

El razonamiento proporcional de alumnos de telesecundaria unitaria a través del uso de micromundos

Carlos Alberto Lugo Lugo¹, Erika García Torres² y
Santiago Alonso Palmas Pérez³

RESUMEN

El razonamiento proporcional es una idea fundamental de la matemática, este surge inicialmente de manera cualitativa hasta transformarse en un razonamiento cuantitativo. Durante su desarrollo existen diferentes aproximaciones que irrumpen con su comprensión, como la relación aditiva o el empleo injustificado de la regla de tres. El objetivo del trabajo es explorar el razonamiento proporcional de alumnos de telesecundaria unitaria a través de la manipulación de micromundos, identificando niveles de razonamiento que permitan caracterizarlo en esta modalidad educativa. A partir de los niveles de razonamiento proporcional propuestos por Karplus et al. (1983), se han diseñado actividades compuestas por diferentes problemas de acuerdo con los micromundos seleccionados (Excel y GeoGebra), empleando las herramientas y el lenguaje de cada uno de los software como medio de exploración por parte de los alumnos, logrando identificar, a partir de sus respuestas a los problemas y sus argumentos para justificar sus decisiones, el nivel en el que se encuentran y la implicación que tiene su construcción en colectivo. A partir de los posibles resultados y las conclusiones que se obtengan, se busca poder proporcionar a las y los docentes características del razonamiento proporcional para que puedan identificar y promover el desarrollo de las habilidades de sus estudiantes.

PALABRAS CLAVE

Razonamiento proporcional, Telesecundaria unitaria, Micromundos.

¹ clugo26@alumnos.uaq.mx

Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, México
<https://orcid.org/0009-0004-9231-4812>

² erika.garcia@uaq.edu.mx

Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, México
<https://orcid.org/0000-0003-1764-7380>

³ santiagopalmas@gmail.com

Universidad Autónoma Metropolitana, Estado de México, México
<https://orcid.org/0000-0003-1175-5938>

INTRODUCCIÓN

El razonamiento proporcional (en adelante RP) es una de las nociones matemáticas que se trabajan en diferentes niveles educativos a través de una variedad de acercamientos. Es un tipo de pensamiento complejo que implica el reconocimiento de comparaciones como la covariación entre magnitudes y comparaciones múltiples; además, está relacionado con los métodos del pensamiento cualitativo y cuantitativo (Heller et al., 1989).

El RP no sólo está presente en las matemáticas, sino que es fundamental en la estructura descriptiva de la física y otras ciencias (Mochón Cohen, 2012). Piaget lo consideraba como un componente básico del razonamiento formal, necesario para adquirir conceptos como el de probabilidad y correlación (Godino & Batanero, 2003).

Dentro del sistema educativo de México, el RP está integrado en los planes y programas de la educación secundaria, si bien no está presente como RP, es atendido en los aprendizajes esperados (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017) para cada año escolar:

- Primer año: Calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa con constante natural, fracción o decimal (incluyendo tablas de variación). Resuelve problemas de cálculo de porcentajes, de tanto por ciento y de la cantidad base.
- Segundo año: Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional. Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.
- Tercer año: Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la física y de otros contextos.

Por lo que “es un conocimiento que subyace en múltiples nociones matemáticas: la multiplicación, el número relacional, la escala, el porcentaje, la probabilidad, la función lineal entre otras” (Block, Mendoza & Ramírez, 2014, p. 2)

Este estudio toma como población a la telesecundaria unitaria debido a que es una de las modalidades más alejadas y con menor integración en el currículo, ya que no cuenta con una propuesta curricular de acuerdo a sus necesidades (García, et al., 2019). A pesar de ello, muestra aportes pedagógicos interesantes, tales como la construcción de aprendizajes en colectivo por la diversidad de edades, de pensamiento y razonamiento (Bustos Jiménez, 2013), en donde las construcciones hechas por los alumnos involucran una discusión y toma de decisiones, lo cual favorece su comunicación matemática y la justificación de sus resultados.

A partir del uso de un micromundo seleccionado (GeoGebra) y una serie de actividades desarrolladas en él, se busca identificar la manera en la que los alumnos de telesecundaria unitaria se aproximan al RP, identificando el tipo de razonamiento a partir de una clasificación por niveles (Karplus, et al., 1983), teniendo como principal enfoque las interacciones entre alumnos multigrado, alumno-micromundo y micromundo-RP.

MARCO TEÓRICO

Razonamiento proporcional

El RP es un razonamiento matemático (Fernández Verdú & Llinares Ciscar, 2012) que denota un sistema de dos variables entre las que existe una relación de función lineal y puede caracterizarse como una relación multiplicativa constante (Karplus, et al., 1983). Hace referencia a detectar, analizar, explicar y proporcionar evidencia en apoyo de afirmaciones sobre relaciones proporcionales (Lamon, 2020); además, no sólo implica el entendimiento de la relación multiplicativa que existe entre dos cantidades, sino que también implica la habilidad de discriminar situaciones proporcionales de las que no lo son (Modestou & Gagatsis, 2010).

La noción de proporción comienza a construirse en los primeros años educativos de manera cualitativa y lógica, antes de que se estructure cuantitativamente (Butto et al., 2019), permitiendo que se comprendan situaciones proporcionales bajo términos del tipo “en ambos casos crecen” o “las dos disminuyen”.

Respecto al RP de alumnos de secundaria, se ha identificado que acuden con mayor comodidad al análisis de tipo cualitativo que a los análisis de tipo cuantitativo, y cuando llegan a aproximarse de forma cuantitativa se fundamenta, principalmente, en análisis de índole aditivo, siendo esta una aproximación errónea (Sánchez, 2013).

Existen cuantiosos estudios enfocados en el RP, de los cuales se han identificado los trabajos realizados de Karplus et al. (1983) y Lesh et al. (1988) como pioneros. Para este estudio se retoma la categorización propuesta por Karplus et al. (1983), generada a partir de las respuestas y las estrategias de resolución al problema “Mr. Tall/Mr. Short” por parte de alumnos en edad escolar (12 a 15 años), estableciendo así cinco niveles, tal como se describe en la tabla 1.

A partir de esta categorización se busca comprender el nivel de RP que tienen los alumnos de telesecundaria unitaria con el uso de dos micromundos bajo su conceptualización y perspectiva teórica.

