

Aportes y recursos para la innovación en la educación matemática



Explorando nuevas perspectivas en el estudio de las matemáticas

Apolo Castañeda
(editor)

Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la
Educación Matemática A. C.



Aportes y recursos para la innovación en la educación matemática

Explorando nuevas perspectivas en el estudio de las matemáticas



SOMIDEM

Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la
Educación Matemática A. C.

Aportes y recursos para la innovación en la educación matemática

Explorando nuevas perspectivas en el estudio de las matemáticas

Apolo Castañeda (Editor)
Instituto Politécnico Nacional

Autores:

David Block Sevilla * Diana Solares-Pineda * Miriam Estela Lemus
Dominique Brun Battistini * Verónica Vargas-Alejo
Luis E. Montero-Moguel * Alexandra Angel * Olimpia Figueras
Carlos Valenzuela-García * Juan Carlos Huerta Orozco
Ana Luisa Gómez Blancarte * Lorena Jiménez Sandoval
Ofelia Montelongo Aguilar * Daniel Eudave Muñoz
David Alfonso Páez * Lucía Magdalena Rodríguez Ponce
Rubén Omar González Balderas * Judith Alejandra Hernández Sánchez
Darly Alina Kú Euán * Rosa Isela González Polo * Yolanda Chávez Ruiz
Silvia Eduvigis Hinojosa Rizo * Carolina Rubí Real Ortega
Maricela Bonilla González * Saúl Elizarrarás Baena * Apolo Castañeda
Ariene Lucero Hernández Huerta



Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la
Educación Matemática A. C.

Cada capítulo de este libro ha pasado por un riguroso proceso de evaluación para su publicación, implementando el sistema de dictaminación de doble ciego. Este método consiste en que tanto los autores como los revisores permanecen en anonimato durante todo el proceso, garantizando así una evaluación objetiva basada únicamente en la calidad y el mérito del contenido presentado. La evaluación fue realizada por académicos especialistas en cada uno de los temas abordados, quienes con su amplia experiencia y conocimientos contribuyeron a enriquecer y validar el contenido. Esta rigurosa práctica cumple con los estándares de transparencia editorial y ética, asegurando la integridad de los procesos y el valor académico de los trabajos publicados.



Esta obra es una publicación de acceso libre y está sujeta a los lineamientos de la Licencia Internacional Creative Commons Attribution 4.0. Esta licencia autoriza el uso, intercambio, adaptación, distribución y transmisión del material en cualquier medio o formato, siempre y cuando se otorgue el debido crédito al autor original, citando tanto su origen como la fuente del material gráfico.

Comité editorial

Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la Educación
Matemática A. C.

María García González
Universidad Autónoma de Guerrero
<https://orcid.org/0000-0001-7088-1075>

Ernesto A. Sánchez Sánchez
Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV
<https://orcid.org/0000-0002-8995-7962>

Mario Sánchez Aguilar
Instituto Politécnico Nacional
<https://orcid.org/0000-0002-1391-9388>

Luis Manuel Aguayo Rendón
Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Zacatecas
<https://orcid.org/0000-0001-7897-7223>

Yolanda Chávez Ruíz
Escuela Normal de Rincón de Romos, Aguascalientes
<https://orcid.org/0000-0003-0955-4803>

Carlos Valenzuela García
Universidad de Guadalajara
<https://orcid.org/0000-0002-0776-5757>

Apolo Castañeda Alonso
Instituto Politécnico Nacional
<https://orcid.org/0000-0002-7284-8081>

Arbitraje de la obra

Erika García Torres
Universidad Autónoma de Querétaro
<https://orcid.org/0000-0003-1764-7380>

Elizabeth Hernández Arredondo
Universidad de Los Lagos, Chile
<https://orcid.org/0000-0002-5285-1603>

Marleny Hernández Escobar
Escuela Normal Superior de México
<https://orcid.org/0000-0002-0080-1436>

Ana María Martínez Blancarte
<https://orcid.org/0000-0002-2089-7834>

Angelina González Peralta
Universidad Autónoma de Baja California
<https://orcid.org/0000-0001-5916-3750>

José Trinidad Ulloa Ibarra
Universidad Autónoma de Nayarit
<https://orcid.org/0000-0002-6382-7588>

