El fomento y la evaluación de las consideraciones realistas en el problema de las cuerdas

Martha Patricia Velasco Romero[1] y Josip Slisko Ignjatov[2]

RESUMEN

Se presenta el análisis y evaluación de las respuestas dadas por 94 estudiantes de bachillerato al problema de las cuerdas, considerando la congruencia entre la argumentación de la respuesta numérico-verbal y su representación visual. En un problema se pide construir una cuerda con ayuda de cuerdas más pequeñas. Se usaron dos grupos: uno experimental, llamado "experimentador inmerso" (la mitad de los estudiantes, seleccionada al azar), donde se reformuló el comienzo del problema "Imagina que quieres hacer una cuerda…". Para el grupo de control se mantuvo la formulación original. En la hoja de trabajo, los estudiantes de ambos grupos debían de dibujar su solución al problema. Debido a que las diferencias entre los desempeños estudiantiles en dos grupos no fueron estadísticamente significativas, el enfoque de análisis y de evaluación es meramente cualitativo. Se encontró la mayor parte de respuestas correctas en el grupo con la formulación del "experimentador inmerso". Se comentan brevemente los casos del contrato didáctico en las respuestas incorrectas.

PALABRAS CLAVE

Problema verbal, Consideraciones realistas, Experimentador inmerso, Dibujo situacional y dibujo matemático.

[1] martha.velasco@alumno.buap.mx
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
https://orcid.org/0000-0003-0125-8823

[2] jslisko@fcfm.buap.mx
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
https://orcid.org/0000-0002-5805-4808

Velasco Romero, M. P., & Slisko Ignjatov, J. (2023). El fomento y la evaluación de las consideraciones realistas en el problema de las cuerdas. En Juárez Ruiz, E. L., Hernández Rebollar, L. A., & Castañeda, A. (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2023* (pp. 113–132). SOMIDEM Editorial. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2023/01-06

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas juega un papel importante en las matemáticas escolares. Los problemas verbales motivan al estudiante a pensar de forma creativa, especialmente cuando representan un reto, sea conceptual o procedimental. Además, tal actividad ofrece las oportunidades para el progreso de diversas habilidades y permite el desarrollo de nuevos conceptos y su fortalecimiento (Dewolf et al., 2014; Verschaffel et al., 2000; Verschaffel et al., 2020). Hay consideraciones en los problemas verbales cuyas características pueden referirse a situaciones del mundo real, haciendo que la solución aceptable se tenga que interpretar en el contexto que conlleva a la formulación del problema, mientras que otros problemas solo enfocan a los estudiantes en operar con los datos numéricos (Dewolf et al., 2014).

El problema de las cuerdas que se tomó para este estudio dice:

> "Un hombre quiere hacer una cuerda suficientemente larga para estirarla entre dos postes y colgar varias prendas. Los dos postes se hallan a 12 *m* de distancia entre sí. Sin embargo, solo dispone de cuerdas cortas de 1.5 metros de largo cada una. ¿Cuántas de estas cuerdas cortas necesita atar juntas para obtener una cuerda larga que se pueda estirar entre los postes para colgar las prendas?"

Este problema fue usado en las investigaciones previas por Dewolf et al. (2014) con 402 niños turcos y 233 niños de Bélgica, cuyas edades oscilaban entre los 10 y 11 años. En tal estudio se aplicaron problemas verbales donde se incluía una ilustración relacionada con la situación del problema, una advertencia de una situación real, o ambos. Se dividieron en cuatro distintos tipos de aplicación: con ilustración y sin advertencia de situación real, sin ilustración y con advertencia, con ilustración y advertencia, sin ilustración ni advertencia, que fue el grupo de control. Se esperaba que el uso de una ilustración adjunta al problema ayudara a los estudiantes a crear un modelo situacional contemplando las características reales y, en consecuencia, llegar a una solución correcta. La intervención no tuvo el efecto esperado, pues el resultado de los niños fue obtenido solamente de modo operacional. De forma similar, las advertencias realistas en la formulación tenían el mismo fin. Sin embargo, no se encontró un efecto positivo del uso de la ilustración y/o de la advertencia al momento de la solución del problema que considerara como correcta una solución realista a estos problemas. En otras palabras, los niños no atendieron las consideraciones realistas al resolver problemas verbales, aunque tuvieran una ilustración y/o advertencia que los indujera a esto.

La combinación de una ilustración y/o una advertencia no condujo al aumento de soluciones estadísticamente significativas del uso de consideraciones realistas. Eso muestra la tendencia de los estudiantes a abordar los problemas de forma numérica no realista.

Posteriormente, Herrera et al. (2015) realizaron un estudio de corte cualitativo con 98 estudiantes de educación secundaria de Puebla, divididos en tres grupos diferentes: discusión previa (32 estudiantes), "experimentadores inmersos" (30 estudiantes) y un grupo de control (36 estudiantes). Se usaron dos versiones del problema: la primera como un problema verbal de las cuerdas (grupo de discusión y grupo de control), y en la segunda se reformuló el inicio del problema (Imagina que…), buscando que el estudiante percibiera el problema como propio, como si estuviera dentro de la situación, lo que Zwaan (2004) llama "experimentador inmerso".

