

Conexiones matemáticas establecidas por futuros profesores de matemáticas sobre el Teorema de Pitágoras

Alan Andres Cruz-Acevedo ¹ 

Gerardo Salgado-Beltrán ² 

Javier García-García ³ 

Resumen

Esta investigación tuvo como objetivo analizar las conexiones matemáticas que un grupo de futuros profesores de matemáticas establece al resolver tareas que involucran el uso del teorema de Pitágoras. Se define una conexión matemática como una relación verdadera entre ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados, tanto entre sí como con otras disciplinas o situaciones de la vida cotidiana. Para la recolección de datos se utilizó una entrevista basada en tareas y el análisis temático para interpretarlos. Los resultados permitieron identificar seis tipos de conexiones matemáticas: procedimental, representaciones diferentes, significado, característica, implicación y parte-todo. Las dos últimas fueron las menos frecuentes, lo cual sugiere limitaciones de los futuros profesores en su futura práctica para enseñar el uso de estas conexiones a sus estudiantes lo que impactará en la comprensión del teorema de Pitágoras. Se recomienda que los programas de formación y actualización docente en México incluyan estrategias y actividades que permitan a los futuros profesores explorar de manera profunda las conexiones matemáticas relacionadas con el teorema de Pitágoras. Esto contribuirá a fortalecer tanto su comprensión conceptual como su capacidad para aplicarlo en su futura práctica docente.

Palabras clave

Conexiones matemáticas, teorema de Pitágoras, futuros profesores, entrevista basada en tareas

¹ 15285346@uagro.mx

Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México

² 14251@uagro.mx

Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México

³ jagarcia@uagro.mx

Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México

Introducción

El análisis de las conexiones matemáticas es un tema clave en la investigación educativa, dado que forman parte del currículo de distintos países, en especial en México, donde resalta la importancia de crear un aprendizaje que vincule la matemática consigo misma y con otras ciencias (SEP, 2023). La habilidad de establecer conexiones matemáticas resulta relevante para promover un aprendizaje integral y la comprensión de distintos conceptos matemáticos (Calle et al., 2023; Campo-Meneses et al., 2023; Salgado-Beltrán & García-García, 2024). Sin embargo, establecer conexiones matemáticas requiere un profundo dominio matemático, pensamiento heurístico y creativo (Bingölbali & Coşkun, 2016).

En la última década, diversos estudios han analizado cómo las conexiones matemáticas contribuyen a la enseñanza y el aprendizaje (Businkas, 2008; Eli et al., 2011; García-García & Dolores-Flores, 2018, 2021a, 2021b; Rodríguez-Nieto et al., 2022; García-García, 2024). También se han explorado conexiones con fenómenos del mundo real (Karakoç & Alacaci, 2015; Özgen, 2013), y con la comprensión a través de ellas (Mhlolo et al., 2012; Rodríguez-Nieto et al., 2021; Campo-Meneses & García-García, 2021). Estas investigaciones subrayan la importancia de continuar estudiando las conexiones matemáticas en estos ámbitos y con distintos conceptos matemáticos.

Existen evidencias de que los docentes tienen dificultades para promover en sus estudiantes la habilidad de establecer conexiones matemáticas (Moon et al., 2013), y en algunos casos, para establecerlas ellos mismos (De Gamboa & Figuerias, 2014; Dolores & García-García, 2017; García-García & Salgado-Beltrán, 2024). Esto repercute tanto en sus prácticas pedagógicas como en el aprendizaje de los estudiantes (Byerley & Thompson, 2017; Zuya & Kwalat, 2015), ya que el conocimiento del docente es determinante en estos procesos (Avilés-Canché & Marbán, 2023; Byerley & Thompson, 2017; Salgado, 2020; Scheiner et al., 2019). Además, los profesores enfrentan dificultades para comprender los conceptos matemáticos de su nivel, lo que afecta su capacidad para enseñarlos (Avilés-Canché & Marbán, 2023; Salgado-Beltrán & García-García, 2024; Zakaryan & Sosa, 2021).

Lo anterior sugiere que una parte significativa de la responsabilidad recae en la formación de futuros profesores de matemáticas (FPM), ya que es decisiva para el desarrollo de sus competencias docentes (Sherin et al., 2011). En particular, dicha formación influye en su habilidad para establecer y enseñar conexiones matemáticas de manera efectiva, lo cual es determinante para favorecer la comprensión en los estudiantes (NCTM, 2014; García-García & Salgado-Beltrán, 2024; García-García, 2019, 2024). Investigaciones previas enfocadas en futuros profesores reportan que estos enfrentan dificultades para establecer tales conexiones (Eli et al., 2011), encontrando

complicaciones, por ejemplo, al vincular diferentes representaciones (Moon et al., 2013) y al manejar los diversos significados asociados a los conceptos matemáticos (Rodríguez-Nieto et al., 2021). Estas complejidades dificultan la comprensión de diversos conceptos matemáticos, incluido el Teorema de Pitágoras (TP).

Aunado a lo anterior, el TP es un concepto central en el currículo de matemáticas tanto en México como en otros países (Font et al., 2007). Este teorema, que se aborda desde la Educación Secundaria Básica hasta el Nivel Superior, no solo favorece el aprendizaje de la geometría, sino que también actúa como un eje que permite conectar distintas ramas de la matemática con otras disciplinas científicas (Chaverri-Hernández et al., 2020; Strathern, 2014). Sin embargo, la formación que reciben los FPM sobre este concepto, se restringe al desarrollo de nociones procedimentales en detrimento del desarrollo conceptual, incluso se asume que con el simple hecho de conocer su demostración el FPM está capacitado para enseñarlo (Zazkis & Zazkis, 2016).

Como resultado de lo anterior, los logros en el aprendizaje del TP por parte de los estudiantes son poco alentadores. A este respecto, diversas investigaciones centradas en este concepto han documentado que los alumnos enfrentan dificultades persistentes (Mulyanti et al., 2018; Rothe, 2022; Khoerunnisa & Sari, 2021); entre las cuales, destacan errores algebraicos, como la incorrecta manipulación de la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$ (Sholeha et al., 2021), así como errores numéricos, que incluyen la multiplicación inadecuada de la base por el exponente al elevar al cuadrado y, el redondeo erróneo de raíces cuadradas (Hutapea et al., 2015; Mulyanti et al., 2018). Adicionalmente, se ha observado que algunos estudiantes aplican el TP en triángulos que no son rectángulos, y que al abordar problemas de aplicación, con frecuencia se omite el contexto necesario para formular sus respuestas (Pambudi, 2020; Rohmah, 2020). Estos hallazgos revelan una comprensión limitada del concepto por parte de los estudiantes.

Lo anterior, ha motivado el desarrollo de propuestas didácticas destinadas a fortalecer la comprensión del TP, entre las cuales destacan aquellas que utilizan como recurso el planteamiento de materiales didácticos y/o softwares matemáticos como el GeoGebra (Barrantes et al., 2021; De Sousa et al., 2023; Escobar et al., 2020; Rosas & Amador, 2022; Vargas & Gamboa, 2013). Sin embargo, estas propuestas atienden parcialmente las necesidades identificadas en los estudiantes, ya que la mayoría se centra en ofrecer un tratamiento geométrico del teorema en busca de su validación; bajo la idea de que esto, proporciona una perspectiva diferente a las prácticas educativas predominantes, que a menudo se caracterizan por contextos poco favorables para la comprensión del TP (Chaverri-Hernández et al., 2020; Rosas & Amador, 2022).