Lidia Hernández
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
<https://orcid.org/0000-0003-0658-4396>

Alejandra Avalos Rogel
Escuela Normal Superior de México
<https://orcid.org/0000-0003-3650-4887>

Darly Alina Kú Euán
Universidad Autónoma de Zacatecas
<https://orcid.org/0009-0009-3259-2657>

Victor Larios Osorio
Universidad Autónoma de Querétaro
<https://orcid.org/0000-0002-4454-8516>

Verónica Vargas
Universidad de Guadalajara
<https://orcid.org/0000-0002-7431-0568>

Saúl Elizarraraz Baena
Escuela Normal Superior de México
<https://orcid.org/0000-0002-9623-3452>

Jaime I. García García
Universidad de Los Lagos, Chile
<https://orcid.org/0000-0002-8799-5981>

Olimpia Figueras Mourut de Montpellier
Cinvestav
<https://orcid.org/0000-0003-0334-9470>

Estela de L Juárez Ruiz
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
<https://orcid.org/0000-0002-2857-0772>

Carolina Rubí Real Ortega
Escuela Normal Superior de México
<https://orcid.org/0000-0003-2340-5628>

Rosa Isela González Polo
Universidad Autónoma del Estado de México
<https://orcid.org/0000-0002-8252-5796>

Ariene Lucero Hernández Huerta
Escuela Normal Superior del Estado de México
<https://orcid.org/0009-0004-2009-7986>

Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación
Matemática A. C. (SOMIDEM)

Título original: Aportes y recursos para la innovación en la educación
matemática

Explorando nuevas perspectivas en el estudio de las matemáticas

Primera Edición, 2023 / Editorial SOMIDEM

Clasificación DEWEY. Materia: 001.4 – Investigación. Tipo de Contenido:
Ciencia y tecnología.

Clasificación thema: JNUM - Recursos y materiales didácticos para docentes.
Tipo de soporte: libro digital descargable

ISBN: 978-607-59819-0-1

DOI de la obra completa: <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S1/2023/01>

Editorial SOMIDEM

Calle Adolfo Prieto

Colonia Del Valle

C.P. 03100, Alcaldía Benito Juárez

Ciudad de México

Correo electrónico: editorialsomidem@gmail.com

Sitio de internet: <http://editorialsomidem.org.mx/>

Registrado ante INDAUTOR como entidad editora: MID131003

Corrección de estilo y diseño editorial: Ingrid Eleonor Castañeda González
ingrideleonor@gmail.com

Ilustrador: Francisco Javier Pieri Reissig
franjavierta@gmail.com

Cita de la obra completa en APA 7:

Castañeda, A. (Ed.). (2023). *Aportes y recursos para la innovación en la educación matemática*. SOMIDEM Editorial.

<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S1/2023/01>

Índice

Presentación	11
Introducción	13
El registro de ventas. Entramado de conocimientos matemáticos en torno a una situación cotidiana <i>David Block Sevilla y Diana Solares-Pineda</i>	19
Aplicación de una trayectoria de aprendizaje en estadística universitaria usando tecnología en un proyecto integrador <i>Miriam Estela Lemus y Dominique Brun Battistini</i>	43
Recomendaciones para promover la modelación en el aula: cerrando la brecha entre investigación y práctica <i>Verónica Vargas-Alejo y Luis E. Montero-Moguel</i>	69
Multiplicación y división de fracciones: Excel y otras tecnologías digitales para reflexionar sobre su enseñanza <i>Alexandra Angel, Olimpia Figueras y Carlos Valenzuela-García</i>	97
Experiencia de enseñanza para fomentar el razonamiento inferencial informal de estudiantes de secundaria <i>Juan Carlos Huerta Orozco y Ana Luisa Gómez Blancarte</i>	123
Creencias de estudiantes de secundaria, el pensamiento intuitivo y analítico en problemas con números racionales <i>Lorena Jiménez Sandoval y Ofelia Montelongo Aguilar</i>	147
Análisis del razonamiento estadístico en estudiantes de posgrado a partir de sus procesos transnuméricos <i>Daniel Eudave Muñoz, David Alfonso Páez y Lucía Magdalena Rodríguez Ponce</i>	171