Primero se aplicó el Test de Pensamiento Lógico (TOLT) en su versión en español (Acevedo & Oliva, 1995) con el fin de ver si el nivel de razonamiento lógico hace algún aporte a las consideraciones realistas en los argumentos y representaciones que pueden dar los estudiantes al resolver un problema verbal realista. En el grupo de discusión previa se aplicó un problema: "el mejor tiempo de Juan en la carrera de los 100 *m* es de 17 segundos. ¿Cuánto tiempo tardará en realizar una carrera de 1 km?". Este problema tenía como finalidad la reflexión ante una posible respuesta numérica y el contexto real del corredor, ya que una persona no puede correr de manera constante, lo que muestra un pensamiento lineal.

Por otro lado, en el grupo de "experimentadores inmersos" se buscaba que los estudiantes se consideraran parte del problema con la intención de generar en ellos el contexto real y fomentar las consideraciones realistas. Se supone que, en tal caso, las respuestas al problema dejarán de ser solamente operacionales. El grupo de control no tuvo ninguna experiencia ni sugerencia sobre elementos realistas en la solución del problema.

Los resultados de la investigación de Herrera et al. (2015) arrojaron que en los grupos de discusión y de "experimentador inmerso" se pudo inducir las condiciones realistas, lo que aumentó el desempeño en la solución del problema verbal que no depende del razonamiento lógico del estudiante.

En el presente estudio se cambió la metodología, no hubo grupo de discusión previo, solo se consideraron dos grupos: el de "experimentador inmerso" y el grupo de control. Además, no se dieron ilustraciones como parte del problema, sino en ambos grupos se pidieron que los resolutores las hicieran para tratar de activar el conocimiento del mundo real como parte del modelo situacional del problema. El objetivo de esta investigación era analizar y comparar las respuestas que incluían dentro de la formulación al resolutor como parte del problema, con respecto a la formulación que arrojó, en estudios anteriores, respuestas puramente operacionales.

MARCO CONCEPTUAL

Los problemas verbales están presentes dentro del aula de matemáticas e, incluso, en exámenes de opción múltiple que forman parte de evaluaciones nacionales e internacionales. Verschaffel et al. (2000) describen a los problemas verbales como situaciones problemáticas, normalmente presentadas en un contexto escolar, en las que se plantea una pregunta cuya respuesta se puede encontrar realizando operaciones matemáticas con los números del problema. La solución para este tipo de problemas no es trivial, ya que la información presentada generalmente no está relacionada (Bonnen, 2015).

Sin embargo, los problemas verbales pueden tener o no algún algoritmo establecido. Su solución puede ser apoyada mediante estrategias cognitivas llamadas heurísticas, que ayudan a resolver la situación donde no hay método de solución preestablecido. Aunque el uso de estrategias heurísticas no garantiza el éxito en la solución del problema, bien aplicadas aumentan significativamente las probabilidades de una respuesta correcta.

Una de las heurísticas es la representación pictórica, que visualiza los datos del problema y la relación entre ellos. Por esta razón, se consideran las definiciones de dibujos situacional y matemático. Rellensmann et al. (2017) definen como dibujo situacional a “una representación exteriorizada del modelo de situación que representa gráficamente los objetos descritos en la situación problemática de acuerdo con su apariencia visual”. Así mismo, un dibujo matemático “es un dibujo abstracto porque proporciona una representación externa del modelo matemático” (p. 57).

Las representaciones visoespaciales pueden clasificarse según su naturaleza. Según Hegarty y Kozhevnikov (1999), hay dos tipos de representaciones: las pictóricas, que son dibujos concretos de objetos o acciones que se describen en el problema, y las representaciones esquemáticas, las cuales son más abstractas y se enfocan en las relaciones significativas entre las variables del problema.

Aunado a estas representaciones, Boonen et al. (2014) establecen dos tipos de representaciones esquemáticas:

(1) las representaciones completas y correctas que presentan todos los datos y las relaciones entre las variables; y

(2) las representaciones esquemáticas inexactas, donde las relaciones de los elementos relevantes para la solución del problema verbal faltan o se encuentran mal dibujadas o relacionadas.

El contrato didáctico (Brousseau, 1997) se puede describir como un sistema de expectativas entre el profesor y los alumnos que son recíprocas y que guían las acciones de ambos. Debido a esto, los estudiantes que resuelven problemas pueden considerar como respuesta lo que esperan de la clase o de su profesor. Por ejemplo, muchas veces realizan una operación aritmética con los valores que se presentan en el enunciado del problema, sin cuestionar si la respuesta puede ser válida dentro de un contexto real o si tiene sentido dentro del problema, como se encontró en Dewolf et al. (2014).

METODOLOGÍA

Se aplicó el problema de las cuerdas en cinco grupos de bachillerato: uno de primer semestre, dos de tercer semestre y dos de quinto semestre, teniendo un total de 94 estudiantes cuyas edades varían entre 15 a 17 años. La hoja de trabajo contenía dos planteamientos del problema con formulaciones distintas, como se muestra a continuación. Los estudiantes también debían dibujar sus soluciones de la manera más realista posible.

Formulación 1 (para el grupo experimental)

Imagina que tienes que hacer una cuerda lo suficientemente larga para estirarla entre 2 postes y colgar varias prendas. Los postes se hallan a 12 *m* de distancia entre sí. Sin embargo, sólo dispones de cuerdas cortas de 1.5 *m* de largo cada una. ¿Cuántos de estas cuerdas cortas necesita juntar para obtener una cuerda larga que se puede estirar entre los postes para colgar las prendas?

