

Argumentos variacionales de estudiantes de ingeniería en la ejecución de una melodía

Francisco Agustín Zúñiga Coronel¹

RESUMEN

Este trabajo presenta algunos argumentos variacionales en la ejecución de una melodía. La problemática que aborda se refiere a la dificultad que tienen los estudiantes al analizar ideas variacionales en contextos físicos. El objetivo es identificar argumentos variacionales de estudiantes de ingeniería civil al interactuar con una situación de aprendizaje. Como aspectos teóricos se retoman elementos de un sistema de referencia variacional y se diseña una situación de aprendizaje con dos momentos. En el momento 1 se reconoce la causalidad y la temporización con el análisis de una gráfica: nota musical respecto al tiempo. El momento 2 se centra en la comparación y la seriación para reconocer una regularidad en las notas que permitan predecir. A continuación, se construye una gráfica de variación de la nota respecto a su duración, y con base en ella se ejecuta una melodía en una aplicación de celular y en un teclado electrónico. Se concluye que los estudiantes relacionan notas con su altura. Reconocen estados intermedios en las gráficas y ejecutan el fragmento de melodía con el uso de una gráfica variacional por medio de desplazamientos.

PALABRAS CLAVE

Argumentos, Pensamiento variacional, Melodía.

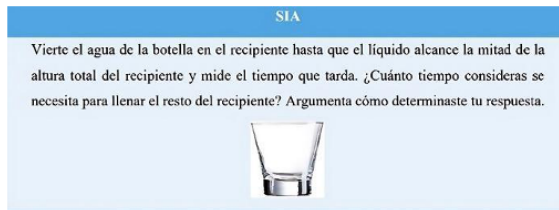
¹ maestro_coronel@hotmail.com
Universidad de Los Altos de Chiapas
<https://orcid.org/0000-0002-8340-948X>

INTRODUCCIÓN

El Pensamiento y Lenguaje Variacional aportan elementos para el estudio del cambio a través de la variación, fomentando la transversalidad de conocimientos (Secretaría de Educación Pública, 2017). En el trabajo de Caballero (2018) se analiza el llenado de recipientes mediante un sistema de referencia variacional. Por ejemplo, la Figura 1 corresponde a una situación de cambio donde se analiza la altura del líquido respecto al tiempo. Se reconoce un primer orden de variación al argumentar que la altura aumenta al transcurrir el tiempo, y un segundo orden de variación al decir que la altura aumenta cada vez más lento. Este análisis permite predecir la altura del líquido en un tiempo determinado.

Figura 1

Llenado de un recipiente



Nota. Figura retomada de Caballero (2018, p. 103)

Por su parte, Hernández (2019) estudia el comportamiento de un péndulo simple (contexto determinista) y un péndulo doble articulado (contexto caótico). En la Figura 2 se muestran diferentes máquinas de péndulos: A) péndulo simple, B) péndulo doble en reposo, C) articulación del péndulo doble, D) péndulo simple delantero y trasero. El comportamiento se analiza en cada uno de los péndulos de acuerdo con sus variaciones.

Figura 2

Máquinas de péndulos



Nota. Figura retomada de Hernández (2019, p. 51)

El análisis de circuitos eléctricos mediante un sistema de referencia variacional lo realiza Zúñiga (2020), Zúñiga et al. (2021) y Zúñiga (2022). Por ejemplo, al analizar el comportamiento de la carga eléctrica del circuito eléctrico mostrado en la Figura 3, se presenta un primer orden de variación cuando se reconoce que la luminosidad aumenta si el voltaje suministrado es mayor y disminuye si el voltaje es menor.

Figura 3

Circuito eléctrico con un led y una batería



Nota. Figura retomada de Zúñiga (2020, p. 10)

Al analizar el comportamiento del voltaje de carga de un capacitor (condensador) con los datos presentados en la Figura 4, se reconoce un primer orden de variación al argumentar que el voltaje aumenta conforme pasa el tiempo, y un segundo orden de variación al decir que el voltaje aumenta cada vez más lento.