Análisis de contenido y cognitivo para favorecer el diseño de tareas sobre fracciones <i>Rubén Omar González Balderas, Judith Alejandra Hernández Sánchez y Darly Alina Kú Euán</i>	205
La estadística en la formación de futuros investigadores educativos: una mirada desde la educación matemática realista <i>Rosa Isela González Polo</i>	231
Tareas que realizan profesores en formación inicial para desarrollar pensamiento algebraico en la escuela primaria <i>Yolanda Chávez Ruiz y Silvia Eduviges Hinojosa Rizo</i>	259
Conocimiento de los futuros profesores de matemáticas en el diseño y análisis de propuestas de enseñanza en educación secundaria <i>Carolina Rubí Real Ortega, Maricela Bonilla González y Saúl Elizarrarás Baena</i>	295
Harry Potter y la enseñanza de las matemáticas; una experiencia de gamificación en secundaria <i>Ápolo Castañeda y Ariene Lucero Hernández Huerta</i>	311

Presentación

Uno de los objetivos de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C. (SOMIDEM), es la promover la investigación en el ámbito de la educación matemática y difundir sus resultados, con el objetivo de generar un impacto positivo en las instituciones educativas y en la sociedad en su conjunto. En este sentido, el nacimiento de este proyecto editorial no es casualidad, sino el resultado de un esfuerzo continuo por consolidar un espacio de diálogo y construcción colectiva en torno a los desafíos y oportunidades que presenta la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La SOMIDEM se complace en presentar a la comunidad académica y educativa el libro “Explorando nuevas perspectivas en el estudio de las matemáticas”. Este trabajo es resultado de un riguroso proceso de selección y evaluación que duró más de un año. Agrupa contribuciones de destacados investigadores en educación matemática, cuyas reflexiones buscan enriquecer y diversificar el campo de la educación matemática.

La temática central de este libro, “Aportes y recursos para la innovación en la educación matemática”, no solo refleja la urgencia de renovar y revitalizar las prácticas pedagógicas en el ámbito matemático, sino también la necesidad de proporcionar a los docentes herramientas teóricas y prácticas que les permitan enfrentar los retos educativos del siglo XXI. En un mundo cada vez más complejo y cambiante, la educación matemática se vuelve esencial, como una competencia que permite a los individuos comprender, interpretar y transformar su entorno.

Las propuestas que conforman esta obra abarcan una amplia gama de temas y enfoques, desde experiencias concretas de intervención en el aula hasta reflexiones teóricas sobre la naturaleza y los objetivos de la educación matemática. A través de sus páginas, los lectores encontrarán contribuciones, recomendaciones, análisis críticos y propuestas innovadoras, todas ellas sustentadas en teorías y perspectivas consolidadas en el campo de la matemática educativa. Al reflexionar sobre el inicio de este proyecto editorial, es imposible no sentir una profunda gratitud hacia todos aquellos que han hecho posible su realización. Desde los primeros esbozos y discusiones hasta la edición final, cada paso ha estado marcado por el compromiso, la pasión y la dedicación de numerosos profesionales que creen firmemente en la importancia de la educación matemática. Este libro es, en muchos sentidos, un testimonio de la capacidad de la comunidad académica para unirse y trabajar en pro de un objetivo común.

Sin embargo, más allá de la satisfacción que supone ver materializado este proyecto, es fundamental reconocer que “Explorando nuevas perspectivas en el estudio de las matemáticas” no es un punto de llegada, sino un punto de partida. La educación matemática es un campo en constante evolución, y es nuestra responsabilidad como comunidad seguir cuestionando, investigando y proponiendo nuevas formas de entender y enseñar las matemáticas.

Finalmente, queremos invitar a docentes, investigadores, estudiantes y a todos aquellos interesados en la educación matemática a sumergirse en las páginas de este libro. Estamos convencidos de que su lectura no solo proporcionará valiosas perspectiva y herramientas prácticas, sino que también inspirará a muchos a unirse a la reflexión, descubrimiento y transformación de la educación matemática.

Con profundo agradecimiento y esperanza en el futuro, les damos la bienvenida a “Explorando nuevas perspectivas en el estudio de las matemáticas”.