Formulación 2 (para el grupo de control)

Un hombre quiere hacer una cuerda lo suficientemente larga para estirarla entre 2 postes y colgar varias prendas. Los 2 postes se hallan a 12 *m* de distancia entre sí. Sin embargo, el hombre sólo dispone de cuerdas cortas de 1.5 *m* de largo cada una. ¿Cuántas de estas cuerdas cortas necesita atar juntas para obtener una cuerda larga que se pueda estirar entre los postes para colgar las prendas?

El total de participantes en cada una de las formulaciones fue de 47. En la formulación 1 fueron 29 mujeres y 18 hombres, mientras que en la formulación 2 fueron 27 mujeres y 20 hombres. La aplicación fue aleatoria en los cinco grupos de bachillerato. La formación de dos grupos es una mejora metodológica con respecto al estudio anterior porque elimina los factores adicionales que pueden influir cuando los grupos experimental y de control son independientes (por ejemplo, la preparación académica del grupo y las didácticas usadas por diferentes docentes).

Para comparar si la distribución de respuestas correctas e incorrectas del grupo experimental difiere significativamente del grupo de control, se llevó a cabo una prueba de hipótesis, empleando el software estadístico IBM SSPS. La hipótesis nula y alternativa quedó expresada de la siguiente manera:

(Hipótesis nula) H_0 = Distribución de categorías Correcta/Incorrecta del grupo control = Distribución de categorías Correcta/Incorrecta del grupo experimental

(Hipótesis alternativa) H_1 = Distribución de categorías Correcta/Incorrecta del grupo control $\neq$ Distribución de categorías Correcta/Incorrecta del grupo experimental

Para elegir el tipo de prueba – paramétrica o no paramétrica – se debe tomar en cuenta que una prueba paramétrica requiere que se verifiquen una serie de supuestos antes de aplicarla: "variables cuantitativas continuas, distribución normal de las muestras, varianzas similares y tamaño de las muestras, mayor a 30 casos" (Berlanga & Rubio, 2012; p. 102). Una prueba no paramétrica está libre de estos supuestos. También es importante señalar que la investigación ha mostrado que las pruebas no paramétricas son tan buenas como las paramétricas, o incluso más potentes, para identificar diferencias poblacionales a pesar de estar libre de supuestos (Wackerly et al., 2008). "Por esta razón, muchos expertos en estadística están a favor del uso de procedimientos estadísticos no paramétricos en vez de sus equivalentes paramétricos" (p. 742).

Para la presente investigación se decidió emplear una prueba no paramétrica, dado que se trata de una variable ordinal de tipo dicotómica (los resultados posibles son dos categorías, correcta o incorrecta) y no se cumplieron los supuestos de normalidad y homogeneidad de varianza al emplear una prueba K-S de una muestra y una prueba de Levene, respectivamente. La prueba no paramétrica empleada para comparar dos muestras independientes es la U de Mann-Whitney. Después de correr dicha prueba, el SPSS arrojó un estadístico de $Z = 1.485$ con un valor de significancia $p = 0.137$. Este valor de significancia es mayor a 0.05 y, en consecuencia, no se rechaza la hipótesis nula. Es decir, en ambos grupos (experimental y control) hay una distribución similar de respuestas correctas e incorrectas. En el contexto del experimento, esto significa que la sola referencia a imaginar una experiencia cotidiana del acertijo de cuerdas para sujetar entre postes no es suficiente para arribar a una respuesta realista del acertijo.

Se clasificaron las respuestas en diferentes categorías considerando la justificación textual del estudiante, el tipo de representación visual y la respuesta final al problema.

RESULTADOS

La mayor parte de las respuestas correctas (número mencionado de cuerdas mayor que 8 y dibujo realista) se encuentran en la formulación 1 ("experimentador inmerso"), mientras que las respuestas incorrectas abundaron en donde no se inicia el problema pidiendo que el informante imagine la situación. También hubo respuestas alternativas que, debido a las argumentaciones de los estudiantes y los dibujos, no se consideraron como respuestas ni correctas ni incorrectas.

Respuestas incorrectas

En las respuestas incorrectas, la respuesta comúnmente presentada fue la de 8 cuerdas porque usan los datos numéricos junto con la operación de división para justificar la obtención de dicho valor (12 m/1.5 m = 8). La respuesta es matemáticamente correcta, pero no es aceptable contextualmente porque no se consideran los datos realistas del problema, como son la pérdida de cuerda en los amarres o la cuerda que se utiliza para amarrarlas a los postes. Este comportamiento de los estudiantes es una manifestación del "contrato didáctico" (Brousseau, 1997), pues ellos creen, según lo acostumbrado en las clases de matemáticas, que para resolver un problema basta usar todos los datos numéricos y una o más operaciones aritméticas (Tabla 1).

Tabla 1

Tipos de respuestas para el problema de las cuerdas

Tipos de respuesta	Imagina	Un hombre
Correcta completamente	17	11
Parcialmente correcta	4	3
Incorrectas	22	29
Consideraciones alternativas	4	4
Total de casos	47	47

Nota. Categoría de las respuestas. Fuente propia

A continuación se presentan las principales operaciones usadas en las respuestas incorrectas, así como la argumentación del estudiante al justificar su respuesta.

Sin reflexionar el aspecto realista del problema, el estudiante considera solamente los datos de 12 metros y la longitud de la cuerda 1.5 metros y hace una operación aritmética de división como se muestra en la Figura 1.

