

Sistemas de ecuaciones lineales en espacios vectoriales: un REA para la comprensión del concepto de base

Francisco Vera Soria ¹ 
Liliana Vázquez Mercado ² 
José Luis Santana Fajardo ³ 
Dalmiro García Nava ⁴ 

Resumen

Un problema común que enfrenta la oferta educativa en áreas de ingenierías y ciencias exactas, especialmente en asignaturas de matemáticas, se caracterizan por contenidos densos que deben cubrirse en periodos cortos. Particularmente, el tema de sistema de ecuaciones lineales, que aborda formulación, métodos algebraicos y geométricos, aplicación y validación, implica altas dosis de fórmulas y algoritmos, propiciando aprendizajes aislados. El presente trabajo muestra la implementación de un recurso educativo en abierto para abordar los sistemas de ecuaciones lineales bajo el modelo del Diseño Universal de Aprendizaje, que articula contenidos temáticos y actividades de aprendizaje con metodologías activas, como el método problémico y el trabajo colaborativo, e incorpora herramientas tecnológicas. Los resultados favorecieron el cumplimiento de contenidos temáticos y la posibilidad de transferencia del conocimiento sobre sistemas de ecuaciones lineales como fundamento del concepto de base de un espacio vectorial.

Palabras clave

Recurso educativo en abierto, sistema de ecuaciones lineales, método problémico, trabajo colaborativo

¹ francisco.vsoria@academicos.udg.mx
Universidad de Guadalajara

² liliana.vmercado@academicos.udg.mx
Universidad de Guadalajara

³ jose.sfajardo@academicos.udg.mx
Universidad de Guadalajara

⁴ dalmiro.garcia@academicos.udg.mx
Universidad de Guadalajara

Introducción

En la asignatura de álgebra lineal, es común el uso de algoritmos en cursos tradicionales, sacrificando los aspectos conceptuales. En particular, los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) privilegian los métodos de solución, dejando en segundo plano la formulación y la interpretación, teniendo el caso, por ejemplo, de infinitas soluciones. Esta cuestión hace necesario plantear propuestas de recursos educativos abiertos (REA) que permitan formular e interpretar soluciones de SEL, haciendo uso de tecnologías para el aprendizaje y la comunicación (TAC) desde perspectivas autogestivas y colaborativas. En este trabajo se reporta la utilización de un REA para mostrar a los SEL como fundamento del proceso de comprensión de base de un espacio vectorial (el objeto de comprensión de Sierpinska, 1994). Se describen los significados y formas de ver y entender los conceptos de independencia lineal y de espacio generado, empleando las operaciones mentales de identificación, discriminación, generalización y síntesis que intervienen en este acto de comprensión de base.

En la sección de desarrollo se muestran evidencias de las actividades de interpretación geométrica de los sistemas de ecuaciones lineales, por ejemplo, se muestra un SEL que deriva de un sistema con infinitas soluciones y se muestra cómo se pueden observar geométricamente las soluciones, como la intersección de los planos asociados a cada una de las tres ecuaciones con el uso de GeoGebra.

En la evaluación se muestran resultados de problemas sobre combinación lineal, independencia lineal, espacio generado y base, en donde podemos observar los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-sintético y analítico-estructural (Parraguez y Vera-Soria, 2020) empleado por los alumnos, así como las operaciones mentales requeridas para su solución. Además, se presenta una valoración por pares sobre la efectividad de los materiales instruccionales del REA, evaluando aspectos como la coherencia desde la propuesta educativa y su capacidad para generar aprendizaje desde el diseño del entorno, el formato, su adaptabilidad e interactividad; y desde los recursos tecnológicos se abordó la accesibilidad audiovisual y su estabilidad. Como conclusión general se puede señalar que los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-sintético y analítico-estructural contribuyen en la transferencia hacia la comprensión de base de espacios vectoriales abstractos.

Construcción del REA de acuerdo al modelo ADDIE

Análisis

Es común en el curso de álgebra lineal que el tema de sistema de ecuaciones se reduzca a enseñar *por parte del profesor* métodos para obtener soluciones con lápiz y papel (Murillo & Silva, 2019); y que, *por diversos factores* –por

ejemplo, el tiempo por temas— se omite la formulación de sistemas de ecuaciones a partir del cumplimiento de la definición en temas como el espacio generado o la independencia lineal, reduciendo su cumplimiento con algoritmos alternativos.

Al respecto, Monroy (2021) explica, a través de una aproximación documental, que la aparición de nuevos algoritmos retarda la aparición de nuevos métodos. Esto ocasiona que los esfuerzos de instrucción privilegien el uso de estos algoritmos en detrimento de la comprensión conceptual de la relación que la dependencia lineal tiene con los sistemas con infinitas soluciones. Así, esta omisión de la formulación de sistemas de ecuaciones a partir del cumplimiento de condiciones establecidas en las definiciones propicia considerar erróneamente un curso de álgebra lineal como un conjunto de fórmulas o técnicas aisladas por aprender, como lo señalan Álvarez y Costa (2019):

“un curso de Álgebra Lineal se inicia por el tema de sistemas de ecuaciones lineales, centrando sus evaluaciones para comprobar si los estudiantes han aprendido los algoritmos para resolver estos sistemas, dejando de lado las aplicaciones que tienen en la solución y modelación de problemas en diferentes áreas del conocimiento o situaciones, impidiendo el desarrollo de su pensamiento, de transitar de lo concreto a lo abstracto, sin la posibilidad para argumentar, explicar, construir o demostrar...” (p. 67).

De esta forma, es necesario proponer recursos de enseñanza que propicien el involucramiento, tanto de manera individual como en trabajos cooperativos, que impliquen búsquedas, selección y organización de información que permita formular y solucionar problemas de sistemas de ecuaciones lineales en situaciones problema propias del álgebra lineal, como son la combinación lineal, independencia lineal, espacio generado y base de espacio vectorial. Lo anterior tiene el propósito de proporcionar a los estudiantes no solo un conjunto de herramientas, sino, además, elementos que contribuyen a desarrollar su capacidad de razonamiento y crítica.