Apolo Castañeda

Introducción

Suele asumirse que la innovación se refiere a la introducción o adopción de algo inédito, ya sea una técnica, herramienta, método o enfoque. No obstante, también puede entenderse como un proceso continuo que implica revisar, reevaluar y mejorar las prácticas y conocimientos existentes. En el ámbito de la enseñanza matemática, la anhelada fórmula que solucione todos los desafíos puede parecer una quimera que cautiva a pedagogos e investigadores. Sin embargo, es esencial valorar el vasto conocimiento y habilidad que los docentes aplican diariamente en el aula. Al contrastar este saber empírico con teorías, metodologías y herramientas actuales, se abre una ventana para la innovación, permitiéndonos redefinir y expandir nuestros paradigmas y visiones. En otras palabras, al someter a escrutinio y reflexión nuestras prácticas y convicciones, nos posicionamos en un lugar óptimo para generar transformaciones profundas en el ámbito educativo.

Este libro propone un foro de intercambio en el que los educadores matemáticos e investigadores comparten sus experiencias, desafíos y logros en el ámbito de la enseñanza matemática. Definitivamente, más que un manual de técnicas o recetas, esta obra invita a un diálogo franco sobre los resultados y alcances de diversas actividades y situaciones matemáticas vividas tanto por docentes como estudiantes, en contextos escolares y extraescolares. Además, propicia una reflexión sobre la intrincada naturaleza de la enseñanza y el aprendizaje, reforzando la idea de que no existen soluciones únicas o recetas infalibles que aseguren el éxito.

Esta obra propone un diálogo esencial para nuestra comunidad, estructurado a través de ejercicios de replicación, análisis y retroalimentación, que busca profundizar y avanzar en nuestro entendimiento sobre la didáctica de las matemáticas. Lo que hace especialmente valioso a este diálogo es la amalgama de voces y experiencias que se entrecruzan, permitiendo descubrir matices y perspectivas que, aunque puedan divergir teórica o metodológicamente, convergen en un propósito compartido: optimizar y enriquecer la enseñanza y el aprendizaje matemático. Estas variadas perspectivas, emergentes de distintos contextos, niveles educativos y recorridos profesionales, brindan una visión comprensiva de los retos y posibilidades que la educación matemática enfrenta hoy día.

Al escuchar estas diversas voces, queda claro que no existe una sola ruta o respuesta para enfrentar los desafíos de la didáctica matemática. En lugar

de buscar una solución única, es imperativo fomentar una diversidad de enfoques y alentar la colaboración tanto interdisciplinaria como interinstitucional. Esta confluencia de ideas y experiencias contribuye a la construcción de un tejido pedagógico más resiliente y adaptativo, capaz de responder a las necesidades cambiantes de los estudiantes y de la sociedad en general.

Este libro trasciende ser meramente una colección de experiencias y teorías; es un llamado que nos convoca a actuar. Nos invita a sumarnos con entusiasmo a la edificación colectiva del saber, a adoptar una postura crítica y autocrítica, y a comprender que la evolución y la innovación en la didáctica matemática emergen tanto de la introspección y el análisis profundo, como de la práctica y la capacidad de adaptarnos a nuevos escenarios.

El primer capítulo titulado “El registro de ventas. Entramado de conocimientos matemáticos en torno a una situación cotidiana” de David Block Sevilla y Diana Solares-Pineda se centra en analizar los conocimientos matemáticos que se identifican en un grupo de mujeres productoras agrícolas con baja o nula escolaridad. El estudio se llevó a cabo en el ámbito laboral de estas mujeres, reconociendo que las personas desarrollan habilidades matemáticas personales en su vida diaria y laboral para resolver tareas que requieren dichos conocimientos. El artículo destaca la importancia de los registros de ventas en la gestión de recursos de estas mujeres, especialmente porque algunas de ellas enfrentan desafíos como la falta de habilidades de lectura y escritura. A pesar de estos desafíos, las mujeres interactúan con documentos que contienen información numérica en sus actividades productivas, y el estudio busca comprender cómo se relacionan con estos documentos y cómo interpretan la información numérica que contienen.