Figura 1

Respuesta incorrecta de 8 cuerdas usando división

Fuente propia

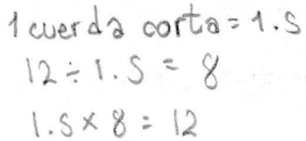
En cuanto a la argumentación de las respuestas donde se usan la división, algunas de ellas son:

> *Se mide la distancia de los postes, medir las cuerdas que se van a usar y así hacer la cuenta de cuántas se van a usar para completar esa distancia entre los postes.*
>
> *Se debe de tener una cantidad de 8 cuerdas de 1.5 para hacer la cuerda lo suficientemente larga para alcanzar 12 metros.*

La respuesta se calcula por medio de la multiplicación, posteriormente, utiliza la división para comprobar el resultado de la operación. En la Figura 2 se presentan dos tipos de respuestas usando ambas operaciones.

Figura 2

Respuesta incorrecta de 8 cuerdas usando división y multiplicación



Nota. Fuente propia

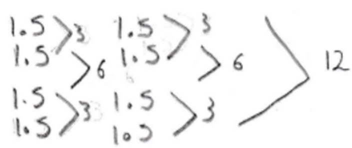
Es importante señalar los razonamientos escritos de los estudiantes que usaron ambas operaciones, que a continuación se presentan:

> *Para saber cuántas cuerdas necesitaría, simplemente dividiría 12 entre 1.5 por lo que el número multiplicado por 1.5 me daría 12 metros, Así, podría saber el número exacto de cuerdas cortas que se necesitaría.*
>
> *Sabiendo que ya tengo la distancia entre los postes divido 12 metros entre 1.5 para saber cuánta cuerda necesito. Ocho cuerdas, al juntarlas daría la medida exacta que se requiere.*

A su vez, como en el caso de la división que se usa considerando los datos del problema, los estudiantes también optan por sumar las cuerdas hasta completar la distancia total, como se muestra en la Figura 3, donde se hacen las sumas de 1.5 con 1.5 que permiten obtener un número entero que posteriormente se asocia con cuatro veces tres igual a 12.

Figura 3

Respuesta incorrecta de 8 cuerdas usando sumas



Nota. Fuente propia

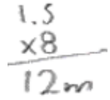
En la argumentación que se presenta en la operación de la suma se presentan frases como:

> *Primero se mediría la distancia entre poste a poste al igual que el de mis cuerdas, después hago una simple suma.*
>
> *Lo que podríamos hacer es sumar 1.5 hasta 12 para llegar al resultado.*
>
> *Voy juntando las cuerdas hasta que llegue a la longitud entre poste y poste.*

De igual forma, la multiplicación, que es similar a una suma repetitiva, también es viable matemáticamente para obtener el resultado de ocho cuerdas sin considerar el aspecto realista. Un ejemplo se presenta en la Figura 4.

Figura 4

Respuesta incorrecta de 8 cuerdas usando la multiplicación



Nota. Fuente propia

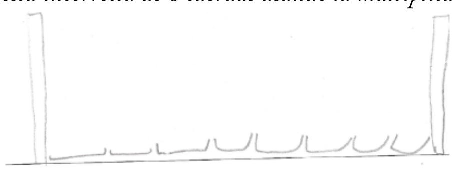
Con respecto a la justificación de las respuestas en palabras, las frases encontradas dentro del plan de solución fueron:

> *Multiplicar 1.5 por 8 porque con esta operación te saldrá el resultado de 12.*
> *Yo usaría una multiplicación porque nos da la medida exacta de poste a poste.*
> *Solo busqué un número que me diera 12 y comencé por 10 que me da 15 metros, después probé con 8 y me dio 12.*

En el caso donde solo se usó la representación y la argumentación para la respuesta de ocho cuerdas, el estudiante escribió lo siguiente: "Podría poner las cuerdas en el suelo hasta que llegue a la medida del otro poste y con esto puedo descubrir qué medida tienen". Debido a esto, la representación pictórica es la que se muestra en la Figura 5, donde las cuerdas se muestran en el piso y no en altura para el tendedero.

Figura 5

Representación de puesta incorrecta de 8 cuerdas usando la multiplicación

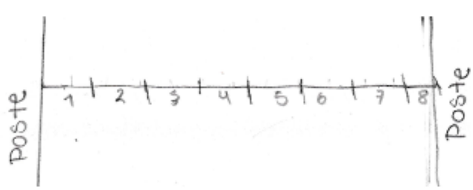


Nota. Fuente propia

Por otro lado, las representaciones de las respuestas donde se hicieron solo operaciones corresponden a tener dos postes, simbolizando a las cuerdas por medio de una línea recta. También se descarta el uso de cuerdas alrededor de los postes para unirlos. Otro dato característico de estas representaciones es ilustrar la respuesta de ocho cuerdas juntándolas una seguida de la otra, formando la distancia total de 12 metros como se muestra en la Figura 6.

Figura 6

Representación de respuesta incorrecta de 8 cuerdas



Nota. Fuente propia

Recapitulando el total de respuestas incorrectas, la mayor cantidad fue para la respuesta de 8 cuerdas. En la justificación con operaciones del problema tanto para la formulación uno y dos se recurrió a la suma, división, multiplicación y dos operaciones al mismo tiempo, las cuales fueron división y multiplicación. En el caso de la formulación 1 se encontraron dos dibujos sin operaciones aritméticas como se muestra en la Tabla 2. Además, se encontraron cuatro respuestas que no correspondían a la respuesta incorrecta de 8 cuerdas, cuya representación corresponde a 8 cuerdas, pero con otras operaciones que no tienen el resultado correcto al hacerlas.