Figura 4

Datos de medición del voltaje de carga

Tiempo en segundos	Voltaje de carga del capacitor en volts
0	0
5	1.18V
10	2.25V
15	3.20
20	4.07
25	4.84
30	5.54
35	6.17
40	6.67
45	7.24

Nota. Figura retomada de Zúñiga (2020, p. 19)

En el trabajo de López (2016) se analizan situaciones de generalización de patrones figurales y numéricos para predecir estados futuros. En la situación de la Figura 5 se pide que describan el comportamiento de los rombos respecto al número de imagen. Se pide que reconozcan el carácter estable del cambio para predecir cuántos rombos contiene la imagen 5. En este caso se agrega otra fila con 9 rombos que se suma a los rombos de la imagen an-

terior, obteniéndose 25. Por tanto, al reconocer el patrón (1, 4, 9, 16, 25, ...) se generaliza para cualquier estado futuro con la expresión:

$$n^2$$

Figura 5

Secuencia de figuras



Nota. Figura retomada de López (2016, p. 59)

En el estudio de Arciniegas y Mendoza (2022) se analiza el cambio y la variación en el contexto de consumo de datos de aplicaciones móviles, donde se identifica un comportamiento lineal en el consumo de datos de WhatsApp y Facebook, y un comportamiento no lineal en el consumo de datos de Netflix. Por su parte, Serrano–Quevedo et al. (2021) diseñan una situación de aprendizaje para el análisis de la variación en el consumo de energía eléctrica de los hogares a través de registros de representación semiótica: tabular, gráfico y algebraico.

El desarrollo del pensamiento variacional y covariacional se plantea en Thompson y Carlson (2017), donde se establecen niveles de razonamiento variacional: N1. Variable como símbolo. N2. Sin variación. N3. Variación discreta. N4. Variación bruta. N5. Variación continua gruesa. N6. Variación continua suave. Y niveles de razonamiento covariacional: N1. Sin coordinación. N2. Precoordinación de valores. N3. Coordinación gruesa de valores. N4. Coordinación de valores. N5. Coordinación continua gruesa. N6. Coordinación continua suave. Estos niveles permiten analizar comportamientos de fenómenos físicos.

Por otro lado, en el contexto musical existen diversas investigaciones, tal como la de Sánchez et al. (2006), quienes desarrollan “una herramienta automática para la segmentación de partituras musicales no manuscritas, que permite extraer pentagramas, compases y duración, y tono de las notas incluidas en ella” (p. 564). Esta herramienta procesa imágenes que posibilitan obtener líneas melódicas para el reconocimiento de patrones musicales. En el trabajo de Zúñiga et al. (2023) se hace un estudio de la música tradicional con actividades lúdicas centradas en el cambio y la variación.

Por tanto, una de las problemáticas que se reconoce es la dificultad que tienen los estudiantes al analizar ideas variacionales en contextos físicos. Esto se debe a que en el contexto escolar se priorizan prácticas algorítmicas

de naturaleza algebraica (Zúñiga et al., 2021; Cabrera & Zaldívar, 2021). En la búsqueda de contextos culturales donde se estudie el cambio y la variación se propone la ejecución de melodías, procurando la transversalidad del conocimiento al conectar las matemáticas con la música (Muñiz-Rodríguez et al., 2021; Alsina et al., 2022; Zúñiga et al., 2023). Para dicha conexión se establece la pregunta “¿qué argumentos variacionales generan estudiantes de ingeniería civil al ejecutar una melodía?” con el objetivo de identificar argumentos variacionales al interactuar con una situación de aprendizaje en un contexto musical.