El capítulo dos se titula “Aplicación de una trayectoria de aprendizaje en estadística universitaria usando tecnología en un proyecto integrador”, escrito por Miriam Estela Lemus y Dominique Brun Battistini, aborda la importancia de proporcionar herramientas teóricas matemáticas que promuevan el razonamiento crítico. Se destaca la implementación de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje en la materia de Probabilidad y Estadística en un contexto universitario. La estrategia busca mejorar el aprendizaje de los temas a través de problemas prácticos, conectando la estadística con áreas como el cálculo y el álgebra lineal, y aprovechando la tecnología en temas transversales de corte socioemocional. Los resultados del estudio muestran una evolución positiva en el pensamiento estadístico de los estudiantes, especialmente cuando aplican sus conocimientos en proyectos con datos reales, evidenciando una interconexión efectiva con otras materias y una utilización provechosa de la tecnología.

El capítulo tres, “Recomendaciones para promover la modelación en el aula: cerrando la brecha entre investigación y práctica”, escrito por Verónica Vargas-Alejo y Luis E. Montero-Moguel, destaca la importancia de la

modelación como una tendencia internacional en la educación matemática. Sin embargo, su inserción en el aula presenta desafíos, especialmente debido a la falta de recursos que permitan a los profesores aplicar los hallazgos de investigaciones empíricas en esta área. El capítulo se fundamenta en la Perspectiva de Modelos y Modelación y tiene como propósito presentar cinco recomendaciones basadas en investigaciones empíricas para que los docentes puedan fomentar la modelación en sus clases. A través de un estudio de caso cualitativo, se analiza la experiencia de un profesor de matemáticas de nivel superior en su primer curso de modelación matemática, en el cual se aplicaron estas recomendaciones. Los resultados revelan que dichas recomendaciones permitieron al docente reflexionar y modificar sus ideas iniciales sobre la modelación, evidenciando su utilidad en la práctica educativa.

El capítulo cuatro titulado “Multiplicación y división de fracciones: Excel y otras tecnologías digitales para reflexionar sobre su enseñanza”, escrito por Alexandra Ángel, Olimpia Figueras y Carlos Valenzuela García, se adentra en la exploración del uso de herramientas digitales, específicamente Excel, para la enseñanza y comprensión de la multiplicación y división de fracciones. El estudio destaca que, aunque Excel no fue diseñado específicamente para fines educativos, su aplicación en el ámbito pedagógico, como se propone en Telesecundaria, ofrece oportunidades valiosas para el aprendizaje. A través de una secuencia de actividades, se muestra cómo las fracciones ingresadas por el usuario en Excel pueden diferir de las que se muestran en pantalla, lo que genera reflexiones y discusiones sobre la naturaleza y representación de las fracciones. Además, se resalta la importancia de diseñar tareas que integren el uso de hojas de cálculo para potenciar la comprensión de estos conceptos matemáticos.

El capítulo cinco “Experiencia de enseñanza para fomentar el razonamiento inferencial informal de estudiantes de secundaria”, escrito por Juan Carlos Huerta Orozco y Ana Luisa Gómez Blancarte, tiene como objetivo mostrar cómo los estudiantes de secundaria pueden desarrollar elementos de un razonamiento inferencial informal con el apoyo de la tecnología. Se describe el diseño e implementación de una secuencia didáctica basada en la heurística de “crecer la muestra”, con el propósito de que los estudiantes construyan argumentos para responder a la pregunta: ¿Quiénes tienen más riesgo de morir por COVID-19 en México, hombres o mujeres? Los resultados del estudio ilustran los modelos de argumentación de los estudiantes y proporcionan una comprensión de los elementos del razonamiento inferencial informal que emergieron. Se destaca el potencial de esta experiencia de enseñanza para fomentar en los estudiantes la articulación de argumentos basados en generalizaciones y evidencias.

El capítulo seis se titula “Creencias de estudiantes de secundaria, el pensamiento intuitivo y analítico en problemas con números racionales”,

este trabajo fue escrito por Lorena Jiménez Sandoval y Ofelia Montelongo Aguilar. En él se explora las creencias de once estudiantes de secundaria en relación con su pensamiento matemático. El estudio se centra en problemas que involucran números racionales, donde se ha documentado una tendencia a responder basándose en el conocimiento sobre números naturales, lo que a menudo lleva a respuestas incorrectas. Esta investigación permite distinguir entre el pensamiento intuitivo y el pensamiento analítico utilizando la teoría del doble proceso. Se diseñaron instrumentos como una escala de Likert para conocer el sistema de creencias de los estudiantes y un cuestionario de opción múltiple sobre operaciones con números racionales. Los hallazgos revelan que el 69% de los estudiantes mostró un pensamiento analítico al resolver problemas con números racionales, y que las creencias con relación con la matemática son en su mayoría positivas.