Este involucramiento se debe favorecer a través del uso del TAC y del lenguaje del contexto de las ciencias; por otro lado, el REA debe favorecer aspectos relevantes de la formación integral, como son la autoevaluación y coevaluación, tanto del aprendizaje como de la participación de los alumnos. Las experiencias acerca del uso de REA han sido reportadas, precisamente, como herramientas auxiliares en un curso de álgebra lineal; estas favorecieron que el desempeño de los estudiantes fuera igual o incluso mejor respecto al de aquellos que llevaron un curso tradicional que implicó adquirir el libro de texto con el contenido de la asignatura (Ryan & Nawalaniec, 2021).

El REA va dirigido no solo a estudiantes de ciclos escolares iniciales de ingenierías y ciencias exactas, sino a aquellos interesados en el tema y sus aplicaciones. Como identificación de la temática a desarrollar, tenemos los

SEL, generalmente ubicados en cursos básicos de álgebra lineal. La propuesta utiliza como referente teórico el modelo de los modos de pensamiento sintético y analítico en tres contextos claramente identificados: la elaboración de sistemas de ecuaciones, los métodos de solución enfatizando Gauss-Jordan y la transferencia al concepto de base de un espacio vectorial a partir de los conceptos de combinación lineal, independencia lineal, conjunto generador y espacio generado de los contextos propios de los espacios vectoriales.

En la prueba piloto, los usuarios participantes del REA fueron estudiantes de carreras del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI), adscritos a programas educativos que el departamento de matemáticas apoya impartiendo, considerando materias de matemáticas en general, y el curso de álgebra lineal en particular, a diversas ingenierías como la industrial, mecánica eléctrica y ciencia de materiales. Como prerrequisitos académicos tenemos los referidos en cursos generales de álgebra, y como habilidades para iniciar la ruta podemos señalar la capacidad para trabajar de manera colaborativa, continuando con analizar y encontrar soluciones a problemas significativos. La propuesta pretende propiciar la autogestión del aprendizaje, inicialmente mediante la aplicación de estrategias y algoritmos para luego, por construcción –vía generalización y abstracción–, descubrir las estrategias de solución directa y aquellas con apoyo en las TAC. Las actividades de aprendizaje del REA se pueden llevar a cabo de manera híbrida. En cada actividad del recurso, el profesor asesor guía a los participantes en la organización de las dinámicas y en la realización de las actividades propuestas, además de que supervisa las referencias utilizadas y las TAC empleadas

Diseño

El REA propicia la participación, tanto de manera individual como en trabajos cooperativos de búsqueda, selección y organización de información, formulación y solución de problemas de SEL a partir de situaciones problema. Esto tiene la finalidad de transferir estrategias en problemas abstractos del álgebra lineal.

Las actividades requieren identificar objetivos y poner en práctica conocimientos previos en situaciones diferentes a las utilizadas anteriormente, además de poner énfasis en interacciones entre iguales para lograr aprendizajes activos y significativos (De Miguel Díaz, 2005), por lo que el diseño del REA de manera estratégica propone transitar las siguientes fases:

- a) Revisar, aplicar, entender el método de Gauss-Jordan e interpretar resultados admisibles.
- b) Obtener sistemas de ecuaciones lineales a partir de situaciones en contextos de aplicación.

- c) Usar y aplicar en contextos matemáticos temas como combinación lineal y espacio generado.

A partir de este diseño, se pretende mostrar la noción de sistema de ecuaciones lineales como fundamento del proceso de comprensión de base de un espacio vectorial (el objeto de comprensión), describiendo los significados y formas de ver y entender los conceptos de independencia lineal y de espacio generado. Para ello se emplean las operaciones mentales de identificación, discriminación, generalización y síntesis que intervienen en éste acto de comprensión de base, en donde Parraguez y Vera-Soria (2020) señalan que *identificar* es el reconocimiento de un objeto de comprensión como algo que se intenta entender; *discriminar* es un acto de comparar entre dos objetos con respecto a algunas circunstancias y ver sus diferencias; *generalizar* es la identificación de una situación como caso particular de otra; y *sinetizar* es buscar un vínculo común o una similitud entre diversas generalizaciones.

Con base en lo anterior, el diseño se realizó procurando fomentar la colaboración, de tal manera que los materiales, tareas y evaluaciones se concibieron para desarrollarse con técnicas que buscan un aprendizaje activo, por lo que se tienen contemplados mecanismos de autoevaluación, coevaluación y evaluación por parte del docente, desde una perspectiva de retroalimentación.

El diseño del REA para SEL (ver Figura 1), para el caso de sistemas de ecuaciones lineales en espacio vectoriales, se estructura con tres secciones: sistema de ecuaciones y arreglos matriciales, combinación lineal y generador y generado, cada uno con sus contenidos y actividades. La visualización para los alumnos inicia con el objetivo (ver Figura 2).

Estas estrategias colaborativas aplican tanto para el uso de métodos de solución de SEL como en la elaboración de sistemas lineales a partir de las definiciones en temas posteriores del álgebra lineal. Se propone la intervención del asesor o docente para advertir la intención de transferencia hacia contextos abstractos que utilizan de manera natural la representación y la generalización, como el tema del espacio generado entre otros. Dicha intervención debe propiciar la reestructuración de la información para usar métodos de solución y obtención de soluciones admisibles.

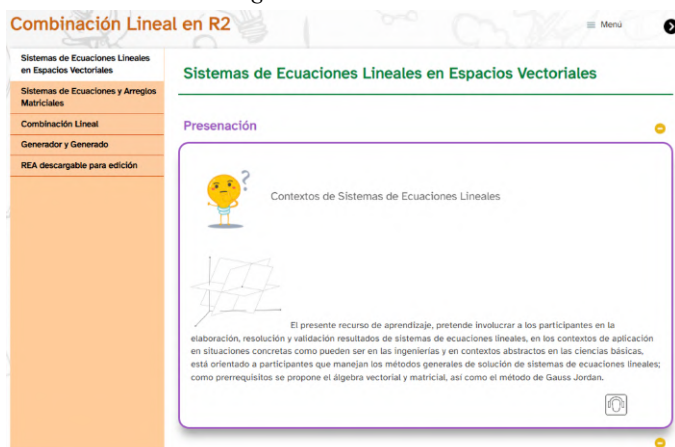
De esta manera, la planeación del REA contempla en el Establecimiento de Metas la representación de SEL a través de la identificación de los conceptos y argumentos que lo integran, los posibles métodos para obtener soluciones y los criterios para discriminar los posibles casos de cero, una o infinitas soluciones (Tabla 1).