Micromundos

Un micromundo se define como un ambiente computacional de incorporación de un conjunto coherente de conocimientos científicos y de relaciones dise-

ñadas de forma que, con un conjunto adecuado de tareas y con principios pedagógicos, estudiantes pueden participar en la exploración y construcción de actividades ricas en generación de significados (Healy & Kynigos, 2009)

Tabla 1

Niveles de razonamiento proporcional

Niveles de razonamiento proporcional	
Nivel	Descripción
Incompleto	En el nivel incompleto se adivina la respuesta o emplean una operación cuantitativa inapropiada. Se es capaz de identificar la relación de dos magnitudes, pero en el intento de resolver, se emplea alguna operación que no lleva a una solución adecuada, ya sea porque la operación no es la correcta o el algoritmo fue mal desarrollado.
Cualitativo	Se comparan las cuatro cantidades dadas, usando los términos más, menos o términos equivalentes. El razonamiento proporcional aparece en etapas iniciales bajo un razonamiento cualitativo, por lo que se puede identificar una situación de proporcionalidad cuando está aumenta o disminuye, pero aún no logra emplear un proceso cuantitativo.
Aditivo	Estrategia incorrecta que hace uso de diferencias en parte o todo el razonamiento en vez de una relación multiplicativa. Este nivel se desarrolla desde un razonamiento cuantitativo, pero relaciona los datos bajo estructuras aditivas.
Pre-proporcional	Uso de factores multiplicativos para relacionar cantidades. Se reconoce la situación de proporcionalidad y se identifica el uso de los factores multiplicativos; esta categoría está muy cercana al razonamiento proporcional, pero aún no se logra establecer la igualdad de razones, el razonamiento parte del reconocimiento del valor unitario.
Proporcional	Uso directo de razones y su equivalencia o no equivalencia. Dentro del desarrollo del razonamiento proporcional, esta categoría es donde se puede asumir que ya se ha desarrollado un razonamiento completo, puesto que logra identificar las situaciones proporcionales de las que no la son, se identifican términos como razón, constante de proporcionalidad y, además, los procedimientos son correctos.

Nota. Propuesta tomada de Karplus et al. (1983)

La intención de un micromundo es orientar a los alumnos hacia maneras matemáticas de pensar a través de estructuras establecidas por el diseñador y el software, los alumnos deben mantener cierta autonomía, asumir la responsabilidad de sus acciones y de los resultados que producen (Noss & Hoyles, 2019). A pesar de que el trabajo no tiene fines didácticos, se contempla que el diseño creado puede desarrollar dichas habilidades en los estudiantes.

Históricamente, los micromundos se distinguían por el uso de lenguajes de programación y diseño de ambientes de exploración desde su programación hasta su interacción. Con el paso del tiempo se recurrió a utilizar el término micromundo para denominar módulos interactivos, ya sean independientes (stand-alone software) o creados dentro de otro paquete que funciona como plataforma (Cabri, Logo Micromundos, Excel, etc.). En ellos se explora una idea manipulándola con los elementos provistos por el diseñador para un fin en específico, de forma que la tendencia actual es que el usuario únicamente explore utilizando las herramientas dadas por el micromundo y no en la modificación de estos (Sacristán, 2003).

De manera específica, un micromundo matemático es un lugar para familiarizarse con un conjunto de ideas, situaciones problemáticas o actividades en donde el estudiante y el maestro pueden probar ideas dentro de un tema de interés; además, la meta es la construcción de significado y de relaciones que sirvan como modelo para un sistema formal, dando oportunidades para crear modelos mentales que reflejan la estructura y composición de los sistemas formales (Weir, 1987). Es decir, a través de la manipulación que permiten los micromundos, los alumnos son capaces de probar hipótesis o procedimientos que los lleven a una formalización del aprendizaje.

Para que un ambiente computacional se considere micromundo debe de contener cuatro componentes (Hoyles & Noss, 1987):

- *El componente del estudiante.* Entendimientos y concepciones parciales existentes que el alumno trae consigo a la situación didáctica.
- *El componente técnico.* Software o lenguaje de programación, y un conjunto de herramientas que proveen un sistema de representaciones para la comprensión de una estructura matemática o campo conceptual.
- *El componente pedagógico.* Estructura de la investigación y exploración de los conceptos plasmados en el componente técnico (los aspectos físicos puede ser el docente, libro, cartel, etc.).
- *El componente contextual.* Entorno social de las actividades.

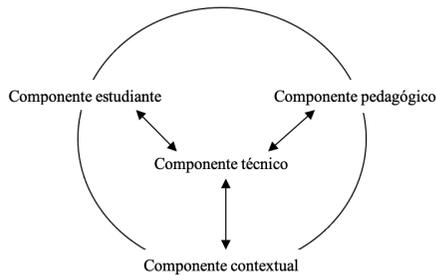
Los componentes se relacionan en la forma como se muestra en la Figura 1, teniendo como centro el componente técnico, integrando cada uno de los demás componentes en una doble dirección.

Telesecundaria unitaria

Otra parte central del trabajo y cumpliendo con el rol de componente contextual, el nivel educativo que se ha considerado pertinente para analizar el RP a partir de la interacción con un micromundo es la secundaria, debido a que en este nivel se formalizan las nociones que se han trabajado en etapas anteriores (educación primaria), tales como porcentajes y conversión de magnitudes. En secundaria surgen términos como proporcionalidad directa e inversa, constante y razón.

Figura 1

Relación de componentes que integran un micromundo



Nota. Modelo basado en la propuesta de Hoyles y Noss (1987)

Dentro de las modalidades presentes en la secundaria se ubica la telesecundaria, la cual es atendida con apoyo de un maestro generalista por grupo (SEP, 2017). Una característica de esta modalidad es que ofrece un servicio educativo con el apoyo de los medios electrónicos de comunicación social y con materiales impresos (Calixto Flores & Rebollar Albarrán, 2008).

El sistema de la telesecundaria se ve traspasado por la modalidad de escuelas unitarias, o también conocidas como multigrado. Esta modalidad se presenta en el sistema de educación básica en México, desde preescolar hasta el bachillerato.

La escuela multigrado es aquella donde los docentes atienden a alumnos de diversos grados en una misma aula. Estas escuelas surgen con la necesidad de atender alumnos que viven en zonas donde no ha sido posible establecer una secundaria general o técnica por diferentes condiciones (distancia, contexto rural, número de población, etc.).

En secundaria, sólo las escuelas para migrantes y las telesecundarias pueden ser multigrado (Santos, 2019). Debido a que la telesecundaria no cuenta con maestros para las diferentes asignaturas, un solo maestro es el responsable de todas las materias. En una telesecundaria multigrado o unitaria (el término que mejor la define), el docente, además de ser responsable de todas las asignaturas, es responsable de los tres grados.

Desde su origen, las escuelas multigrado han sido observadas como incompletas, transitorias, provisionales o compensatorias, o incluso como un auxiliar en la cobertura educativa en las zonas rurales. Aunque es reconocida su existencia, desde las políticas educativas pareciese que se ha apostado más por su subsistencia que por su consolidación (Schmelkes & Águila, 2019).