ASPECTOS TEÓRICOS

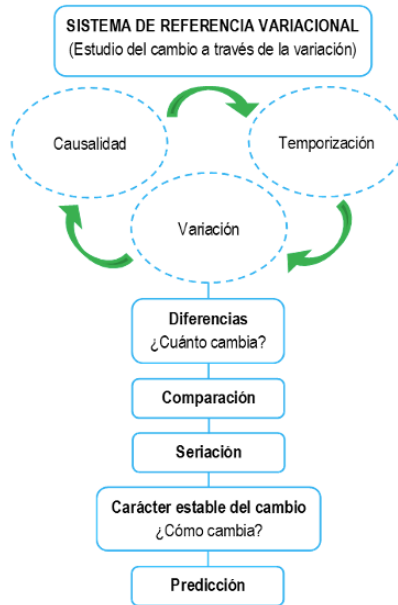
El Pensamiento y Lenguaje Variacional (abreviado como PyLVar) es una forma de pensamiento y una línea de investigación que se encarga del estudio del cambio a través de la variación (Cantoral, 2019). El cambio se asume como la modificación que sufre una variable, y la variación como la cuantificación del cambio y su comportamiento. Entonces, para el estudio del cambio a través de la variación se requiere de un sistema de referencia variacional (Caballero, 2018). Los elementos de dicho sistema se muestran en la Figura 6.

En este sistema, la causalidad se refiere a la relación entre dos variables, es decir, en reconocer qué cambia y respecto de qué cambia. Seguido, se considera la temporización al identificar estados intermedios en las variables relacionadas. Estos estados son valores que toma la variable (algo que cambia). Para procesar el cambio se requiere de estados y comparaciones (Cantoral, 2019). Al tener dos o más estados identificamos un estado posterior y un estado anterior para calcular diferencias con la expresión:

$$\text{Estado posterior} - \text{estado anterior}$$

Estas diferencias indican cuánto cambian las variables para cada dos estados. Ahora bien, al realizar la comparación entre dos estados se reconoce que, si el estado posterior es mayor que el estado anterior, la variable aumenta. Si el estado posterior es menor que el estado anterior, la variable disminuye. Al hacer la seriación (análisis de comparaciones) se reconoce el carácter estable del cambio, es decir, una regularidad en los cambios (cómo cambia). Entonces, el análisis de la variación permite reconocer si la variable aumenta o disminuye. Al identificar esta regularidad se pueden predecir estados futuros de la variable analizada. Por lo tanto, el PyLVar considera a la comparación, la seriación y la predicción como prácticas variacionales que permiten analizar comportamientos.

Este sistema representa un ciclo que comienza con la relación entre dos variables (causalidad), el reconocimiento de estados intermedios (temporización) y el comportamiento de las variables (variación).

Figura 6*Elementos de un sistema de referencia variacional*

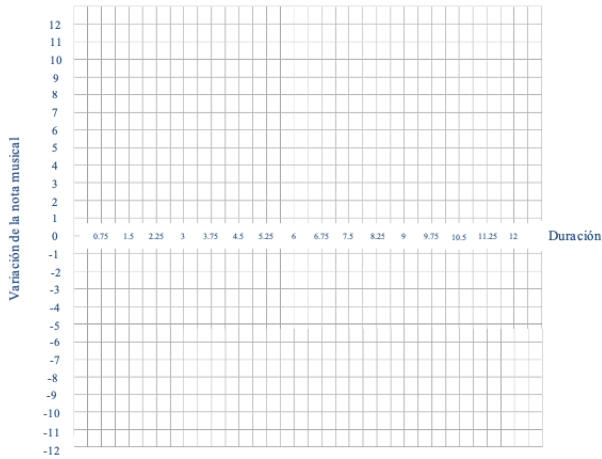
Nota. Figura adaptada de Zúñiga (2022, p. 21)

