

Recurso educativo abierto sobre la noción de conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales de 2×2

Wendy Falina Espinosa Flores ¹ 

María Guadalupe Vera Soria ² 

María S. García González ³ 

Resumen

Se describe el desarrollo y aplicación del Recurso Educativo Abierto (REA) “Pensemos en Sistemas”, cuyo objetivo es apoyar el aprendizaje del concepto de conjunto solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) de 2×2 en estudiantes de bachillerato. Las actividades didácticas del recurso, que incluyen videos y applets de GeoGebra, promueven diferentes formas de ver la noción y se diseñan con base en el modelo de los Modos de Pensamiento Sintético-Geométrico, Analítico-Aritmético y Analítico-Estructural. La metodología para elaboración del REA corresponde al diseño instruccional de Análisis, Diseño, Desarrollo, Implementación y Evaluación (ADDIE). Los resultados de una primera implementación muestran que las actividades de exploración conceptual del REA apoyaron para la articulación de diferentes modos de pensar la noción de solución de SEL por parte de los estudiantes, quienes indicaron, a través de una encuesta de opinión, valorar positivamente el material por su contenido, presentación y funcionalidad.

Palabras clave

Conjunto Solución, sistemas de ecuaciones lineales, modos de pensar, recurso educativo en abierto

¹ wendy.espinosa@academicos.udg.mx
Universidad de Guadalajara

² guadalupe.vera@academicos.udg.mx
Universidad de Guadalajara

³ msgarcia@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero

Espinosa Flores, W., Vera Soria, M. G., & García González, M. S. (2025). Recurso Educativo Abierto sobre la noción de conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 . En C. M. Orozco Rodríguez, M. G. Vera Soria, A., M. S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Recursos Educativos en Abierto basados en Metodologías Activas para la Enseñanza de las Ciencias* (pp. 173–182). Editorial SOMIDEM.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S2/2025/02-12>

Introducción

El aprendizaje de Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) es importante para entender otros conceptos de álgebra lineal, como combinaciones lineales, dependencia/independencia lineal, bases, transformaciones lineales y valores, y vectores propios, así como para otras materias en matemáticas, como son geometría analítica, cálculo, ecuaciones diferenciales, y otras. Así mismo, los SEL son trascendentes por su aplicación en la solución de problemas del área de ingeniería, como para el estudio de señales, la programación lineal, la industria aérea, la detección de sismos, entre otras (Lay, 2013).

En este capítulo se describe el proceso de creación del Recurso Educativo Abierto (REA) “Pensemos en Sistemas” para el aprendizaje del concepto de solución de SEL de 2×2 y su implementación con estudiantes de bachillerato. Este REA pretende apoyar al desarrollo de las competencias disciplinares básicas de matemáticas de nivel medio superior, entre ellas se señala que los estudiantes deben “construir e interpretar modelos matemáticos mediante procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales” (SEP, 2008, p. 5).

Construcción del REA

Análisis

Algunas investigaciones muestran que los estudiantes tienen complicaciones para comprender el significado del concepto de conjunto solución de SEL, para interpretar la información geométrica asociada a los sistemas y para relacionarla con las expresiones algebraicas; además, presentan dificultades para construir el proceso de reducción de un sistema y para resolver problemas (Cutz, 2005; Manzanero, 2007; Rodríguez et al., 2022). Así mismo, existe evidencia de que las problemáticas en la construcción de los conceptos de SEL de dos incógnitas y su conjunto solución persisten aun cuando los estudiantes han avanzado en estudio de SEL en el nivel superior (Ochoviet, 2009).

El REA “Pensemos en Sistemas” contiene actividades para apoyar el aprendizaje de estudiantes de bachillerato, que incluyen el uso de dos applets de GeoGebra y videos didácticos para establecer las características esenciales de los objetos matemáticos de ecuación de la recta, SEL y conjunto solución de SEL. El diseño de las actividades didácticas del REA se fundamenta en el modelo teórico de los Modos de Pensamiento Sintético–Geométrico (SG), Analítico–Aritmético (AA) y Analítico–Estructural (AE) (Sierpinska, 2000), con el fin de propiciar diferentes formas de ver y entender la noción.

La herramienta digital elaborada se pone a disposición de profesores y estudiantes de nivel medio superior como apoyo de un curso presencial, con

videos, applets, materiales informativos y cuestionarios que pueden llevarse a cabo de manera asincrónica; posteriormente, permite discutirse en clase, propiciando el diálogo en la construcción del concepto de conjunto solución de SEL.