Contempla, además, la Transferencia de SEL en contextos $\mathbb{R}^3$ a $P_2(x)$ o $M_{n \times n}$ por ejemplo, bajo un esquema de trabajo colaborativo; propiciando la identificación de condiciones para inducir la transferencia de estrategias que

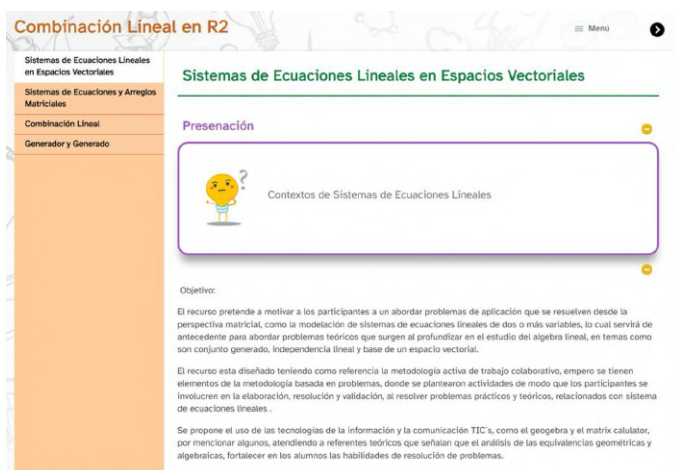
lleven de situaciones concretas hacia su generalización en situaciones abstractas, de aquellos conceptos y argumentos con que se modela y resuelve el SEL correspondiente, por ejemplo el morfismo de $\mathbb{R}^3$ a $P_2(x)$, que permite inducir la base canónica $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ en $\mathbb{R}^3$ a un equivalente $\{x^2, x, 1\}$ en $P_2(x)$.

Tabla 1
Planeación del REA

Sección del REA	Objetivo educativo	Actividad
Establecimiento de metas	Identificar técnicas con que se representan los sistemas de ecuaciones lineales y posibles métodos de obtener soluciones.	Representación de SEL a través de identificar los conceptos y argumentos que lo integran, se propone el método para obtener las posibles soluciones del SEL.
Métodos para resolver sistemas lineales	Aplicar los métodos y TIC para resolver sistemas de ecuaciones lineales.	Búsqueda, selección y organización de métodos de solución y obtención de posibles soluciones admisibles.
Soluciones c/TIC	Comparar colaborativamente estrategias, herramientas y resultados, en términos del sistema lineal a resolver.	Aplicación colaborativa de estrategia metodológica y tecnológica que se utilizará para la solución; así como discusión sobre valores admisibles del problema.
Resumen de conclusiones	Elaborar conclusiones vía trabajo colaborativo.	Coordinación para presentar resumen ejecutivo de resultados.
Modelación de sistemas lineales en situaciones concretas y generalizando en situaciones abstractas	Transferir las estrategias metodológicas tanto en situaciones concretas y generalizando en situaciones abstractas los conceptos y argumentos con que se modela y resuelve el SEL correspondiente.	Representación de SEL a través de identificar conceptos y argumentos en contextos abstractos del álgebra lineal; obtención de posibles soluciones y su adecuada interpretación en contexto.
Transferir colaborativamente contextos, identificando condiciones	Transferir contextos e identificar las condiciones a cumplir. Representar el sistema lineal.	Representación del sistema lineal, en términos de los contextos y con base en la identificación de condiciones a cumplir.
Reestructuración de métodos	Elaborar y resolver sistemas lineales en términos de la situación concreta o abstracta.	Reestructuración de la información para usar métodos de solución y obtención de soluciones admisibles.
Soluciones c/TIC	Comparar colaborativamente el método empleado.	Comparación colaborativa de las estrategias, las herramientas y los resultados en términos del sistema lineal a resolver.
Resumen de conclusiones	Elaborar las conclusiones.	Coordinación de trabajo colaborativo para presentar resumen ejecutivo de resultados en el contexto del problema.

Figura 1*Estructura del REA en exeLearning*

Nota. Disponible: https://depmate.cucci.udg.mx/REA_Sistema_ecuaciones_espacios_vectoriales

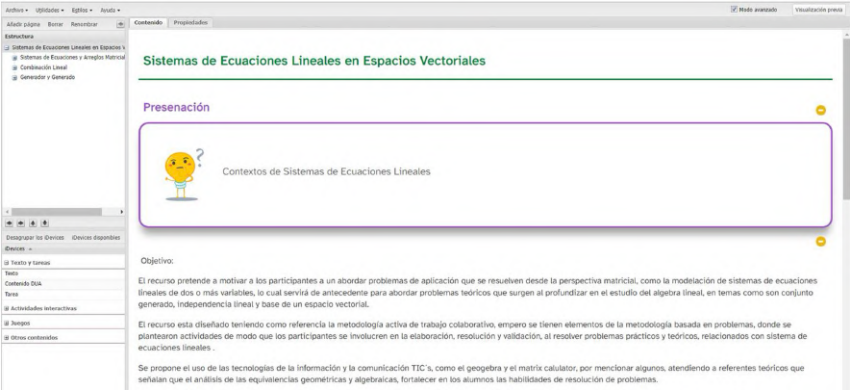
Figura 2*Estructura del REA en visualización previa para alumnos*

Desarrollo

En esta sección se describe el desarrollo del entorno de aprendizaje para Sistemas de Ecuaciones Lineales en Espacios Vectoriales (SEL-EV), bajo el modelo del Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) (Pastor et al., 2014). Se dispone de un entorno educativo que intenta ser flexible y versátil, que permite navegar según los propios requerimientos de un lector activo, reconociendo que los participantes aprenden de formas diversas. En la Figura 4 y Figura 5 se muestra cómo se visualizan los apartados que se pueden transitar y el objetivo a lograr.