Tabla 2

Tipos de respuestas incorrectas para el problema de las cuerdas

Tipos de respuesta	Imagina	Un hombre
Suma	2	4
Dibujo sin operaciones	2	0
División	4	9
Multiplicación	13	8
Multiplicación y división	2	4
Otras respuestas con resultado diferente de 8 cuerdas	0	4
Total de casos	22	29

Nota. Fuente propia

Respuestas correctas

Las respuestas completamente correctas responden a consideraciones realistas, y en sus representaciones presentan respuestas mayores a 8 cuerdas, ya que se considera la pérdida de cuerdas en los amarres, como también en los pedazos adicionales que se utilizan para amarrar las cuerdas a los postes. A continuación se muestran los principales ejemplos en cada una de las respuestas correctas en las dos diferentes formulaciones del problema. Es necesario recordar que para estar en esta clasificación se consideraron tres factores: (1) la respuesta final; (2) la argumentación del estudiante; y (3) la representación con detalles que puede presentarse por medio de una representación esquemática o pictórica con los detalles suficientes.

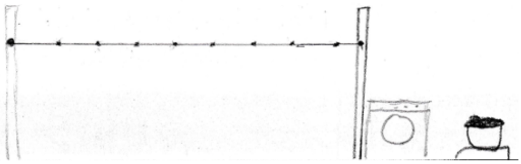
En la respuesta del uso de nueve cuerdas, la solución corresponde a calcular por medio de una división o multiplicación la distancia total requerida, que son 12 metros, y dividirla entre los 1.5 metros. Posteriormente, considerar la pérdida de cuerda al amarrarlas entre sí y a los postes. A continuación se presenta el plan para poder llevar a cabo la tarea en un estudiante que colocó la respuesta de 9 cuerdas:

1. Verificar que las cuerdas cubran los 12 metros y hacer los ajustes necesarios.
2. Amarrarlas entre sí de manera óptima.
3. Atar los extremos a cada poste
4. Verificar que la cuerda resista.

En la representación que se puede ver en la Figura 7 se presentan las 9 cuerdas con puntos que representan los amarres, y se hace una aclaración que justifica la respuesta mencionando que se debe aumentar el número total de cuerdas para cubrir el espacio que se les resta al hacer los nudos entre ellas. Esta respuesta se obtuvo de la formulación 1 del problema.

Figura 7

Representación de una respuesta completamente correcta

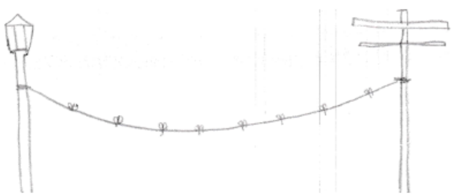


Nota. Representación de la respuesta de 9 cuerdas. Fuente propia

En otra representación de la misma respuesta de 9 cuerdas en la formulación 2 del problema, se pueden observar detalles pictóricos, como son los amarres alrededor de los postes –representados por medio de líneas—, así como la simulación de los nudos que se usan entre cuerdas. Otro detalle importante es que los postes que se usan son de un farol y de un poste de luz, relacionados con los que se pueden ver en las calles de la ciudad, tal como se observa en la Figura 8.

Figura 8

Representación de una respuesta completamente correcta



Nota. Representación de la respuesta de 9 cuerdas. Fuente propia

Por otro lado, en la respuesta de 10 cuerdas destacan argumentos similares a los que se presentan en la respuesta de 9 cuerdas, como son: *tomando en cuenta que dejaremos sobrante para atarla a los postes, quedaría justo si solo son 8 cuerdas, debido a que al atar las cuerdas se pierde un poco su longitud y por eso necesitaría más.*

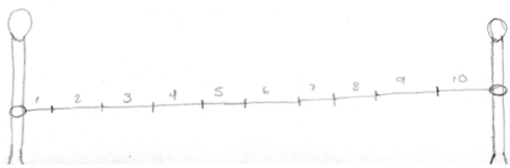
Un plan completamente detallado se presentó en la formulación 1 del problema, el cual se describe de la siguiente forma:

1. Juntar todas las cuerdas para que sea más fácil.
2. Después, atar cuerda a cuerda, hasta que sea larga.
3. Ver si del poste A al poste B alcanza, sino amarrar más, de lo contrario dejarla así.
4. Por último, atar los extremos a los postes.

Cabe destacar que en esta representación se toma un dibujo con detalles pictóricos que justifica la respuesta de las 10 cuerdas, además, señala la longitud entre cada una de ellas y hace un círculo alrededor del poste que simula el amarre de las cuerdas, tal como se puede ver en la Figura 9.

Figura 9

Representación de una respuesta completamente correcta

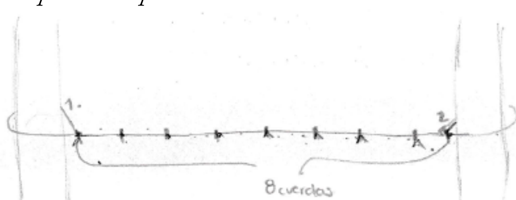


Nota. Representación de la respuesta de 10 cuerdas. Fuente propia

De modo idéntico se presenta la respuesta de 10 cuerdas con la formulación 2 del problema, como se muestra la Figura 10. En esta representación hay ocho cuerdas amarradas entre sí. Además, se indica numéricamente la unión de dos cuerdas en los extremos que son amarradas en cada uno de los postes; por lo cual, la representación es un dibujo pictórico que muestra completamente el uso de las 10 cuerdas.