En este estudio se asume que investigar las conexiones matemáticas que establecen los FPM sobre el TP es de gran relevancia, ya que la información obtenida permitirá inferir aspectos clave sobre la práctica docente de los FPM y la calidad de la enseñanza que impartirán a sus estudiantes en torno a este concepto importante (Avilés-Canché & Marbán, 2023; Zakaryan & Sosa, 2021). Además, dado que se encuentran en una etapa formativa, cualquier dificultad identificada en la comprensión de contenidos matemáticos podría ser abordada oportunamente desde la enseñanza, con el fin de asegurar que los FPM alcancen una comprensión de los conceptos que eventualmente impartirán. Por estas razones, este estudio tiene como objetivo *analizar las conexiones matemáticas que un grupo de futuros profesores de matemáticas establece al resolver tareas que involucran el uso del teorema de Pitágoras. En particular, busca responder la pregunta: ¿Qué conexiones matemáticas evidencian los FPM al resolver tareas que involucran el TP?*

Marco conceptual

El fundamento de esta investigación se enmarca en enfoques teóricos sobre las conexiones matemáticas y sus tipologías.

Conexiones matemáticas

Los elementos teóricos que sustentan este trabajo son las conexiones matemáticas. Dicho constructo ha sido abordado desde diversas perspectivas en la literatura sobre educación matemática (Salgado-Beltrán & García-García, 2024); esto refleja la importancia de estas conexiones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. El primer acercamiento hacia una definición la proporcionó Brown (1993) describiéndolas como asociaciones causales o lógicas que se establecen entre conceptos matemáticos, destacando su papel en la construcción de conocimiento coherente. Con ello, Coxford (1995) amplió dicha definición, sugiriendo que las conexiones matemáticas son ideas o procesos amplios que permiten vincular conceptos, dotando así de una estructura que favorece la comprensión y resolución de problemas en la matemática.

Por otro lado, Garbín (2005) sostiene que las conexiones matemáticas son esenciales para identificar y establecer relaciones en problemas que requieren la transición entre el lenguaje matemático y diferentes registros de representación, lo que enriquece el proceso de aprendizaje y la capacidad de resolver problemas de forma precisa. Por su parte, Businskas (2008) asumió que una conexión matemática es una relación verdadera entre dos ideas matemáticas A y B. A partir de estas perspectivas, García-García y Dolores-Flores (2018) consideran a las conexiones matemáticas como una relación verdadera entre dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con los de otras

disciplinas o situaciones de la vida real, materializada a través del lenguaje (oral, escrito o icónico). En esta investigación, el concepto de conexión matemática se entiende en el mismo sentido que lo proponen García-García y Dolores-Flores (2018), dado que consideramos que esta postura plantea la esencia de las conexiones matemáticas y resulta pertinente para cuantificar las conexiones realizadas por los FPM.

Tipología de conexiones matemáticas

Con respecto a las conexiones matemáticas Businskas (2008) y García-García y Dolores-Flores (2021a), concuerdan que se generan cuando un individuo es capaz de relacionar o asociar conceptos matemáticos con otros o con otras áreas científicas para resolver algún problema. Por esta razón, el marco de referencia utilizado en esta investigación para estudiar las conexiones matemáticas se fundamenta principalmente en las contribuciones de Businskas (2008) y de García-García y Dolores-Flores (2018, 2021a, 2021b). Por ello, considerando el objetivo del estudio, este modelo de conexiones se compone de las siguientes tipologías:

- **Procedimental:** se manifiesta cuando se utilizan reglas, algoritmos o fórmulas para resolver una tarea matemática y proporcionan explicaciones que respaldan sus resultados. Por ejemplo, cuando señalan que *para calcular los lados de un triángulo rectángulo de catetos y con hipotenusa se utiliza la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$.*
- **Representaciones diferentes:** se manifiesta de dos maneras: *a)* representaciones alternas, cuando se utilizan dos o más representaciones para interpretar el TP dentro de dos registros diferentes (algebraico-gráfico, verbal-algebraico, etc.); *b)* representaciones equivalentes, cuando los FPM expresan el TP de dos maneras diferentes dentro del mismo registro. Por ejemplo, cuando interpretan que *la suma de las áreas de los cuadrados contruidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado contruido sobre la hipotenusa.*
- **Característica:** esta se produce cuando los FPM identifican en el TP atributos o cualidades que lo diferencian o lo asemejan a otros conceptos. Permite discernir diversas simbologías matemáticas. Además, esta conexión se manifiesta cuando se describen las propiedades del TP. Por ejemplo, cuando establecen que el TP *se cumple solo en triángulos rectángulos.*
- **Significado:** esta conexión ocurre cuando los FPM asignan un sentido personal al TP, es decir, lo que ese concepto significa para ellos. Puede incluir la definición que han contruido para el concepto, y se diferencia de la conexión matemática característica en tanto que no describen propiedades ni cualidades. Por ejemplo, cuando definen el TP *como una fórmula para calcular magnitudes.*

- **Parte-Todo:** se manifiesta cuando los FPM identifican relaciones lógicas entre el TP y otros conceptos matemáticos, ya sea a través de la generalización (entre casos generales y particulares) o de inclusión (cuando un concepto está contenido dentro de otro). Por ejemplo, cuando identifican *el TP como un caso particular de la ley de cosenos*.
- **Implicación:** esta conexión se produce cuando, a partir de una premisa A, se deriva lógicamente una premisa B. Se expresa en la forma “*si..., entonces...*”. Por ejemplo, cuando los participantes infieren que *si en un triángulo se cumple el TP entonces el triángulo es rectángulo*.

Metodología

La investigación es de tipo cualitativa y corresponde a un estudio de caso. Este enfoque permite centrarse en la búsqueda de significados y la comprensión de conceptos matemáticos en el saber de los individuos, donde el resultado final es descriptivo (Merriam & Tisdell, 2016). Además, implica un proceso de búsqueda caracterizado por un análisis detallado, comprensivo y sistemático del fenómeno de estudio (Rodríguez et al., 1999).

Contexto de la investigación y selección de los casos de estudio

La investigación se llevó a cabo en una Facultad de Matemáticas de una universidad pública ubicada en el sur de México. Esta institución ofrece la Licenciatura en Matemáticas, con una duración de nueve semestres. El programa académico está estructurado en cuatro orientaciones o especialidades: Matemática Educativa, Matemáticas Básicas, Estadística y Computación. A partir del tercer semestre, los estudiantes eligen la orientación que desean seguir. Quienes optan por la especialidad en Matemática Educativa, en su mayoría, lo hacen con la intención de convertirse en docentes, proyectándose hacia un futuro profesional como profesores de matemáticas.

En este estudio participaron voluntariamente quince FPM, quienes estaban finalizando un curso correspondiente al séptimo semestre en el área de Matemática Educativa. Los casos de estudio se conformaron por diez hombres y cinco mujeres, con edades comprendidas entre los 21 y 24 años. Algunos de ellos habían tenido experiencias previas como docentes, aunque de manera breve, a través de actividades complementarias como el servicio social o la práctica docente. Por esta razón, se consideró que eran participantes idóneos debido a su formación académica y su proximidad a convertirse en profesores de matemáticas. A partir de este punto, se les identificará como FPM1, FPM2, FPM3, ..., FPM15.

