Tareas que realizan profesores en formación inicial para desarrollar pensamiento algebraico en la escuela primaria

Yolanda Chávez Ruiz[1] y Silvia Eduviges Hinojosa Rizo[2]

RESUMEN

En este capítulo se describen y analizan algunas de las tareas que realizan los profesores en formación inicial, en el contexto del curso de álgebra de la Licenciatura de Educación Primaria, que se lleva a cabo en las escuelas Normales de México. El estudio de casos que aquí se reporta está dirigido principalmente a los formadores de docentes, con la finalidad de que identifiquen el potencial didáctico y matemático de algunas tareas para desarrollar el pensamiento algebraico. Los resultados de esta intervención muestran que seleccionar tareas con un potencial matemático y didáctico puede tener implicaciones importantes que ayudan a los estudiantes normalistas a reflexionar sobre su práctica, diversificar tareas y cuestionar prácticas tradicionales, además de identificar las ventajas didácticas al desarrollar pensamiento algebraico al enseñar matemáticas.

PALABRAS CLAVE

Tareas matemáticas, Pensamiento algebraico, Enseñanza, Aprendizaje, Formación docente.

---

[1] yolachavezruiz@gmail.com
Escuela Normal de Rincón de Romos
https://orcid.org/0000-0003-0955-4803

[2] silvia.hinojosa@bycenj.edu.mx
Benemérita y Centenaria Escuela Normal de Jalisco
https://orcid.org/0009-0007-7193-2154

Chávez Ruiz, Y., & Hinojosa Rizo, S. E. (2023). Tareas que realizan profesores en formación inicial para desarrollar pensamiento algebraico en la escuela primaria. En A. Castañeda, (Ed.), *Aportes y recursos para la innovación en la educación matemática* (pp. 259–294). SOMIDEM Editorial.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S1/2023/01-10

ANTECEDENTES

Los programas de estudio que se proponen en las escuelas Normales en México se conforman de diferentes trayectos, uno de ellos se enfoca en la enseñanza y el aprendizaje de diversos campos disciplinares; dentro de éste se encuentra los cursos correspondientes al campo de las matemáticas, los cuales han estado orientados desde diversas perspectivas. Uno de los cursos que se incorporó en el Plan de Estudios de la Licenciatura en Educación Primaria en México en la reforma curricular de 2012 fue el de Álgebra, su aprendizaje y enseñanza (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2013), con el propósito de que los docentes en formación adquirieran conocimientos más amplios en el campo de las matemáticas desde un pensamiento algebraico, y que este conocimiento les proporcionara herramientas para el diseño de secuencias didácticas, concibiendo el álgebra como soporte de la aritmética para fortalecer el desarrollo de las competencias matemáticas. La incorporación de este curso coincide con el movimiento en favor del álgebra, centrada en procesos de razonamiento matemático y representaciones (Kieran, et al., 2016).

En los cursos correspondientes al pensamiento matemático del plan de estudio 1997 no se incorporaba ningún curso relacionado con álgebra o pensamiento algebraico. Este programa comprendía dos semestres en los que se veían los temas de resolución de problemas, aritmética, geometría, medición, procesos de cambio, tratamiento de la información, predicción y azar (cfr. SEP, 2002). Al entrar en vigor, el nuevo plan de estudios para la Licenciatura de Educación Primaria 2012 genera varios cambios en el campo de las matemáticas, uno de ellos es el incremento de semestres dedicados a este campo, pues de dos semestres se pasa a tener cuatro; así mismo, uno de los cursos que se incrementó es el de Álgebra, su aprendizaje y enseñanza (segundo semestre).

En este plan de estudios (SEP, 2013), el propósito de incorporar este curso fue para que los docentes en formación adquirieran conocimientos más amplios en el campo de las matemáticas desde un pensamiento algebraico, y que este conocimiento les posibilitara de herramientas para el diseño de secuencias didácticas, concibiendo el álgebra como soporte de la aritmética para fortalecer el desarrollo de las competencias matemáticas. Las competencias que pretendía desarrollar en el curso eran las siguientes:

- Utiliza con sentido y significado el lenguaje algebraico para expresar generalizaciones al resolver problemas empleando diversos procedimientos.
- Diseña y aplica estrategias didácticas para abordar problemas que integren diferentes áreas de conocimiento que involucren contenidos algebraicos.
- Guía y orienta el aprendizaje de cada uno de los alumnos en la resolución de problemas relacionados con el contenido algebraico, considerando los aprendizajes esperados establecidos en los planes y programas de estudio de educación primaria.

- Diseña e implementa ambientes de aprendizaje que se apoyan en el uso de sistemas algebraicos computarizados y diversas fuentes de información (SEP, 2013, p. 7).

En las competencias se establece una estrecha relación con el plan y programa de estudios de educación primaria. La finalidad era clara: que los docentes en formación, además de adquirir saberes en el campo del álgebra, pudieran diseñar y aplicar estrategias didácticas en las que se incluyeran contenidos algebraicos, pero no como una asignatura separada, sino como parte de cada uno de los ejes temáticos que se trabajan en la educación primaria.

En el año 2018 se llevó a cabo una nueva reforma a los planes de estudio de la Licenciatura en Educación Primaria, y el curso de álgebra se replantea como uno de sus propósitos el profundizar en el desarrollo de competencias algebraicas, así como el análisis y la comprensión de situaciones particulares que prevalecen en el entorno de los libros y de los programas de educación primaria. “El énfasis de este curso está en fortalecer los fundamentos matemáticos de los estudiantes, para transitar al desarrollo de sus habilidades algebraicas que permitan incidir, de manera más asertiva, en su intervención pedagógica y didáctica con las y los alumnos de primaria” (SEP, 2019, p. 5).

Al integrarse como parte del programa el pensamiento algebraico o álgebra, la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos dentro de las prácticas educativas se enfrentan al reto de ser abordados no solo aritméticamente, sino algebraicamente. Esto implica ver el álgebra desde otra perspectiva, y aunque se ha incrementado el curso de álgebra como parte del plan de estudios, no han tenido el impacto esperado (Chávez Ruiz & Martínez Rizo, 2018; Moscoso, 2020).

En el programa de 2022 (cfr. SEP, 2022), que entró en vigor en los cursos a partir de 2023, se considera de manera explícita la orientación y enfoque del curso desde los planteamientos del álgebra temprana, proponiendo para tal fin desarrollar el pensamiento algebraico, poniendo énfasis en tres aspectos:

1. Pensamiento estructural.
2. Pensamiento funcional.
3. Pensamiento variacional, procesos de cambio.

Este énfasis tiene como finalidad que los estudiantes normalistas descubran las ventajas, en términos de aprendizaje, que tiene transformar la enseñanza de las matemáticas, orientándola desde los planteamientos del álgebra temprana.

Es claro que a partir del plan de estudios 2012, una de las finalidades es adentrar al estudiante normalista en una perspectiva de las matemáticas que anteriormente no era considerada, ya que se centraba en la parte aritmética sin considerar de manera explícita el razonamiento algebraico. En la tabla 1 se observa la organización de estos cursos en tres décadas de cambios curriculares.

Tabla 1

Cursos de matemáticas en los programas de estudio para Licenciatura en Educación Primaria en México

Año de plan curricular	Semestre 1	Semestre 2	Semestre 3	Semestre 4	Semestre 5
1997	Matemáticas y su enseñanza I	Matemáticas y su enseñanza II			
2012	Aritmética: su aprendizaje y enseñanza	Álgebra: su aprendizaje y enseñanza	Geometría: su aprendizaje y enseñanza	Procesamiento de información estadística.	
2018	Aritmética. Números naturales	Aritmética. Números decimales y fracciones.	Álgebra	Geometría	Probabilidad y estadística
2022	Aritmética. Su aprendizaje y enseñanza	Algebra. Su aprendizaje y enseñanza	Geometría. Su aprendizaje y enseñanza		

Estos programas proponen una serie de tareas didácticas con el fin de que los profesores en formación inicial adquieran conocimiento matemático y didáctico, y que reflexionen sobre su práctica. En los cursos de álgebra se proponen actividades muy específicas enfocadas, por ejemplo, en la resolución de patrones geométricos, además de lecturas y artículos de investigación que orientan a la reflexión; esto con la finalidad de que los futuros profesores adquieran conocimientos de las estructuras del álgebra que les sirvan de base para desarrollar prácticas docentes más idóneas en las que se favorezca un pensamiento algebraico.

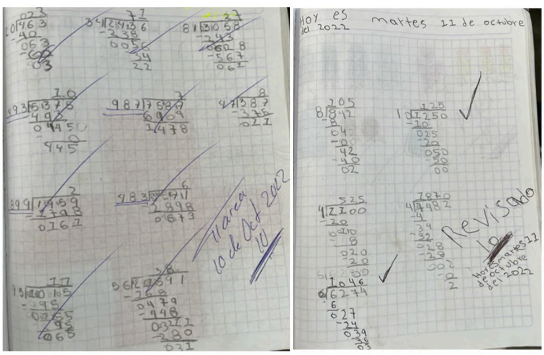
En el currículo de educación primaria en México no se presentan contenidos algebraicos de manera explícita, pero sí hay una amplia gama de posibilidades para desarrollar pensamiento algebraico con los estudiantes de este nivel (Schliemann, et al., 2011). Hay diferentes propuestas sobre cómo abordar álgebra en la escuela primaria: a través de un acercamiento tradicional que empieza por enseñar sintaxis algebraica utilizando métodos manipulativos con una relación entre la aritmética y el álgebra basadas en un trabajo individual (Schliemann, et al., 2011); con una generalización de la aritmética; que los estudiantes aborden contenidos prealgebraicos (Schliemann et al., 2011); entre otras. Lo que estos planteamientos expresan es la importancia de que los estudiantes de educación primaria se involucren de maneras distintas con ideas matemáticas al diversificar las tareas, lo que los llevará a una mejor comprensión del álgebra en niveles superiores.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La formación inicial para profesores es un tema que requiere especial atención en muchos sentidos, uno de ellos es la forma en cómo estos estudiantes aprendieron matemáticas, ya que posiblemente sigan reproduciendo en las aulas prácticas orientadas a lo procedimental y ejercicios de repetición y memorización centrados en el cálculo, generando una matemática carente de sentido. Desde los primeros semestres, los estudiantes normalistas acuden a las aulas para observar prácticas de enseñanza, y, posteriormente, realizan sus prácticas profesionales; lo que encuentran frecuentemente en estos acercamientos es que se sigue priorizando este tipo de ejercicios y tareas matemáticas (ver figura1), a lo que se dedica mucho tiempo y esfuerzo y que han perdurando por décadas, y tanto para maestros como para los alumnos pueden significar una matemática descontextualizada.

Figura 1

Imágenes de algunas de las tareas que predominan en la clase de matemáticas en la actualidad



A pesar de los énfasis en los programas de formación inicial y de los constantes esfuerzos en los cursos de formación continua para la evolución de las prácticas de enseñanza que favorezcan el aprendizaje de las matemáticas, no se ha tenido el impacto esperado. Sabemos que en la formación inicial y continua de profesores intervienen factores de tipo social, cultural, económico, entre otros; la investigación desde las prácticas de los profesores necesita dar elementos para tener un panorama más amplio de estos diferentes factores. Esta línea puede ir en el sentido que Kaput (2000) señalaba cuando proponía que el álgebra ("*algebra for all*") podría ayudar a tener una mejor comprensión de las matemáticas al eliminar barreras como las anteriormente expuestas.