A nivel nacional, estas escuelas representan el 37.5% en educación preescolar (3 a 6 años), el 41.8% en primaria (alumnos de 6 a 12 años) y el 33.1% en telesecundarias, secundarias comunitarias e indígenas (12 a 15

años); atienden al 9.7%, 8.6% y 10.2% de alumnos respectivamente, en el ciclo escolar 2019- 2020 (Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación [MEJOREDU], 2021). Si bien no es un porcentaje mayor a la mitad de las telesecundarias, el realizar estudios en esta modalidad ayuda a visualizar la educación desde un panorama alejado a lo que propone el currículo segmentado por grados escolares, otorgando la posibilidad de visualizar qué sucede en una aula donde predomina la diversidad, al identificar la combinación de experiencias, conocimientos, actitudes y formas de pensar, pueden suscitar un aprendizaje colectivo y desarrollar su capacidad de argumentación y discusión entre pares (Bustos Jiménez, 2013).

Otra de las razones para considerar este sistema es que existe una invisibilidad de la escuela multigrado en el ámbito de la investigación educativa (Arteaga, 2011). Los estudios son relativamente recientes, escasos y de corte más casual (Galván Mora & Espinosa Gerónimo 2017); por estas razones, seguir indagando en educación multigrado puede resultar de gran apoyo para los docentes que trabajan en estos centros educativos, otorgando un panorama sobre el tratamiento del RP.

Objetivo y pregunta de investigación

A partir de describir el RP, la noción de micromundos y la telesecundaria unitaria, este estudio tiene como objetivo explorar niveles de razonamiento proporcional en alumnos de telesecundaria unitaria a través del uso de micromundos para dar respuesta a la pregunta ¿Cómo son los niveles de razonamiento proporcional de los alumnos de telesecundaria unitaria a través de la interacción con micromundos?

Para cumplir con el objetivo se ha diseñado una serie de actividades que permiten observar y comprender los argumentos y el porqué de las respuestas de los alumnos.

MÉTODO

El estudio presente es de tipo cualitativo con alcance exploratorio. La población de este estudio está integrada por 18 participantes, alumnos pertenecientes a la telesecundaria unitaria No. 316, ubicada en el municipio de Apaseo el Alto, perteneciente al estado de Guanajuato y situada en un contexto rural. De los 18 alumnos participantes, cinco pertenecen a primer grado, ocho a segundo y cinco a tercer año. Para su participación se solicitó el consentimiento informado por parte de sus padres o tutores y su asentimiento antes del desarrollo de las actividades.

A partir del planteamiento del objetivo y la selección de la población de estudio, se trazó una ruta metodológica dividida en dos fases. En la primera fase se eligieron dos micromundos (Excel y GeoGebra), el diseño de las actividades, la primera aplicación y el análisis de los resultados obtenidos.

La segunda fase la constituye el rediseño de las actividades, la segunda aplicación, análisis de datos obtenidos y resultados.

Primera fase

La aplicación del primer diseño tuvo como finalidad conocer a los participantes, la escuela y su organización, pero sobre todo la funcionalidad de las actividades, las cuales fueron diseñadas en Excel y GeoGebra considerando la categorización de Karplus et al. (1983). Se planearon diferentes situaciones y áreas correspondientes al RP y una serie de preguntas que ayudarán a profundizar sus argumentos y sus respuestas. Ambos softwares (Excel y GeoGebra) fueron evaluados de acuerdo a las características y propiedades que deben de cumplir para considerarse como micromundos.

Excel es una hoja de cálculo desarrollada por Microsoft bajo un lenguaje de programación macro llamado Visual Basic. Algunas de sus funciones son crear y manipular cálculos, gráficas, tablas, bases de datos, etc.

Respecto a GeoGebra, se trata de un software dinámico para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en diferentes niveles educativos, suele ser uno de los ejemplos más claros de un micromundo matemático debido a que su manipulación permite crear situaciones en donde los sujetos pueden probar hipótesis o procedimientos, identificando elementos desde diferentes áreas matemáticas; inclusive, las herramientas con las que cuenta permite ver modelos en movimiento y analizar diferentes versiones de una sola representación. La razón de considerar a GeoGebra como parte del instrumento para nuestro estudio es porque permite analizar el RP en otro tipo de situaciones, específicamente en el ámbito geométrico.

El diseño en ambos software se desarrolló en dos actividades, en la primera se plantea una exploración controlada por el investigador en donde los participantes conocen y se involucran con las herramientas y características de cada software. En la segunda se plantea una serie de actividades para el explorar el RP, considerando el dominio que han adquirido respecto al recurso y basándose en las características de manipulación que otorgaba cada software.

La aplicación se llevó a cabo con todo el grupo distribuido en equipos de trabajo integrados por cuatro o cinco estudiantes, cada equipo tenía a su disposición una laptop con acceso a las actividades. Para tomar registro de lo que sucedía en cada equipo se contó con dispositivos de grabación, tanto de audio como de video.

A partir de la aplicación del diseño se pudieron identificar aspectos relacionados con el RP de los participantes. También se llevó a cabo un análisis de las actividades, una revisión teórica respecto a los micromundos y se tomaron decisiones respecto al tipo de intervenciones por parte del aplicador y a la metodología de pregunta-respuesta.

Segunda fase

En esta fase se realizó un rediseño de actividades, eligiendo solo GeoGebra para el desarrollo del micromundo de exploración. Se establecieron cinco actividades: exploración, dos actividades de identificación (relación entre segmentos por un deslizador y relación entre triángulos semejantes) y dos actividades de construcción (construcción de dos segmentos bajo una razón dada y construcción de un mosaico con un factor escala).

En términos teóricos se tomó la decisión de solo continuar con las actividades de GeoGebra y desechar las de Excel, ya que Excel no muestra ningún símbolo de representación disponible del proceso por el cual se llega a la construcción final, es decir, se ingresa la fórmula y se obtiene el resultado, pero no es visible para los participantes el algoritmo que establece para llegar a él.

A diferencia de la aplicación del primer diseño, se contó con la participación de observadores, los cuales participaron libremente y sin recibir ningún estímulo monetario o de algún otro tipo. Su principal función fue registrar aquellos elementos observables y audibles referentes a las actividades en términos de RP, relación entre pares y relación con el micromundo, que por las condiciones del salón de clase no podían ser capturados por los dispositivos de registro. Previo a la aplicación se consideró una reunión de preparación, en la cual se expusieron las actividades que los participantes realizarían y se compartieron elementos rescatados de la aplicación de la primera versión de las actividades, esto con el objetivo de sensibilizar a los observadores y que tuvieran mayor claridad respecto a los registros que debían hacer.