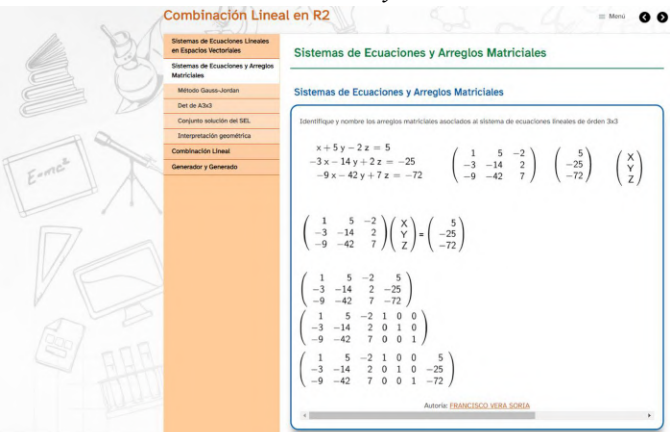
De esta forma, en cada sección del REA, se pretende que sean identificados los contextos y argumentos para la obtención de sistemas de ecuaciones lineales, se incentiva a los alumnos a realizar labores de búsqueda, selección y organización de los diferentes métodos de solución de sistemas lineales, que deben incluir los criterios de identificación de soluciones admisibles. A partir de ello, se busca poner a consideración de sus compañeros y de manera cooperativa sus hallazgos, y con apoyo en las TAC, validar resultados y presentar conclusiones generales de sus trabajos. En la Figura 4 se muestran resultados como referencia para propiciar el trabajo colaborativo; en la Figura 5, podemos observar la Vista del REA sobre el contenido de combinación lineal.

Figura 3
Entorno del REA Sistemas de Ecuaciones Lineales en Espacios Vectoriales



Nota: Se muestra cómo se visualiza de entrada, los apartados que se pueden transitar y el objetivo a lograr

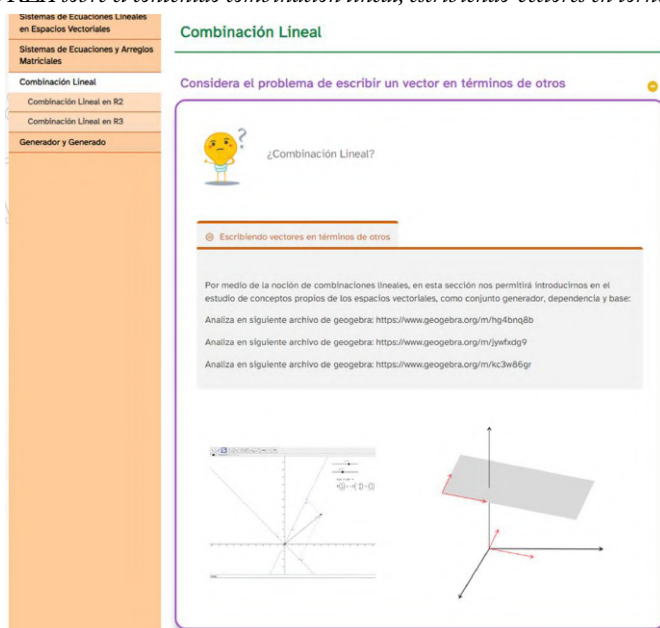
Figura 4
Vista del contenido sistema de ecuaciones lineales y matrices asociadas en el REA



El entorno de aprendizaje presenta contenidos como el método de Gauss-Jordan para la solución de problemas en contextos abstractos de la propia álgebra lineal, como combinación lineal, base y espacio generado. Se plantean actividades en formatos numéricos y sus equivalentes geométricos, mismos que permiten acceder al contenido desde varias perspectivas y necesidades. Los entornos geométricos se desarrollan en el software matemático GeoGebra, necesario para las actividades y los materiales propuestos. Con la incorporación de GeoGebra se reconoce que las tecnologías para el aprendizaje y la comunicación son parte esencial en el desarrollo del DUA, ya que permite a los participantes involucrarse activamente con los materiales educativos propuestos.

Figura 5

Vista del REA sobre el contenido combinación lineal, escribiendo vectores en torno de otros

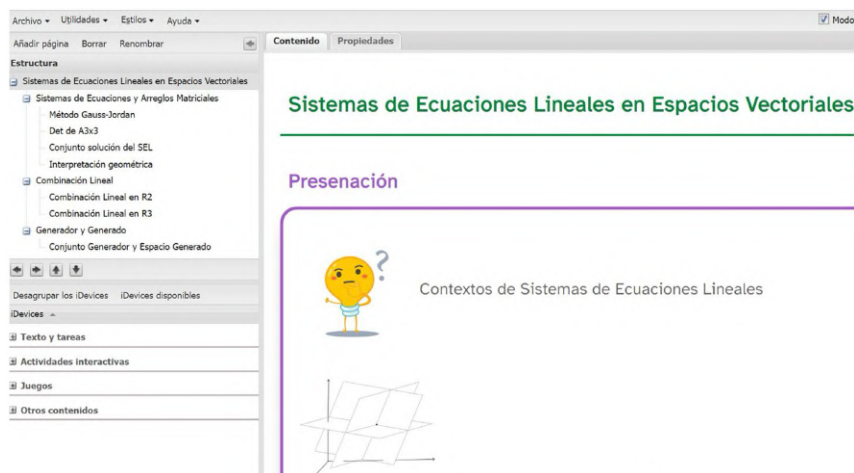


Se utilizó la herramienta de código abierto eXelearning para la exportación y disposición de los contenidos temáticos y las actividades de aprendizaje al formato html, ya que eXelearning, como aplicación multiplataforma, permitió la utilización de elementos multimedia y actividades interactivas, como la autoevaluación (Figura 6).