Como lo mencionan Castro, et al. (2011), "Los maestros ciertamente pueden abordar la tarea de la enseñanza, reconocimiento y promoción del razonamiento algebraico elemental, en tanto que les sean ofrecidas oportunidades para aprender a reconocer y a promover el razonamiento algebraico manifestado por los niños…" (p. 98). ¿Cuáles serían estas oportunidades para reconocer y promover el pensamiento algebraico? Las investigaciones en álgebra temprana (*Early Algebra*) han abordado diversas perspectivas, lo que puede orientar la toma de decisiones en la formación inicial de los profesores de educación primaria.

Esta investigación se enfoca en la siguiente cuestión: *¿Qué tipo de tareas ayudan a los profesores en formación inicial a la comprensión del desarrollo del pensamiento algebraico en la educación primaria?* Si el fin último de la formación inicial docente es mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje a partir de prácticas idóneas en el campo de la educación matemática, enfocarse en tareas que desarrollen el pensamiento algebraico puede contribuir con este fin.

El propósito de este trabajo es proponer a los profesores en formación inicial tareas matemáticas que promuevan el desarrollo de habilidades y conocimientos de un pensamiento algebraico, con la finalidad de realizar prácticas idóneas en el campo de la educación matemática con alumnos de educación primaria, que les permita generar una relación más significativa, constructiva y afectiva entre las matemáticas y los usuarios en este nivel educativo.

REFERENTES TEÓRICOS

Para finales de los años noventa se reconoció que a pesar de los cambios y propuestas presentadas en las reformas educativas, el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a nivel internacional seguía implicando desafíos en el nivel de educación básica; estos se acentuaban en secundaria, nivel en el cual se ha identificado que los estudiantes muestran dificultad para tener un buen desempeño en álgebra.

Esta situación impulsó el desarrollo de investigaciones en torno a las dificultades asociadas con los procesos de aprendizaje del álgebra escolar. Los resultados de las investigaciones desde la didáctica de las matemáticas plantearon un giro a la idea de que el álgebra se tiene que abordar hasta la secundaria, y proponen considerar la introducción temprana de la materia a través de conceptos y notaciones que favorezcan el pensamiento algebraico en los primeros años de escolaridad, considerando la generalización y la formalización de patrones como una de las maneras de introducir el álgebra en la escuela primaria, con el fin de "fortalecer y profundizar el currículo de la aritmética[…] representar y reflexionar sobre relaciones entre conjuntos de números, en lugar de enfocarse meramente en el cálculo" (Schliemann, et. al, 2011, p. 16), esto para favorecer la construcción de estructuras asociadas al pensamiento algebraico.

Lograr que los profesores en formación adquieran un conocimiento sólido para que desarrollen la práctica de enseñanza significativa y que alcancen los propósitos educativos requiere de esfuerzos de los formadores de formadores y de una buena propuesta curricular, pero también es importante involucrar a los estudiantes en tareas que permitan un cambio de perspectiva y la reflexión sobre prácticas matemáticas más profundas.

En el curso se pueden revisar propuestas teóricas enfocadas en el álgebra temprana que orientan las tareas a una nueva álgebra con entendimiento, tareas propuestas desde diversos ámbitos del currículo que tienen que ver con álgebra; es decir reflexionar y resolver diversas tareas desde una algebrización del currículo (Kaput, 2000). Esta propuesta teórica está enfocada en que los niños desarrollen una serie de habilidades algebraicas en distintas áreas del currículo de matemáticas (Molina, 2009); actividades como identificar patrones, observar regularidades y llegar a generalizaciones son algunos de los propósitos de esta perspectiva. Lo anterior lleva a preguntarse ¿Cómo romper con las tareas que en muchas ocasiones son generadoras de obstáculos cognitivos al promover la concepción de una matemática monótona, abrumadora y descontextualizada? ¿Qué conocimientos es necesario que adquieran los estudiantes normalistas y qué habilidades requieren desarrollar en el campo de las matemáticas para favorecer un pensamiento algebraico que impacte en prácticas matemáticas más idóneas?

¿Cómo trabajar el álgebra en primaria?

De acuerdo con Vergel (2015), a nivel internacional en educación primaria, la aritmética tiende a centrarse en calcular para dar una respuesta y no en la representación de las relaciones. El acento está en una resolución numérica para operaciones que involucran casos particulares, esto da como resultados posibles conflictos que enfrentan los estudiantes al trabajar con álgebra, por lo que se introduce al niño en un álgebra sin tener un significado y comprensión (Butto & Rivera, 2011).

Lo anterior llevó a considerar que lo que se requería era un cambio en el pensamiento del estudiante en la forma de trabajar "situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre número y operaciones" (Kieran & Filloy, 1989, p. 229), "relaciones entre conjuntos de números y medidas, de cálculo de respuestas numéricas a la descripción de relaciones entre variables" (Schliemann, et al., 2011, p. 138), de un enfoque en las relaciones y no solo en el cálculo de una respuesta numérica.

Los resultados obtenidos en las investigaciones dieron un giro. De centrarse en la resolución de ecuaciones como objetivo del álgebra, se pasó a priorizar el trabajo que involucra la generalización, los patrones, las variables y las funciones, proponiendo con ello el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros años de la educación básica. Lo anterior llevó a la necesidad de "reconceptualizar la naturaleza del álgebra y el pensamiento algebraico y reexaminar cuándo los niños son capaces de pensar algebraicamente" (Carpenter & Levi, 2000, p. 4). No se trata de trasladar lo que se enseña en la secundaria a la escuela primaria o de enseñar métodos para resolver ecuaciones, sino de desarrollar un pensamiento algebraico en los niños desde los primeros años de escolaridad (Vergel, 2015).

Schliemann, et al. (2011) consideran que "la aritmética es parte del álgebra" y, por lo tanto, "la aritmética tiene un carácter inherentemente algebraico" (p. 19) porque los sistemas de numeración y las operaciones aritméticas se pueden ver como funciones, y brindan elementos para construir y expresar generalizaciones, así como para trabajar con cantidades indeterminadas. A su vez, proponen la introducción de conceptos y notaciones algebraicos (p. 43):

- Las operaciones aritméticas pensadas como funciones.
- Generalizar como la base del razonamiento algebraico.
- Brindar a los alumnos oportunidades para que utilicen letras para representar cantidades, incógnitas y variables.

Hablar de un razonamiento algebraico es aludir a elementos que permitan algebrizar el currículo de la escuela primaria como: la identificación de patrones, pasar de lo particular a lo general, la generalización de regularidades, trabajar con cantidades indeterminadas, el reconocimiento de las propiedades de las operaciones, considerando como base las relaciones y estructuras de dichos elementos, para hacer explícito el carácter algebraico de la matemática requiere, como lo afirman Radford y André (2009, p. 238), "profundizar en la comprensión de la naturaleza del pensamiento algebraico y la manera en que se relaciona con la generalización", esto abriría la puerta para trabajar actividades y tareas matemáticas que favorezcan el desarrollo de un pensamiento algebraico.

El álgebra temprana y su didáctica

Las actividades y tareas que tienen presente el pensamiento algebraico como parte de los contenidos de matemáticas que marca el programa de la educación primaria llevaron a investigar características de la naturaleza de dicho pensamiento. De acuerdo con Aké, et al., (2015), al investigar el desarrollo del pensamiento algebraico se identifican diferentes características de la naturaleza del álgebra en la escuela elemental, por ejemplo, se reconoce cómo una aritmética generalizada implica un tratamiento de las operaciones y las funciones (Schliemann, et al., 2011); el álgebra incluye una aritmética que requiere de la generalización y formalización de patrones, así como del estudio de estructuras, funciones, relaciones y la covariación.

Schliemann, et al. (2011), según los resultados de los estudios que realizaron, consideran que los alumnos de educación primaria son capaces de pensar sobre operaciones aritméticas como funciones y relaciones funcionales, por lo que sostienen que es posible incorporar el pensamiento algebraico en contenidos ya existentes dentro del programa de matemáticas de la escuela primaria, pero esto requiere "una reconceptualización del álgebra para poder entender su desarrollo en estos primeros niveles educativos" (Aké, et al., 2015, p. 144).

Al proponer el estudio del álgebra en educación primaria no se considera introducirla como una asignatura, sino favorecer estructuras de un razonamiento algebraico que lleven a desarrollar habilidades de generalización y capacidades de expresar dicha generalidad. Además, se busca desarrollar formas de pensar y actuar sobre objetos, relaciones y estructuras matemáticas con énfasis en los patrones y funciones, y en las relaciones y propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas, impulsando con ello un pensamiento relacional. También se reconoce como parte fundamental para el aprendizaje del álgebra concebir el signo igual como una relación.

Molina (2009) considera que al centrar las actividades aritméticas desde un pensamiento relacional se promueve el pasar de un eje aritmético enfocado en una acción procedimental para obtener el cálculo de una respuesta, a un eje algebraico que se centra en las estructuras y examina relaciones que permitan a los estudiantes pensar en las propiedades aritméticas. Esto requiere hacer presente en la resolución de situaciones problemas la comprensión de las estructuras de las operaciones y la generalización de patrones.

Trabajar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación primaria desde esta perspectiva implica promover un modo diferente de pensamiento aritmético que propicie las nociones básicas del álgebra. Es, como lo menciona Vergel (2015), ver el carácter algebraico de la aritmética, dando la posibilidad de establecer una conexión entre ambas, al aprender con significado lo que se está operando; esto favorecería una mejor comprensión del álgebra en el nivel secundaria.

MÉTODO Y MATERIALES

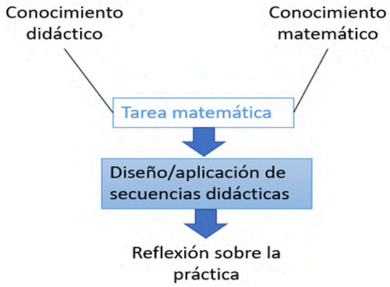
Muchas de las investigaciones que generamos los profesores normalistas, los formadores de formadores, se realizan en el contexto del aula, en la práctica misma, ya que a la vez que los profesores en formación inicial aprenden contenidos matemáticos y didácticos para la enseñanza de las matemáticas, acuden a las escuelas primarias a realizar prácticas profesionales para implementar los saberes aprendidos y observar su impacto. Este reporte es parte de una investigación-acción más amplia, que tiene como propósito difundir los conocimientos didácticos que favorecen la transformación de las prácticas de enseñanza en el aula. La investigación-acción, considerada dentro de los estudios de intervención, busca producir un cambio en la realidad (Martínez Rizo, 2020).

La presente investigación tiene como objeto de estudio tareas matemáticas que se llevan a cabo en el curso de álgebra; para este propósito se presenta un estudio de caso que se centra en identificar los aportes que dan determinadas tareas para conocer los procesos cognitivos y las acciones que los estudiantes normalistas realizan al resolver situaciones que implican procesos de generalización, con base en el reconocimiento de un patrón geométrico a partir de sus estrategias empleadas y sus procesos de resolución. También se identifican las ventajas didácticas y el potencial de dichas tareas para desarrollar el pensamiento algebraico en las aulas de educación primaria. De acuerdo con Martínez Rizo (2020), los estudios de caso tratan de indagar el mayor número posible de aspectos, sin que necesariamente sea exhaustivo, en un número reducido de sujetos que pueden ser personas, grupos o instituciones.