Figura 10

Representación de una respuesta completamente correcta



Nota. Representación de la respuesta de 10 cuerdas. Fuente propia

En cuanto a la representación de la Figura 11, que corresponde también a la formulación 2 del problema, se considera una representación no pictórica, sino más esquemática correcta y completa que representa las variables del problema, tomando en cuenta que si queda cuerda en los extremos la dejaría en los postes, y considera la longitud de las cuerdas en su representación. Se justifica su respuesta mencionando que las dos cuerdas restantes corresponden al amarre entre cuerdas y el de alrededor de los postes.

Figura 11

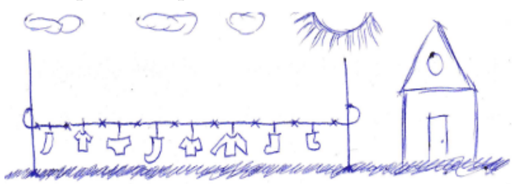
Representación esquemática correcta

Nota. Representación de la respuesta de 10 cuerdas. Fuente propia

En otra representación que se dio como respuesta a la formulación 1 (Figura 12), que llamaremos dibujo completamente pictórico –ya que se presentan elementos como el sol, nubes, la ropa colgada en ganchos y una casa—, la unión de las cuerdas está representada por medio de cruces y se hace alusión al amarrar la cuerda alrededor de los postes, además de que en esta representación no se incluyen datos numéricos. La justificación de la respuesta es que se unieron 10 cuerdas para conseguir más de 12 metros de distancia entre los postes y amarrarlos a cada uno para poder colgar la ropa, son 10 cuerdas para poder darle la vuelta al poste porque con 8 quedaría justo.

Figura 12

Representación de una respuesta completamente correcta

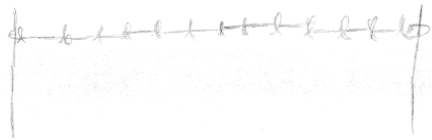


Nota. Dibujo completamente pictórico con respuesta de 10 cuerdas. Fuente propia

En la respuesta de 12 cuerdas de la primera formulación se presenta textualmente un problema al amarrar las cuerdas, pues se considera que se debe de hacer un amarre lo suficientemente bueno para que aguante y pueda llegar a los 12 metros, debido a esto se pierde la longitud, y por esa razón sería necesaria más cuerda. En primer lugar, se atan las primeras cuerdas al primer poste y se van amarrando según se necesiten. Los amarres entre ellas son los once que se presentan entre los postes, mientras que los amarres al poste están representados por medio de un moño, lo que se muestra en la Figura 13.

Figura 13

Representación esquemática para la respuesta de 12 cuerdas

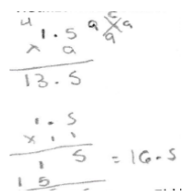


Nota. Fuente propia

En la segunda formulación del problema se da la respuesta completamente correcta de 13 cuerdas. Se presenta la justificación de que se perderán, aproximadamente, 10 centímetros de cuerda al atarlas entre sí, lo que equivale a dos metros con veinte centímetros. Es decir, a la distancia de los 12 metros entre los postes se deben de agregar, aproximadamente, tres metros más, lo cual representa 15 metros en total. La cantidad de cuerdas para 15 metros son 10, maximiza la cantidad de cuerdas al siguiente entero que son 11 (Figura 14). Adicionalmente, se agregan dos cuerdas más para atar los postes.

Figura 14

Representación de la justificación de la respuesta completamente correcta de 13 cuerdas

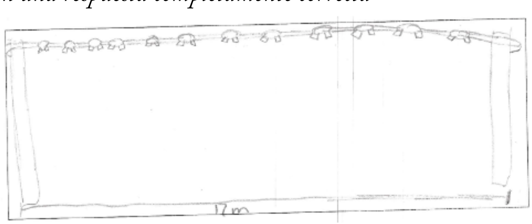


Nota. Operaciones y justificación de las 13 cuerdas. Fuente propia

La Figura 15 muestra la distancia entre los postes de 12 metros, pero con el uso de trece cuerdas amarradas entre sí, representadas por medio de unos pequeños círculos; a su vez, esta cuerda pasa alrededor de los postes.

Figura 15

Representación una respuesta completamente correcta



Fuente propia

Recapitulando, se presenta una diversidad en el caso de las respuestas completamente correctas en ambas formulaciones del problema. La respuesta más popular que se encontró en este estudio fue la de 10 cuerdas. En la justificación del problema, tanto para la formulación uno y dos, se usaron dos operaciones al mismo tiempo, que en este caso fueron la multiplicación y la suma, aunque en algunos procedimientos se encontraron más de dos operaciones usadas. A continuación se presentan las respuestas en la Tabla 3.

Tabla 3
Tipos de respuestas completamente correctas para el problema de las cuerdas

Tipos de respuesta	Imagina	Un hombre
Suma	2	4
Dibujo sin operaciones	2	0
División	4	9
Multiplicación	13	8
Multiplicación y división	2	4
Otras respuestas con resultado diferente de 8 cuerdas	0	4
Total de casos	22	29

Nota. Categoría de las respuestas correctas. Fuente propia

Respuestas parcialmente correctas

Las respuestas parcialmente correctas caen en esta categoría debido a que se tienen discrepancias entre el número de cuerdas finales con la representación visual. En la Tabla 4 se presentan el número de cuerdas que son superiores a la respuesta incorrecta de 8 cuerdas. De igual forma, la justificación fue por medio de operaciones, principalmente usando la multiplicación.