Diseño de las actividades

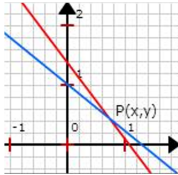
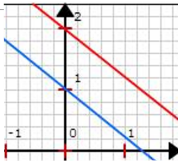
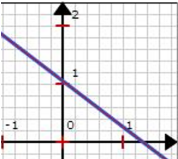
Fundamentación teórica

El diseño instruccional de las actividades del REA se sustenta en el modelo teórico de los modos de pensamiento de Sierpinska (2000). A partir de los hallazgos en sus experimentos sobre las dificultades en el aprendizaje del álgebra lineal, esta autora describe la presencia de tres categorías de modos de pensamiento: Sintético–Geométrico (SG), Analítico–Aritmético (AA) y Analítico–Estructural (AE), identificados también en el desarrollo histórico del álgebra lineal.

Cada uno de los modos de pensamiento utiliza su propio sistema de representaciones. El concepto de conjunto solución de SEL de 2x2 puede ser presentado de tres formas: (1) Tiene un significado geométrico al visualizar la posición de dos rectas en el plano y su punto (o infinitos puntos) de intersección; (2) Puede presentarse a través de diferentes métodos de solución de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (reducción, igualación, sustitución); y (3) De forma estructural, mediante los determinantes de las variables del sistema, como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1

Modos de pensar la solución de un Sistema de Ecuaciones de 2x2

	Sintético-Geométrico	Analítico-Aritmético	Analítico-Estructural
Solución única		$\begin{cases} x + 3y = 9 \\ -2x + y = -4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 6y = 18 \\ -2x + y = -4 \end{cases}$ $7y = 14$ $y = 2$ $x + 3(2) = 9$ $x = 9 - 6$ $x = 3$	$ax + by = c$ $dx + ey = f$ $\Delta s = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$ $\Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}$ $\Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$
Sin solución		$\begin{cases} -2x + y = 3 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -4x + 2y = 6 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$ $0x + 0y = 8$ $0 = 8$	$x = \frac{\Delta x}{\Delta s}$ $y = \frac{\Delta y}{\Delta s}$ Con respecto a la solución del sistema: • Tiene una solución única si y solo si $\Delta s = a e - b d \neq 0$
Infinitas soluciones		$\begin{cases} 4x - 2y = 6 \times (-3) \\ 6x - 3y = 9 \times 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -12x + 6y = -18 \\ 12x - 6y = 18 \end{cases}$ $0x + 0y = 0$ $0 = 0$	• No tiene solución o tiene un número infinito de soluciones, si y solo si $\Delta s = a e - b d = 0$

Organización de las Actividades

Las actividades del REA se organizaron en cuatro secciones: Introducción, Lo que ya sabes, Solución de SEL de 2x2 y ¿Qué aprendimos? Cada sección incluye actividades que atienden los procesos cognitivos que se describen en la Tabla 2

Tabla 2
Organización de las actividades del REA

Apartado del REA	Proceso cognitivo	Recurso/Actividad
Introducción	✓ Informar objetivos. ✓ Dirigir atención hacia lo que se quiere enseñar	1. Se presentan los objetivos
Lo que ya sabes	✓ Estimular el recuerdo de conocimientos previos. ✓ Promover la realización de actividades en los diferentes modos de pensamiento.	2. Actividad de rellenar huecos sobre conceptos de ecuación de la recta 3. Actividad sobre la ecuación de la recta con un REA externo 4. Applet GeoGebra sobre ecuación de la recta y actividades asociadas 5. Actividad de relación: gráfica - ecuación de la recta
Solución de SEL de 2x2	✓ Presentar la información. ✓ Promover la realización de actividades en diferentes modos de pensamiento	6. Presentación sobre métodos de resolución de SEL 7. Actividad de retroalimentación: métodos de resolución 8. Actividad sobre los métodos de solución de sistemas de ecuaciones con apoyo de un REA externo 9. Video sobre tipos de solución de SEL 2 x 2 10. Cuestionario acerca del video de tipos de solución 11. Video sobre regla de Cramer 12. Cuestionario acerca del video de regla de Cramer 13. Applet de GeoGebra sobre sistemas de ecuaciones y actividades asociadas
¿Qué aprendimos?	✓ Proveer retroalimentación.	14. Cuestionario de SEL 2 x 2