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Se diseña una situación de aprendizaje basada en conceptos de teoría musical: notas y figuras musicales, escala cromática, partitura, altura y duración de notas (Garza, 2013). Dicha situación se conforma por dos momentos. El momento 1 tiene la intención de que los estudiantes escuchen una melodía e identifiquen notas musicales en un fragmento de partitura. A continuación, construyen una gráfica de notas musicales respecto al tiempo, donde se reconoce qué cambia y respecto a qué lo hace, además de estados intermedios en las variables relacionadas. En el momento 2 se indica el Do central como la nota de referencia para reconocer notas posteriores a esta. Se construye una tabla de comparaciones con la intención de analizar la variación, es decir, si la nota aumenta (más aguda) o si disminuye (más grave). Se hace la seriación (análisis de comparaciones) para reconocer el carácter estable del cambio y se realiza la predicción de la siguiente nota musical del fragmento. Seguido, se construye una gráfica de variación de la nota respecto a su duración. Esta gráfica se usa para la ejecución del fragmento en una aplicación de celular y en un teclado electrónico, respectivamente. La situación de aprendizaje se implementó con seis estudiantes de ingeniería civil de la Universidad de Los Altos de Chiapas (véase la Figura 7), con quienes se formaron dos equipos de tres participantes.

B. Predice la siguiente nota musical del fragmento. Describe tu procedimiento

C. Con base en la Tabla 2, construye la gráfica de variación de la nota musical respecto a su duración.



D. Con base en la gráfica anterior, ejecuta la melodía con la App de piano virtual (figura 10).

Figura 10

App de piano virtual



Do central

E. Con base en la gráfica anterior, ejecuta la melodía en el teclado electrónico (figura 11).

Figura 11

Teclado electrónico



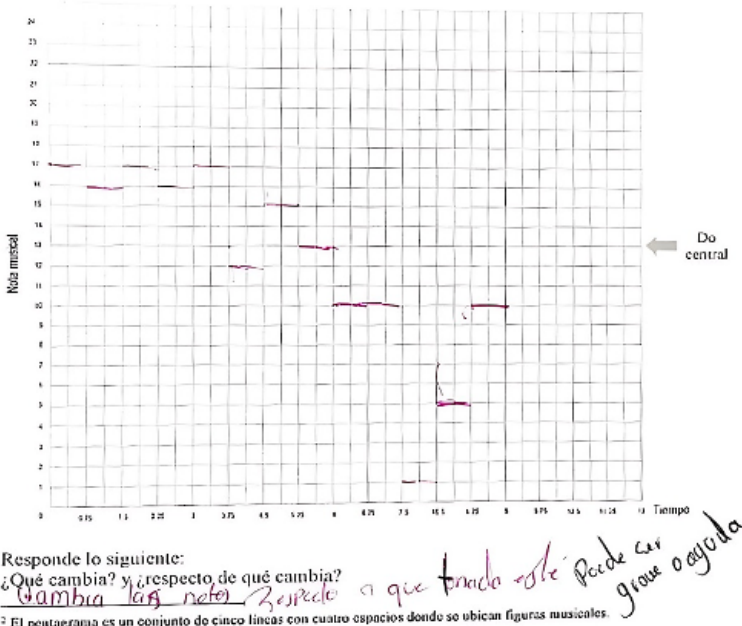
F. Escucha de nuevo la melodía y verifica tu predicción.

Discusión del momento A

Al inicio, los estudiantes escuchan, en varias ocasiones, la melodía “Para Elisa” a través de un celular. Después, visualizan el fragmento de partitura y codifican cada nota musical. Seguido, ubican el espacio o la línea del pentagrama en el que se encuentra la nota. Los resultados del equipo 1 se muestran en la Figura 12, e indican que el número 17 representa la nota Mi ubicada en el cuarto espacio del pentagrama. El número 16 representa al Re# ubicado en la cuarta línea del pentagrama con una alteración. Las siguientes son: Mi(17), Re#(16), Mi(17), Si(12), Re(15), Do(13), La(10), Do(1), Mi(5) y La(10). Reconocen la relación de las notas respecto a su altura (grave o aguda). Identifican estados intermedios al colocar las notas en el sistema coordinado. Los segmentos que se colocan representan la duración de las notas.