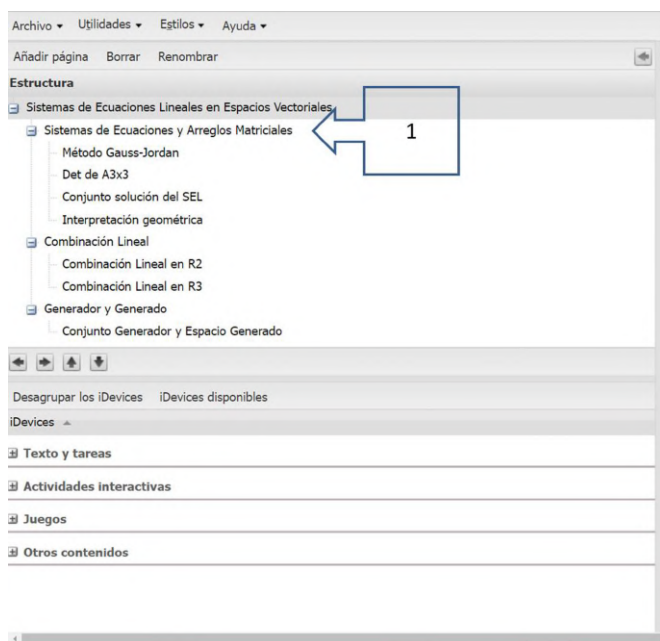
Tal como se muestra en la Figura 7 y 8, en el menú de la herramienta eXelearning encontramos las distintas secciones, cada una con actividades diseñadas para disponer, al exportar al formato html, los objetivos y los elementos con que se desarrollan las actividades. En la Figura 7 tenemos un ejemplo de la actividad específica que se debe desarrollar.

Figura 6

Menú del eXelearning y diseño de estructura del REA. Se muestra el diseño de las secciones que estructuran la propuesta didáctica

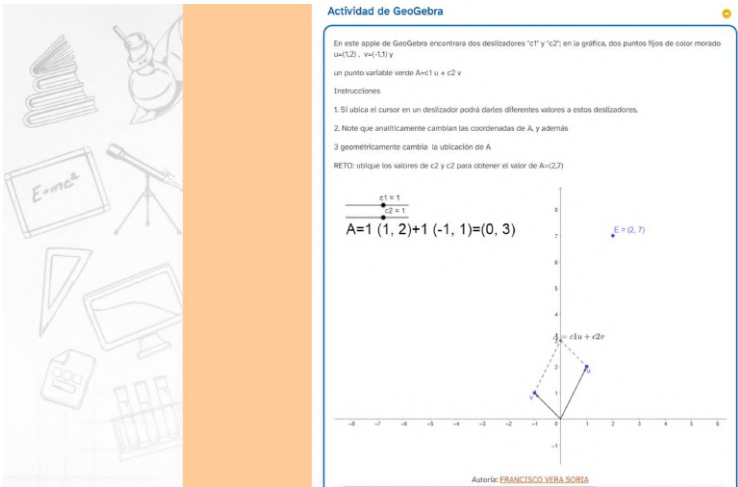
**Figura 7**

Vista del menú en el eXelearning



La distribución de los materiales elaborados en el REA en la prueba piloto se dispuso en páginas html que organizan las actividades a realizar en sesiones colaborativas de trabajo.

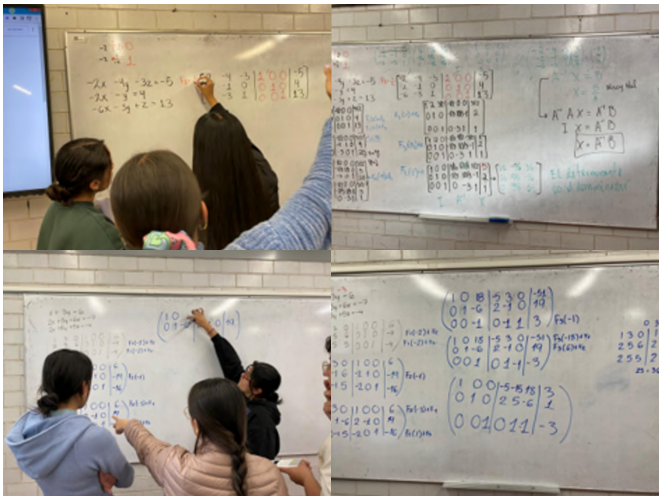
Figura 8
Vista de una actividad introductoria



Implementación

Se realizaron seis sesiones de trabajo presenciales al inicio del ciclo 2024^a, con una duración de dos horas, para la resolución de problemas de trabajo colaborativo. A cada una le antecedió un trabajo de investigación bibliográfica sobre los contenidos que se discutieron en lo presencial. En la Figura 9 se presentan actividades para la sección de preliminares, en donde el ejercicio consiste en aplicar el método de Gauss-Jordan (G-J) y calcular el determinante aplicando algoritmos.

Figura 9
Actividades colaborativas aplicando el método de Gauss-Jordan (G-J) y calcular el determinante aplicando algoritmos



Por otro lado, se utilizan las TIC para contrastar los procedimientos y resultados obtenidos de manera algorítmica (Figura 10 y Figura 11) y los resultados obtenidos a través del uso de las tecnologías (Figura 11).

Figura 10

Resolviendo sistema de ecuaciones con el algoritmo (G-J)

Allison Lucero Velazquez Ruiz
Algebra Lineal Método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1(-\frac{1}{3}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1(-\frac{5}{3}) + F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1(-\frac{1}{3}) + F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3(-\frac{1}{2}) + F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$F_2(-\frac{1}{3}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2(-\frac{1}{3}) + F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$F_3(-\frac{2}{3}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$F_1(-\frac{2}{3}) + F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$F_1(-\frac{1}{3}) + F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$F_2(-\frac{1}{3}) + F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$F_2(-\frac{1}{3}) + F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$F_3(-\frac{2}{3}) + F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

$$X=A^{-1}B$$

Figura 11

Utilizando las TIC para contrastar el proceso de solución e inversa

Solution by Gauss-Jordan elimination

Convert the augmented matrix into the row echelon form:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \times \left(\frac{1}{3} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 5 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \times (-5) \rightarrow R_2 - 5R_1$$