Desarrollo digital de las actividades

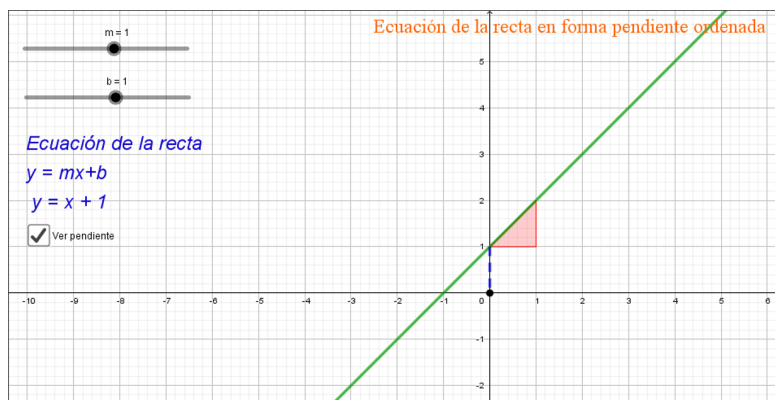
Se eligió la plataforma eXeLearning para el almacenamiento y distribución de las actividades didácticas por ser una herramienta digital de código

abierto con interfaz gráfica que brinda la facilidad de incrustar diversos recursos, en este caso formularios de Google, applets de GeoGebra y videos de YouTube para compilarlos como página web.

El apartado de Lo que ya sabes es una sección en la que se recuperan los conocimientos previos y cuenta con tres subtemas: Pendiente de una recta, Ecuación de una recta y ¿Cómo resuelvo un SEL? En particular, en el subapartado Pendiente de una recta se incluye un applet de GeoGebra que se diseñó para que los estudiantes identificaran el efecto gráfico de la variación de los parámetros m y b en la ecuación de la recta (Figura 1). Este recurso, que se incrustó en la plataforma ExeLearning mediante código html, incluye también un documento con instrucciones para desarrollar la actividad titulada Pendiente de una recta, que se integró en formato PDF. Esta actividad tenía el objetivo de que los estudiantes analizaran la relación entre el modo SG de la recta con los parámetros de la ecuación en el modo AA.

Figura 1

Actividad Pendiente de una recta en GeoGebra



En el apartado de Solución de SEL se incluyeron tres subtemas: Tipos de solución, Método de Cramer y Sistemas de ecuaciones. Las actividades en estas tres secciones se elaboraron para propiciar la exploración del concepto de solución de SEL mediante los materiales y recursos del REA.

Por ejemplo, en los subapartados Tipos de solución y Método de Cramer se incluyeron dos videos en los que se explican las características de SEL con dos variables que tienen diferentes tipos de solución. Así mismo, se agregaron dos cuestionarios que contienen preguntas de reflexión acerca del contenido de los videos.

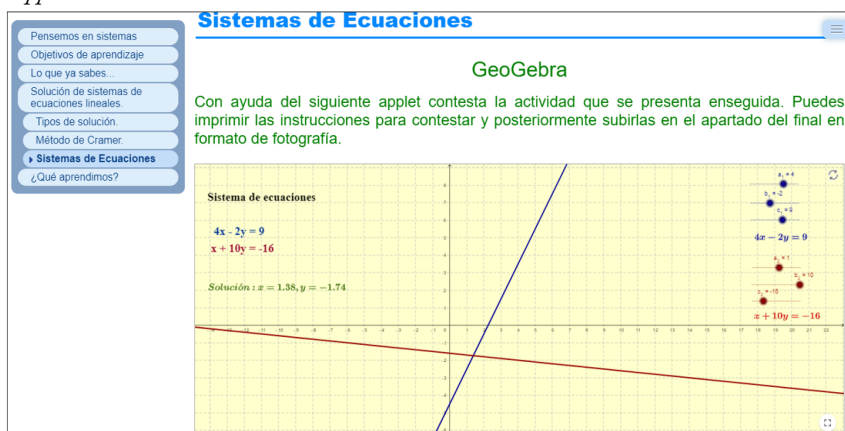
Para la construcción de los videos se preparó un guion que incluyó la representación de los diferentes tipos de solución de sistemas de ecuaciones

mediante diversos modos de pensamiento SG, AA y AE de SEL. Para editarlos se utilizaron los programas Powtoons y Filmora.

El subapartado de Sistemas de ecuaciones contiene un applet de GeoGebra acerca de SEL y una actividad que tiene el propósito de poner a disposición de los estudiantes objetos de análisis (las ecuaciones y sus representaciones gráficas) para ayudarlos a precisar el contenido del concepto de solución de SEL, de tal forma que se puedan establecer las características de los sistemas que tienen, ya sea solución única, infinitas soluciones o sin solución (Figura 2). Mediante la interacción con los objetos del applet, se pretendía que los estudiantes relacionaran la representación en el modo SG con el modo AA de los SEL, y así pudieran distinguir las características de sistemas que se corresponden a los diferentes tipos de solución (modo AE).