Instrumento para la recolección de datos

Para lograr el objetivo planteado en esta investigación, se diseñó y aplicó una entrevista basada en tareas (EBT). Según Goldin (2000), la EBT

implica la interacción entre un entrevistador (quien plantea y realiza las preguntas) y un sujeto (quien resuelve), que discuten en torno a una o más tareas (preguntas, problemas o actividades). Durante este proceso, el sujeto expresa sus pensamientos mientras o inmediatamente después de resolver una tarea, lo que permite evidenciar su conocimiento y razonamiento. Este método se eligió porque permite centrar la atención en los procesos que siguen los FPM al resolver tareas matemáticas, en lugar de limitarse a considerar únicamente respuestas correctas o incorrectas. De esta manera, se profundiza en las producciones escritas y orales (argumentos) de los FPM, tanto en sus explicaciones como en los argumentos presentados durante la resolución de las tareas propuestas.

El protocolo para el entrevistador incluyó preguntas auxiliares básicas para todas las tareas, tales como: “¿Por qué lo hiciste así?”, “¿Conoces otra vía de solución?”, “¿A qué te refieres con este término?” y “¿Por qué utilizaste esa fórmula?”. Además, se incorporaron preguntas específicas que facilitaron un conocimiento más profundo sobre el razonamiento y el entendimiento del TP. Estas preguntas se plantearon en momentos en que el participante expresaba ideas confusas, carecía de argumentos en su forma de proceder o se pretendía activar diferentes vías de solución que pudiera conocer.

Las tareas fueron diseñadas de acuerdo con el plan de estudios de Geometría Plana y Geometría Analítica de nivel superior, adaptándose a los casos de estudio y al objetivo de la investigación. Algunas tareas fueron creadas durante las sesiones de trabajo. El instrumento inicial se aplicó a dos FPM con el fin de validar su eficacia. Se verificó que las instrucciones del cuestionario fueran claras y comprensibles para los FPM, y que las tareas fueran adecuadas para su nivel. La validación tuvo una duración de entre 80 y 90 minutos, fue videograbada para su posterior análisis y permitió corregir imprecisiones en el instrumento. Tras analizar los resultados de la prueba piloto, se reestructuraron las tareas que presentaron dificultades de comprensión. Después de las modificaciones necesarias, se garantizó que las tareas permitieran identificar diversas conexiones matemáticas relacionadas con el TP. Tras la validación, el instrumento final quedó compuesto por seis tareas (Tabla 1).

Análisis de los datos

Para el análisis de los datos se utilizó el análisis temático (Braun & Clarke, 2012), un enfoque que facilita la identificación de patrones de significado (temas) en los datos a partir de las respuestas de los FPM a las tareas propuestas. Este método fue elegido por su utilidad para realizar un análisis fundamentado en teoría, como en este estudio, y por ser adecuado para trabajar con un conjunto de datos reducido. El análisis temático se estructura en las siguientes fases.

Tabla 1
Tareas planteadas a los FPM

T1. Explica, ¿qué significa el Teorema de Pitágoras para ti?
T2. Explica, ¿cómo se representa el Teorema de Pitágoras?
T3. Propón ejemplos de la vida real donde consideres que se aplique el teorema de Pitágoras
T4. Encuentra la distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$. Argumenta tu respuesta.
T5. Si tienes una escalera de 20 metros y necesitas subirte al techo de tu casa que está a 10 metros del suelo ¿A cuántos metros se debe colocar el pie de la escalera sobre la superficie terrestre para que el extremo superior de está quede exactamente en el borde del techo?
T6. En el triángulo ABC se cumple lo siguiente: 1) $\overline{AC} = \overline{BC}$, 2) $\overline{AC} = l$ y 3) $2l^2 = g^2$. Argumentar que tipo de triángulo es ABC • Calcular el valor de α • Suponiendo que $g = \sqrt{2}$, hallar el valor de l y $\text{sen } \alpha$

Nota. Fuente: Elaboración propia

Fase 1. Familiarización con los datos. En esta fase, cada entrevista fue transcrita y las producciones escritas se digitalizaron. Posteriormente, se realizó una lectura global de las respuestas para obtener una visión inicial de las conexiones matemáticas establecidas por los profesores y familiarizarse con el lenguaje empleado por los participantes.

Fase 2. Generación de códigos iniciales. Se identificaron en las respuestas de los casos de estudio, relaciones verdaderas entre conceptos, definiciones, teoremas y sus significados, lo que permitió generar códigos iniciales vinculados a las conexiones matemáticas relacionadas con el TP. Estos códigos son la primera evidencia para la generación de temas y subtemas, pues sirven para interpretar sus respuestas con respecto al marco de conexiones matemáticas (véase el proceso de codificación para la producción del FPM14 en la T2 del instrumento en Tabla 2).

Tabla 2
Tareas planteadas a los FPM

Extracto de entrevista	Códigos generados
FPM14: Bueno, se ocupa un triángulo rectángulo, es una igualdad que involucra a sus lados profesor	C1: Si y son los catetos de un triángulo rectángulo y su hipotenusa es z , el TP se representa como $a^2 + b^2 = c^2$. C2: La suma de las áreas de los cuadrados trazados sobre los catetos equivale al área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa
Investigador: ¿A qué te refieres con es igualdad?	
FPM14: Bueno, si y son los catetos de un triángulo rectángulo y su hipotenusa es z , el TP se representa como $a^2 + b^2 = c^2$. Aunque las letras que involucremos para llamar los lados pueden ser otras	
Investigador: ¿Conoces otra forma de representarlo?	
FPM14: Sí, la suma de las áreas de los cuadrados trazados sobre los catetos equivale al área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa	

Nota. Fuente: Elaboración propia

Fase 3. Búsqueda de temas y subtemas. Los códigos relacionados fueron agrupados y organizados en familias (subtemas), lo que facilitó la agrupación

de patrones de respuesta similares. Cada subtema representa un tipo particular de conexión matemática sobre el TP, generado a partir de los datos, mientras que cada tema corresponde a una tipología de conexión matemática.

Fase 4. Revisión de los temas. Se llevó a cabo una revisión en dos niveles (Braun & Clarke, 2012). En el primero, se revisaron los datos codificados para cada tema, asegurando que los códigos generados formaran un patrón coherente. En el segundo, se realizó un análisis similar, pero abarcando todos los datos en su conjunto. En ambos niveles, se efectuó una revisión entre pares (investigadores del estudio) para mejorar la calidad y validez del análisis de datos. Este proceso permitió refinar la identificación de las conexiones matemáticas.

Fase 5. Definición y nombramiento de los temas. En esta etapa, se definió y nombró cada tipo de conexión matemática identificada en los datos durante las sesiones de análisis.

Fase 6. Elaboración del informe. Se preparó el informe final, incluyendo los subtemas definidos y organizados en temas que contienen las conexiones matemáticas identificadas sobre el TP. Para cumplir con los propósitos de la investigación, los resultados se presentan de acuerdo con la tipología de conexiones matemáticas detectadas.

Resultados

El análisis de las producciones escritas y verbales de los quince casos de estudio, permitieron construir trece subtemas asociados al concepto del TP, los cuales corresponden a las conexiones matemáticas previstas en el marco conceptual. En cada una de las tareas emergieron más de una tipología de conexiones matemáticas (Tabla 3).