El estudio se llevó a cabo con dos grupos de estudiantes normalistas de tercer semestre, uno de un municipio de Aguascalientes y otro de un municipio de Jalisco; ambos en el curso de álgebra. A estos dos grupos los designaremos como grupo A y grupo B, respectivamente. La selección y diseño de las actividades que fueron propuestas a los estudiantes están basadas en el propósito del programa del curso de álgebra (SEP, 2019). El estudio parte de implementar diversas tareas que son "…el conjunto de actividades organizadas y orientadas, con una o múltiples estrategias de solución, donde es posible utilizar diversas representaciones, lo cual permite a los estudiantes involucrarse con la actividad matemática" (Chávez-Ruiz y Martínez-Rizo, 2018, p. 215).

Las tareas se enfocan en desarrollar conocimiento didáctico y matemático que ayude a los estudiantes normalistas a diseñar secuencias didácticas para su implementación en el aula y posterior reflexión sobre la práctica. El diseño de la intervención presenta la siguiente estructura:

Figura 2
Diseño del método de intervención



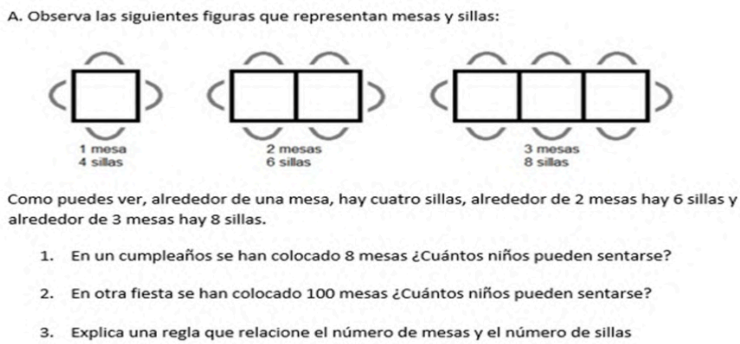
Según el diseño, en esta intervención se destacan tres momentos importantes: un cuestionario diagnóstico al inicio del curso, las diversas tareas matemáticas que involucran tanto conocimientos didácticos como de contenido matemático, y una encuesta final con preguntas relacionadas con la reflexión sobre su práctica.

Diagnóstico

En un primer momento de la intervención se aplicó un cuestionario con ocho reactivos –cuatro con preguntas abiertas y cuatro con preguntas cerradas— que tenía como propósito identificar los conocimientos algebraicos de los estudiantes normalistas participantes. Los reactivos se tomaron de algunas de las investigaciones revisadas (Bautista-Pérez et al., 2021; Castro et al., 2011; Zapatera-Llinares, 2017), relacionadas con diversas propuestas de álgebra temprana para educación primaria. En la figura 3 se ejemplifica el reactivo 1:

Figura 3

Reactivo 1 del cuestionario diagnóstico.


A. Observa las siguientes figuras que representan mesas y sillas:

1 mesa
4 sillas

2 mesas
6 sillas

3 mesas
8 sillas

Como puedes ver, alrededor de una mesa, hay cuatro sillas, alrededor de 2 mesas hay 6 sillas y alrededor de 3 mesas hay 8 sillas.

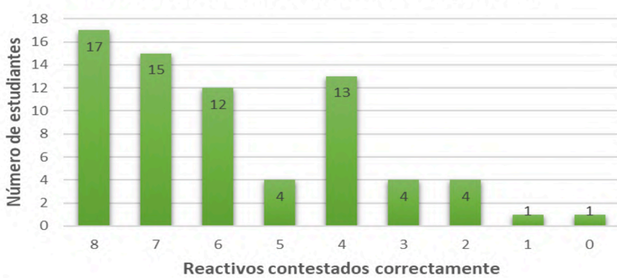
1. En un cumpleaños se han colocado 8 mesas ¿Cuántos niños pueden sentarse?
2. En otra fiesta se han colocado 100 mesas ¿Cuántos niños pueden sentarse?
3. Explica una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas

Nota. Tomado de Zapatera-Llinares, 2017 p. 95)

A partir de la información obtenida en esta evaluación diagnóstica, se tomaron decisiones que orientaron el desarrollo de los cursos. Se esperaba que la mayoría de los estudiantes tuvieran un desempeño sobresaliente, ya que resolvieron ejercicios y problemas diseñados para niños de educación primaria. Los resultados del cuestionario diagnóstico se revisaron y discutieron con los estudiantes, y, a partir de esta información, se diseñaron y seleccionaron las tareas matemáticas a proponer. Los resultados generales de este diagnóstico se muestran en este apartado.

Figura 4

Resultados del cuestionario diagnóstico



Como se observa en la Figura 4, sólo 17 de 71 estudiantes resolvieron correctamente los 8 reactivos, mientras que un estudiante resolvió de manera incorrecta todos ellos. La revisión de este cuestionario diagnóstico se hizo con los estudiantes, observándose diversos procedimientos. Para este reporte solo se consideraron los resultados finales que presentan información general del dominio de contenido matemático que poseen. Aunque la mayoría de los estudiantes respondieron más de 4 reactivos correctamente, un porcentaje considerable obtuvo resultados desfavorables. A partir de esta información se seleccionaron las tareas relevantes del currículo de primaria, y se decidió trabajar en aquellas con potencial matemático y didáctico que pudieran favorecer el pensamiento algebraico. A medida que se avanzó en el curso, se fueron proponiendo tareas con demanda cognitiva más compleja.

Tareas matemáticas

Tanto en el grupo A como en el grupo B se trabajaron tareas para desarrollar conocimientos matemáticos y didácticos en los estudiantes. Para este reporte se recuperan algunas de las intervenciones exitosas en ambos grupos.

El grupo A se integró por 36 profesores en formación inicial. El propósito de esta intervención era que los estudiantes reflexionaran sobre sus prácticas de enseñanza y propusieran tareas a sus alumnos que estuvieran orientadas hacia el álgebra temprana. Para las tareas que se realizaron con el grupo A se destacan los ***conocimientos didácticos*** a partir de acciones específicas:

- Actividades recurrentes, para desarrollar habilidades intelectuales básicas.
- Tarea con potencial didáctico y matemático, a partir de la reflexión sobre las ventajas didácticas de las mismas.
- Análisis de vídeos o situaciones escolares para reflexionar sobre la práctica.

El grupo B se integró por 35 profesores en formación inicial. Se trabajó con una actividad que consistía en la resolución de una secuencia de patrones geométricos, que se presenta como parte de una secuencia de actividades para favorecer el pensamiento algebraico en el programa del plan de estudios 2012 (SEP, 2013). Esta secuencia en especial ha sido utilizada en diversas investigaciones y con estudiantes de diferentes niveles para reconocer características del pensamiento algebraico, como las de Zapatera-Llinares (2018), Vergel (2015), Butto y Rivera (2011). Con las tareas llevadas a cabo con este grupo se destaca ***el conocimiento matemático.***

Se seleccionó una secuencia de patrones geométricos porque el trabajo con ellos es una herramienta que, de acuerdo con la Comunidad Internacional de Didáctica del Álgebra, permite adentrarse al pensamiento algebraico desde los procesos de generalización (patrones numéricos y geométricos) (Butto & Rivera, 2011). La generalización de patrones es considerada como una de las vías más preponderantes para introducir el pensamiento algebraico (Zapatera-Llinares, 2018), ya que permite a los estudiantes trabajar con variables como cantidades indeterminadas, elemento importante para el desarrollo de dicho tipo de pensamiento (Vergel, 2015). La formalización de patrones, funciones y generalizaciones se considera una forma de desarrollar el pensamiento algebraico, lo que permite trabajar desde el conocimiento matemático.

Al generar estos espacios de reflexión y considerar a los estudiantes normalistas participantes como copartícipes en la construcción de un conocimiento, se pretende hacer un aporte a la didáctica de las matemáticas que impacte en la enseñanza y aprendizaje del campo del pensamiento algebraico elemental. El análisis y reflexión de estas tareas se presentan en el apartado de resultados.

Encuesta final

Para finalizar el curso se aplicó una encuesta centrada en la reflexión sobre la práctica, la cual tenía como propósito identificar los aspectos relevantes que los estudiantes observaron durante su participación en el curso. Esta encuesta solo recupera apreciaciones generales de los participantes en dicho curso, ya que durante el mismo se aplicaron diversos instrumentos para valorar cada una de las actividades específicas, tales como cuestionarios, rúbricas, listas de cotejo, fichas de lectura, debates, paneles, entre otros. Los resultados de la encuesta final se describen en el apartado siguiente.

Figura 5

Encuesta final sobre la opinión de los participantes, en el curso.

Escribe 3 aprendizajes relevantes que hayas adquirido en el curso: *

Texto de respuesta larga

¿Hubo algún tema que no se abordó en el curso y que te habría gustado aprender? *

Texto de respuesta larga

¿Para qué desarrollar pensamiento algebraico en los niños de primaria? *

Texto de respuesta larga

¿De qué manera las actividades del curso te ayudaron a comprender cómo trabajar álgebra temprana con los niños? *

Texto de respuesta larga

¿Qué conocimientos matemáticos te brindaron las actividades que se llevaron a cabo en el curso? *

Texto de respuesta larga

¿Qué conocimientos didácticos te brindaron las actividades que se llevaron a cabo durante el curso? *

RESULTADOS

Esta investigación se llevó a cabo en el contexto del curso de álgebra de la Licenciatura en Educación Primaria. Se presentan dos casos; en el primero de ellos se destacan los conocimientos didácticos puestos en juego durante el desarrollo de las actividades, y en el segundo caso se destaca el conocimiento matemático.

Primer caso. Grupo A

Las tareas propuestas que hacen énfasis en el conocimiento didáctico fueron diversas y atendieron a necesidades de formación que tienen que ver con las siguientes preguntas: ¿Cuáles son las actividades que los profesores de educación primaria valoran y realizan cotidianamente en el aula? ¿Qué tipo de tareas favorecen el desarrollo del pensamiento algebraico? ¿Cómo podríamos hacer evolucionar las tareas matemáticas que los profesores proponen, con la finalidad de desarrollar pensamiento algebraico en los alumnos?

Actividades recurrentes

A partir de la evaluación diagnóstica y de algunas de las actividades iniciales que sugiere el programa para iniciar el curso, como la lectura de diversos textos académicos, se identifica que los estudiantes tienen limitadas habilidades básicas que son indispensables para el desarrollo de diversos aprendizajes, por lo que se decidió que una de las actividades recurrentes fuera la lectura de textos infantiles con contenido matemático, esto con la finalidad de ampliar el marco de referencias de los estudiantes (Chávez-Ruiz et al., 2021). Las actividades recurrentes son actividades que se proponen al inicio de cada sesión (cuya duración no va más allá de 10 minutos) y que tienen como propósito contribuir al desarrollo de habilidades y conocimientos básicos.

Una de estas actividades recurrentes fue la lectura diaria del texto "El hombre que calculaba" (Malba, 2008), que incluye 34 capítulos y en cada uno plantea una historia junto con un problema, generalmente algebraico. Cada capítulo tiene extensión de una página en promedio, por lo que cada día se leía y comentaba un capítulo diferente. Algunos de los comentarios de los estudiantes recuperados de las fichas de lectura fueron los siguientes:

> *Este libro me ha sorprendido muchísimo, pues, a pesar de saber que las matemáticas se usan en la vida cotidiana uno siempre se cierra a pensar que te ayuda para problemas específicos y la realidad es que no es así, las matemáticas de* (sic) *pueden aplicar realmente en todo, desde la necesidad de contar o hacer operaciones aritméticas, hasta realizar un movimiento, pues usamos distintas ramas de las matemáticas para resolver cada situación que se nos presenta día a día.*
>
> *La temática del texto es impresionante, al escuchar el titulo* (sic) *nunca me imagine* (sic) *que el ambiente fuera en Irak, y que todas las situaciones se dieran entorno a una cultura muy diferente a la nuestra, aparte considero que el libro cumple muchísimas funciones en cuanto su objetivo, pues nos enseña la aplicación*

de las matemáticas, pero también nos enseña una cultura totalmente diferente y nos da grandes lecciones de vida.