Figura 2

Applet de actividad de sistemas de ecuaciones con GeoGebra



Nota. Disponible en: https://depmate.cucei.udg.mx/REA_Sistemas_Ecuaciones_Lineales

Implementación

La implementación de la propuesta se llevó a cabo en tres sesiones en línea mediante la plataforma de videoconferencias Google Meet, con 15 estudiantes de segundo semestre de bachillerato de una institución privada de la ciudad de Villa de Álvarez, Colima. Los estudiantes trabajaron con las actividades, videos, applets de GeoGebra y cuestionarios incluidos en el REA y entregaron las evidencias correspondientes de forma digital. A continuación se describe la manera en que dos de las preguntas del cuestionario final fueron evaluadas para determinar los modos de pensar la solución de SEL que los estudiantes reconocieron mediante el uso del REA.

Como ejemplo de la evidencia recolectada sobre la construcción del significado del concepto de solución de SEL, se presentan las respuestas

que uno de los estudiantes, etiquetado como E9, contestó en el cuestionario final. En la pregunta uno del cuestionario, que solicita resolver tres sistemas de ecuaciones e indicar el conjunto solución de cada uno, E9 calcula el valor del determinante del sistema y compara la relación entre los coeficientes de ambas ecuaciones para argumentar sobre el tipo de solución de los sistemas. E9 realizó procedimientos con la intención de anticipar el tipo de solución del sistema y describir la naturaleza del conjunto solución del SEL. La Figura 3 muestra evidencia de la articulación de los modos de pensamiento AA y AE de SEL en las respuestas de E9, debido a que utiliza el modo SG cuando identifica que las rectas son paralelas o se sobreponen gráficamente para los casos en que el sistema no tiene solución o tiene infinitas soluciones, además de argumentar la relación entre los coeficientes del sistema.

Figura 3

Respuesta en el inciso c de la pregunta 1 de E9

$\begin{cases} 9x + 3y = -6 \\ 3x + y = -2 \end{cases}$	Conjunto solución: $(x, -2-3x)$
Procedimiento: Si dividimos la primera ecuación entre 3, nos queda $3x + y = -2$, siendo exactamente igual a la segunda ecuación. Por lo tanto es la misma recta y se sobreponen al graficarse, teniendo infinitas soluciones. $y = -2 - 3x$	

En particular, en el sistema con infinitas soluciones, E9 identificó la equivalencia entre las ecuaciones y despejó la variable y para especificar el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales.

En cuanto a las respuestas de E9 a la pregunta 4, en la que se solicitó plantear un sistema de ecuaciones a partir de sus representaciones gráficas, se verifica la relevancia de reconocer las características de una recta de la forma para interpretación de la solución de un sistema de ecuaciones de dos variables (Figura 4).

Figura 4

Respuesta a la pregunta 4 de E9

	$\begin{cases} x - 8y = 10 \\ -3x + 24y = -3 \end{cases}$	Los coeficientes a, b de ambas ecuaciones son equivalentes entre sí, por tanto la pendiente es la misma. Siendo el coeficiente c de ambas ecuaciones diferente entre sí, las rectas están separadas por distinto valor de la ordenada al origen, quedando un par de rectas paralelas.
	$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$	Al no ser a, b y c de ambas ecuaciones equivalentes entre sí, resultará un sistema de ecuaciones con solución única. Y resolviéndose el sistema de ecuaciones se llega a la solución (1,3), comprobándose que dará solo una solución. La primera ecuación es de tipo descendente por su pendiente negativa (ejemplificará a la recta azul) y la segunda ecuación es de tipo ascendente por su pendiente positiva (ejemplificará a la recta roja).

En los casos anteriores, E9 plantea un sistema de ecuaciones adecuado e incluye una justificación que se apoya en la comparación de los coeficientes de las ecuaciones del sistema y la relación que percibe con las pendientes y ordenadas al origen de las rectas que los conforman. De esta forma, el estudiante establece las ecuaciones de los sistemas y considera el valor de la pendiente y ordenada al origen de las rectas; a pesar de no haber un plano cartesiano de referencia, señala la relación existente entre los coeficientes del sistema para garantizar la existencia o no de la solución.