En el capítulo siete, se presenta el trabajo titulado “Análisis del razonamiento estadístico en estudiantes de posgrado a partir de sus procesos transnumerosos”, escrito por Daniel Eudave Muñoz, David Alfonso Páez y Lucía Magdalena Rodríguez Ponce, este trabajo se centra en el estudio del razonamiento estadístico de estudiantes de posgrado, particularmente en cómo procesan, analizan e interpretan datos estadísticos. El estudio se enfoca en los procesos transnumerosos, que son transformaciones numéricas realizadas para facilitar la comprensión de datos. Se seleccionaron 14 estudiantes de posgrado que estaban realizando sus investigaciones-tesis y se llevaron a cabo entrevistas centradas en tareas para comprender cómo procesaban y analizaban los datos estadísticos de sus investigaciones. A través del análisis, se identificaron las técnicas transnumerosas utilizadas por los estudiantes y el sentido que les daban. Los hallazgos del estudio subrayan la importancia de las técnicas transnumerosas en el análisis estadístico y en la formación del razonamiento estadístico, y sugieren que estos procesos pueden ser cruciales para un análisis estadístico contextualizado en investigaciones de posgrado.

El capítulo ocho, titulado “Análisis de contenido y cognitivo para favorecer el diseño de tareas sobre fracciones”, escrito por Rubén Omar González-Balderas, Judith Alejandra Hernández-Sánchez y Darly Alina Kú-Euán, aborda la relevancia de las fracciones en la educación primaria y las dificultades asociadas a su enseñanza. A pesar de ser un tema fundamental en el currículo, las fracciones suelen ser un contenido desafiante para los estudiantes. El estudio se propone como una herramienta para ayudar a los docentes en el diseño de tareas educativas relacionadas con fracciones, basándose en un análisis detallado del contenido y de los procesos cognitivos involucrados. A través de este enfoque, se busca proporcionar a los profesores una estructura clara y coherente para abordar el tema de fracciones, considerando tanto los significados matemáticos como las dificultades y errores comunes que

enfrentan los estudiantes. El objetivo es que, con esta información, los docentes puedan diseñar tareas más efectivas y contextualizadas, promoviendo un aprendizaje más profundo y significativo de las fracciones en el nivel primario.

El capítulo nueve se titula “La estadística en la formación de futuros investigadores educativos: una mirada desde la matemática realista”, escrito por Rosa Isela González-Polo, aborda la relevancia de la estadística en la formación de pedagogos e investigadores educativos. El documento destaca la necesidad de reflexionar sobre la importancia de los métodos estadísticos en la investigación educativa, utilizando la educación matemática realista como enfoque para la construcción del objeto de estudio. La intención es contextualizar la estadística a través de situaciones realistas, estableciendo un modelo interpretativo basado en técnicas y procesos estadísticos pertinentes al ámbito educativo. A través de este enfoque, se busca identificar patrones, supuestos y percepciones estudiantiles sobre el uso de la estadística en la investigación educativa. Los hallazgos del estudio subrayan la significancia de la matemática realista como enfoque pedagógico en la enseñanza estadística, sugiriendo su adopción en programas de formación para optimizar el aprendizaje de futuros investigadores, reforzando su comprensión en estadística y su desempeño académico en investigaciones

El capítulo diez se titula “Tareas que realizan profesores en formación inicial para desarrollar pensamiento algebraico en la escuela primaria”, escrito por Yolanda Chávez Ruiz y Silvia Eduvigis Hinojosa Rizo, se centra en la descripción y análisis de las tareas que llevan a cabo los profesores en formación inicial en el contexto del curso de álgebra de la Licenciatura de Educación Primaria en las escuelas Normales de México. A través de un estudio de casos, el trabajo busca ofrecer a los formadores de docentes una visión sobre el potencial didáctico y matemático de ciertas tareas para fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes. Los resultados de la intervención indican que la selección de tareas con un alto potencial matemático y didáctico puede tener implicaciones significativas en la formación de los futuros docentes, ayudándoles a comprender y promover el pensamiento algebraico en la educación primaria. Se destaca la importancia de involucrar a los estudiantes en tareas que les permitan cambiar su perspectiva y reflexionar sobre prácticas matemáticas más profundas.