El rediseño brindó la posibilidad de que los participantes exploraran con mayor libertad, ya que, como se puede observar en la tabla 2, en el diseño original las actividades estaban referidas a un solo nivel de razonamiento. Por ejemplo, la actividad 2 fue pensada para identificar el nivel aditivo y pre-proporcional, limitando las preguntas de exploración a evidenciar solo ese tipo de razonamientos.

Como diferencia, el rediseño buscaba que los participantes se situaran en una actividad con un objetivo específico y desarrollaran cualquier idea que consideraran pertinente; por ejemplo, en la actividad dos, al buscar la relación entre dos segmentos, los participantes podían presentar cualquiera de los niveles, esto ya no dependería de las preguntas, sino de sus propias reflexiones.

Otro aspecto importante que buscaba favorecer el rediseño era priorizar la actividad matemática sobre las dificultades que podían presentar los participantes en el micromundo, es decir, que las actividades fueran sencillas en diseño, pero ricas en generación de discusión, participación e integración de todos los participantes con el micromundo. Dentro de las actividades del rediseño se planteó establecer una gradualidad en donde la primera actividad funcionara como una oportunidad para que los participantes reconocie-

ran los elementos del micromundo. En la segunda actividad se sigue contemplando una exploración, pero ya con implicaciones del RP. A partir de la actividad 3 se esperaba que los participantes pudieran manejar las herramientas de GeoGebra con un grado adecuado, en donde les fuera posible expresar su RP.

Tabla 2

Comparación entre actividades del primer diseño y del rediseño

Primer Diseño	Rediseño
1. Exploración. Actividad en donde los participantes reconocían las herramientas y los menús de GeoGebra.	1. Exploración. Actividad en donde los participantes reconocían las herramientas y los menús de GeoGebra.
2. Comparación de dos triángulos rectángulos a partir de una escala 3:1. A través de la manipulación de un deslizador, los participantes debían encontrar el factor 3:1. Referido al nivel aditivo y pre proporcional.	2. Relación entre dos segmentos por un deslizador. A partir de un deslizador, determinar cuál era la relación entre dos segmentos y bajo qué constante estaban integrados.
3. Manipulación de un triángulo intersectado por una paralela (desarrollo del teorema de Tales). Referido al nivel pre proporcional y proporcional.	3. Construcción de dos segmentos bajo una razón dada. A partir de una relación 0.5:1 y con apoyo de un deslizador trazar dos segmentos y describir qué relación hay entre ellos.
4. Relación entre dos triángulos construidos con una escala 2:1 (en dos lados) y 3:1 (lado restante). Reconocer que el triángulo no estaba construido con la misma igualdad de razones para todos los lados, y por tanto no era un triángulo semejante. Referido al nivel proporcional.	4. Relación entre triángulos semejantes. A partir de dos triángulos construidos en relación 2:1, identificar cómo están relacionados, y qué sucede con los lados si el área de los triángulos está en relación 2:1.
5. No aplica, solo se llevaron a cabo cuatro actividades.	5. Construcción de un mosaico a partir de uno original. A partir de conocer solamente la relación entre una medida del mosaico original y del nuevo, identificar bajo qué relación están construidos y hacer uno nuevo respetando la forma original.

En la tabla 3 se expone el objetivo de cada actividad y se explica a grandes rasgos en qué consistía; además, se integra la indicación que recibieron los participantes al momento de responder.

Tabla 3*Relación del objetivo de las actividades y su indicación*

Actividad	Objetivo	Indicación
Actividad 1. Exploración	Identificar las diferentes herramientas y funciones que provee GeoGebra por medio de una exploración libre en los equipos de trabajo, esperando que los alumnos se familiaricen con el software.	Al comienzo de la página que abrieron hay un espacio que dice “exploración”, entonces van explorar de manera libre lo que pueden hacer en GeoGebra, identifiquen las diferentes herramientas, tracen lo que ustedes gusten, el objetivo es que vayan viendo cómo funciona.
Actividad 2. Relación entre segmentos por un deslizador	Conocer la forma en la que los alumnos interpretan la relación entre dos segmentos a través del uso de un deslizador.	En el siguiente espacio hay dos segmentos y un deslizador, la intención de esta actividad es que ustedes revisen si hay alguna relación entre los segmentos, si la hay, qué tipo de relación es. De igual forma, identificar qué función tiene ahí el deslizador.
Actividad 3. Construcción de dos segmentos bajo una razón dada	Establecer una relación entre dos segmentos a partir de una razón 0.5:1 con el uso de un deslizador o algún otro procedimiento establecido por los alumnos.	En la actividad anterior observaron una relación entre dos segmentos, ahora ustedes deben de trazar dos segmentos de forma que uno de ellos tenga la mitad del valor del otro sin importar su medida, pueden apoyarse de las herramientas que hemos revisado.
Actividad 4. Relación entre triángulos semejantes	Identificar la manera en que los alumnos comprenden la relación entre dos triángulos a partir de las longitudes de sus lados y su área.	Indicación 1: En la siguiente actividad hay dos triángulos, a partir de las medidas y las características que tienen hay que revisar si se parecen en algo o si son diferentes, rescaten todo aquello que puedan ver respecto a los dos triángulos y después lo comentaremos. Indicación 2: Ya que revisaron qué relación hay entre los triángulos, manipulen el triángulo rojo de forma que su área sea la mitad de la del triángulo azul, siempre y cuando no se pierda la forma original.
Actividad 5. Construcción de un mosaico con un factor escala	Conocer el tipo de relación que establecen los alumnos entre el mosaico original y el solicitado a escala (1.5:1) a partir de las diferentes herramientas involucradas en el trazo de polígonos.	Como se puede observar, tenemos un pequeño mosaico en la parte de la actividad, y lo que se tiene que hacer es uno nuevo. Para hacerlo solamente tenemos como referencia la nueva medida de uno de los lados del triángulo azul, entonces, con esa información busquen la forma de hacer un nuevo mosaico.

RESULTADOS

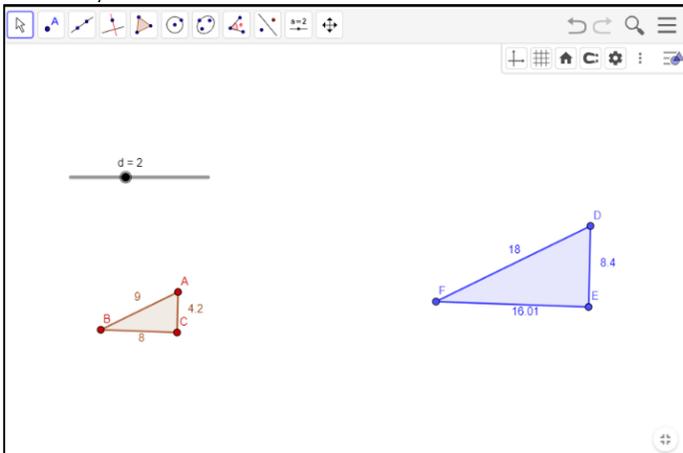
A partir de la aplicación del primer diseño y del rediseño, se ha podido observar el tipo de razonamiento que emplean los participantes en las diferentes actividades propuestas, a continuación se muestran algunos casos particulares.