Con lo anterior, se interpreta que el estudiante E9 dio evidencia de comprender el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables mediante los tres modos de pensamiento SG, AA y AE, es decir, pudo identificar el valor o valores que satisfacen simultáneamente a las dos ecuaciones de un sistema, no sin antes haber entendido la relación en los modos analítico y sintético de las rectas de la forma . A partir de ahí, se asoció este conocimiento para comparar los coeficientes de las ecuaciones del sistema (AE) y los resultados de los procedimientos algebraicos en los métodos de solución (AA) con la representación gráfica de la solución del sistema, donde se verifica el punto o puntos en común de las rectas que conforman el sistema (SG).

Evaluación

Con el objetivo de verificar el grado de satisfacción y la opinión de los estudiantes respecto al contenido, la presentación de la información y la funcionalidad del REA “Pensemos en Sistemas”, se diseñó una encuesta basada en el instrumento elaborado por Collazos et al. (2007). Esta herramienta es utilizada para valorar contenidos educativos de objetos de aprendizaje a través de preguntas de tres diferentes categorías: psico-pedagógica, didáctico-curricular y funcional.

Con base en las respuestas en una escala Likert, se identificó que la mayoría estuvo de acuerdo en considerar que el material presentado fue un buen complemento para entender el tema de sistemas de ecuaciones, así como que los videos y los applets apoyaron su aprendizaje. Específicamente en la categoría psico-pedagógica, en la que se preguntó a los estudiantes si el material era atractivo, comprensible y útil, el 93% de ellos señaló estar satisfechos, y sólo el 7% opinaron estar Parcialmente en desacuerdo.

Por otra parte, en la categoría didáctico-curricular se indagó sobre la opinión de los estudiantes respecto al contenido del REA y su utilidad para apoyar el aprendizaje. Aquí, 97% mencionaron estar de acuerdo y el 3% Parcialmente en desacuerdo en dichos aspectos. Finalmente, en la categoría de funcionalidad, el 90% señaló estar satisfecho sobre el manejo de los videos, los applets y el tiempo destinado al trabajo con la herramienta, mientras que el 10% estuvo Parcialmente en desacuerdo. En cuanto al tiempo

destinado al trabajo con el REA, los estudiantes opinaron que éste no fue suficiente, debido posiblemente al tiempo invertido en la revisión de material complementario sobre los antecedentes de métodos de solución y funciones lineales, o a las dificultades que enfrentaron por el trabajo en línea.

Conclusiones

Se desarrolló y evaluó el REA “Pensemos en sistemas” para apoyar el aprendizaje del concepto de conjunto solución de SEL con dos variables. Los recursos en la herramienta digital pueden también revisarse por separado, por ejemplo, para la comprensión de la ecuación de la recta o para el conocimiento del procedimiento del método de Cramer. La disponibilidad en línea de estos materiales instruccionales apoya los procesos de educación a distancia, además de que funcionan como complemento en los cursos presenciales de nivel básico y medio superior.

Las actividades propuestas en el REA para explorar diferentes modos de pensar la noción de pendiente y ecuación de una recta mediante el applet de GeoGebra, contribuyeron para que los estudiantes pudieran llegar a relacionar el punto o puntos comunes que pertenecen a las rectas del sistema, con la pareja o parejas ordenadas de números reales que satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones de un sistema de 2×2 . Se recomienda dar a los estudiantes la oportunidad de interactuar en pares y discutir sus respuestas a los cuestionarios también de forma grupal para fomentar la construcción del concepto de solución de SEL de forma colaborativa.

Referencias

- Collazos, C., Pantoja, L., Hernández, U., Solarte, M., Agredo, G., & Vázquez, G. (2007). Evaluando Objetos de Aprendizaje: un caso práctico en la enseñanza de la Eléctrica. *Revista Avances en Sistemas e Informática*, 4(1), 137–144.
- Cutz, B. (2005). *Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución* [Tesis de Maestría, Centro de Investigación y Estudios Avanzados].
- Lay, D. (2023). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Pearson.
- Manzanero, L. (2007). *Sistemas de ecuaciones lineales: Una perspectiva desde la teoría APOE*. [Tesis de Maestría, Centro de Investigación y Estudios Avanzados].
- Ochoviet, T. (2009). *Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. [Tesis de Doctorado, Universidad de Salamanca, España].
- Rodríguez, M., Mena-Lorca, A., Gregori, P., Vázquez, P., del Valle, M., & Parraguez, M. (2022). Comprensión del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas: un estudio de casos. *Educación Matemática*, 34(3), 163–193. <https://doi.org/10.24844/em3403.06>

- Secretaría de Educación Pública. (2008). *Acuerdo número 444 por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato*. <https://tinyurl.com/27vow6vc>
- Sierpinska A. (2000) On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*. Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_8