Como dato curioso me impresionó que el autor fue un brasileño, pues al ver la trama, te das cuenta de que existió una amplia investigación de las normas y formas de vivir en Irak.

Otra de las cosas que me gustó mucho del texto es que dentro de él vienen muchísimas narraciones contadas por Beremiz, y que como docentes podemos usar para implementar la literatura dentro de las matemáticas (Quiero compartir que mi historia favorita fue la de la historia del ajedrez)" ALS. (Se utilizará esta nomenclatura para distinguir las producciones de los alumnos -iniciales de nombre y apellidos-)

"Hay problemas muy buenos que, a primera vista, son muy difíciles, pero Beremiz nos da una respuesta sencilla. Una de las cosas más bonitas que tiene el libro son sus frases y lecciones morales, que nos hacen reflexionar y tal vez ayudarnos a crecer como personas.

Otra cosa muy buena es que nos culturiza (sic) *mucho sobre distintos matemáticos, astrónomos y filósofos, y eso se me hizo muy interesante. Hoy en día para muchos las matemáticas resultan aburridas, y complicadas de entender, pero este libro no solo nos ayuda en este aprendizaje si no también en ser generosos y ayudarnos a ser mejores personas. Por otra parte, todos los planteamientos de la resolución de los problemas son interesantes, por ejemplo el de la raíz cuadrada de un numero* (sic) *de cuatro cifras, o bien el problema de los cuatro cuatros, y el problema del juego de ajedrez que sin duda fue muy interesante conocer, me causo* (sic) *una gran admiración de cómo se pueden resolver problemas tradicionales de las matemáticas en un sentido lógico, con sencillez, y de manera precisa, cabe destacar que cada uno de los planteamientos de los problemas descritos si eran un poco confusos pero lo hacía interesante la manera en cómo en el hombre que calculaba los planteaba y ayudaba a las personas a solucionar aquello que era muy difícil de entender" (VMZG)*

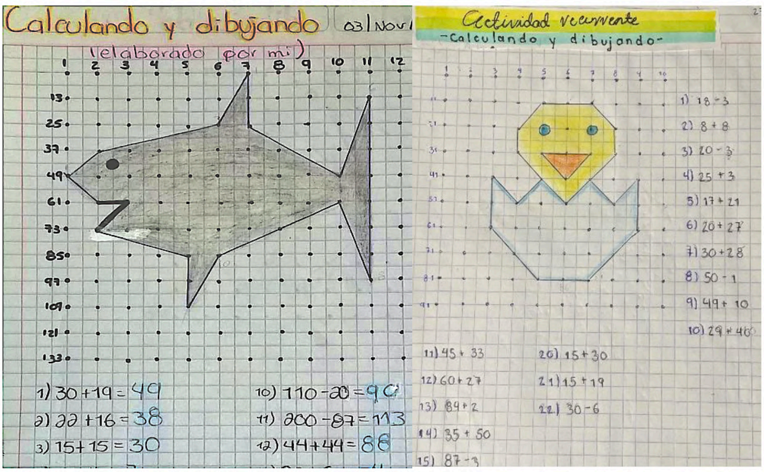
La lectura de textos infantiles ayudó a crear puentes entre este tipo de literatura y los textos académicos. En los comentarios que realizan los estudiantes reconocen una arista diferente de las matemáticas que va más allá del aula al ampliar su marco de referencias, lo que les permite no solo reflexionar sobre algunos contenidos matemáticos presentes en el texto, sino también la posibilidad de ampliar su capital cultural.

Otra de las actividades que los profesores en formación inicial de primaria valoran es el cálculo, por lo que se sugiere su diversificación al proponer actividades recurrentes de cálculo escrito, donde además, los alumnos desarrollan otras habilidades. En la Figura 6 se muestran otras actividades que implicaron el diseño de material didáctico para construir un repositorio colectivo de actividades que se pudieran llevar al aula de práctica.

Estas tareas tienen un potencial matemático importante, ya que se manejan coordenadas que tienen una relación directa con las funciones lineales a partir de realizar cálculos simples y relacionarlos con coordenadas en un plano cartesiano; además, tienen un potencial didáctico porque los estudiantes construyeron los diseños que requieren de encontrar una relación entre el cálculo escrito y la ubicación espacial para construir la figura. Estas habilidades, principalmente la de diseño, son indispensables para que los profesores en formación inicial favorezcan el desarrollo de habilidades para interpretar y representar expresiones algebraicas en el plano cartesiano, acciones que más adelante les permitirán comprender comportamientos de la recta que los lleva a situaciones de generalización, y como conocimiento didáctico al diseñar tareas de cálculo, diversificar su presentación y adecuarlas al grado escolar con el que trabajarán.

Figura 6

Diseños de actividades por estudiantes para repositorio colectivo



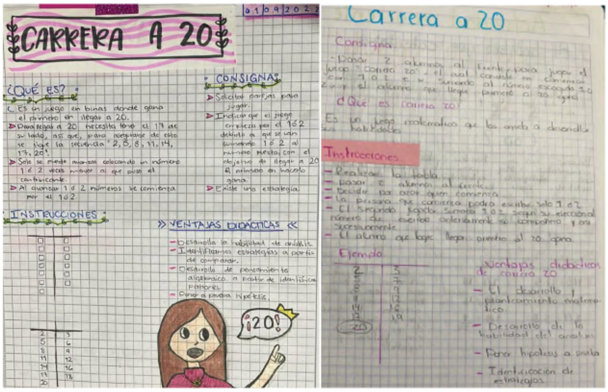
Tareas con potencial didáctico y matemático

Los estudiantes normalistas llegan al aula con ideas muy arraigadas sobre la enseñanza de las matemáticas, por lo que para generar la reflexión y el análisis de tareas se requiere implementar actividades desafiantes y de interés para los estudiantes, así como con un potencial matemático importante. Una de las tareas propuestas fue "Carrera a 20" (Figura 7), que es un juego por parejas donde uno de los estudiantes inicia escribiendo en una tabla de dos columnas el número uno o el dos, el segundo participante debe sumar uno o dos al número que anotó su contrincante. Gana el primero que llega a 20.

El propósito de la tarea era que los estudiantes identificaran una estrategia que les permitiera generar una regla con la cual aseguran ganar el juego. Se llevó a cabo intercambiando parejas para posteriormente participar en un torneo. Una vez que se definió la ganadora del torneo, se llevó a cabo el análisis de la tarea. Se presentaron preguntas detonantes como: ¿Qué habilidades intelectuales favorece? ¿Cuáles son las ventajas didácticas de este tipo de actividades?

Figura 7

Registros del desarrollo del juego de los estudiantes



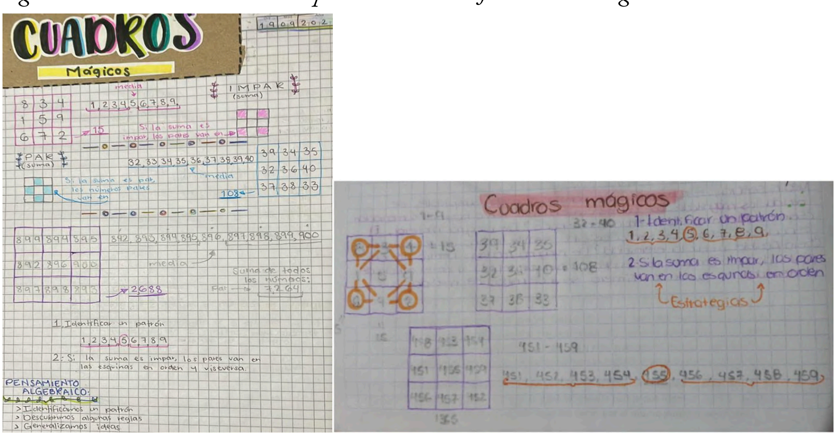
Además de preguntas detonantes, se hizo énfasis en identificar elementos algebraicos en las tareas matemáticas: reconocer patrones, descubrir reglas y generalizar. Se muestran las producciones de los estudiantes con la finalidad de abreviar espacio y observar directamente las evidencias de sus registros, ya que destacan los aspectos que les parecen más relevantes.

Durante esta intervención se decidió incluir actividades que están presentes en el currículo de primaria con la finalidad de que los profesores en formación inicial identifiquen el potencial de este tipo de tareas matemáticas y, de esta manera, puedan diseñar actividades semejantes que desarrollen diversas habilidades en sus alumnos. Otra de las tareas propuestas fue la construcción de cuadros mágicos, haciendo énfasis en los siguientes aspectos:

- Identificar patrones.
- Descubrir reglas.
- Generalizar algunas ideas.

Figura 8

Registro de estudiantes sobre su experiencia al trabajar cuadros mágicos.



En este ejemplo se observa cómo las estudiantes recurren a varios ejemplos para confirmar la regularidad encontrada, reconocer reglas de comportamiento y establecer un patrón que les permita generalizar situaciones como cuando se expresa: "*si la suma es impar los pares van en una de las esquinas del cuadrado*". Este tipo de tareas, al involucrar diferentes operaciones de manera flexible, favorecen que el estudiante identifique una estructura y establezca relaciones entre las operaciones que lo lleven a reconocer patrones y generalizar.

Una de las premisas de la investigación sobre el álgebra temprana es que la aritmética, y en general las matemáticas de los primeros grados, se ha desarrollado de tal forma que resta importancia a la generalidad, por lo que en las tareas propuestas en esta intervención se hace énfasis en llegar a generalizar.

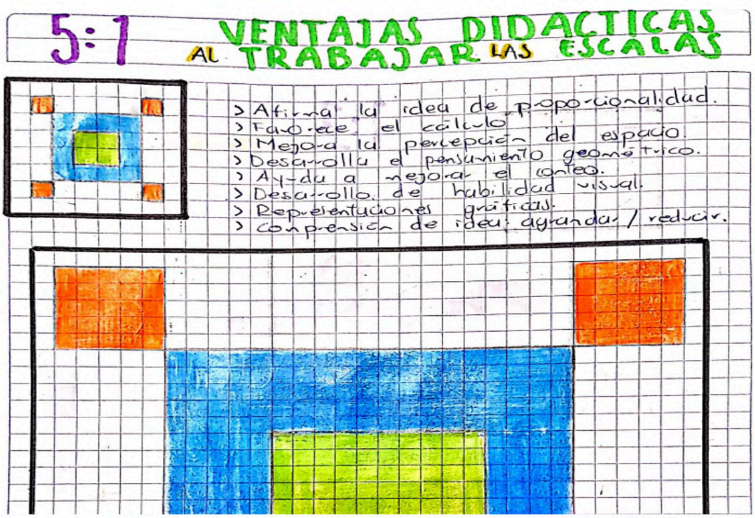
El desarrollo de conocimiento didáctico no se podría lograr con una sola actividad. Como formadores es importante que los estudiantes normalistas identifiquen en las actividades algunos criterios que ayuden a construir este tipo de conocimiento con cuestionamientos como:

- ¿Cuáles son las ventajas didácticas de la tarea matemática que propongo?
- ¿Qué habilidades intelectuales pueden desarrollar en los alumnos?