Figura 12

Resultados del equipo 1

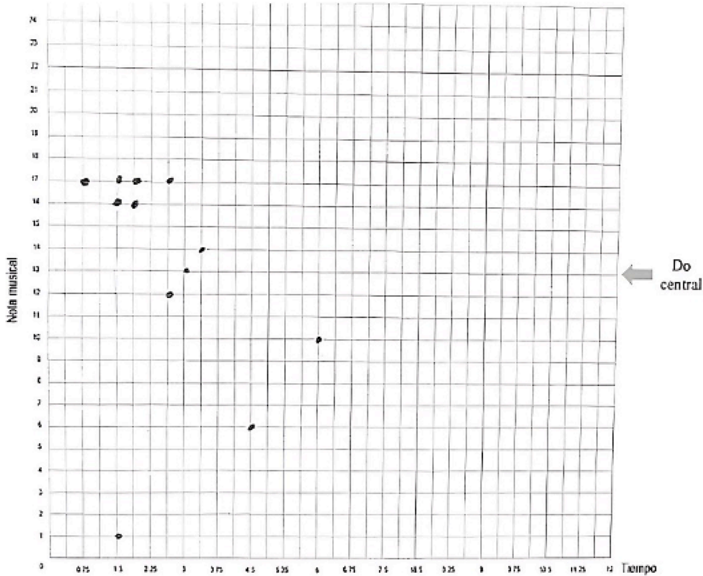


Los resultados del equipo 2 se muestran en la Figura 13. Se observa que colocan puntos por cada nota musical. La primera nota la codifican con el número 17, correspondiente a un Mi colocado en 0.75 segundos. A los 1.5 segundos colocan tres notas juntas: Mi(17), Re#(16) y Do(1). Después, colocan dos notas juntas: Mi(17) y Re#(16). Seguido, colocan otras dos notas juntas, y de ahí nota por nota. Presentan dificultades para construir la gráfica debido a que en la partitura no se establecen notas juntas. Ellos argumentan que las alineaciones en el pentagrama cambian respecto a los

puntos en el sistema coordenado. En este caso, colocan puntos que indican la duración de la nota y no segmentos. Identifican estados intermedios al situar estos puntos en el sistema coordenado.

Figura 13

Resultados del equipo 2



Responde lo siguiente:

¿Qué cambia? y ¿respecto de qué cambia?

cambia las alineaciones con respecto a los puntos

² El pentagrama es un conjunto de cinco líneas con cuatro espacios donde se ubican figuras musicales.

Discusión del momento B

En la Figura 14 se observa que los estudiantes colocan valores numéricos que representan las notas posteriores al Do central. Realizan comparaciones al colocar el signo de mayor que y menor que. Se confunden al indicar que el 15 es menor que 13, y el 13 es menor que 13, y no argumentan que el 15 es mayor que 13 y el 13 es igual que 13. Reconocen que, si la nota posterior es mayor que el Do central, esta aumenta (más aguda), y si la nota posterior es menor que el Do central, esta disminuye (más grave). Al calcular las diferencias, obtienen valores positivos y negativos, si el valor es positivo significa que la nota posterior es más aguda, y si es negativo, la nota posterior es más grave. La duración de cada nota se identifica de acuerdo con los significados de la Tabla 1. Si la figura es una corchea tiene una duración de 0.75 segundos, y si la figura es una negra, tiene una duración de 1.5 segundos. Con la Tabla 2 se analiza la variación de las notas.