Conexión matemática de tipo procedimental

Esta conexión matemática se identificó en las respuestas de todos los casos de estudio, aunque su frecuencia varió según las tareas planteadas. Al abordar inicialmente el TP, los FPM orientaron su razonamiento hacia la expresión algebraica $c^2 = a^2 + b^2$, donde a y b representan los catetos y c la hipotenusa de un triángulo rectángulo (TR). Posteriormente, extendieron este razonamiento a otros contextos de uso. En este sentido, se identificó la conexión procedimental cuando los FPM, guiados por su noción del procedimiento vinculado al TP, lograron: determinar la magnitud de un lado faltante en un TR, calcular la distancia entre dos puntos en el plano y resolver problemas relacionados con una escalera apoyada en una superficie vertical, entre otros. Incluso, al definir el TP, la idea principal planteada por los casos de estudio fue la formulación de la igualdad algebraica; dichos razonamientos permitieron construir el subtema: *Para calcular los lados de un triángulo rectángulo de catetos y con hi-*

potenusa se utiliza la igualdad $c^2 = a^2 + b^2$ (véase extracto de diálogo con FP-M15 para la T1).

- Investigador: *Explica, ¿qué significa el Teorema de Pitágoras para ti?*
FPM15: *Bien, es una igualdad que relaciona las medidas de los lados de un triángulo rectángulo. Por ejemplo, si los catetos del triángulo son y y y , y la hipotenusa es c , entonces se cumple que $c^2 = a^2 + b^2$*
Investigador: *Entonces ¿tu primera idea es la igualdad algebraica?*
FPM15: *Es que, en esencia, el teorema se define como la igualdad algebraica, ya que es la forma de hacerlo operativo y aplicable*
Investigador: *¿A qué te refieres?*
FPM15: *Al final, lo importante es saber cómo hacerlo operativo para resolver ejercicios o problemas donde debamos calcular el lado faltante de un triángulo rectángulo. Por eso, considero que la igualdad algebraica es el medio principal, y, en mi opinión, es lo que realmente importa*

Tabla 3
Conexiones matemáticas sobre el TP en las respuestas de los FPM

Conexión	Subtema	Frecuencia
Procedimental	Para calcular los lados de un triángulo rectángulo de catetos a y b con hipotenusa c se utiliza la igualdad $c^2 = a^2 + b^2$	25
	El TP se representa con la expresión algebraica $c^2 = a^2 + b^2$, donde a , b y c son los lados del triángulo rectángulo	20
	La suma de las áreas de los cuadrados contruidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa	18
	Una representación alternativa del TP en el plano cartesiano es la que involucra la distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ con la expresión $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$	12
	El TP se conecta con las ecuaciones de la circunferencia: $x^2 + y^2 = r^2$ y $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	9
Representaciones diferentes	En un triángulo rectángulo de hipotenusa 1, el TP se expresa como $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$	7
	El TP se cumple solo en triángulos rectángulos	15
	Las ternas pitagóricas son números enteros que satisfacen el TP	10
	El TP es una proposición que requiere de demostración	12
Significado	El TP es una fórmula para calcular magnitudes	20
Implicación	Si en un triángulo se cumple el TP, entonces el triángulo es rectángulo	8
	Si un triángulo es rectángulo e isósceles, con catetos de longitud a e hipotenusa c , entonces el TP se expresa como $2a^2 = c^2$	5
Parte-Todo	El TP es un caso particular de la ley de cosenos	6

Conexión matemática de tipo representaciones diferentes

Esta conexión matemática se identificó en diversos momentos cuando la totalidad de los casos de estudio respondieron a las tareas 2 y 4. En este sentido, al explicar las múltiples representaciones aceptadas por el TP y al calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera en el plano cartesiano, emplearon distintas formas de representación en sus respuestas. Indicaron que el TP se puede expresar como una igualdad algebraica en la cual se involucran las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, dicha idea fue evidenciada a través de expresiones como: *Es una igualdad que involucra los lados de un triángulo rectángulo cualquiera; es Si $a^2 + b^2 = c^2$; Si a y b son la medida de los catetos y la hipotenusa se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$* . Lo anterior permitió construir el subtema *El TP se representa con la expresión algebraica $a^2 + b^2 = c^2$, donde a , b y c son los lados del triángulo rectángulo* (véase extracto de diálogo con FPM14 para la T2).

Investigador: ¿Cómo se representa el Teorema de Pitágoras?

FPM14: Bueno, se ocupa un triángulo rectángulo, es una igualdad que involucra a sus lados

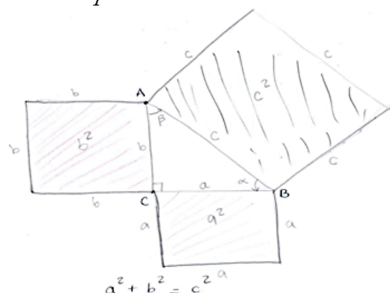
Investigador: ¿A qué te refieres con es igualdad?

FPM14: Bueno, si a y b son los catetos de un triángulo rectángulo y su hipotenusa en c , el TP se representa como $a^2 + b^2 = c^2$. Aunque las letras que involucremos para llamar los lados pueden ser otras

Otro grupo de FPM utilizó un enfoque diferente para representar el TP. En este sentido, los casos FPM1, FPM2, FPM3, FPM15 y FPM14 destacaron la posibilidad de emplear la noción de área como una herramienta para representar la proposición. Esto quedó reflejado en expresiones tales como: *Construyo cuadrados en los lados del triángulo rectángulo, luego las áreas cumplen la igualdad; Es una igualdad entre suma de áreas de cuadrados y otro más grande; La suma de las áreas de los cuadrados trazados sobre los catetos equivale al área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa. Lo anterior dio la pauta para desarrollar el subtema: La suma de las áreas de los cuadrados contruidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa* (ver Figura 1).

Figura 1

Representación geométrica del TP por el FPM1



Por otro lado, el subtema: *Una representación alternativa del TP en el plano cartesiano es la que involucra la distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ y con la expresión $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$* ; se construyó a partir de las producciones de todos los casos de estudio, excepto FPM2, FPM6, FPM7 y FPM12 en la tarea 4. Durante el proceso de resolución, los casos de estudio indicaron que el TP admite otra representación que utiliza las coordenadas de dos puntos cualesquiera en el plano, permitiendo determinar la distancia entre ellos. Esta idea se manifestó a través de expresiones como: *La medida de los catetos se expresa mediante diferencias y la medida de la hipotenusa en la distancia entre los puntos; La fórmula de la distancia es la ecuación pitagórica expresada de otra manera; La ecuación pitagórica queda como $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$* (véase extracto de diálogo con FPM1 para la T4).

Investigador: ¿Cómo determinas la distancia entre A y B?

FPM1: Con los puntos A y B puedo trazar el segmento que los une, luego si trazo un segmento paralelo al eje que pase por B y una paralela al eje que pase por A, se forma un triángulo rectángulo

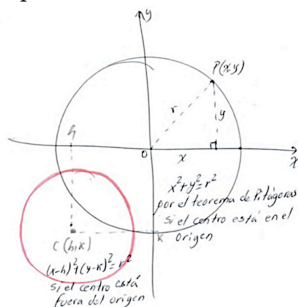
Investigador: Entiendo ¿esa información cómo la utilizas?