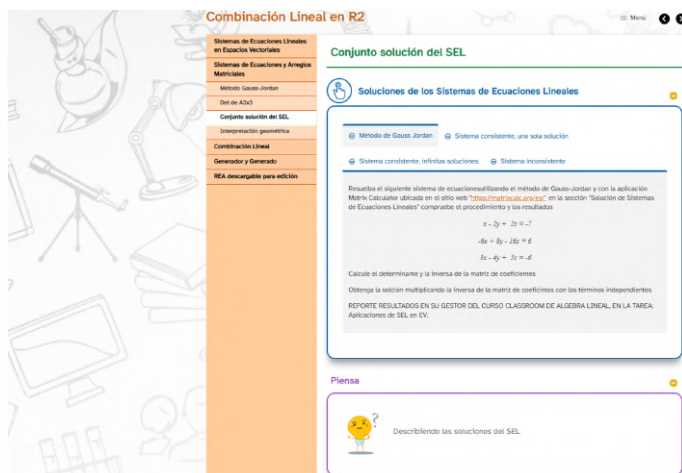
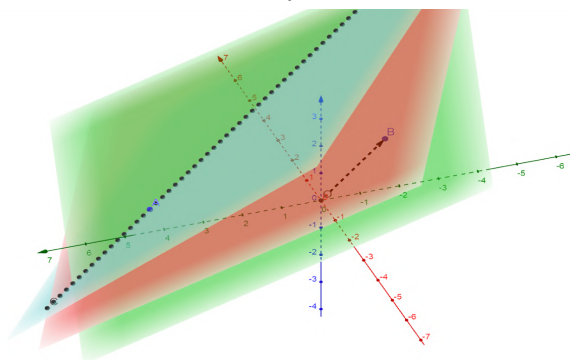
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \times (-1) \rightarrow R_3 - 1R_1 \rightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array} \right) \times \left(-\frac{1}{3} \right) \rightarrow R_3 - \left(\frac{1}{3} \right) \cdot R_2 \rightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \times \left(-\frac{1}{3} \right) \rightarrow R_1 - \left(\frac{1}{3} \right) \cdot R_3 \rightarrow R_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 4 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

De igual manera, de los procedimientos que derivan en sistemas como el caso con sistemas con infinitas soluciones, ver figura 12; el cual el uso del geogebra permite, geoméricamente, ver figura 13, en donde se pueden mostrar visualmente casos con infinitas soluciones.

Figura 12*Propuesta de sistema de ecuaciones con infinitas soluciones***Figura 13***Utilizando TIC en sistema de ecuaciones con infinitas soluciones*

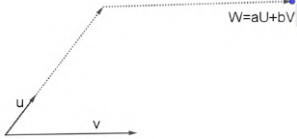
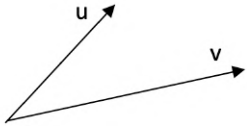
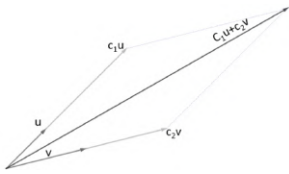
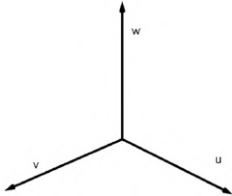
Evaluación

La evaluación se realiza primero desde los aprendizajes de los alumnos y luego por pares desde la efectividad del diseño instruccional.

Evaluación desde los aprendizajes

El sistema conceptual requerido sobre el cual se construyen los conceptos de combinación lineal (CL), independencia lineal (IL), conjunto generador (CG), espacio generado (EG) y base de un espacio vectorial (B) pueden ser presentados como objeto teórico del AL a través de propiedades; con la caracterización del conjunto solución del SEL asociado a la definición, sea homogéneo o no homogéneo; y desde una perspectiva geométrica con los vectores requeridos. Lo anterior se presenta en el Tabla 2, interpretado desde los modos de pensar.

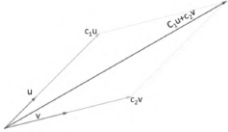
Tabla 2*Modos de pensar el Sistema Conceptual del Concepto Base*

	Modo A-A Analítico Aritmético	Modo A-E Analítico Estructural	Modo S-G Sintético Geométrico
CL	Si $v_1, \dots, v_n, w \in V$. w es CL de $v_1, \dots, v_n$ ssi El SEL asociado a $c_1v_1 + \dots + c_nv_n = w$ con $c_1, \dots, c_n$ escalares es consistente	Si $v_1, \dots, v_n, w \in V$. w es CL de $v_1, \dots, v_n$ ssi $\exists c_1, \dots, c_n$ escalares tales que $c_1v_1 + \dots + c_nv_n = w$	
LI	$\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ es LI ssi El SEL asociado a $c_1v_1 + \dots + c_nv_n = 0$ con $c_1, \dots, c_n$ escalares tiene solución única	El conjunto $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ es LI en V ssi para $c_1, \dots, c_n$ escalares, tales que $c_1v_1 + \dots + c_nv_n = 0$ entonces $c_1 = \dots = c_n = 0$	
CG EG	$v \in \text{Gen}(S = \{v_1, \dots, v_n\})$ El SEL asociado a $c_1v_1 + \dots + c_kv_k = v$ con $c_1, \dots, c_k$ escalares tiene solución única	$S = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$, S genera al subespacio W , si para cada $w \in W$ $w = c_1v_1 + \dots + c_kv_k$	
B	$\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ es base de V ssi La solución de SEL asociados al sistema $c_1v_1 + \dots + c_nv_n = w$ con $w \in V, c_1, \dots, c_n$ escalares es única	$\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ es base de V ssi se cumple: a) $\{v_1, \dots, v_n\}$ es LI b) $\text{Gen}\{v_1, \dots, v_n\} = V$	

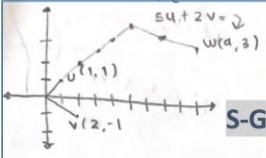
Para la evaluación de los aprendizajes de los alumnos se toman en cuenta sus argumentos ante cuestiones del contenido conceptual y metodológico, además de que son referidos tanto los modos de pensamiento como las operaciones mentales utilizadas.

