudio de clases. *Bolema*, 35(69), 263–288. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a13>
- Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections*. [Tesis doctoral]. Simon Fraser University.
- Campo-Meneses, K. G., Font, V., García-García, J., & Sánchez, A. (2021). Mathematical connections activated in high school students' practice solving tasks on the exponential and logarithmic functions. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(9), em1998. <https://doi.org/10.29333/ejmste/11126>
- Campo-Meneses, K., Font, V., & García-García, J. (2024). Criterios que orientan la práctica de un profesor al enseñar las funciones exponencial y logarítmica. *Educação e Pesquisa*, 50. <https://doi.org/qhwp>
- Campo-Meneses, K. (2024). *Idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza basado en conexiones matemáticas que promueve la comprensión sobre las funciones exponencial y logarítmica*. [Tesis doctoral]. Universidad Autónoma de Guerrero.
- Campo-Meneses & García-García, J. (2025). Comprensión matemática evidenciada por estudiantes de secundaria sobre las funciones exponencial y logarítmica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (27), 179–201. <https://doi.org/10.35763/aiem27.6430>
- Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J., & Lee, C. W. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal*, 23(3), 297–319. <https://doi.org/10.1007/s13394-011-0017-0>

- Evitts, T. (2004). *Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula* [Tesis doctoral]. Pennsylvania State University College of Education.
- Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular-general, representación, metáfora y contexto. *Educación Matemática*, 19(2), 95–128.
- Font, V., & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69(1), 33–52. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9123-7>
- Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97–124. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0>
- Garcés, W. (2021). Análisis de las pautas que rigen la práctica del profesor en la enseñanza de derivadas en ciencias básicas en carreras de ingeniería. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, 10(3), 239–268. <https://doi.org/10.17583/redimat.7957>
- García, J. (2018). *Conexiones matemáticas y concepciones alternativas asociadas a la derivada y a la integral en estudiantes del preuniversitario* [Tesis doctoral]. Universidad Autónoma de Guerrero.
- García-García, J. G. (2019). Escenarios de exploración de conexiones matemáticas. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 100, 129–133.
- García-García, J. (2024). Mathematical understanding based on the mathematical connections made by Mexican High School students regarding linear equations and functions. *The Mathematics Enthusiast*, 21(3), 673–718. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1646>
- García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2021a). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal*, 33(1), 1–22. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x>
- García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2021b). Exploring pre-university students' mathematical connections when solving calculus application problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(6), 912–936. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1729429>
- Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw Hill-Aula Magna
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-Mathematics Education*, 39(1–2), 127–135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Hatisaru, V., Stacey, K., & Star, J. (2024). Conexiones matemáticas en las estrategias de solución de problemas de álgebra de profesores de matemáticas de secundaria en formación. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (25), 33–55. <https://doi.org/10.35763/aiem25.6354>

- Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research of mathematics teaching and learning* (pp. 65–79), Macmillan.
- Ledezma, C., Font, V., Sala- Sebastià, G., & Breda, A. (2022). Principios de la modelización matemática desde la perspectiva de la idoneidad didáctica. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J.A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 345–354). SEIEM.
- Ledezma, C., Rodríguez-Nieto, C. A., & Font, V. (2024). El papel de las conexiones extra-matemáticas en el proceso de modelización. *Avances de Investigación en Educación Matemática* (25), 81–103. <https://doi.org/10.35763/aiem25.6363>
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- León, A., León, W., García-García, J., & Salgado-Beltrán, G. (2024). Mathematical connections made by preservice mathematics teachers when solving tasks about systems of linear equations. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 19(4), 1–14. <https://doi.org/10.29333/iejme/15590>
- Olivero-Acuña, R. R., Rodríguez-Nieto, C. A., Font Moll, V., Cantillo-Rudas, B. M., & Rodríguez-Vásquez, F. M. (2025). Ethnomathematical connections between the production of coastal cheese, geometric solids, measurements, and proportionality: A study with a Colombian merchant. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 21(4), em2608. <https://doi.org/10.29333/ejmste/16081>
- Rodríguez-Nieto, C. (2021). *Análisis de las conexiones matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de la derivada basado en un networking of theories entre la teoría de las conexiones y el enfoque ontosemiótico* [Tesis doctoral]. Universidad Autónoma de Guerrero.
- Rodríguez-Nieto, C. A., Font, V., Borji, V., & Rodríguez-Vásquez, F. M. (2022). Mathematical connections from a networking theory between extended theory of mathematical connections and onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(9), 2364–2390. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1875071>
- Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., & Font, V. (2022). A new view about connections: the mathematical connections established by a teacher when teaching the derivative. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(6), 1231–1256. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1799254>
- Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M. y Font, V. (2023). Combined use of the extended theory of connections and the onto-semiotic approach to analyze mathematical connections by relating the graphs of f and f' . *Educational Studies in Mathematics*, 114(1), 63–88. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2254444>

- Rodríguez-Nieto, C. A., Cabrales, H. A. Arenas-Peñaloza, J., Schnorr, V., & Font, V. (2024). Onto-semiotic analysis of Colombian engineering students' mathematical connections to problems-solving on vectors: A contribution to the natural and exact sciences. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(5), 2–24. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14450>
- Rondero, C., & Font, V. (2015) Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 29–49. <http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1386>
- Vanegas, Y., & Giménez, J. (2018). Conexões extramatemáticas na formação inicial de docentes. *Estudos Avançados*, 32(94), 153–169. <https://doi.org/qhwr>
- Vargas, J. P. (2024). *Desarrollo del pensamiento geométrico en programas de formación docente: análisis de las Conexiones Extra-Matemáticas* [Tesis doctoral]. Universitat de Barcelona.
- Vargas-Herrera, J. P., Vanegas, Y., & Giménez, J. (2024). Conexiones extra-matemáticas que establecen futuros maestros de educación primaria al diseñar tareas escolares geométricas. *Avances de Investigación en Educación Matemática* (25), 57–80. <https://doi.org/10.35763/aiem25.6441>