FPM1: Si miramos bien, se forma un triángulo rectángulo, los catetos miden $x_2 - x_1$ y $y_2 - y_1$, mientras que la hipotenusa la denotamos como d , pues bien, la ecuación pitagórica queda como $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

En el mismo orden de ideas, la conexión de representaciones diferentes se hizo evidente desde otra perspectiva en los casos FPM13, FPM14 y FPM15 al resolver la tarea 4; en su razonamiento, conectaron el TP con las ecuaciones de la circunferencia en el plano cartesiano, interpretando el teorema en dos registros distintos. Esto se reflejó en expresiones como: *En el plano, el TP sirve para deducir las ecuaciones de la circunferencia; El TP se representa como $x^2 + y^2 = r^2$ en el contexto de la ecuación de la circunferencia; y Las ecuaciones $x^2 + y^2 = r^2$ y $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ son otra manera de ver el TP en Geometría Analítica. Estas ideas permitieron establecer el subtema: El TP se conecta con las ecuaciones de la circunferencia: $x^2 + y^2 = r^2$ y $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ (ver Figura 2).*

Figura 2

Representación analítica del TP por el FPM15



Por otra parte, los casos FPM13 y FPM15 al responder la tarea 2 utilizaron otro tipo de representación para el TP, ellos establecieron que dicho teorema permite construir identidades pitagóricas en Trigonometría. En sus explicaciones incluyeron expresiones como: *El TP en Trigonometría se transforma como $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ en un triángulo rectángulo de hipotenusa igual a 1; y Otra forma de representar el TP es $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ siempre que la hipotenusa del triángulo mida 1. Lo anterior ayudó a construir el subtema: En un triángulo rectángulo de hipotenusa 1, el TP se expresa como: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.* (véase extracto de diálogo con FPM13 para la T2).

Investigador: *¿Cómo se representa el TP? Explica a detalle las que conozcas*

FPM13: *Habitualmente, el TP se representa como una ecuación algebraica; sin embargo, existen otras. Por ejemplo, en Trigonometría si el triángulo rectángulo mide 1 [construye el triángulo y establece la unidad lineal para la hipotenusa] y asumiendo que uno de los ángulos agudos interiores sea α , los catetos medirán $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$. Luego otra forma de representar el TP es $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.*

Conexión matemática de tipo característica

Todos los casos de estudio emplearon esta conexión al identificar de manera sistemática cualidades y atributos del TP, características intrínsecas a su naturaleza. Esto permitió que dichas conexiones fueran aplicadas de forma consistente y coherente en el desarrollo y resolución de la totalidad de las tareas planteadas. Un ejemplo destacado entre las afirmaciones surgidas en los casos de estudio fue la determinación de que el TP es válido exclusivamente en triángulos rectángulos. Esta característica se evidenció de manera reiterada en diferentes momentos del proceso de resolución de las tareas, a través de expresiones como: *Si el triángulo no es rectángulo el TP no se cumple; El triángulo debe ser rectángulo para poder aplicar el TP; El TP es válido únicamente en triángulos rectángulos; El TP solo se aplica cuando el triángulo es rectángulo.* A raíz de lo anterior, se estableció el subtema: *El TP se cumple solo en triángulos rectángulos* (véase extracto de diálogo con FPM1 para la T6).

Investigador: *Observa el triángulo dado, en él se cumplen las tres condiciones descritas ¿Qué tipo de triángulo es?*

FPM1: *Bueno, por la condición 1 ($\overline{AC} = \overline{BC} = l$) es un triángulo isósceles dado que posee dos lados iguales*

Investigador: *Las otras condiciones ¿son relevantes en la determinación?*

FPM1: *A mi ver la 2 ($\overline{AB} = g$) no; pero la 3 ($2l^2 = g^2$) pienso que si*

Investigador: *¿Puedes compartir tu razonamiento?*

FPM1: *A ver, es que la igualdad $l^2 + l^2 = g^2$ me sitúa en el TP, el triángulo es isósceles pero también puede ser triángulo rectángulo (escribe, por ejemplo, el triángulo isósceles de lado igual a 1 con hipotenusa igual a $\sqrt{2}$), esto me hace pensar que es triángulo rectángulo*

Investigador: *¿Estás convencido?*

FPM1: *Sí, porque estoy convencido de que el TP es válido únicamente en triángulos rectángulos*

Aunado a lo anterior, otra característica del TP identificada en los argumentos presentados para la resolución de la tarea 3 de cinco casos de estudio, se refiere a las ternas pitagóricas. Estas fueron empleadas por los participantes para ilustrar ejemplos de la vida real donde el teorema es aplicable. En sus argumentos, identificaron a las ternas pitagóricas como un atributo central del teorema, ya que son concebidas como conjuntos de números enteros positivos (a , b , c), que representan las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo y que satisfacen la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$, donde a y b son los catetos y c es la hipotenusa. Esta cualidad, les permitió reconocer distintos contextos de aplicación del TP y, dio la pauta para construir el subtema: *Las ternas pitagóricas son números enteros positivos que satisfacen el TP* (véase extracto de diálogo con FPM4).

Investigador: *Podrías plantear ejemplos de la vida real donde se aplique el TP*

FPM4: *Sí. Habitualmente se utiliza para calcular distancias, pero las ternas pitagóricas son conjuntos de tres números enteros positivos que cumplen el TP y garantizan el trazado de triángulos rectángulos*

Investigador: *¿Cómo se usa en la vida real?*

FPM4: *De pronto, puede ser en la carpintería en la nivelación de ángulos rectos. Las ternas pitagóricas son útiles para garantizar que los ángulos en las esquinas de los muebles midan 90°; al instalar rampas, permiten calcular su longitud en relación con la altura y la base. De hecho, vinculo las ternas pitagóricas con el triángulo rectángulo y tiene una variedad de aplicaciones.*

Por otro lado, el subtema, El TP es una proposición que requiere demostración, se desarrolló a partir de las respuestas de los casos FPM1, FPM2, FPM9 y FPM15 en la tarea 1. Ellos al explicar el significado del TP, destacaron de que se trata de una proposición matemática cuyo cumplimiento no es evidente, a diferencia de un axioma, lo que justifica la necesidad de una demostración. Este hecho fue señalado como un atributo distintivo, ya que representa una característica central del TP. Tal idea quedó reflejada en expresiones como: *"El TP requiere demostración"*, *"Es una proposición cuya verdad no es evidente"*, *"El TP es un enunciado que debe demostrarse a diferencia de un axioma"*, y *"Al demostrarlo, no habrá duda de que se cumple en cualquier triángulo rectángulo"*.

Conexión matemática de tipo significado

Esta conexión se evidenció en todos los casos de estudio, especialmente cuando se les preguntó: *¿Qué significa el TP para ti?* En sus respuestas destacaron diversas interpretaciones del concepto, predominando *la idea de que el TP se concibe como una fórmula para calcular magnitudes*. Por ejemplo, el FPM7 comentó que desarrolló esta noción por primera vez al trabajar con el teorema en el bachillerato. Posteriormente, en el Nivel Superior, profundizó

su conocimiento sobre la proposición, aunque expresó que, desde su perspectiva, la esencia del TP radica en el cálculo de magnitudes asociadas a un triángulo rectángulo (véase el extracto de diálogo con FPM7 para la T1).