En la Tabla 3 se muestran evidencias que abarcan desde el cuestionamiento sobre el concepto de CL, donde son identificados los modos de pensar analítico-estructural A-E, analítico-aritmético A-A y sintético-geométrico S-G, además de la operación mental de identificar

Tabla 3
Modos de pensamiento e identificación de la combinación lineal

Concepto: Combinación Lineal		Operación Mental: Identificar
Modo A-E Analítico Estructural	Modo A-A Analítico Aritmético	Modo A-S Sintético Geométrico o
Si v_1, v_2, v_3 y $w \in \mathbb{R}_3$ w es CL de v_1, v_2, v_3 ssi $\exists c_1, c_2$ y c_3 escalares tales que $v_1c_1+c_2v_2+c_3v_3=w$	Si v_1, v_2, v_3 y $w \in \mathbb{R}_3$ w es CL de v_1, v_2, v_3 ssi El SEL asociado a $v_1c_1+c_2v_2+c_3v_3=w$ con c_1, c_2 y c_3 escalares es consistente	

0. Identificando las coordenadas de los vectores u, v y w , determine geométicamente si w se puede obtener como la suma de múltiplos de u y v ; compruebe su resultado analíticamente



S-G

$$c_1(1,1) + c_2(2,-1) = (4,3)$$
$$\begin{matrix} c_1 + 2c_2 = 4 \\ c_1 - c_2 = 3 \end{matrix}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$
$$\begin{matrix} c_1 = 5 \\ c_2 = 2 \end{matrix}$$

A-A

Nota: Evidencias sobre los modos de pensar A-E, A-A y S-G y la operación mental de identificar el concepto de combinación lineal, toda vez que lo reconoce como la suma de múltiplos de dos vectores.

En la Tabla 4 se presentan evidencias desde el cuestionamiento sobre los conceptos de Conjunto Generador y Espacio Generado. Además son identificados los modos de pensar analítico-estructural A-E y analítico-aritmético A-A, así como la operación mental de Generalización.

Tabla 4
Modos de pensamiento y generalización en espacios vectoriales

Conceptos: Conjunto Generador y Espacio Generado		Operación Mental: Generalización
Modo Analítico Estructural	Modo Analítico Aritmético	
Si $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset M_{2 \times 2}$. $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ genera a $M_{2 \times 2}$ ssi $\exists c_1, c_2, c_3$ y c_4 escalares tales que $v_1c_1+c_2v_2+c_3v_3+c_4v_4=w$ $\forall w \in M_{2 \times 2}$	Si $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset M_{2 \times 2}$. $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ genera a $M_{2 \times 2}$ ssi hay solución al SEL $v_1c_1+c_2v_2+c_3v_3+c_4v_4=w$ con c_1, c_2, c_3 y c_4 escalares $\forall w \in M_{2 \times 2}$	

Tabla 4*Modos de pensamiento y generalización en espacios vectoriales (Continúa)*

3. Muestre si $\text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = M_{2 \times 2}$

Sea $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}$ y supongamos que

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 & c_1 + c_2 + c_3 + 0c_4 \\ c_1 + c_2 + 0c_3 + 0c_4 & c_1 + 0c_2 + 0c_3 + 0c_4 \end{pmatrix}$

A-A

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = x_{11} \\ c_1 + c_2 + c_3 + 0c_4 = x_{12} \\ c_1 + c_2 + 0c_3 + 0c_4 = x_{21} \\ c_1 + 0c_2 + 0c_3 + 0c_4 = x_{22} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & x_{11} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & x_{12} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & x_{21} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & x_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x_{22} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_{11} - x_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_{12} - x_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_{11} - x_{12} \end{pmatrix}$$

$c_1 = x_{22}$
 $c_2 = x_{21} - x_{22}$
 $c_3 = x_{12} - x_{21}$
 $c_4 = x_{11} - x_{12}$

$\therefore$ El espacio generado por los
 matrices $= M_{2 \times 2}$

Nota: Evidencias sobre los modos de pensar A-E y A-A y la operación mental de generalizar los conceptos de conjunto generador y espacio generado, toda vez que identifica la situación de generar con un subconjunto a un espacio vectorial, transfiriendo de $\mathbb{R}^4$ hacia otro espacio vectorial $M_{2 \times 2}$, lo cual se puede tomar como un caso particular de otra situación

En la Tabla 5 se presentan evidencias desde el cuestionamiento sobre el concepto de Independencia lineal, además de que son identificados, por un lado, los modos de pensar analítico-estructural A-E y analítico-aritmético A-A; y, por otro lado, la operación mental de Síntesis.

Tabla 5*Modos de pensamiento y síntesis del concepto de combinación lineal*

Conceptos: Independencia Lineal	Operación Mental: Síntesis
Modo A-E Analítico Estructural	Modo A-A Analítico Aritmético
$\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}_3$ es LI ssi El SEL asociado a $v_1c_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ con c_1, c_2 y c_3 escalares tiene solución única	El conjunto $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V, V = \mathbb{R}_3$ (p5) y $V = P_2(x)$ (p6) es LI en V ssi para c_1, c_2 y c_3 escalares, tq $v_1c_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ entonces $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

5. Determine dependencia o independencia lineal de los vectores
 $v_1 = (2, 4, 6)$ y $v_2 = (1, 2, 4)$ y $v_3 = (2, 0, -1)$

$L \perp \rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$

$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = (0, 0, 0)$
 $c_1(2, 4, 6) + c_2(1, 2, 4) + c_3(2, 0, -1) = (0, 0, 0)$

Tabla 5*Modos de pensamiento y síntesis del concepto de combinación lineal (Continúa)*

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \\ 7c_1 + 2c_2 + 6c_3 = 0 \\ 6c_1 + 4c_2 - c_3 = 0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & -1 \end{bmatrix} = 8 \neq 0 \quad \therefore \text{Es linealmente independiente}$$

6. Considerando a $P_1 = -x^2 + x + t$, $P_2 = -x^2 + x + 1$ y $P_3 = x^2 + t + x$ determine "t" para que P_1, P_2, P_3 sea LI

1. $\det \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & t \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix} = -t^2 + 1$ * para que sea LI el determinante de la matriz debe ser $\neq 0$. Por lo tanto, los valores de t son: $t \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Nota: Evidencias sobre los modos de pensar A-E y A-A; y la operación mental de síntesis del concepto de combinación lineal, toda vez que identifica una similitud entre el proceso de construir el SEL a partir de modo de pensar A-E en el problema 5 y que aplica de manera algorítmica, con solo utilizar el determinante diferente de cero en el problema 6.

Lo mencionado en la Tabla 5 es evidencia clara de la transferencia que el alumno logra realizar del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ al espacio vectorial $P_2(x)$.