Plantear estas preguntas en cada una de las tareas matemáticas propuestas ayudó a que los estudiantes identificaran qué tareas podrían llevarse al aula para generar experiencias más significativas en los alumnos, como se observa en la Figura 9.

Figura 9

Registro de estudiante sobre las ventajas didácticas de una tarea matemática



Durante las tareas matemáticas propuestas se hizo énfasis en la importancia del material didáctico que podría ayudar a una comprensión más clara de los contenidos a enseñar. Partiendo de la idea de Kieran, et al. (2016), se cree que si se proporciona a los niños un medio para visualizar un problema, llegarán a ver sus fundamentos estructurales.

En la escuela primaria, los maestros dedican mucho tiempo y esfuerzo para que los alumnos aprendan las operaciones básicas, como la división entera; los estudiantes en formación inicial también muestran interés en suscitar actividades significativas que ayuden a un mejor dominio de este contenido matemático. En las tareas propuestas no solo se promovieron las múltiples representaciones de las operaciones, sino también el diseño de material didáctico que pudiera favorecer el aprendizaje de estos temas.

Figura 10

Material didáctico elaborado por los estudiantes para hacer repartos de diversas colecciones.

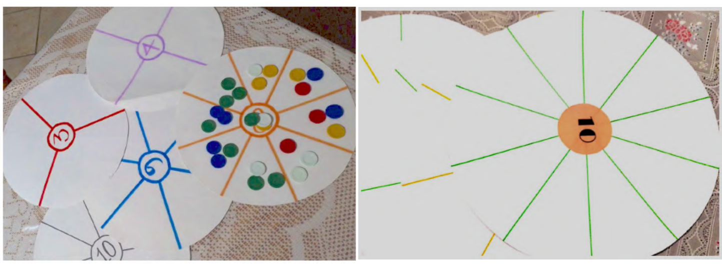
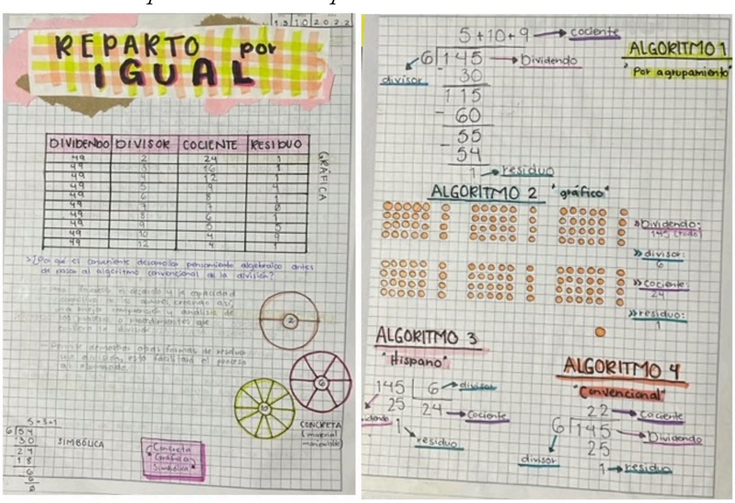


Figura 11

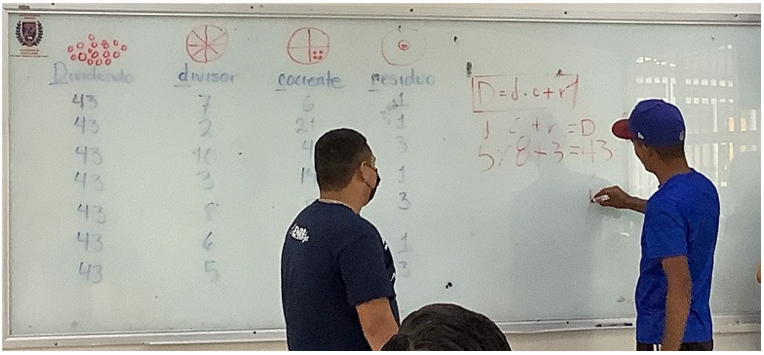
Registro de diversas representaciones de repartos



Como se observa en estos registros, los estudiantes normalistas valoran las distintas formas de representar un contenido matemático (gráfica, concreta y simbólica), que ayuda a una mejor comprensión de la estructura de las operaciones, tal como se observa en la figura 12.

Figura 12

Imagen de estudiantes normalistas encontrando regularidades para llegar a generalizar



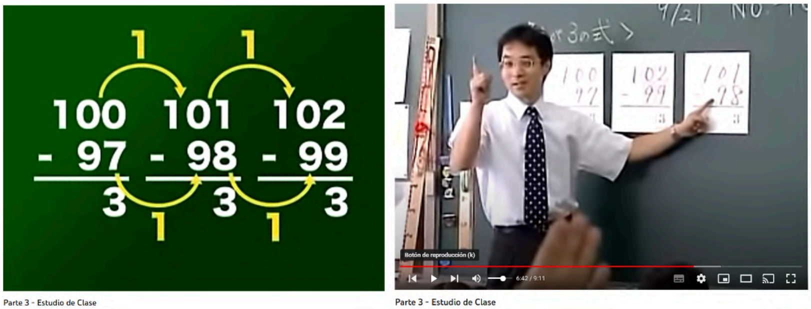
Con este tipo de tareas se pretende que los estudiantes comprendan la aritmética a partir de explicar y justificar las propiedades que utilizan mientras realizan los cálculos. Los estudiantes descubren poco a poco las regularidades y estructuras de patrones que pueden llegar a generalizar.

Análisis de clases a partir de videos

Una de las actividades con mayor potencial didáctico en los procesos formativos es el análisis de situaciones escolares a partir de una sesión clase reproducida en un video (figura 13). Los estudiantes normalistas tienen la oportunidad de ver el video cuantas veces sea necesario para identificar los procesos de enseñanza y aprendizaje que se están desarrollando en la sesión, con ello pueden analizar cómo se presentan objetos matemáticos y cómo interactúan con ellos los alumnos. En este caso es una clase que se desarrolla operando con la resta; el propósito de la clase mostrada en el video es que los alumnos de segundo de educación primaria encuentren regularidades que se dan con dicha operación. Los estudiantes normalistas, al analizar este video, tienen que observar cómo los alumnos establecen relaciones, identifican patrones y las mediaciones que hace el docente. En las escuelas Normales se valoran los videos que muestran prácticas exitosas; sin embargo, son escasos los videos públicos, con algún tratamiento didáctico, que pueden circular en las aulas para ser analizados por los profesores.

En uno de los vídeos observados (Universidad de Tsukuba, 2023, agosto, 14) se lleva a cabo una clase de matemáticas que se enfoca en el desarrollo del pensamiento algebraico, los alumnos que se presentan en el video identifican algunas estructuras y regularidades en las operaciones. Molina (2009) considera que al centrar las actividades aritméticas desde un pensamiento relacional se promueve pasar de un eje aritmético centrado en una acción procedimental para obtener el cálculo de una respuesta, a un eje algebraico que se centra en las estructuras y examina relaciones que permitan a los estudiantes pensar en las propiedades aritméticas.

Figura 13.

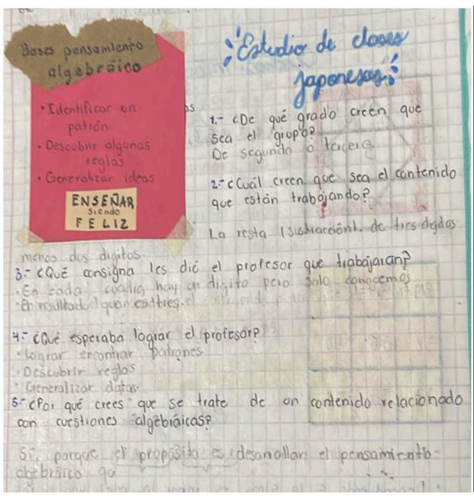


Nota. Fuente: video de una clase de matemáticas (Universidad de Tsukuba, 2023, agosto, 14)

En la imagen que se presenta en la figura 14 se muestra la forma en cómo los estudiantes normalistas realizan parte del análisis de la sesión de matemáticas que se desarrolla en el video mencionado.

Figura 14

Registro de comentarios de estudiante sobre el análisis de la clase



Algunas de las preguntas que se plantearon a los estudiantes fueron las siguientes:

1.- ¿De qué grado creen que sea el grupo con el que está trabajando el maestro?

2.- ¿Qué contenido matemático está trabajando el profesor en clase?

3.- ¿Qué consigna dio el profesor para hacer la tarea matemática?

4.- ¿Qué creen que esperaba lograr el profesor con esa secuencia didáctica?

5.- ¿Cómo relacionas esta tarea matemática con el pensamiento algebraico?

6.- ¿Qué habilidades intelectuales creen que desarrollaron los alumnos a partir de esta tarea?

7.- Diseñen en el equipo una secuencia didáctica similar a la de la clase observada.

Los estudiantes normalistas no sólo reflexionan sobre el contenido matemático puesto en juego, sino que observan el desarrollo de una clase idónea para favorecer el desarrollo de pensamiento algebraico. Además, identifican las acciones que se pueden realizar durante una clase de matemáticas para llegar a establecer regularidades que induzcan a reconocer patrones, generalizar una regla, expresarla y aplicarla a otros casos.

Segundo caso. Grupo B

La tarea que se propone en el grupo B es una secuencia de patrones. Inicialmente se presentaron las cuatro primeras figuras de un patrón geométrico que corresponde al primer momento; para Zapatera-Llinares (2018) esto se puede considerar recurrente, ya que el número de elementos aumenta de forma progresiva a lo largo de los términos siguientes. La actividad se les entregó a los estudiantes normalistas en una hoja impresa y se les solicitó resolver cada una de las tareas de forma individual. Para el análisis se consideraron los objetos matemáticos que intervienen en las tareas que conforman la actividad que se presenta en la hoja de trabajo, y las estrategias empleadas en la resolución de cada una ellas y en general de las cinco tareas, es decir, cómo las estrategias empleadas en las primeras tareas impactaron para la resolución de las siguientes.

En esta secuencia, las tareas van aumentando su complejidad. La resolución implica procesos de generalización para reconocer la recurrencia de la sucesión e identificar una regla general para "*n*" número de casos, rasgos característicos del pensamiento algebraico elemental (Figura 15). Es importante mencionar que el trabajar con una secuencia que va incrementando su nivel de dificultad les da la oportunidad a los estudiantes de iniciar con estrategias básicas, como puede ser una suma iterada, lo que les brinda confianza para seguir contestando las siguientes tareas y cambiar su estrategia para buscar un patrón o expresión que les permita dar respuesta y así poder establecer una expresión matemática, ya sea con un lenguaje común o alfanumérico.