FPM7: *El TP, en esencia, proporciona un método para calcular distancias o magnitudes en un triángulo rectángulo*

Investigador: *¿Podrías explicar un poco más a qué te refieres?*

FPM7: *Para mí, el TP es como una fórmula que permite determinar magnitudes. Sé que este teorema tiene otros significados, pero considero que su esencia radica en eso*

Por otro lado, esta misma idea también emergió en diversas respuestas correspondientes a la tarea 5, en los casos FPM1, FPM7 y FPM10. Señalaron que, para resolver dicha tarea, *era necesario interpretar el TP como una fórmula para calcular la magnitud faltante en el triángulo rectángulo*. La tarea consistía en analizar un escenario donde una escalera de se apoyaba en el techo de una casa cuya altura era de . Coincidieron en que el uso del TP permitía determinar la distancia exacta entre el pie de la escalera y la base de la casa. Esto muestra cómo los FPM utilizan el teorema como una herramienta práctica para resolver problemas que involucran triángulos rectángulos. Además, las respuestas de estos casos destacan la tendencia de *interpretar el TP principalmente como una fórmula para el cálculo*, dejando en segundo plano otras posibles interpretaciones del teorema.

Conexión matemática de tipo implicación

Esta conexión se presentó con menor frecuencia en comparación con las anteriores. Se identificó en las respuestas de FPM1, FPM9, FPM13 y FPM15 al resolver las tareas 1, 5 y 6. En dichas respuestas, establecieron deducciones lógicas basadas en propiedades geométricas y relaciones matemáticas. Por ejemplo, reconocieron que, *si en un triángulo se cumple el TP, entonces necesariamente el triángulo es rectángulo*. Además, en la tarea 6, plantearon que, *si un triángulo es simultáneamente rectángulo e isósceles, con catetos de longitud y una hipotenusa de longitud , entonces el TP se expresa como: $2l^2 = c^2$* (véase extracto de diálogo con FPM15 para la T6).

FPM15: *El triángulo dado es isósceles por la condición 1, ahora la condición 3 me dice que también es rectángulo [escribe, $l^2 + l^2 = c^2$], me recuerda el triángulo rectángulo isósceles de lados 1 e hipotenusa $\sqrt{2}$. Entonces el triángulo ABC es isósceles y rectángulo*

Investigador: *¿Me puedes dar una conclusión de las ideas que estableciste?*

FPM15: *Cuando un triángulo es a la vez rectángulo e isósceles, con catetos de longitud y una hipotenusa de longitud entonces el TP se representa como $2l^2 = c^2$*

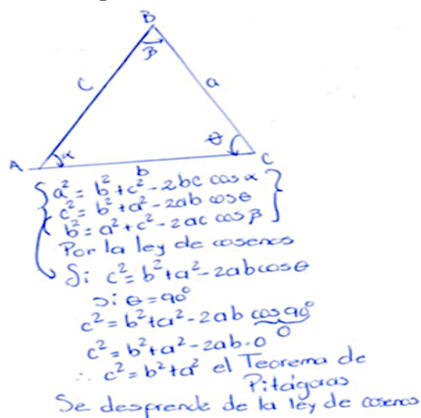
Este tipo de conexión se destaca por requerir un razonamiento lógico más estructurado, ya que implica derivar conclusiones basadas en condiciones previas. Su menor frecuencia podría estar relacionada con el nivel de abstracción y análisis necesario para establecer estas deducciones.

Conexión matemática de tipo parte-todo

Las respuestas de FPM1, FPM5, FPM11 y FPM13 en la tarea 1 permitieron identificar esta conexión. Plantearon relaciones lógicas basadas en procesos de generalización o inclusión que involucraban tanto el TP como la ley de los cosenos. Por ejemplo, FPM1 al explicar qué es el TP, indicó que es un caso particular de la ley de los cosenos. Mientras que el FPM5 indicó que el TP está incluido en la ley de cosenos, ya que este último se cumple en cualquier triángulo y, cuando el ángulo opuesto al lado principal sobre el cual se plantea la ley de cosenos es de 90° , el triángulo se convierte en triángulo rectángulo y la relación deriva en la igualdad pitagórica. Por su parte, FPM11 señaló que el TP es parte de la ley de cosenos (ver Figura 3).

Figura 3

Conexión parte-todo evidenciada por FPM11 en la tarea 6



Las respuestas descritas por los casos permitieron construir el subtema: *El TP es un caso particular de la ley de cosenos*, donde la parte es el TP y la ley de los cosenos es el todo (concepto más general).

Discusión y conclusiones

El estudio se enfocó en analizar las conexiones matemáticas que un grupo de futuros profesores de matemáticas establece al resolver tareas que involucran el uso del TP. Estos resultados coinciden con aquellas investigaciones de conexiones matemáticas en estudiantes del nivel universitario, donde predominan aquellas conexiones del tipo procedimental, representaciones diferentes, característica y significado (Businskas, 2008; García-García & Dolores-Flores, 2018, 2021a, 2021b; Mhlolo, 2012). Las conexiones identificadas en este estudio fueron clasificadas en las siguientes categorías: *procedimental*, *característica*, *representaciones diferentes*, *significado*, *implicación* y *parte-todo* (Tabla 4).

Tabla 4
Conexiones matemáticas establecidas por los casos de estudio

Tipo de conexión matemática	Casos de estudio (FPM)														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Procedimental	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Representaciones Diferentes	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Característica	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Significado	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Implicación	*								*				*		*
Parte-Todo	*				*						*		*		

Nota. * = Se utiliza la conexión matemática. Fuente: Elaboración propia basada en los datos

La conexión procedimental fue evidenciada en todos los casos de estudio, ya que los FPM emplearon razonamientos centrados en procedimientos asociados al TP para resolver las tareas propuestas. Esto puede explicarse por la familiaridad con los métodos adquiridos durante su formación preuniversitaria, la percepción de que son más fáciles de enseñar y la influencia de un sistema educativo que prioriza los algoritmos sobre las ideas conceptuales (Olfos et al., 2014; Reyes et al., 2017; Hutapea et al., 2015). Sin embargo, dado que estos FPM pronto asumirán la responsabilidad de enseñar matemáticas, este hallazgo pone de relieve la necesidad de fortalecer su formación. Es necesario que desarrollen no solo un dominio procedimental, sino también la comprensión del TP. Esto les permitirá integrar perspectivas más amplias y ayudar a sus futuros alumnos a construir un entendimiento sólido y conectado del TP. Esto es relevante porque, como indica la literatura, la capacidad de establecer conexiones matemáticas favorece la comprensión de los conceptos matemáticos (Tanişli & Kalkan, 2018; García-García & Dolores-Flores, 2021a; Campo-Meneses & García-García, 2021).