El capítulo once, titulado “Conocimiento de los futuros profesores de matemáticas en el diseño y análisis de propuestas de enseñanza en educación secundaria”, escrito por Rubí Real Ortega, Maricela Bonilla González y Saúl Elizarrarás Baena, se enfoca en analizar cómo los futuros docentes de matemáticas aplican su conocimiento en el diseño, experimentación y análisis de propuestas didácticas para estudiantes de secundaria. El estudio se basa

en el marco teórico, que comprende las dimensiones de Fundamentación, Transformación, Conexión y Contingencia. A través de este enfoque, se examina cómo los docentes en formación fundamentan sus propuestas en teorías pedagógicas, psicológicas y de educación matemática, y cómo transforman y adaptan este conocimiento para hacerlo accesible a los estudiantes de secundaria. El texto resalta la importancia de que los futuros docentes sean capaces de diseñar lecciones coherentes y responder adecuadamente a situaciones imprevistas en el aula.

Esta obra cierra con el capítulo 12, titulado “Harry Potter y la enseñanza de las matemáticas; una experiencia de gamificación en secundaria”, escrito por Apolo Castañeda y Ariene Lucero Hernández Huerta, explora las oportunidades pedagógicas que ofrece la gamificación para la comprensión de los números con signo, todo ello enmarcado en el universo de Harry Potter. El estudio se desarrolló con estudiantes de secundaria en un entorno urbano, utilizando actividades gamificadas que fusionan el mundo mágico de Harry Potter con conceptos matemáticos. A través de esta experiencia, se observó que los estudiantes no solo se involucraron activamente en la resolución de problemas matemáticos, sino que también establecieron conexiones emocionales con el contenido, gracias a la narrativa de Harry Potter. Las actividades, como “La Balanza de Gringotts”, incentivaron la colaboración, el debate y la reflexión entre los estudiantes, mostrando que la gamificación puede ser una herramienta poderosa para enriquecer la enseñanza y el aprendizaje matemático.

Te conmino a abrir este libro y dejarte llevar por sus páginas, deja que cada capítulo te inspire, te desafíe y te motive para ver la educación matemática desde otras perspectivas. Ya seas un docente, un estudiante o simplemente alguien curioso, este libro tiene algo especial para ti.

Así que, ¿estás listo para embarcarte en esta aventura del conocimiento? ¡Te esperamos en el fascinante viaje que es “Aportes y recursos para la innovación en la educación matemática”!

Apolo Castañeda

El registro de ventas. Entramado de conocimientos matemáticos en torno a una situación cotidiana

David Block Sevilla¹ y Diana Solares-Pineda²

RESUMEN

El capítulo describe y analiza los conocimientos matemáticos que se identifican en un grupo de mujeres productoras agrícolas de baja o nula escolaridad. El proceso de exploración se realizó en el ámbito laboral de las mujeres, pues reconocemos que las personas desarrollan conocimientos matemáticos personales en su vida diaria y laboral debido a la necesidad de resolver tareas que los implican. Con apoyo de planteamientos de diversas teorías, los cuales coinciden en la perspectiva de *numeracy practices* y retomando aspectos de la Teoría de las Situaciones Didácticas, asumimos las decisiones teóricas y metodológicas que ponemos a consideración. A partir de los resultados obtenidos proponemos elementos para el diseño de alternativas didácticas que recuperan ciertos aspectos del contexto original y, al mismo tiempo, introducimos determinadas dificultades para favorecer el desarrollo de sus procedimientos.

PALABRAS CLAVE

Educación para adultos, Conocimientos matemáticos extraescolares, Numeracy practices, Proporcionalidad y medidas fraccionarias, Diseños didácticos.