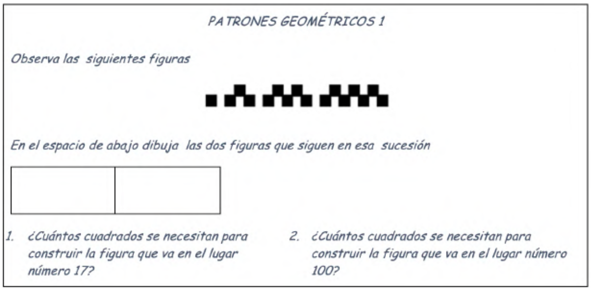
La secuencia se inicia presentando las figuras correspondientes a los primeros términos de la progresión aritmética: f(1), f(2), f(3), f(4); cognitivamente demanda establecer, por medio de la observación, una relación entre estos cuatro primeros términos, acción que permite establecer un patrón de comportamiento. Enseguida se solicita calcular el valor $f(n)$ para "*n*" pequeño, como es el lugar 17, lo que es posible responder con diferentes estrategias: con un recuento iterativo, con una tabla o con una expresión matemática. Para la tarea tres se trabaja con la posición 100, lo que demanda a los estudiantes cambiar de estrategia para identificar la regla general y con ello la función correspondiente. En la tarea 4 se les solicita explicar a través de una narrativa el razonamiento que usaron para responder la tarea 2 y 3, esta tarea demanda reflexionar cognitivamente sobre lo que observaron, de qué se dieron cuenta, qué relación establecieron; acción que les permite reconocer el proceso y las estrategias que emplearon para identificar el patrón, y a su vez la manera de expresarlo. Es importante aclarar que la actividad comprende cinco momentos llevados a cabo con cinco tareas:

Momento 1. Se muestran las imágenes de los cuatro primeros términos de la sucesión (Figura 15).

Demanda cognitiva. Visualizar e identificar los elementos comunes y las variantes.

Figura 15

Hoja de trabajo 47, Bloque 6. Desarrollo del pensamiento algebraico



Nota. Fuente: Cedillo y Cruz, citados en SEP, 2013, s.p.

Momento 2. Se presenta la tarea uno y la tarea dos (Figura 15).

Demanda cognitiva. Visualizar una doble estructura: posición/forma y numérica. Identificar una relación de incremento. Reconocer elementos comunes y variantes a partir de una percepción visual de cómo se modifica una figura en relación con la anterior de acuerdo con la comunalidad identificada.

Tarea 1. Como primera tarea se solicita dibujar las dos figuras siguientes de la sucesión, es decir, la figura 5 y 6, apoyándose en la visualización de las figuras que se les presentan en la sucesión. Es una tarea que requiere de una generalización cercana. Para dibujar dichas figuras, el patrón puede reconocerse a partir de realizar un conteo o dibujando la secuencia por tratarse de términos pequeños, sin embargo, permite identificar cómo visualizaron la secuencia de la figura y el incremento.

Tarea 2. Se pide determinar el número de elementos correspondientes a la figura 17. Es posible trabajar operando con una generalización cercana a partir de un recuento iterativo. Puede trabajarse con una función lineal.

Momento 3. Se presenta la tarea 3

Demanda cognitiva. Identificar un patrón y determinar una regla recursiva. Generalizar una regla, (Figura 15).

Tarea 3. Se les pide encontrar el total de cuadrados que se necesitan para construir la figura que se ubica en el lugar número 100. Al determinar el total de elementos para dicho lugar, se requiere pasar de una generalización cercana a una generalización lejana que demanda calcular términos grandes, esta acción requiere primeramente identificar un patrón para después generalizar una regla que se puede expresar con una función lineal.

Momento 4. Se les solicita argumentar sus procedimientos con los que operaron la tarea 2 y 3.

Demanda cognitiva. Reconocer el proceso que se realizó. Expresar de forma escrita las acciones y procedimientos empleados para resolver dichas tareas.

Tarea 4. Debe explicar cómo razonó para responder a las tareas 2 y 3.

Momento 5. Se presenta la tarea 5 en una tabla de entrada-salida, la cual consta de dos partes. En las tres primeras situaciones se solicita encontrar los cuadrados correspondientes al lugar que se les determina; en las tres situaciones siguientes se invierte la pregunta al presentarles el total de cuadrados y preguntar el lugar que ocuparía dicha figura.

Demanda cognitiva. Establecer una relación funcional y tratamiento analítico de las cantidades indeterminadas, formulación simbólica y descontextualizada. En la primera parte se da el valor de entrada y se solicita encontrar el valor de salida; se requiere operar a partir de una generalización con cantidades indeterminadas, y hacer uso de la regla que generalizaron en la tarea tres. Para la segunda parte, en donde se les da el valor de salida y deben determinar el valor de entrada, se requiere reconocer la igualdad como equivalencia y trabajar aplicando las propiedades de las operaciones para trabajar con los inversos. Operar con cantidades indeterminadas y con objetos intensivos como se muestra en la figura 16.

Figura 16.

Tarea 5 de la Hoja de trabajo 47. Bloque 6. Desarrollo del pensamiento algebraico.

5. ¿Puedes programar tu calculadora para completar la siguiente tabla?	
Lugar que ocupa la figura en la sucesión	Número de cuadrados que se necesitan
48	
75	
123	
	351
	411
	507

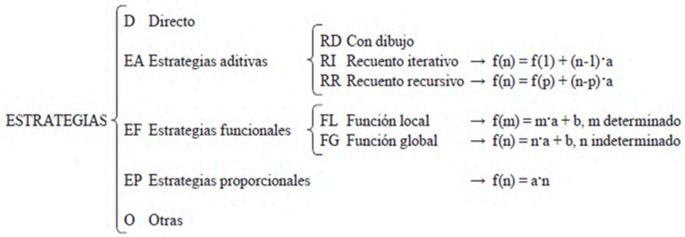
Tomado de Cedillo y Cruz, (citados en SEP, 2013. s.p.)

Tarea 5. Establecer una expresión matemática: una regla o función que les permita generalizar para determinar los elementos de *n* figura de la sucesión. Requiere de una función lineal y de una función inversa. Es una tarea que necesita una generalización lejana.

Las respuestas de los estudiantes se analizaron con base en las estrategias que emplearon para responder cada una de las tareas; además, se construyeron 5 categorías, para lo que se tomó en cuenta la clasificación que presenta Zapatera-Llinares (2018), la cual se muestra en la figura 17.

Figura 17

Estrategias de resolución de Problemas de generalización de patrones.



Nota. Tomado de Zapatera-Llinares (2018, p.96)

Estas estrategias fueron una base para analizar los procedimientos y respuestas que dieron los estudiantes normalistas en cada una de las tareas. También se tomaron en cuenta otro tipo de estrategias, como fue el empleo de tablas.

Categoría 1. Estrategia aditiva

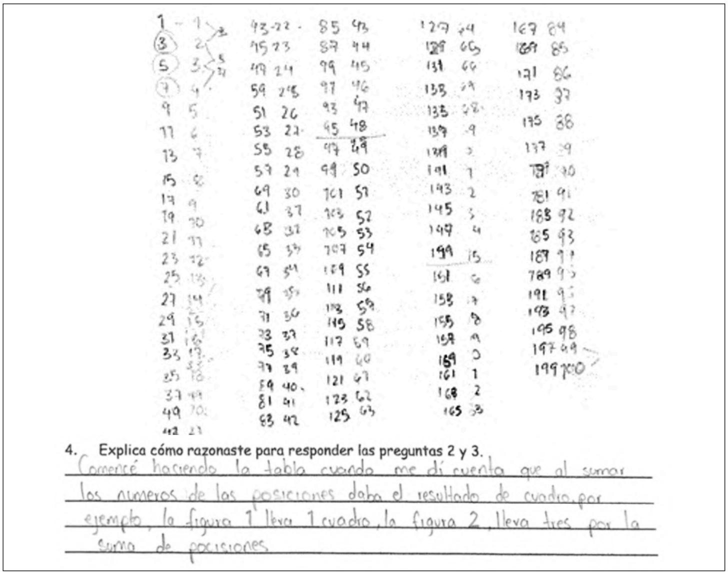
Los estudiantes normalistas, al responder la tarea dos, reconocen que se da un incremento, como es el siguiente caso: "*fui sumando 2 a cada figura*". Sin embargo, en la tarea tres su respuesta es 201, y la tabla que corresponde a la tarea cinco la deja sin responder. Su acción se centra en realizar una suma, esta acción muestra la forma en cómo está percibiendo la figura desde una percepción espacial, proceso que requiere de una abstracción, se estaría hablando de una primera fase que es la visualización de la regularidad. Si bien sus resultados son incorrectos, es importante reconocer que para llegar a una generalización algebraica se da una fase inicial correspondiente a la visión de una regularidad; en este caso se reconoce como elemento común un incremento constante entre cada una de las figuras que conforman la secuencia, por lo que se considera que, en la tarea uno, al solicitarles dibujar las dos figuras siguientes (Figura 5 y 6) llegan a visualizar y reconocer elementos comunes. Esta acción les va a favorecer para responder la tarea dos, en la que se va adentrando al estudiante a identificar una regularidad, elemento importante para el desarrollo del pensamiento algebraico. Generalmente se inicia de manera abstracta, y con esta tarea quedan en evidencia los aportes que dan a la generalización de un patrón al realizar acciones que los induzcan a visualizar una regularidad.

Categoría 2. Estrategia aditiva sin establecer una relación funcional.

Para dar respuesta a la tarea tres en la que se les solicita encontrar el número de cuadrados correspondientes a la figura 100, los estudiantes recurren a utilizar como estrategia una tabla (Figura 18), sin embargo, esta es utilizada solo como una serie de números que responden a una sucesión al aplicar una adición sin identificar una regla recursiva.

Figura 18

Tabla utilizada como una serie de números que responden a una sucesión. Extracto de la hoja de actividades de uno de los estudiantes.



En la Figura 18 se muestra cómo se utiliza la tabla como una estrategia para organizar la información al emplear un recuento iterativo, esta acción la explica el estudiante en la tarea 4. Se puede observar que para responder al total de cuadrados que se necesitan para construir la figura que va en el lugar número 17 (tarea dos), el estudiante empleó como recurso trabajar con apoyo de una tabla para organizar la información; sin embargo, esta es utilizada como una secuencia que recurre a una estrategia aditiva, realizando un recuento iterativo hasta llegar a la posición 17, sin establecer una relación funcional. Recurrir a una tabla para organizar su información es un recurso que puede ser favorable, ya que les puede permitir a los estudiantes llegar a trabajar más adelante con una estrategia funcional global al identificar el patrón y generalizar una regla, pasar de un proceso de particularización a generalización.

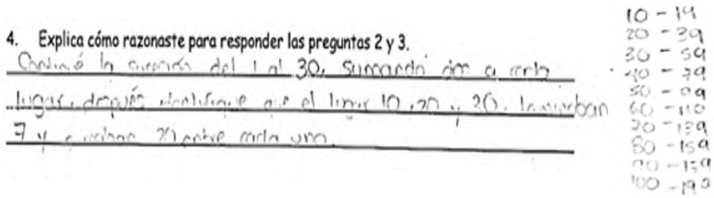
Se puede constatar que este tipo de tareas permite operar con estrategias que llevan a un pensamiento algebraico al generalizar una regla de acción. Se identifica que en esta categoría los estudiantes pasan a emplear la tabla como recurso, y reconocen una constante de incremento; esto es importante porque permite ir reconociendo acciones concretas de cómo se va presentando el conocimiento matemático.

Categoría 3. Estrategia funcional local

Para responder la tarea tres, la estrategia que aplicaron los estudiantes fue funcional local, reconocen una regla recursiva en lugar de seguir una sucesión del lugar uno en uno, realizan agrupaciones como se muestra en la figura 19. Reconocen un patrón y establecen una regla sin llegar a una generalización algebraica:

Figura 19

Tarea 4. Estrategia funcional global y su explicación. Extracto de la hoja de actividades



Como se puede observar en la Figura 19, el estudiante expresa que modificó su estrategia, y observa que el lugar 10, 20 y 30 terminaba en 7 (en la tabla terminan en 9) y sumaban 20 entre cada uno, lo que confirma que se opera con una estrategia funcional local para responder la tarea tres, y, aunque opera con cantidades determinadas, muestra identificar un patrón. Se considera que, al construir dichas abstracciones, estos estudiantes se encuentran a un paso de llegar a una generalización funcional global, ya que reconocen y establecen una regla y hacen uso de ella en la construcción de la tabla; sin embargo, no llegan a una generalización que les permita construir una regla general con la que puedan operar de manera correcta para cualquier caso, motivo que les limita para responder la tarea 5.