Por otro lado, la *conexión representaciones diferentes* se manifestó en las respuestas de todos los FPM, destacándose por la variedad de registros empleados para interpretar el TP. Sus respuestas y argumentos respaldaron esta conexión, que incluyó la igualdad algebraica, su equivalencia en términos de área, la fórmula de la distancia entre dos puntos en el plano, las ecuaciones de la circunferencia y una identidad pitagórica. Esto evidencia que los FPM en el nivel superior reciben una instrucción consistente sobre el TP, lo cual se contrapone a lo señalado por Zazkis y Zazkis (2016); y trasciende la simple definición y deducción (Cantoral et al., 2014). Sin embargo, una vez que algunos de los FPM se integran como profesores al sistema educativo,

sus prácticas didácticas en torno al teorema tienden a centrarse únicamente en el uso de la fórmula algebraica (Reyes et al., 2017). Este hecho invita a dar seguimiento a los FPM después de su transición a la docencia y reflexionar sobre los factores que influyen en su práctica educativa.

En adición a lo anterior, otra de las conexiones matemáticas evidenciadas por la totalidad de los casos de estudio fue la de *característica*, la cual se identificó cuando los FPM reconocieron atributos vinculados al TP. Por ejemplo, todos señalaron que el TP solo se cumple en triángulos rectángulos, lo cual contrasta con el razonamiento de estudiantes de grados inferiores, quienes aplican el TP incluso en triángulos que no son rectángulos (Pambudi, 2020; Rohmah, 2020). La asociación con ternas pitagóricas y el reconocimiento como una proposición o teorema que requiere demostración parecen ser el resultado del énfasis con el que la Geometría Euclidiana se trabaja en el nivel superior, donde la demostración constituye un eje central (Cantoral et al., 2014).

En relación con la *conexión matemática de significado*, los FPM atribuyeron un sentido propio al TP al explicarlo desde su perspectiva personal. A pesar del conocimiento demostrado, que permitió identificar conexiones previas, todos ofrecieron razonamientos a través de los cuales conceptualizaron el TP como una fórmula para resolver problemas o ejercicios matemáticos relacionados con el cálculo de magnitudes. Este hallazgo se alinea con lo observado en la práctica docente de profesores de bachillerato (Reyes et al., 2017) y, evidencia la resistencia al cambio en las concepciones formadas durante etapas tempranas de aprendizaje (Dolores & García-García, 2017).

Otra conexión utilizada con menor frecuencia que las anteriores es la de *implicación*, ya que solo cuatro casos de estudio establecieron proposiciones del tipo si $A \Rightarrow B$ vinculadas al TP. Un fenómeno similar ocurrió con la *conexión matemática parte-todo*: solo cuatro FPM señalaron que el TP es un caso particular de la ley de los cosenos. Esto podría explicarse por el hecho de que estas conexiones requieren una mayor demanda cognitiva, lo que sugiere que los FPM no siempre están preparados para establecerlas. Este hallazgo resalta la necesidad de que la formación de los FPM proporcione oportunidades para examinar el TP en lo que respecta a sus conexiones matemáticas, ya que ello favorece su comprensión (García-García, 2019, 2024). A su vez, esta comprensión más profunda incidirá de forma positiva en su futura práctica docente (Copur-Gençtürk, 2015).

Finalmente, es importante destacar que para futuras investigaciones sería relevante explorar las conexiones matemáticas que los docentes fomentan en el aula al abordar el TP, ya que esto podría proporcionar elementos valiosos para comprender las oportunidades que ofrecen a los estudiantes para alcanzar la comprensión. En este sentido, esta investigación aporta a la línea de investigación sobre las conexiones matemáticas y a su vez abre la posibi-

lidad a futuros trabajos en los que se diseñen actividades que permitan crear conexiones matemáticas más complejas como lo son las conexiones de *implicación o parte-todo*.

Referencias

- Avilés-Canché, K., & Marbán, J. M. (2023). Perfiles de autoeficacia docente y conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 26(2), 57–85. <https://doi.org/10.6018/reifop.559321>
- Barrantes, M. C. M., Zamora, V. R., & Barrantes, M. M. (2021). Las demostraciones dinámicas del teorema de Pitágoras. *Revista de Educación Matemática*, 36(1), 27–42.
- Bingölbali, E., & Coşkun, M. (2016). A Proposed Conceptual Framework For Enhancing The Use Of Making Connections Skill In Mathematics Teaching. *TED EĞİTİM VE BİLİM*, 41(183).
- Braun, V. & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. En H. Cooper, P. M. Camic, D. L. Long, A. T. Panter, D. Rindskopf, & K. J. Sher (Eds.), *APA Handbook of Research Methods in Psychology, Vol 2: Research Designs: Quantitative, Qualitative, Neuropsychological, and Biological* (pp. 57–71). American Psychological Association. <https://doi.org/10.1037/13620-004>
- Brown, L. (1993). *The new shorter Oxford English dictionary on historical principles*. Clarendon Press.
- Businskas, A. (2008). *Conversations About Connections: how secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections* [Tesis doctoral no publicada]. Faculty of Education-Simon Fraser University.
- Byerley, C. & Thompson, P. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior*, 48, 168–193. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.003>
- Calle, E., Breda, A., & Font, V. (2023). Significados parciales del teorema de Pitágoras usados por docentes en la creación de tareas en el marco de un programa de formación continua. *Uniciencia*, 37(1), 1–23. <https://doi.org/p96d>
- Campo-Meneses, K. G. & García-García, J. (2021). La comprensión de las funciones exponencial y logarítmica: una mirada desde las conexiones matemáticas y el Enfoque Ontosemiótico. *PNA*, 16(1), 25–56. <https://doi.org/p96f>
- Campo-Meneses, K. G., García-García, J., & Font Moll, V. (2023). Mathematical connections associated with the exponential and logarithmic functions promoted in the mathematics curriculum. *International Journal of Instruction*, 16(4), 17–36. <https://doi.org/10.29333/iji.2023.1642a>
- Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91–116.

- Copur-Gençtürk, Y. (2015). The effects of changes in mathematical knowledge teaching: A longitudinal study of teachers' knowledge and instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(3), 280–330. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.3.0280>
- Coxford, A. F. (1995). The case for connections. En P. A. House, & A. F. Coxford (Eds.), *Connecting mathematics across the curriculum* (pp. 3–12). National Council of Teachers of Mathematics.
- Chaverri-Hernández, J. J., Hernández-Arce, K., Castillo-Céspedes, M. J., Vallejos-Meléndez, D., & Picado-Alfaro, M. (2020). ¿Qué modos de uso propone el profesorado de matemáticas en formación inicial para la enseñanza del teorema de Pitágoras en educación secundaria? *Uniciencia*, 34(1), 88–110. <https://doi.org/10.15359/ru.34-1.6>
- De Gamboa, G. & Figuerias, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M.T. González Astudillo, M. Codes Valcarce, D. Arnau Vera, & T. Ortega del Ricón (Coods.), *Investigación En Educación Matemática XVIII* (pp. 337–346). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM
- De Sousa, R. T., Dos Santos, M. G. M., & Alves, F. R. V. (2023). The Theory of Didactic Situations and the Generalization of Pythagoras' Theorem: An Experience Mediated by GeoGebra software. *Journal of Research in Science and Mathematics Education*, 2(3), 147–159. <https://doi.org/p96h>
- Dolores, C. & García-García, J. (2017). Conexiones Intramatemáticas y Extramatemáticas que se producen al Resolver Problemas de Cálculo en Contexto: un Estudio de Casos en el Nivel Superior. *Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 158–180. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08>
- Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J., & Lee, C. W. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal*, 23(3), 297–319. <https://doi.org/10.1007/s13394-011-0017-0>
- Escobar, S. V., Tulcanaza, V. A., Mediavilla, L. J., Reyes, F. G., Castro, O. L., & Benavides, X. R. (2020). Gamification as a Didactic Tool in the Teaching of the Pythagorean Theorem. En A. Basantes-Andrade, M. Naranjo-Toro, M. Zambrano Vizuete, & M. Botto-Tobar (Eds.), *Technology, Sustainability and Educational Innovation (TSIE)* (pp. 171–182). Springer. <https://doi.org/p96j>
- Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27(2), 2–14. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Garbín, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(2), 169–193. <https://www.redalyc.org/pdf/335/33580205.pdf>