Nivel cualitativo primer diseño

En la actividad uno diseñada en GeoGebra (Figura 2), en donde se establecían dos triángulos relacionados por medio de una razón de 2:1, se observaron argumentos cualitativos por parte del equipo tres, quienes solo describen la relación multiplicativa bajo argumentos cualitativos “mientras más deslicemos más aumenta”, tal como se puede observar en el siguiente fragmento:

Figura 2

Actividad uno del primer diseño



Alumno 1: *¿Qué sucede?*

Alumno 2: *Las medidas aumentan*

Investigador: *¿En cuál van?*

Alumno 1: *En la 3*

Investigador: *¿Qué sucede con las medidas del triángulo?*

Alumno 2: *Que en 2 disminuye, y en las demás aumenta*

La transcripción refiere a la manera en que los participantes respondieron a la pregunta “¿Qué sucede con las medidas del triángulo azul cuando el deslizador vale 2, 4 y 5?”, siendo su principal respuesta “en dos disminuye y en las demás aumenta”. Inicialmente, el deslizador estaba ubicado en el valor de tres, por tanto, cuando mencionan que en dos disminuye se referían a que sus medidas son menores que cuando se ubicaban en tres. Por otro lado, al decir que en las demás aumentan se refieren a cuando el deslizador está en 4 y 5.

A diferencia de un nivel incompleto, no se podría considerar como una respuesta errónea, sino que aún no logran establecer un razonamiento cuantitativo para percibir que el deslizador tiene la función de constante multiplicativa y, por tanto, determina relaciones de 2:1, 4:1 y 5:1. Si bien esta actividad evidenció el razonamiento de los alumnos en los términos descritos, las preguntas del investigador no permitieron identificar la justificación de sus respuestas, esto es ¿qué discusiones establecieron entre ellos?, o ¿cómo fue la participación al interior del equipo? Esto produjo que en el rediseño se evitara el esquema de pregunta-respuesta y se favoreciera la exploración de los participantes, con algunas intervenciones del investigador en momentos específicos.

Resultados de actividad dos del rediseño

Como se ha mencionado anteriormente, parte del rediseño fue dejar de considerar que las actividades solo pueden estar relacionadas con cierto nivel, dando paso a una exploración con mayor diversidad de razonamientos y sin estar limitada por las preguntas en la hoja de trabajo. A continuación se muestran ejemplos relacionados con los resultados de la actividad dos, en donde se identifica la movilidad entre razonamientos cualitativos y pre-proporcionales, además de que se muestran interacciones entre alumnos, ayudas directas y transición entre lo tangible y el micromundo.

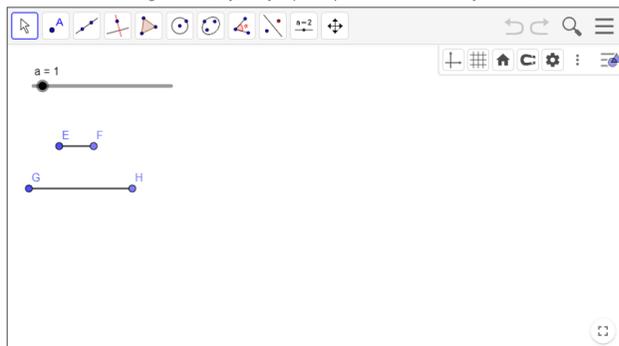
Razonamiento inicial

La actividad consistía en dos segmentos que estaban contruidos a partir de un deslizador (Figura 3), la longitud de uno de ellos era igual al deslizador, mientras que el otro estaba en una relación 3:1.

Figura 3

Actividad dos del rediseño

Tarea 2: Observa los segmentos (EF y GH) y explora qué sucede entre ellos y el deslizador



En el cuestionamiento ¿qué sucede cuando se mueve el deslizador? se obtuvieron las siguientes respuestas:

Investigador: *¿Qué sucede equipo 1?*
 Alumno 2 del equipo 1: *Se agrandan*
 /Alumno 3 del equipo 1, habla en voz baja/
 Investigador: *Y se hacen más ¿Qué?*
 Alumno 3 del equipo 1: *Más pequeño*
 Investigador: *Equipo 2, ¿Qué pasa cuando se mueve el deslizador?*
 Alumno 1 del equipo 2: *Se hacen grandes esas rayas*
 Investigador: *Se hacen grandes, ok ¿y solo se hacen grandes?*
 Alumno 2 del equipo 2: *También se hacen pequeñas*
 Investigador: *Equipo 3, ¿Qué sucede?*
 Alumno 2 del equipo 3: *Se hacen más grandes*
 Investigador: *Ok, se hacen más grandes, equipo 4 ¿Qué sucede?*
 Alumno 1 del equipo 4: *Disminuye y aumenta*
 Alumno 2 del equipo 4: *El tamaño de las líneas*

Los participantes llevaron a cabo un razonamiento cualitativo al determinar que el deslizador aumentaba y los segmentos disminuían; aún no identificaban una relación directa entre los segmentos, por lo que se cuestionó “¿Qué relación hay entre los segmentos?”, obteniendo las siguientes respuestas:

Investigador: *Ok, ahora, ¿habrá alguna relación entre esos segmentos? ¿Se relaciona de alguna forma los segmentos?*
 Alumno 1 del equipo 2: *No*
 Alumno 2 del equipo 1: *De que se aumentan un*
 Alumno 3 del equipo 1: *¿una relación? No se*
 Alumno 3 del equipo 2: *Esta más grande uno que otro*
 Alumno 1 del equipo 4: *Son líneas paralelas*

Las respuestas muestran que para algunos participantes no es evidente la relación entre los segmentos, mientras que otro participante establece una relación de rectas paralelas; en este caso, muestra un razonamiento diferente al proporcional, el cual no es incorrecto, pero dentro de los propósitos del estudio podría establecer un razonamiento incompleto, ya que no logró establecer una relación en términos proporcionales. En el caso del alumno 3 del equipo 2, la respuesta muestra un razonamiento cualitativo, pero más estructurado que la pregunta anterior, ya que establece una diferencia entre el tamaño de los segmentos, lo cual puede llegar a dilucidar la existencia de un factor que provoca el cambio.