Es importante ir identificando cada una de estas estrategias como procesos que se van dando para llegar a un pensamiento algebraico. Al reconocer estos procesos se pueden favorecer tareas que les permitan ir desarrollando la habilidad para identificar elementos comunes y generalizar una regla.

Categoría 4. Relación espacial y numérica

Para responder la tarea tres y cinco, los estudiantes relacionan dos variables, la posición de la figura y el número de elementos de ésta; pasan de un primer nivel básico de percepción a un nivel en donde establecen una relación analítica que los lleva a reconocer un patrón y a determinar una regla recursiva, la cual expresan con un lenguaje natural y aritmético. Operan desde casos particulares a partir de representaciones concretas y sin llegar a trabajar con objetos intensivos. Por ejemplo:

> ***E₁*:** *En la 2 lo hice por medio de sucesión, la 3ra me percaté que los cuadros de abajo serían 100 y arriba 1 menos 99 y los sumé y da 199.*
>
> ***E₂*:** *Porque en la secuencia el número de cuadrados de abajo va aumentando de uno en uno y arriba es uno menos.*
>
> *E₃: Me di cuenta de que en la parte de arriba había un cuadrado menos que en la parte de abajo, entonces multipliqué 17x 2=34, que son los cuadrados de la parte de abajo y resté 1, 34-1=33 que es el cuadrado menos de ahí arriba.*
>
> ***E₄*:** *Multipliqué el lugar que ocupa la figura por dos y le resté 1.*

Inicialmente establecen una relación apoyándose de una estrategia aditiva a partir de un recuento iterativo; más adelante esta relación pasa a otro nivel de abstracción al vincular dos estructuras diferentes, la "estructura espacial y numérica" (Zapatera-Llinares, 2018, p. 92).

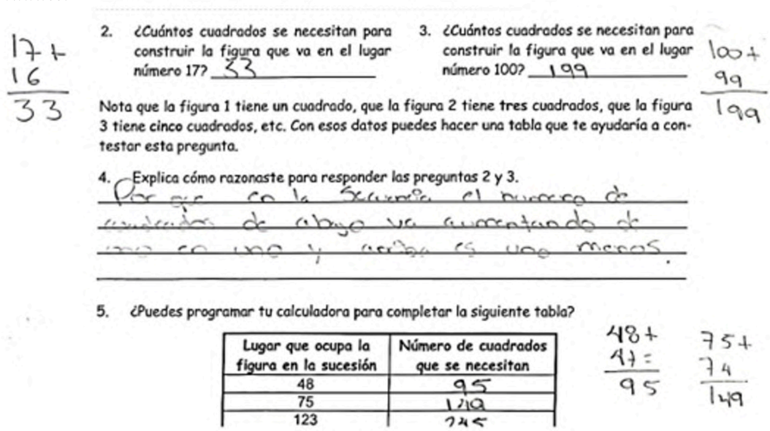
E_1 al principio no reconoce esta doble estructura, ya que expresa que la tarea dos la realiza por medio de una sucesión, y luego en la tarea tres reconoce una relación que se da entre el número de cuadrados del primer nivel con los del segundo nivel; se manifiesta la percepción que está realizando, a su vez logra abstraer las diferencias entre cada una de las figuras, modifica la estrategia, y de estar en una estrategia de conteo y cálculo aritmético, pasa a un recuento iterativo. Más adelante visualiza y reconoce esta doble estructura.

Al realizar sus acciones, los estudiantes ubicados en esta categoría utilizan inicialmente conteo aritmético, pero lo hacen como recurso para reconocer un patrón, y con ello establecer una regla general; tienen claro que deben encontrar una regla que les permita operar para cualquier caso. La visualización que realizan los lleva a establecer una relación en la que interviene una estructura espacial y numérica, lo que, a su vez, los lleva a establecer una relación funcional, como se muestra en la Figura 20.

En la Figura 20 se presenta un caso como ejemplo de la forma en cómo los estudiantes ubicados en esta categoría, aunque no operan con cantidades indeterminadas, sí llegan a una generalización algebraica, es decir, resuelven a partir de una operación aritmética (suma). Sin embargo, se logra establecer una regla al reconocer que, en la secuencia, los cuadrados de arriba siempre son uno menos que los de abajo, y que los de abajo aumentan de uno en uno; además, se relaciona el número de cuadrados de abajo con el lugar solicitado, estableciendo así una relación espacial y numérica.

Figura 20.

Transfiere la regla a cualquiera caso, pero la operan aritméticamente. Extracto de hoja de actividades.



17+
16
33

2. ¿Cuántos cuadrados se necesitan para construir la figura que va en el lugar número 17? 33

3. ¿Cuántos cuadrados se necesitan para construir la figura que va en el lugar número 100? 199

100+
99
199

Nota que la figura 1 tiene un cuadrado, que la figura 2 tiene tres cuadrados, que la figura 3 tiene cinco cuadrados, etc. Con esos datos puedes hacer una tabla que te ayudaría a contestar esta pregunta.

4. Explica cómo razonaste para responder las preguntas 2 y 3.

Porque en la secuencia el numero de cuadrados de abajo va aumentando de uno en uno y arriba es uno menos.

5. ¿Puedes programar tu calculadora para completar la siguiente tabla?

Lugar que ocupa la figura en la sucesión	Número de cuadrados que se necesitan
48	95
75	149
123	245

48+
47=
95

75+
74
149

Se puede afirmar que llegan a una generalización algebraica porque esta regla la aplican de manera correcta a los siguientes casos. Por lo tanto, en esta categoría se ubicó a los estudiantes que siguen operando desde casos particulares y con expresiones aritméticas, y, aunque no trabajan con objetos intensivos, sí llegan a expresar la regla general con un lenguaje natural y la transfieren para otros casos, pero siempre partiendo desde elementos particulares, por lo que a esta generalización se le determina como generalización local.

En la percepción visual, como lo afirma Radford (2010), realizan la vinculación entre dos estructuras: espacial y numérica, estableciendo una relación del primer nivel con el segundo nivel. Esto los lleva a establecer una relación funcional para construir la regla general expresada por una operación aritmética.

Categoría 5. Estrategia funcional global

En esta categoría se ubicaron a los estudiantes que al responder tareas que requieren de una generalización lejana, como lo es la tarea tres y cinco, identifican un patrón, llegan a una generalización y expresan dicha regla de comportamiento mediante una expresión matemática $Ax+B=C$. Estos estudiantes reconocen las variables, las trabajan como objetos indeterminados y expresan la regla con un lenguaje simbólico-literal.

> ***E_5:*** *Primero conté cuál era la diferencia entre la figura uno y dos, después con las demás vi que la diferencia era 2, así que multipliqué 2n, pero se pasaba en la primera figura y le resté uno ahora comprobé y sí resultó, 2n+1.*
>
> ***E_6:*** *Primero analicé la sucesión que existe entre las figuras y su relación que tienen, esta relación se coloca en la ecuación con la variable de x, se realiza la operación y colocamos el valor que ocupa para llegar al resultado. 2x-1.*

Los estudiantes que se ubican en esta categoría son capaces de presentar una expresión algebraica que les permite responder de forma general para encontrar el número de cuadrados que se necesitan para "*n*" figura al trabajar con variables indeterminadas, además logran argumentar verbalmente.

Al trabajar una secuencia de patrones geométricos que comprende tareas que van incrementando su grado de complejidad, se reconoce que se favorece el desarrollo del pensamiento algebraico, y además se pueden identificar estrategias que utilizan los estudiantes y su proceso de resolución para dar respuesta a cada una de las tareas que se les presenta en la hoja de trabajo. También permite identificar con mayor claridad el tipo de estrategias y cómo son empleadas, por ejemplo, aunque varios recurrían a la elaboración de una tabla, no todos la utilizaron para establecer una relación funcional y reconocer una regularidad.

Como resultado de trabajar con una secuencia de patrones geométricos se identificó que se pueden presentar casos en los que se resuelve de manera semejante, pero cognitivamente se da una diferencia, por ejemplo, el uso de las tablas o los que operaban con una suma reconociendo que uno de los sumando siempre sería uno menos (100+99); para este último caso, algunos estudiantes, al resolver las tareas, establecían una relación entre el total de cuadrados de la hilera inferior con el total de cuadrados de la hilera superior, incluso expresaban "*la hilera de arriba es uno menos*". Otros, además de expresarla con un lenguaje común, la representaban con una operación aritmética 100-1=99, 100+99=199, sin embargo, esto no significaba que siempre se identificará una regla o que se llegará a una generalización, algunos estudiantes realizaban la suma pero no lograban aplicarla a los casos que se les presentaban en la tarea 5, en la que se hizo uso de una tabla de valores, por lo que se confirma que no llegan a una generalizar algebraica. A esta forma de operar se le determina como una relación estática, ya que aplican dicha relación solo a casos particulares y representaciones concretas sin llegar a identificar objetos intensivos. En cambio, los estudiantes ubicados en la categoría 4 también realizaban dicha suma, pero sí lograban identificar las variables y la comunalidad, lo que les permitía generalizar la regla para aplicarla a cualquier caso, estableciendo una relación dinámica.

Realizar estas categorías a partir de los significados personales e institucionales que operan los estudiantes al resolver las tareas que se presentan en la hoja de actividades, permite identificar las relaciones y dinámicas que caracterizan los procesos cognitivos del pensamiento algebraico. En la forma de resolver y las estrategias empleadas se reconoce que hay diferencias en los procedimientos y niveles de algebrización entre los estudiantes ubicados en las distintas categorías presentadas.

Se identificó que a los estudiantes se les facilita más llegar a reconocer el patrón y generalizar la regla cuando se les muestra la imagen de las primeras figuras que conforman la secuencia, para luego establecer relaciones que los lleven a identificar un patrón y con ello generalizar una regla, que en ocasiones será expresada con un lenguaje natural, y en algunos casos con un lenguaje alfanumérico.

Presentar estas tareas que comprenden diferentes representaciones y en las que se incrementa la dificultad, iniciando con la representación de las cuatro primeras figuras de la secuencia geométrica para luego trabajar con una tarea que requiere de una generalización cercana, enseguida pasar a una generalización lejana y terminar con una tabla de doble entrada, permite a los estudiantes adentrarse en el pensamiento algebraico.

Encuesta final

Al finalizar el curso se decidió aplicar una encuesta en línea a ambos grupos, pero, al ser periodo de receso por el fin de semestre, solo la respondieron aproximadamente el 50% de los estudiantes participantes. Esta encuesta está organizada en dos preguntas cerradas que refieren a datos personales (edad y género), y seis preguntas abiertas relacionadas con aspectos generales del curso, ya que para la obtención de información de cada una de las tareas se diseñaron instrumentos específicos.