- García-García, J. (2019). Escenarios de exploración de conexiones matemáticas. *Números*, 100, 129–133
- García-García, J. (2024). Mathematical Understanding Based on the Mathematical Connections Made by Mexican High School Students Regarding Linear Equations and Functions. *The Mathematics Enthusiast*, 21(3), 673–718. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1646>
- García-García, J. & Salgado-Beltrán, G. (2024). Creencias matemáticas y creencias sobre las conexiones matemáticas de futuros profesores mexicanos. *Bolema*, 38. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a230071>
- García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(2), 227–252. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994>
- García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2021a). Exploring pre-university students' mathematical connections when solving Calculus application problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(6), 912–936. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1729429>
- García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2021b). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal*, 33(1), 1–22. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x>
- Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517–545). Lawrence Erlbaum Associates.
- Hutapea, M. L., Suryadi, D., & Nurlaelah, E. (2015). Analysis of students' epistemological obstacles on the subject of pythagorean theorem. *Jurnal Pengajaran MIPA*, 20(1).
- Karakoç, G. & Alacacı, C. (2015). Real World Connections in High School Mathematics Curriculum and Teaching. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 6(1), 31–46.
- Khoerunnisa, D. & Sari, I. P. (2021). Analisis kesulitan siswa dalam menyelesaikan soal teorema pythagoras. *JPMI*, 4(6), 1731–1742. <https://doi.org/10.22460>
- Merriam, S. B. & Tisdell, E. J. (2016). *Qualitative research: A guide to design and implementation* (4a ed.). Jossey-Bass.
- Mhlolo, M. K. (2012). Mathematical connections of a higher cognitive level: A tool we may use to identify these in practice. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 16(2), 176–191. <https://doi.org/10.1080/10288457.2012.10740738>

- Moon, K., Brenner, M. E., Jacob, B., & Okamoto, Y. (2013). Prospective secondary mathematics teachers understanding and cognitive difficulties in making connections among representations. *Mathematical Thinking and Learning*, 15(3), 201–227. <https://doi.org/10.1080/10986065.2013.794322>
- Mulyanti, N. R., Yani, N., & Amelia, R. (2018). Analisis kesulitan siswa dalam pemecahan masalah matematik siswa SMP pada materi teorema pythagoras. *PMI*, 1(3), 415–426. <https://doi.org/10.22460/jpmi.v1i3.p415-426>
- NCTM (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Olfos, R., Guzmán, I., & Estrella, S. (2014). Gestión Didáctica en Clases y su Relación con las Decisiones del Profesor: el caso del Teorema de Pitágoras en séptimo grado. *Bolema*, 28(48), 341–359.
- Özgen, K. (2013). Self-Efficacy Beliefs in Mathematical Literacy and Connections Between Mathematics and Real World: The Case of High School Students. *Journal of International Education Research*, 9(4), 305–316. <https://doi.org/10.19030/jier.v9i4.8082>
- Pambudi, D. S. (2020). Exploration of students mathematical connections with negative attitudes in solving a contextual geometry problem. *Journal of Physics: Conference Series*, 1663(1), 1–8.
- Reyes, R., Rondero, G., Acosta, H., Campos, N., & Torres, R. (2017). Reduccionismo Didáctico y Creencias de Profesores acerca del Teorema de Pitágoras. *Boletim de Educação Matemática*, 31(59), 968–983
- Rodríguez, G., Gil, J., & García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Aljibe.
- Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., & García-García, J. (2021). Exploring University Mexican Students Quality of Intra-Mathematical Connections When Solving Tasks About Derivate Concept. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(9). <https://doi.org/10.29333/ejmste/11160>
- Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., & Moll, V. F. (2022). A new view about connections: the mathematical connections established by a teacher when teaching the derivative. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(6), 1231–1256. <https://doi.org/p96k>
- Rohmah, A. S. (2020). Analisis kesalahan siswa MTs dalam menyelesaikan soal pada materi teorema pythagoras. *JPMI*, 3(5), 433–442.
- Rosas, A. M., & Amador, L. K. T. (2022). Conocimientos antecedentes al Teorema de Pitágoras: ¿qué saben los alumnos? *Latin-American Journal of Physics Education*, 16(3), 1–6.
- Rothe, J. (2022). Teaching and Learning Proofs of the Pythagorean Theorem during Distance Learning and in the Flipped Classroom. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 32(4), 467–488. <https://doi.org/p96m>

- Salgado, G. (2020). *Conceptualizaciones de pendiente que poseen los profesores del bachillerato y las que enseñan a sus estudiantes* [Tesis de doctorado no publicada]. Universidad Autónoma de Guerrero, México. <https://bit.ly/47eSAR6>
- Salgado-Beltrán, G., & García-García, J. (2024). Conexiones Matemáticas utilizadas por profesores mexicanos de nivel medio superior al resolver tareas sobre la pendiente. *PNA*, 18(3), 255–283. <https://doi.org/p96p>
- Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. R. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17, 153–172. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6>
- SEP. (2023). *Recurso Sociocognitivo: Pensamiento matemático*. Secretaría de Educación Pública.
- Sherin, M. G., Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (2011). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. Taylor & Francis.
- Sholeha, V. A., Risnawati, R., & Habibullah, H. (2021). An Analysis of Student Difficulties in Mathematics Learning in terms of Student Mathematical Connection Ability on Pythagoras Theorem. *Prisma Sains: Jurnal Pengkajian Ilmu Dan Pembelajaran Matematika Dan IPA IKIP Mataram*, 9(1), 12–19. <https://doi.org/10.33394/j-ps.v9i1.3510>
- Strathern, P. (2014). *Pitágoras y su teorema en 90 minutos*. Siglo XXI.
- Tanişli, D., & Kalkan, D. (2018). Linear Functions and Slope: How Do Students Understand These Concepts and How Does Reasoning Support Their Understanding?. *Croatian Journal of Education: Hrvatski časopis za odgoj i obrazovanje*, 20(4), 1193–1260.
- Vargas, G. V., & Gamboa, R. A. (2013). La enseñanza del teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del GeoGebra, según el modelo de Van Hiele. *Uniciencia*, 27(1), 95–118.
- Zakaryan, D. & Sosa, L. (2021). Conocimiento del profesor de secundaria de la práctica matemática en clases de geometría. *Educación Matemática*, 33(1), 71–97. <https://doi.org/10.24844/em3301.03>
- Zazkis, D., & Zazkis, R. (2016). Prospective Teachers' Conceptions of Proof Comprehension: Revisiting a Proof of the Pythagorean Theorem. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(4), 777–803. <https://doi.org/10.1007/s10763-014-9595-0>
- Zuya, H. E., & Kwalat, S. K. (2015). Teacher's knowledge of students about geometry. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*, 13(3), 100–114.