Tabla 4
Tipos de respuestas parcialmente correctas para el problema de las cuerdas

Tipos de respuesta	Imagina	Un hombre
9 cuerdas	1	2
10 cuerdas	2	0
11 cuerdas	1	0
Añadir de 1 a 6 cuerdas más	0	1
Total de casos	4	3

Nota. Categoría de las respuestas parcialmente correctas. Fuente propia

Es necesario hacer énfasis en que las respuestas en ambas formulaciones del problema no llegaron a ser completamente correctas debido a que la representación no fue acorde con el número de cuerdas que se presenta como respuesta final. En una de ellas no se hizo representación (Tabla 5).

Tabla 5

Tipos de representación para la respuesta parcialmente correctas en el problema de las cuerdas

Tipos de respuesta	Imagina	Un hombre
Con representación, pero no corresponde a la respuesta final	3	3
Sin representación	1	0
Total de casos	4	3

Nota. Categoría de las respuestas correctas. Fuente propia

A continuación se presentan ejemplos de representaciones para las respuestas parcialmente correctas. En la Figura 16 se ven solo cinco uniones de cuerdas, pero en la justificación corresponde a la respuesta de 9 cuerdas, además de que no se coloca en los postes el uso de cuerda para amarrar el tendedero. De la misma forma, otro estudiante hace énfasis en que se pueden usar de una a seis cuerdas adicionales a las 8 que forman los 12 metros entre los postes, pero tampoco se representa el total de cuerdas ni los nudos necesarios entre postes.

Figura 16

Representaciones de respuestas parcialmente correctas

Nota. Fuente propia

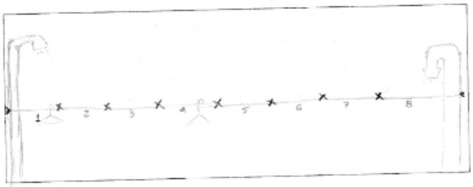
Condiciones alternativas en otro tipo de respuestas

Debido a que la naturaleza del problema depende completamente del contexto que conoce el estudiante, se tienen cuatro respuestas que corresponden a cada una de las formulaciones del problema. Algunas se presentan a continuación, describiendo las características adicionales al problema.

En la representación de la Figura 17, que corresponde a la formulación uno del problema, el estudiante considera que se deben usar pinzas para evitar agarrar espacio entre las cuerdas, esto con el fin de que solo se usen las 8 cuerdas que, matemáticamente, hace la suma de la distancia total. Además, propone unir el poste con cinta adhesiva para no usar más cuerdas. En la representación usa las “x” para señalar la unión con las pinzas, mientras que se usa otro símbolo para colocar el uso de la cinta adhesiva

Figura 17

Representaciones de respuesta con condición alternativa

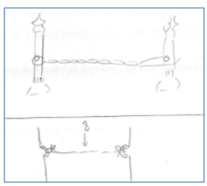


Nota. Representaciones de solución parcialmente correcta. Fuente propia

En la respuesta, representada en la Figura 18, se hacen varias observaciones. En primer lugar, se considera que las cuerdas son entrelazadas entre ellas mismas, conservando su longitud por completo. Se hace una observación adicional donde no es necesario rodear el poste, sino que basta con sujetarlo de extremo a extremo, por lo cual no se puede considerar en las respuestas incorrectas. Además, se justifica la respuesta porque el estudiante tiene un contexto similar en su casa, donde el tendedero está puesto de esta forma. Esta respuesta es de 8 cuerdas y las operaciones que usa para comprobar su razonamiento son una multiplicación y una división.

Figura 18

Representaciones de respuesta con cuerdas entrelazadas

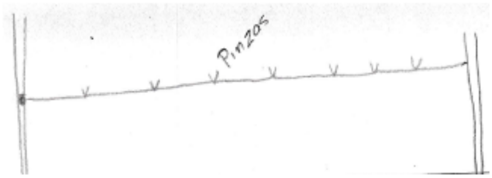


Nota. Representaciones en solución de 8 cuerdas con un contexto distinto. Fuente propia

En la Figura 19, el resolutor habla del uso de otros materiales adicionales a las cuerdas, como puede ser el uso de pinzas que permita unirlas entre sí, de tal forma que no se pierda su longitud al juntarlas. En este caso se mantendrían los 12 metros, además de que en los postes se usarían materiales similares para poder unirlas a ellos sin la necesidad de amarrar una cuerda alrededor de los postes.

Figura 19

Representaciones de respuesta considerando pinzas

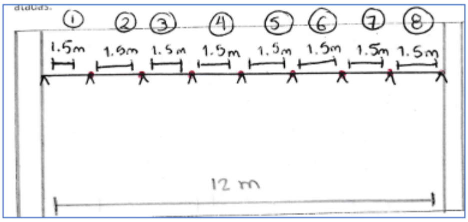


Nota. Fuente propia

Siguiendo un argumento similar al de la figura anterior, el estudiante habla de broches que tienen las cuerdas, los cuales permiten unir unas con otras de forma que no se pierda la longitud en las uniones entre ellas, como se puede ver en la Figura 20. De igual forma, se usa el broche para sujetar los extremos de las cuerdas a cada uno de los postes.