En cuanto a la primera pregunta abierta, respecto a que identificaran aprendizajes relevantes durante el curso, el 22% de los encuestados reconocen aprendizajes centrados en los conocimientos didácticos, por ejemplo:

> *Los 5 momentos de la clase de matemáticas. El gran uso del material didáctico. Y el cómo realizar diferentes actividades de pensamiento algebraico con los alumnos.*

El 26% de los encuestados refieren a conocimientos centrados en el dominio de contenidos matemáticos, por ejemplo:

> *La generalización de patrones, el uso de las tablas en la asignatura de matemáticas y la descomposición del número.*

Mientras que el 52% hacen referencia a conocimientos tanto didácticos como matemáticos, por ejemplo:

> *Aprendí la importancia del álgebra en la escuela primaria, los procesos de algebrización y los niveles de acuerdo a diversos autores. 2. El uso de patrones para lograr la generalización y el pensamiento algebraico. 3. Aprendí a través de una propuesta didáctica a trabajar las necesidades que muestren los alumnos, mismas que fueron identificadas a través de un diagnóstico previo, el cual a su vez fue creado con base en bibliografía específica.*

En cuanto a la pregunta ¿Para qué desarrollar pensamiento algebraico en los niños?, las respuestas se centraron en el desarrollo de habilidades intelectuales y la capacidad para resolver problemas:

> *Es importante crear un pensamiento analítico y deductivo, uno de los aprendizajes esperados es que el alumno sea capaz de resolver problemas a través de las matemáticas. Y el álgebra abona demasiado (sic) para la resolución de problemas. Ya qué da al alumno la capacidad de observar y analizar desde una perspectiva más profunda.*

Con respecto a las maneras en que el curso contribuyó a la idea de desarrollar pensamiento algebraico con los niños, los estudiantes mencionan:

> *Entendimos que el desarrollo del pensamiento algebraico es un proceso, no es algo que los niños puedan memorizar, sino que a través de actividades como las que trabajamos en el aula, se va desarrollando. Se orienta a los alumnos a través de preguntas a que razonen sobre sus respuestas y expresen las maneras en las que resuelven las actividades y ejercicios.*
>
> *Aunque las actividades fueron muy sencillas, a veces parecían ser difíciles. Más sin embargo de lo simple a lo complejo pude rescatar conocimientos que puedo trasmitir con los niños de primaria o por otro lado seguir desarrollando junto con ellos, comprendí el porqué y para qué es importante ver y trabajar con diversas actividades la álgebra impuesta de manera implícita en los contenidos de matemáticas primaria.*

Con la información obtenida en esta encuesta se identifica que los estudiantes reconocen conocimientos didácticos y matemáticos importantes para desarrollar pensamiento algebraico en sus alumnos, y que éste ayuda a construir otros conocimientos matemáticos de manera más significativa.

CONCLUSIONES

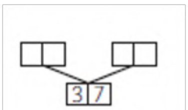
Los estudiantes que forman parte de un proceso de formación inicial para ser profesores de primaria participan en 6 diferentes cursos, aproximadamente, en un semestre. Los formadores de formadores deben considerar que las tareas que se proponen en el curso de álgebra atiendan a diversas necesidades formativas de los normalistas, principalmente en lo que refiere a un mayor dominio del conocimiento matemático y didáctico. En este sentido, es conveniente diseñar tareas que sean significativas para los normalistas y aporten elementos para su formación.

En este estudio se presentaron tareas que pueden contribuir con este propósito. Tanto en el grupo A como en el B se llevaron a cabo tareas que tuvieran algún potencial para profundizar en el conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza de las matemáticas. En el primer caso donde se presentan los resultados del grupo A se describen algunas de las tareas más significativas y se muestran evidencias de las propuestas, a partir de la socialización y del análisis que realizamos durante un semestre en el aula.

En los registros presentados hay evidencias amplias del tipo de trabajo y habilidades que los normalistas desarrollaron durante el curso. En esta intervención se identificaron aspectos de las tareas que pueden favorecer el conocimiento didáctico de los profesores en formación inicial:

- **La diversificación de tareas**. - Incluir diversas actividades recurrentes, análisis de tareas matemáticas propuestas en el currículo, análisis y observación de vídeos de clases, diseño de situaciones didácticas a partir de tareas con potencial matemático.
- **Diseñar diversas representaciones de objetos matemáticos.** – Con la finalidad de hacer evolucionar el tipo de tareas o ejercicios que los profesores proponen en clase:

  Pasar de este tipo de representación: $\begin{array}{r} 24 \\ +\ 13 \\ \hline 37 \end{array}$

  A este otro tipo: 
- **El diseño y construcción de material concreto.** – Tiene como propósito que los estudiantes normalistas descubran y pongan a prueba opciones que ayuden a los alumnos a construir conocimiento más significativo.
- **Identificar las ventajas didácticas de las tareas matemáticas.** - Tanto de las que se proponen a los estudiantes normalistas como las que ellos diseñan para sus alumnos.
- **Identificar las habilidades.** - Tanto intelectuales como de otro tipo que los estudiantes desarrollaron al llevar a cabo alguna tarea matemática.

- **Propiciar la reflexión sobre la práctica a partir de preguntas. –** Las preguntas sobre situaciones de enseñanza pueden contribuir a reflexionar sobre la práctica a partir de la socialización y materiales de análisis que tengan algún potencial específico.

En cuanto al grupo B, para desarrollar el conocimiento matemático en los estudiantes en formación inicial es importante considerar:

- El potencial de la tarea matemática.
- El nivel de complejidad de las tareas, que sea progresivo, aumentando la complejidad en cada tarea propuesta.
- El tipo de habilidades intelectuales que pueden favorecer el trabajo con las tareas matemáticas.

La identificación y sistematización de las estrategias y procedimientos en la resolución de secuencias da las posibilidades de saber en dónde se ubican los estudiantes, y, a partir de esta base, buscar mediaciones que favorezcan la transición a niveles superiores. Además, permite identificar situaciones que pueden ser un obstáculo para el desarrollo de las competencias matemáticas propias de su perfil docente y, por consiguiente, una práctica matemática idónea que favorezca la educación matemática.

Trabajar con tareas que comprenden una secuencia geométrica desde un contexto particular, como es el mostrar las primeras figuras de las secuencias, les favorece para identificar patrones, a diferencia de presentar una tabla de valores porque eso requiere de un nivel de abstracción con mayor dificultad.

Cuando los estudiantes se encuentran en la categoría definida como estrategia aditiva, en donde la percepción se puede considerar como un primer acercamiento cognitivo para llegar a una generalización algebraica, es importante reconocer cómo son sus percepciones, qué perciben y cómo lo perciben. Al conocer el tipo de percepciones se podrán propiciar acciones que los lleven a un segundo nivel en donde establezcan relaciones, y no solo se queden en un conteo aritmético.

El conocimiento matemático común en el campo del pensamiento algebraico se manifiesta en los procedimientos empleados al resolver cada una de las tareas de la hoja de trabajo, las cuales proporcionan información que permite reconocer especificaciones de los objetos y procesos que se activan en cada una de las categorías y, con esta base, identificar formas cómo emerge el pensamiento algebraico en los estudiantes.

Que los profesores en formación inicial entiendan y lleven al aula estas ideas no parece ser algo sencillo, posiblemente sea una tarea formativa que inicie en las Normales, pero necesariamente tendría que seguir como un proceso de formación continua para lograr transformar y hacer evolucionar las prácticas de enseñanza de las matemáticas.

REFERENCIAS

Aké, L., Mojica, J., & Ramos, B. (2015). Introducción del pensamiento algebraico en educación primaria: un reto para la educación básica en México. En P. Scott, & Á. Ruiz (Edits.), *Educación Matemática en las Américas* (Vol. 1, págs. 143–150). Comité Interamericano de Educación Matemática. https://bit.ly/3RCbcnX

Bautista-Pérez, J. L., Bustamante-Rosario, M. H., & Amaya De Armas, T. (2021). Desarrollo de razonamiento algebraico elemental a través de patrones y secuencias numéricas y geométricas. *Educación Matemática*, *33*(1), 125–152. https://doi.org/10.24844/EM3301.05

Butto, C., & Rivera, T. (2011). La Generalidad una vía para acceder al pensamiento algebraico: un estudio sobre la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo. En Consejo Mexicano de Investigación Educativa (Ed.), *Memoria Electrónica del XI Congreso Nacional de Investigación Educativa. Educación y Conocimientos Disciplinares* (pp. 1–12). Consejo Mexicano de Investigación Educativa. https://bit.ly/45aGB4b

Carpenter, T., & Levi, L. (2000). *Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades. Research Report* (Report No. NCISLA-RR-00-2). National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. https://bit.ly/45YCR6V

Castro, W., Godino, J., & Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: un desafío para la formación de maestros. En G. Gloria (Ed.), *Memorias del 12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 92–99) Gaia Ediciones.

Chávez-Ruiz, Y., De Loera, V., & Flores, F. (2021). La importancia de la lectura para la enseñanza de las matemáticas: Una experiencia desde la Investigación-acción. En S. Reyes-Carillo (Ed.), *Experiencias de investigación educativa desde las escuelas Normales* (pp. 57–83). Pie rojo Ediciones-Centro Regional de Educación Normal de Aguascalientes. https://bit.ly/46dCTYU

Chávez-Ruiz, Y., & Martínez-Rizo, F. (2018). Evaluar para aprender: Hacer más compleja la tarea a los alumnos. *Educación Matemática*, *30*(3), 211–246. https://doi.org/10.24844/EM3003.09

Kaput, J. (2000). T*ransforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power by "Algebrafying" the K-12 Curriculum. 1-21.* National Science Foundation - Office of Educational Research and Improvement. https://bit.ly/48JlXv1

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Fong Ng., S. (2016). *Early Algebra: Research into its Nature, its Learning, its Teaching*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2

Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias,* 7(3), 229–240. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5038

Malba, T. (2008). *El hombre que calculaba*. Limusa.

Martínez Rizo, F. (2020). *El nuevo oficio del investigador educativo: Una introducción metodológica*. Universidad Autónoma de Aguascalientes.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: Integración del pensamiento algebraico en Educación Primaria. *PNA, 3*(3), 135–156. https://doi.org/10.30827/pna.v3i3.6186

Moscoso, J. A. (2020). *Guía para diseñar secuencias didácticas de pensamiento matemático en educación básica* (1a ed.). SEP.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37–62. https://doi.org/10.30827/pna.v4i2.6169

Radford, L., & André, M. (2009). Cerebro, cognición y matemáticas. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 12*(2), 215–250. https://bit.ly/48zbxhp

Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética. De las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Paidós.

Secretaría de Educación Pública. (2002). *Programas y materiales de apoyo para el estudio. 2° y 3° semestre. Matemáticas y su Enseñanza I y II. Licenciatura en Educación Primaria (México)*. SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2013). P*lan de estudios 2012. Licenciatura en Educación Primaria*. SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2019). *Plan de estudios 2018. Programa del curso de álgebra. Licenciatura en Educación Primaria.* SEP. https://bit.ly/3PC8rjI

Secretaría de Educación Pública. (2022). *Álgebra. Su aprendizaje y su enseñanza*. SEP.

Universidad de Tsukuba (2023, agosto, 14). Maestros aprendiendo juntos. Implementación del estudio de clase japonés. [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=qOx0PfLT0nc

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193–215. https://doi.org/10.30827/pna.v9i3.6220

Zapatera-Llinares, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números, 97*, 51–67. https://bit.ly/3PV3iVC

Zapatera-Llinares, A. (2017). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de Generalización de Patrones. Una trayectoria de Aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *21*(1), 87–114. https://dx.doi.org/10.12802/relime.18.2114