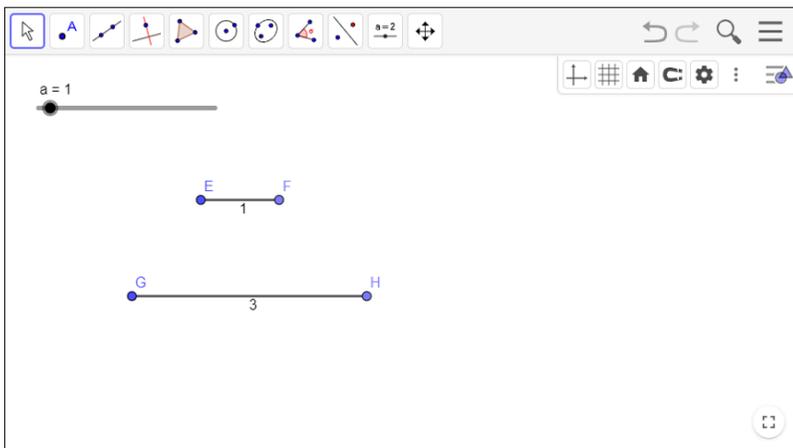
Razonamiento a partir de una decisión

Como se ha observado en la Figura 3, el diseño de la actividad proponía que los participantes interactuaran con el deslizador y establecieran una relación entre los segmentos, demostrando así razonamientos cualitativos. Una de las posibles acciones consideradas que podrían llevar a cabo los alumnos era identificar el valor de cada segmento, como se muestra en la Figura 4, con ayuda de una herramienta, y así establecer una relación cuantitativa. Debido a que ningún equipo optó por esa decisión, a través de algunas intervenciones se llevó a los alumnos a considerarlo.

Figura 4

Actividad dos del rediseño (estableciendo valores a los segmentos)

Tarea 2: Observa los segmentos (EF y GH) y explora qué sucede entre ellos y el deslizador



En la identificación de las medidas de los segmentos en diferentes valores del deslizador se observaron los siguientes razonamientos:

- Investigador: *A ver entonces dijeron que había que ubicar el deslizador en ocho, ¿cuánto mide?*
 Alumno 2 del equipo 1: *8 y 24*
 Alumno 1 del equipo 4: *La chiquita tiene el mismo valor que el deslizador*
 Investigador: *Dice su compañero que el segmento pequeño tiene el mismo valor que el deslizador, ¿Será cierto?*
 Alumnos de equipo 2: *Si*
 Investigador: *¿Y qué sucede con el otro? /refiriéndose al otro segmento/*
 Alumno 2 del equipo 2: *Ocho veces más*
 Alumno 1 del equipo 4: *Se multiplica, bueno...*
 Alumno 4 del equipo 4: *Es ocho por tres*
 Investigador: *¿Qué opinan los demás equipos?*

Al interior del equipo 2

- Investigador: *Ya vieron que el segmento pequeño mide lo mismo que el deslizador, ¿qué pasa con el otro?*
 Alumno 1 del equipo 2: *Pues no sé, está grande*
 Alumno 2 del equipo 2: *Pero ésta, esa se...*
 Investigador: *¿Está grande?*
 Alumno 2 del equipo 2: *Si...pero, ¿cómo se puede decir?*
 Investigador: *Ok, platiquenlo*
 Alumno 3 del equipo 2: *¿Cómo se puede decir?, es que cuántas veces el 24 es el 8*
 Alumno 2 del equipo 2: *tres por ocho*
 Alumno 1 del equipo 2: *24*
 Alumno 2 del equipo 2: *Abí está, engrandece tres veces más*

En el primer fragmento de transcripción se evidencia la relación directa entre el segmento y el deslizador (“la chiquita tiene el mismo valor que el deslizador”), razonamiento que fue necesario para comprender posterior-

mente la relación entre el deslizador y el otro segmento, en donde un alumno desarrolla un razonamiento incompleto al establecer que es “ocho veces más”. Si bien establece una relación multiplicativa, el factor multiplicativo que estaba considerando era erróneo. En el caso del alumno 1 del equipo 4, se manifiesta un razonamiento cualitativo al identificar que se multiplica, aún si establecer el factor multiplicativo. A diferencia de los razonamientos anteriores, el alumno 4 del equipo 4 identifica que es una relación multiplicativa y establece la relación “ocho por tres”, evidenciando un razonamiento pre-proporcional.

El segundo fragmento presenta un intercambio de opiniones al interior del equipo 2, en donde a raíz de la interrogante (¿qué pasa con el otro?) se presenta un razonamiento cualitativo por parte del alumno 1 del equipo 2 al indicar que el segundo segmento “está grande”, estableciendo una diferencia con el otro segmento sin enunciarlo en términos cuantitativos. Por otro lado, el intercambio que se da entre el alumno 3 y 2 de este equipo muestra la manera en la que llegan a construir un razonamiento proporcional, ya que no solamente establecen una relación entre las medidas de los segmentos (8 y 24), sino que identifican que el valor multiplicativo que permite esta relación es tres, dando como respuesta a la interrogante de ¿qué relación hay entre los segmentos? “engrandece tres veces más”.

Con este análisis se puede identificar que el razonamiento de los alumnos de telesecundaria unitaria transita entre los niveles cualitativos, pre-proporcional y proporcional, y el nivel cualitativo persiste durante toda la actividad.

Interacciones entre alumnos

El tipo de interacciones que se establecieron entre los participantes fue en plenaria (interacción entre todos los participantes) y al interior de los equipos. A partir de las actividades realizadas se pudo observar que la mayoría de las respuestas y justificaciones que daban los alumnos eran resultado de un diálogo entre los participantes. Ante la pregunta ¿en algún momento los dos segmentos tendrán el mismo tamaño? se desarrolló la siguiente interacción entre los alumnos del equipo cuatro:

Alumno 1 del equipo 4: *Si, si puede*

Alumno 2 del equipo 4: *No /le demuestra recorriendo el deslizador/ y en cero no, porque no tendrían valor, y es de la única forma que pueden estar iguales.*

Alumno 4 del equipo 4: *En cuatro, a ver*

Alumno 1 del equipo 4: *Que no, que no miden lo mismo y se multiplican por tres /Se acerca el investigador/*

Investigador: *¿Qué pensamos acá? ¿Si va a haber un punto en el que tengan el mismo tamaño?*

Alumnos del equipo 4: *No*

Investigador: *No, ¿por qué?*

Alumno 1 del equipo 4: *Porque aumenta tres la más grande al resultado normal*

Investigador: *Ok, ¿todos estamos de acuerdo?*

Alumnos del equipo 4: *Si*

La diversidad del aula unitaria permitió que alumnos de los tres grados interactuaran en la misma actividad, reconociendo que las interacciones en el aula multigrado (o unitaria en este caso) articula múltiples voces, se contrastan y negocian significados; además, la colaboración y el soporte que se genera en una situación de interrelación motiva e involucra a los niños al aprendizaje colectivo (Lara Corro & Juárez Bolaños, 2018).