Figura 20

Representaciones de respuesta considerando broches



Nota. Fuente propia

CONCLUSIONES

La mayor parte de las respuestas completamente correctas se encuentra en la formulación de “experimentador inmerso”, aunque el análisis estadístico indica que no hay una diferencia significativa con respecto a las dos formulaciones del problema. Analizando cualitativamente cada una de las respuestas, las consideraciones realistas mencionan: amarres óptimos, el atar los extremos de la cuerda más larga a los postes, así como la verificación de la resistencia de la cuerda. Las representaciones que se encontraron en las respuestas correctas hacen referencia a los amarres entre las cuerdas y al atar la cuerda alrededor de los postes, así como otros elementos realistas que pueden ser ropa y una lavadora.

Por otro lado, las respuestas incorrectas utilizan las operaciones de multiplicación, división y suma, o alguna de las combinaciones de los anteriores, esto con el fin de dar una respuesta donde tengamos un número exacto de cuerdas. En las argumentaciones de los estudiantes no se menciona la pérdida de cuerda debido a los amarres. En cuanto a las representaciones de estas respuestas, se utilizan líneas rectas para representar las cuerdas y otras líneas para representar los postes, sin que haya una representación que indique los amarres entre las cuerdas. La justificación operacional en las respuestas incorrectas se debe a la presencia del “contrato didáctico” (Brousseau, 1997), que es la causa de que las respuestas no realistas abunden en las matemáticas escolares. Un aspecto de tal fenómeno es usar dos operaciones aritméticas para comprobar los resultados.

En cuanto a las respuestas parcialmente correctas, sólo hubo discrepancias con respecto a la representación y a la argumentación con su respuesta final. Si hubiese habido algún tipo de intervención adicional durante la resolución del problema por parte del docente (pregunta orientadora o discusión en el grupo), los autores de estas respuestas hubiesen llegado a una respuesta completamente correcta. Además, en las respuestas que no se catalogaron como correctas o incorrectas, los estudiantes hicieron uso de su contexto para dar una solución realista al problema de las cuerdas, lo que muestra que, hasta cierto punto, tomaron en cuenta su entorno.

En las investigaciones futuras se debería aumentar el número de estudiantes involucrados y reforzar la idea del "experimentador inmerso", solicitando una descripción verbal de las acciones que se deben realizar para poder colgar la ropa. Como la inclinación hacia las consideraciones realistas espontáneas aumenta con la edad, para detectar el mayor efecto de la intervención con el experimentado inmerso, los grupos de estudiantes deberían ser de secundaria y/o primaria alta.

También sería interesante agregar otro grupo experimental que haga una formulación del problema que se complemente con un dibujo del elemento necesario para la consideración realista. Aunque inicialmente tal tipo de intervención no tuvo efecto importante (Dewolf et al., 2014), las posteriores modificaciones (Weyns et al., 2017) fueron más exitosas.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Dra. María Elena Rodríguez Pérez (Universidad de Guadalajara) el apoyo en el análisis estadístico.

REFERENCIAS

Acevedo, J., & Oliva, M. (1995). Validación y aplicaciones de un test de razonamiento lógico. *Revista de psicología general y aplicada, 48*(3), 339–351. https://bit.ly/3FIcM0r

Berlanga, V., & Rubio, M. J. (2012). Clasificación de pruebas no paramétricas. Cómo aplicarlas en SPSS. REIRE. *Revista d'Innovació i Recerca en Educació, 5*(2), 101–113. http://dx.doi.org/10.1344/reire2012.5.2528

Boonen, A. J. H., van Wesel, F., Jolles, J., & van der Schoot, M. (2014). The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children. *International Journal of Educational Research, 68*, 15–26. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2014.08.001

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* En N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield (Eds. & Trans.). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2

Dewolf, T., Van Dooren, W., Ev Cimen, E., & Verschaffel, L. (2014). The impact of illustrations and warnings on solving mathematical word problems realistically. *The Journal of Experimental Education, 82*(1), 103–120. http://dx.doi.org/10.1080/00220973.2012.745468

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual–spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 91*, 684–689. http://dx.doi.org/10.1037/0022-0663.91.4.684

Herrera, Z. I. M., Slisko, J., & López, J. A. L. (2015). Induciendo consideraciones realistas de la solución del problema "tendedero entre dos postes" en estudiantes de secundaria: resultados iniciales y la influencia del nivel de razonamiento lógico. En L. A. H. Rebollar, J. Slisko, J., & López, J. A. L. (Eds.), Tendencias en la educación matemática basada en la investigación. (Vol. 1, pp. 117–137). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. https://bit.ly/49k3Fk3

Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics, 95*(1), 53–78. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-016-9736-1

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems.* Swets & Zeitlinger Publishers.

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: a survey. *ZDM*, *52*, 1–16. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4

Wackerly, D. D., Mendenhall III, W., & Scheaffer, R. L. (2008). *Estadística matemática con aplicaciones*. Cengage Learning.

Weyns, A., Van Dooren, W., Dewolf, T., & Verschaffel, L. (2017). The effect of emphasising the realistic modelling complexity in the text or picture on pupils' realistic solutions of P-items. *Educational Psychology, 37*(10), 1173–1185. http://dx.doi.org/10.1080/01443410.2016.1259461

Zwaan, R. A. (2004). The immersed experiencer: Toward an embodied theory of language comprehension. En B. H. Ross (Ed.), *Psychology of learning and motivation* (Vol. 56, pp. 35–62). Academic Press.