Figura 14

Resultados del equipo 1

Nota posterior	Es mayor, menor o igual que	Do central	La nota aumenta (más aguda) o disminuye (más grave)	¿Cuánto cambia?	Duración de la nota posterior <i>en segundos</i>
17	>	13	ma ^s aguda	4	0.75
16	>	13	ma ^s aguda	3	0.75
17	>	13	ma ^s aguda	4	0.75
14	>	13	ma ^s aguda	3	0.75
17	>	13	ma ^s aguda	4	0.75
12	<	13	grave	-1	0.75
15	<	13	grave	-2	0.75
13	=	13	grave	0	0.75
10	<	13	ma ^s grave	-3	1.5
5	<	13	ma ^s grave	-12	0.75
5	<	13	ma ^s grave	-8	0.75

En la Figura 15 se observa que los estudiantes colocan los nombres de las notas y no los valores numéricos que representan las notas posteriores al Do central. Establecen notas menores, mayores e iguales al Do central. Argumentan que, si la nota posterior es mayor que el Do central, esta es aguda, y si la nota posterior es menor que el Do central, esta es grave. Calculan diferencias y obtienen valores positivos y negativos. Si el valor es positivo significa que la nota posterior es más aguda, y si es negativo, la nota posterior es más grave. También identifican la duración de cada nota de acuerdo con los significados de la Tabla 1.

Figura 15

Resultados del equipo 2

Nota posterior	Es mayor, menor o igual que	Do central	La nota aumenta (más aguda) o disminuye (más grave)	¿Cuánto cambia?	Duración de la nota posterior
Mi	Mayor	13	Aguda	4	0.75
Re #	Mayor	13	Aguda	3	0.75
Mi	Mayor	13	Aguda	1	0.75
Re #	Mayor	13	Aguda	3	0.75
Mi	Mayor	13	Aguda	4	0.75
S,	Menor	13	Grave	-1	0.75
Do	Mayor	13	Aguda	2	0.75
Do	Igual	13	Aguda	0	1.50
La	Menor	13	Grave	-3	0.75
Do	Menor	13	Grave	-12	0.75
Mi	Menor	13	Grave	-8	0.75
La	Menor	13	Grave	-3	0.75

La predicción no la realizan con el análisis de las comparaciones. Ellos detectan, auditivamente, la repetición de la nota (Figura 17), en este caso con la nota Mi.

Figura 17

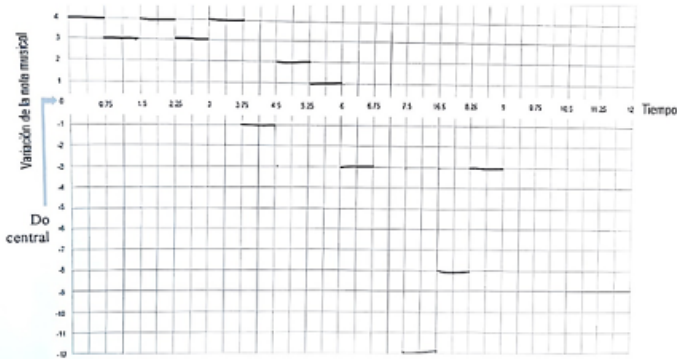
Predicción

Predice la siguiente nota musical del fragmento A. Un "Mi" ya que por como suena al interpretar la podría decir que sigue un fragmento similar al del inicio, el cual inicia con esa nota.

Ahora bien, la “gráfica variacional” que construye el quipo 1 se muestra en la Figura 18, donde se visualiza que colocan los valores positivos por encima del eje x y los valores negativos por debajo del eje x . Esta gráfica indica desplazamientos hacia arriba y hacia abajo. Al Do Central le corresponde el valor 0, ya que no presenta ningún desplazamiento. El tamaño de los segmentos significa la duración de las notas musicales. Por lo tanto, la gráfica representa la relación: variación de la nota musical respecto a su duración.