En este caso, se observa que a partir de un cuestionamiento y la manipulación del micromundo, los alumnos establecen un diálogo, en el cual el guía es el alumno 1 del equipo 4 al momento de adentrarse en el micromundo para apoyar el razonamiento de sus compañeros, llegando a un común acuerdo en que el factor multiplicativo continuará siendo 3 a pesar de los valores que tomen los segmentos. Cabe mencionar que el alumno 1 es de tercer año, mientras que sus compañeros son de los grados menores, esto lleva a considerar que las interacciones intergraduales favorecen el RP de los alumnos de aulas unitarias.

Ayudas indirectas

Dentro de los hallazgos en educación multigrado se han identificado las ayudas indirectas, las cuales se expresan mediante preguntas o a través de pistas que permiten a los alumnos continuar con la búsqueda (Block, Ramírez & Reséndiz, 2014). Si bien este tipo de ayudas hacen referencia en mayor medida a la enseñanza, dentro del estudio se presentaron situaciones donde el investigador tuvo que hacer intervenciones respecto a las actividades con la intención de que los alumnos pusieran en juego su razonamiento, un ejemplo de ello, se muestra a continuación:

Investigador: *Ok, ahora, ¿habrá alguna relación entre esos segmentos? ¿Se relaciona de alguna forma los segmentos?*

Alumno 1 del equipo 2: *No*

Alumno 3 del equipo 1: *¿una relación? No se*

Alumno 1 del equipo 1: *A ver muévele /refiriéndose al deslizador/*

Investigador: *Para empezar, ¿se sabe cuánto valen los segmentos? ¿sabemos cuánto miden?*

Alumno 4 del equipo 4: *No*

Investigador: *¿Cómo podemos saber cuánto vale cada segmento?*

/Silencio por parte de los equipos/

Investigador: *¿Cómo podemos verlo?... Miren, si seleccionamos un segmento y vamos a donde están las letras "A" y seleccionan donde dice valor, va a decir cuánto mide /se muestra el procedimiento en la pantalla de la computadora central/*

A partir de la interrogante ¿habrá alguna relación entre los segmentos? se identificó que los participantes difícilmente harían uso de la herramienta que les ayudaba a conocer los valores, situación que hubiera detenido su análisis y su interacción en el micromundo, por tanto, la ayuda indirecta radicó en apoyar a los participantes en la identificación de los valores de los segmentos, detonando así un análisis más sofisticado respecto a la actividad propuesta. La presencia de ayudas indirectas durante el estudio giraba en

torno al uso del micromundo, de forma que no fueran invasivas en el tipo de razonamientos y toma de decisiones por parte de los equipos de trabajo.

Entre lo tangible y el micromundo

En el trabajo habitual de los participantes no se habían realizado aproximaciones al trabajo con GeoGebra, de forma que para ellos era la primera vez que manipulaban el micromundo, situación que fue evidenciada a partir de algunas acciones.

Alumno 1 del equipo 2: *Mide 1*

Alumno 2 del equipo 2: *A ver este /refiriéndose al otro segmento/*

Alumno 3 del equipo 2: *Uno y tres*

Alumno 1 del equipo 2: *Tres centímetros, podemos agarrar la regla /procede a medir con la regla sobre la pantalla de la computadora/ mide 3.5, es mentira /refiriéndose a que no mide 3/*

Balacheff y Kaput (1996) han señalado que el mayor impacto en el uso de micromundos se encuentra en el carácter epistemológico debido al realismo matemático, es decir, que las manipulaciones pueden ser tales que se genera una sensación de existencia casi material (Abrate & Pochulu, 2005). Estas aproximaciones fueron evidenciadas a partir de las acciones del equipo 2, en donde se tenía la intención de comprobar la medida del segmento tomando como referencia la regla (material tangible) y colocándola sobre él. A partir de esta interacción se puede afirmar el carácter epistemológico en la búsqueda de relacionar lo ya experimentado con lo que está siendo descubierto, además de que se evidencia que el micromundo (visto desde el enfoque constructorista) no sólo permite exponer construcciones mentales en el software, sino que estas pueden externarse al ambiente real y a la comprobación en colectivo.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados obtenidos a partir de la aplicación del primer diseño, el análisis de sus respuestas a las actividades y el argumento que justifica sus procedimientos, podemos tener conclusiones como:

- *Relación entre niveles.* Los niveles de RP no son mutuamente excluyentes, situación prevista en estudios anteriores (Butto et al., 2019) donde se concluye que existe una transición entre el pensamiento aditivo y el pensamiento multiplicativo. Es importante reconocer que las fronteras entre los niveles en ocasiones son difusas, y que dentro de cada uno es posible hacer distinciones que podrían llevar a establecer pseudo-categorías, por tanto, el ubicar a un grupo de participantes en un nivel no implica que en algún otro momento no puedan razonar de una forma distinta al nivel en el que ha sido registrado, lo cual lleva al siguiente punto.

- *Localidad.* Un alumno puede razonar de manera diferente de acuerdo al tipo de problema, recurso o área implicada; este hallazgo respalda estudios previos (Öztürk, et al., 2021) en donde se reportó que las habilidades de razonamiento proporcional difieren según el tipo de problemas. En nuestro estudio encontramos que, de acuerdo con el tipo de problema y las preguntas planteadas, el razonamiento cambia, mientras que en alguna actividad se puede mostrar una aproximación incorrecta, en otra puede haber un razonamiento sofisticado.
- *Las posibilidades del micromundo para la exploración del RP.* El micromundo ha permitido evidenciar el razonamiento con el que cuentan los participantes, permitiendo establecer relaciones entre lo que ya conocían y lo que están explorando, permitiéndoles probar procedimientos, establecer diálogos de aprendizaje a raíz de las actividades diseñadas y descartar ideas a partir del ensayo y error. Cabe destacar que el micromundo no solo lo componen las herramientas integradas en GeoGebra, sino también el diseño actividades, las intervenciones por parte del investigador y el interés generado en los alumnos.

A partir de los resultados del primer diseño, el rediseño de actividades y su aplicación, se contempla profundizar en el análisis con el propósito de que se pueda proporcionar a las y los docentes características del razonamiento proporcional para que sean capaces de identificar y promover el desarrollo de las habilidades de sus estudiantes. Además, que puedan seleccionar y elaborar tareas matemáticas adecuadas que permitan la introducción al razonamiento desde diferentes aproximaciones y poder romper con la práctica generalizada en donde se asume que la regla de tres en una de las únicas maneras de aproximarse a las situaciones proporcionales, así como apoyar a los alumnos a sustituir la relación aditiva por la multiplicativa y poder discriminar las situaciones proporcionales de las que no lo son.