Evaluación de la efectividad del diseño instruccional por pares

Para valorar la efectividad de los materiales instruccionales del REA, se consideraron tres aspectos: la coherencia desde la propuesta educativa y su capacidad para generar aprendizaje; el diseño del entorno, el formato, su adaptabilidad e interactividad; y los recursos tecnológicos, la accesibilidad audiovisual y su estabilidad. Dentro de la evaluación se considera la evaluación por pares, la percepción de los alumnos y una reflexión de la experiencia docente.

Se observó un cumplimento mínimo respecto a la propuesta educativa, ya que, si bien son especificados los objetivos y los materiales facilitan la realización de actividades y la discusión colaborativa para generar aprendizaje, la coherencia se logró con intervenciones del instructor. Desde el diseño del entorno, el formato es organizado y los contenidos numéricos-geométricos sí refuerzan el aprendizaje, empero el REA no puede ser utilizado en cualquier dispositivo, impactando en una pobre interactividad. Desde los recursos tecnológicos, los alumnos conocen el progreso en la ejecución de contenidos; tanto la accesibilidad audiovisual como la estabilidad son mínimos, pero la navegación no es compatible en todos sus dispositivos.

Resultados de la experiencia docente

A partir de la utilización del REA, la práctica docente se transforma de tradicional a orientadora, de tal manera que los participantes asumen un rol

activo y colaborativo en el desarrollo de las actividades, al involucrarse en discusiones grupales. El impacto de este trabajo colaborativo arroja efectos positivos que se evidencian al momento de contrastar los resultados y las evidencias individuales con aquellas obtenidas de las discusiones en pequeños equipos o grupales. Además de observar durante el desarrollo de las actividades, cierto avance en su involucramiento en los trabajos en equipo, permitiendo avanzar en el logro de resolución de SEL en espacios vectoriales abstractos como por ejemplo $P_2(x)$ o $M_{n \times n}$. En la Figura 14, 15 y 16, se observa la valoración de la efectividad de los materiales instruccionales del REA por pares.

Figura 14

Valoración del REA desde la propuesta educativa



Nota: Para la valoración desde la propuesta educativa se consideraron los elementos de promoción de aprendizaje significativo, la especificidad de objetivos y productos, así como la coherencia entre teoría y práctica, el uso de metodologías activas y la capacidad para propiciar reflexión.

Figura 15

Valoración del REA desde el diseño del entorno



Nota: Para la valoración desde la propuesta de diseño del entorno, ver se consideraron los elementos como la capacidad que brinda para explorar contenidos, así como su manejo y lo robusto técnicamente, además si ofrece archivo fuente y la posibilidad de exploración.

Figura 16*Valoración del REA desde los recursos tecnológicos*

Nota: Para la valoración desde la propuesta desde los recursos tecnológicos ver figura 11, se consideraron los elementos como la estructura y navegación evidentes, el estilo gráfico uniforme; además si es posible interactuar en los contenidos y tareas equilibrados e imágenes y audios de calidad.

Conclusiones

A partir de la evaluación de los aprendizajes de los alumnos y del análisis de los argumentos empleados ante cuestiones del contenido conceptual y metodológico, fueron referidos tanto los modos de pensamiento como las operaciones mentales utilizadas.

Lo anterior muestra que el logro de los aprendizajes en temas en torno a los sistemas de ecuaciones lineales, como son la formulación del sistema a partir de un contexto problémico, la aplicación de métodos de solución y la validación de soluciones admisibles, en una primera instancia se ve favorecida con la implementación de las metodologías activas, basadas en problemas y en el trabajo colaborativo. La articulación de contenidos temáticos y las actividades de aprendizaje, estructuradas en el organizador gráfico eXelearning y soportadas con el uso estratégico de las tecnologías, como son el entorno de graficación en GeoGebra y el calculador de matrices, permiten la conformación de un ambiente de aprendizaje de SEL para la comprensión de base en $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

En una segunda instancia, a través del REA se favorece la transferencia de estos aprendizajes hacia resultados en espacios vectoriales más generales debido a la identificación del uso de los SEL, por medio de la descripción de los significados y formas de ver y entender, analítica o sintéticamente los conceptos de combinación lineal, independencia lineal, conjunto generador y de espacio generado, que intervienen en la comprensión de base. Además de la caracterización de operaciones mentales de identificación, discriminación, generalización o síntesis utilizadas en la resolución de situaciones problema que involucran estos conceptos.

Cabe señalar que el modo de pensamiento sintético aritmético S-A se puede entender como la manipulación algebraica propia de la asignatura de Álgebra Lineal. Otra evidencia relevante de este trabajo arroja que, a diferencia de lo que muestran Parraguez y Vera-Soria (2020), la secuencia didáctica que utiliza el REA permite que los estudiantes logren transferir la comprensión del concepto de base hacia espacios vectoriales más generales, es decir, más abstractos. En un futuro sería importante abordar cuántos estudiantes logran esta transferencia y bajo qué mecanismos lo consiguen.

Referencias

- Álvarez, F., & Costa, V. A. (2019). Enseñanza del Álgebra Lineal en carreras de ingeniería: un análisis del proceso de la modelización matemática en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Eco Matemático*, 10(2), 65–78. <https://doi.org/10.22463/17948231.2594>
- De Miguel Díaz, M. (Dir.) (2005). *Modalidades de enseñanza centradas en el desarrollo de competencias. Orientaciones para promover el cambio metodológico en el Espacio Europeo de Educación Superior*. Universidad de Oviedo.
- Monroy, L. (2021). Enseñanza del álgebra lineal a partir de una mirada cualitativa de los sistemas de ecuaciones lineales. *Praxis, Educación y Pedagogía* (8), e4012408. https://doi.org/10.25100/praxis_educacion.v0i8.12408
- Parraguez, M., & Vera-Soria, G. (2020). Los modos de pensamiento sintético y analítico en la comprensión del concepto de base en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$: un estudio de casos en un contexto universitario. *Paradigma*, XLI, 600–635. <https://bit.ly/3HsbBGD>
- Pastor, C., Sánchez, J., & Zubillaga, A. (2014). *Diseño Universal para el aprendizaje*. http://www.educadua.es/doc/dua/dua_pautas_intro_cv.pdf
- Ryan, S. D., & Nawalaniec, T. M. (2021): An OER Approach to Linear Algebra. *PRIMUS*, 32 (6), 721–737. <https://doi.org/pqjb>
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. The Falmer Press.