Figura 18

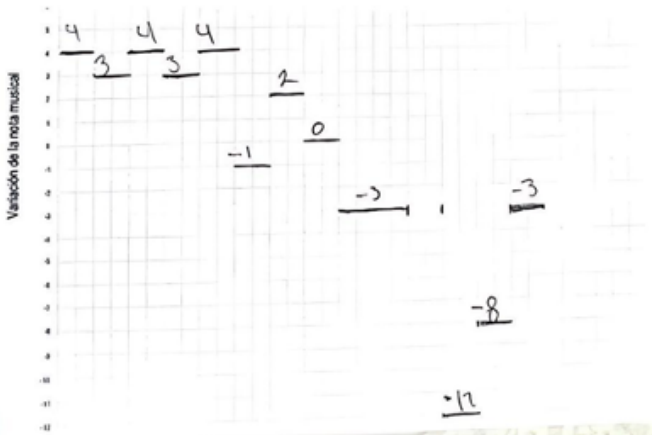
Gráfica variacional del equipo 1



Por su parte, el equipo 2 también coloca los valores positivos por encima del eje x y los valores negativos por debajo del eje x (véase la Figura 19). El tamaño de los segmentos indica la duración de las notas. En este caso, los estudiantes colocan números encima de cada segmento para identificar desplazamientos hacia arriba o hacia abajo. Este tipo de gráficas se denomina “gráfica variacional”.

Figura 19

Gráfica variacional del equipo 2



En los resultados de la Figura 20 se observa que los estudiantes tienen incertidumbre al tocar el instrumento virtual y el electrónico. Al inicio ubican la nota de referencia (Do central), y con el uso de la “gráfica variacional” ejecutan los desplazamientos planteados. Es decir, si el primer desplazamiento es 4 significa pulsar la tecla ubicada cuatro semitonos del Do central, y si el desplazamiento es -8 significa pulsar la tecla ubicada ocho semitonos a la izquierda del Do central. Este procedimiento implica tocar una nota a la vez, que con la práctica ejecutan el fragmento de la melodía.

Figura 20

Interacción con el teclado virtual y el teclado electrónico



CONCLUSIÓN

El sistema de referencia variacional permite analizar la forma en que los estudiantes comprenden el comportamiento de las notas musicales. La causalidad permite reconocer argumentos variacionales al relacionar dos variables, es decir, las notas cambian respecto a su altura (aguda o grave), y las posiciones en el pentagrama cambian respecto a los puntos en el sistema coordenado. Los estudiantes identifican estados intermedios al colocar puntos en el sistema coordenado, permitiéndoles construir la gráfica de notas musicales respecto al tiempo. Ubican la nota de referencia (Do central) y hacen la comparación con notas posteriores. Esto permite identificar argumentos, tales como que si la nota posterior es mayor que el Do central, esta es aguda, y si la nota posterior es menor que el Do central, esta es grave.

La variación se reconoce al construir la “gráfica variacional” por medio de desplazamientos. Para tal construcción se calculan diferencias donde los argumentos que se identifican son: si la diferencia es positiva, entonces la nota posterior es más aguda, y si la diferencia es negativa, la nota posterior es más grave; además de otros argumentos como: si las diferencias son positivas, significa desplazamientos a la derecha, y si son negativas, significan desplazamientos a la izquierda. También señalan que el tamaño de los segmentos, en el sistema coordenado, representa la duración de las notas. Después, con la gráfica de variación de la nota respecto a su duración ejecutan el fragmento de la melodía al teclear los desplazamientos (izquierda y derecha) con relación al Do central.

Cabe señalar que los estudiantes presentan dificultades al predecir la nota musical debido a que no reconocen su regularidad. Ellos predicen, de manera auditiva, con la repetición de la nota. Por tanto, en este trabajo se identifican algunos argumentos variacionales en la ejecución de una melodía. Se pueden rediseñar algunas actividades con la intención de reconocer la regularidad en las notas para la identificación de otros argumentos; así como hacer uso de diferentes recursos tecnológicos (generador de partituras, mezcladores de música, analizador de frecuencias, secuenciadores, entre otros) donde se analicen comportamientos en las notas musicales.