Respecto a algunas líneas futuras para el trabajo, se considera importante profundizar en el impacto de los micromundo en la cotidianidad de la escuela multigrado, estableciendo algún taller de preparación para docentes y alumnos, en donde a los primeros se les forme en la integración de GeoGebra para trabajar la proporcionalidad, mientras que en el caso de los alumnos se les oriente en el dominio de las herramientas a profundidad.

Por otro lado, a partir de los resultados del trabajo exploratorio puede desarrollarse un trabajo de enseñanza, en donde se potencialicen las actividades y se diseñe una secuencia didáctica que permita pasar de los primeros niveles a niveles que conlleven un mayor trabajo cognitivo.

REFERENCIAS

- Arteaga, P. (2011). Los saberes docentes de maestros de primaria con grupos multigrado [Tesis de maestría no publicada], DIE-Cinvestav.
<https://bit.ly/46TiNn0>
- Balacheff, N., & Kaput, J. J. (1996). Computer-Based Learning Environments in Mathematics. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education. Kluwer International Handbooks of Education* (vol 4, pp. 469–501). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_14
- Block, D., Ramírez, M., & Reséndiz, L. (2013). Tejer currículo: La planeación de la clase de matemáticas en una escuela multigrado. En Consejo Mexicano de Investigación Educativa (Ed.), *XII Congreso Nacional de Investigación Educativa* (págs. 1-10). COMIE.
- Block, D., Mendoza, T., & Ramírez, M. (2014). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. SM de Ediciones.
- Bustos Jiménez, A. M. (2013). El espacio y el tiempo en la escuela rural: algunas consideraciones sobre la didáctica multigrado. *Investigación En La Escuela*, 79 (1). 31–41. <https://doi.org/10.12795/IE.2013.i79.03>
- Butto, C., Fernández, J., Araujo, D. C., & Ramírez, A. I. (2019). El razonamiento proporcional en educación básica. *Horizontes Pedagógicos*, 21(2). 39–52.
<https://doi.org/10.33881/0123-8264.hop.21204>
- Lara Corro, E., & Juárez Bolaños, D. (2018). La relación tutora entre estudiantes en una clase multigrado de México. *Nodos y Nudos*, 6(45), 29–42.
<https://doi.org/10.17227/nyn.vol6.num45-10390>
- Calixto Flores, R., y Rebollar Albarrán, A. M. (2008). La Telesecundaria, ante la sociedad del conocimiento. *Revista Iberoamericana De Educación*, 44(7), 1–11.
<https://doi.org/10.35362/rie4472187>
- García, E., Santiago, F., & Zepeda, G. (2019). Enseñanza de las matemáticas en escuelas multigrado y telesecundarias. En S. Otten, A.G. Candela, A. de Araujo, C. Haines, & C. Munter (Eds.). *Proceedings of the forty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1751–1755). PME.
<https://bit.ly/3SIBivK>
- Godino, J., & Batanero, C. (2003). *Proporcionalidad y su Didáctica para Maestros*. Universidad de Granada. <https://bit.ly/3SjH9BJ>
- Healy, L., & Kynigos, C. (2010). Charting the microworld territory over time: design and construction in mathematics education. *ZDM*, 42(1), 63–76.
<https://doi.org/10.1007/s11858-009-0193-5>
- Heller, P., Ahlgren, A., Post, T., Behr, M. J., & Lesh, R. (1989). Proportional reasoning: The effect of two context variables, rate type, and problem setting. *Journal of Research in Science Teaching*, 26(3), 205–220.
<https://doi.org/10.1002/tea.3660260303>

- Hoyles, C., & Noss, R. (1987). Synthesizing mathematical conceptions and their formalization through the construction of a Logo-based school mathematics curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 18(4), 581–595. <https://doi.org/10.1080/0020739870180411>
- Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. En R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45–90). Academic Press.
- Lamon, S. J. (2020). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*. Routledge.
- Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En M. Behr, & J. Hiebert (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 93–118). NCTM- Lawrence Erlbaum Associates.
- Galván Mora, L. R., & Espinosa Gerónimo, L. E. (2017). Diversidad y prioridades educativas en escuelas multigrado. Estudio de caso en México. *Sinéctica*, 49(2). <https://bit.ly/462YuCs>
- Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación. (2021). Indicadores nacionales de la mejora continua de la educación en México. Cifras del ciclo escolar 2019–2020. MEJOREDU. <https://bit.ly/45WNoij>
- Mochón Cohen, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática*, 24(1), 133–157. <https://bit.ly/47i76pP>
- Modestou, M., & Gagatsis, A. (2010). Cognitive and Metacognitive Aspects of Proportional Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(1), 36–53. <https://doi.org/10.1080/10986060903465822>
- Noss, R., & Hoyles, C. (2019). Micromundos, Construcciónismo y Matemáticas. *Educación Matemática*, 31(2), 7–21. <https://doi.org/10.24844/em3102.01>
- Öztürk, M., Demir, Ü., & Akkan, Y. (2021). Investigation of Proportional Reasoning Problem Solving Processes of Seventh Grade Students: A Mixed Method Research. *International Journal on Social and Education Sciences*, 3(1), 48–67. <https://doi.org/10.46328/ijonnes.66>
- Abrate, R. S., & Pochulu, M. D. (2005). El software educativo en la enseñanza y aprendizaje de la matemática: fortalezas, oportunidades, debilidades y amenazas. En Universidad Nacional de Villa María (Ed.), *V Congreso Internacional Virtual de Educación* (pp.1–24). Universidad Nacional de Villa María. <https://bit.ly/49eNQv4>
- Sacristán, A. I. (2003). La importancia de los micromundos computacionales como entornos didácticos estructurados para fomentar e investigar el aprendizaje matemático. En Instituto Tecnológico de Costa Rica (Ed.), *3er Congreso Internacional de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora (CIE-MAC)*. Instituto Tecnológico de Costa Rica. <https://bit.ly/49iAKNh>

- Sánchez, E. A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(1), 65–97.
<https://bit.ly/49kMPlk>
- Santos, A. (2019). Escuelas multigrado en México: en busca de una nueva identidad. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 49(1), 49–66.
<https://doi.org/10.48102/rlee.2019.49.1.32>
- Schmelkes, S., & Águila, G. (2019). *La educación multigrado en México*. INEE.
<https://bit.ly/49joNXO>
- Secretaría de Educación Pública. (2017). *Aprendizajes Clave, para la educación integral*. SEP.
- Fernández Verdú, C., & Llinares Ciscar, S. (2012). Characteristics of the development of proportional reasoning in Primary and Secondary School. *Enseñanza De Las Ciencias*, 30(1), 129–142.
<https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n1.596>
- Weir, S. (1987). *Cultivating Minds: A Logo Casebook*. HarperCollins Publishers.