REFERENCIAS

- Alsina, A., Contreras, M., & Reyes, J. (2022). Matemáticas en contexto en Educación Primaria: conexiones con el entorno y la música. *UNIÓN*, 18(64), 1–20. <https://bit.ly/3FHVhx4>
- Arciniegas, H., & Mendoza, E. (2022). Desarrollo de la práctica variacional de seriación en el estudio de la variación constante para un grupo diverso. En M. Márquez, J. Lugo-Armenta, S. Retamal, J. García, & G. Morales. (Eds.), *Extensos del XXVI Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 86–90). ULagos-Sochiem. <https://bit.ly/3sg53n8>
- Caballero, M. (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional* [Tesis de doctorado, Cinvestav]. <https://bit.ly/3shL3R6>
- Cabrera, L., & Zaldívar, J. (2021). Esquema de desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. En R. Flores, H. S. Sostenes González, E. R. Granados Martínez, M. C. Ocampo-Arenas, L. C. Agudelo Palacio, & D. M. Escobar Franco (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 34(2), 189–199. <https://bit.ly/45QXXDq>
- Cantoral, R. (2019). *Caminos del saber: pensamiento y lenguaje variacional*. Gedisa.
- Garza, S. (2013). *Curso básico de teoría musical*. Trillas.
- Hernández, J. (2019). *Elementos para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional entre estudiantes de bachillerato: el caso de “lo errático”* [Tesis de doctorado, Cinvestav]. <https://bit.ly/3QGMhmV>
- López, L. (2016). *Generalización de patrones. Una trayectoria Hipotética de Aprendizaje basada en el Pensamiento y Lenguaje Variacional* [Tesis de maestría, Cinvestav]. <https://bit.ly/46VWsVV>
- Muñiz-Rodríguez, L., Pérez-Fernández, R., Ramos-Guajardo, A., Rodríguez, N., & Vigil, E. (2021). La enseñanza de las matemáticas y la música a través de un escape room: una propuesta para fomentar el aprendizaje interdisciplinar. *NÚMEROS*, 108, 309–330. <https://bit.ly/47djCGN>

- Sánchez, A., Pantrigo, J., & Pérez, J. (2006). Extracción de líneas melódicas a partir de imágenes de partituras musicales. En A. Fernández-Caballero, M. G. Manzano, E. Alonso, & S. Miguel (Eds.), *Una Perspectiva de la Inteligencia Artificial en su 50 aniversario* (Vol. II, pp. 564–569). Universidad de Castilla-La Mancha. <https://bit.ly/46Uibxr>
- Secretaría de Educación Pública. (2017). *Planes de Estudio de Referencia del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior*. SEP. <https://bit.ly/47g7cOx>
- Serrano-Quevedo, B. N., Zúñiga, F., & Acevedo, M. (2021). *Módulo de Pensamiento Variacional, Situación de aprendizaje: Variación lineal. Equipo Académico Empoderamiento Docente y Programa Trayecto Matemáticas-Fortalecimiento Docente de Grupo Techint*. <https://bit.ly/49kbOF9>
- Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics. <https://bit.ly/3Sp2gTb>
- Zúñiga, F. (2020). Un análisis del sistema de referencia variacional en un contexto de circuitos eléctricos con estudiantes de nivel superior. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 5, 1–22. <https://doi.org/10.46618/iime.76>
- Zúñiga, F., Muñoz, G., & Morales, E. (2021). Fundamentos para diseñar situaciones de aprendizaje a través de la variación: simulación del comportamiento de un capacitor. En A. Rosas (Ed.), *Avances en Matemática Educativa. Actividad Docente* (pp. 79–96). Lectorum. <https://bit.ly/3tXLxfE>
- Zúñiga, F. (2022). Una mirada de la Serie de Taylor mediante un sistema de referencia variacional en contexto de predicción en circuitos eléctricos. *El Cálculo y su enseñanza. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, 18(2), 15–40. <https://doi.org/10.61174/recacym.v18i2.181>
- Zúñiga, F., Velasco, E., Gamboa, K., & Díaz, G. (2023). Acercamiento a la música tradicional con actividades lúdicas centradas en el cambio y la variación. *Uno. Didáctica de las Matemáticas*, 100, 54–62.