¹ dblock@cinvestav.mx

Departamento de Investigaciones Educativas-Cinvestav
<https://orcid.org/0000-0002-3914-5544>

² diana.violeta.solares@uaq.mx

Universidad Autónoma de Querétaro
<https://orcid.org/0000-0001-6034-6693>

INTRODUCCIÓN

De acuerdo con el Censo de Población y Vivienda 2020, en México hay 4,456,431 personas de 15 años y más que no saben leer ni escribir. Así mismo, cuatro de cada 100 hombres y seis de cada 100 mujeres de 15 años y más no saben leer ni escribir (Instituto Nacional de Estadística y Geografía [INEGI], 2020). Por su parte, el Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social [CONEVAL], señala que hay 10.8 millones de personas de 25 años o más en condición de rezago educativo, lo que representa 23% del total en ese rango de edad. El CONEVAL establece que una persona en rezago educativo es “aquella que nació antes de 1982 y no tiene la primaria completa o que nació en 1982 o después y no cuenta con secundaria terminada” (Área de Apoyo y Seguimiento a la Mejora Continua e Innovación Educativa, 2020; p. 6).

Los datos anteriores expresan la necesidad imperiosa de seguir impulsando acciones que contribuyan a la formación educativa básica de la población rezagada en México. Nuestro trabajo se inscribe en esta dirección. En este capítulo analizamos los conocimientos matemáticos que manifestaron mujeres con baja o nula escolaridad al desarrollar actividades de producción agrícola. Tales actividades involucran diversos conocimientos matemáticos interrelacionados entre sí (medición, proporcionalidad, números fraccionarios y decimales). Destacamos, precisamente, la co-presencia de varios conocimientos en una misma actividad, lo cual favorece la comprensión de cada uno de ellos, dando lugar a una sinergia valiosa para proyectos de enseñanza.

Entre las investigaciones sobre conocimientos matemáticos de adultos con baja o nula escolaridad desarrollados en América Latina, destacamos tres tipos de estudios: 1) exploración de conocimientos matemáticos en la vida cotidiana; 2) identificación y análisis de los vínculos y/o distancias entre esos conocimientos y los escolares; 3) análisis de diseños curriculares para la intervención educativa.

Nuestros trabajos de investigación se inscriben en el primer conjunto de estudios: indagamos la presencia de conocimientos matemáticos en actividades específicas de personas adultas, así mismo, tratamos de identificar las interrelaciones entre los conocimientos implicados y diseñamos situaciones tanto para profundizar en la indagación como para la intervención educativa (Solares & Block, 2021). La investigación que presentamos en este capítulo va en la misma dirección y se propone crear puentes hacia el diseño curricular.

El propósito que nos anima es ampliar el conocimiento disponible sobre la construcción de herramientas matemáticas por parte de adultos en su vida diaria, sin mediación de la enseñanza escolar. En comparación con la operatoria con naturales, los conocimientos que aquí abordamos —medición, fracciones y decimales, y proporcionalidad— han sido menos estudiados.

Por otra parte, nos interesa aportar elementos para el diseño de situaciones didácticas que integren de manera significativa los conocimientos de los aprendices. Por ello, dedicamos un apartado a las derivaciones del estudio para la enseñanza.

El capítulo parte de la exposición de los planteamientos teóricos que fundamentaron nuestras decisiones metodológicas, las cuales se exponen enseguida. Después, describimos las actividades agrícolas y las necesidades educativas del grupo de mujeres pertenecientes a la población que nos interesa. Posteriormente, presentamos las situaciones diseñadas para explorar los conocimientos matemáticos de este grupo de mujeres y, enseguida, describimos los conocimientos identificados. Finalmente, proponemos vías para la enseñanza y algunas reflexiones en torno a las mismas.

MARCO TEÓRICO

Esta investigación se inscribe en el conjunto de estudios sobre los conocimientos matemáticos de los sujetos en situaciones o actividades de su entorno cultural, social o laboral. Indagar en tales entornos obedece a planteamientos teóricos que, a su vez, orientaron nuestras decisiones metodológicas.

Nos centraremos en dos planteamientos: a) la concepción de las matemáticas como práctica sociocultural que se manifiesta en actividades específicas; b) el carácter relativo del conocimiento matemático de acuerdo con la situación y/o la institución en la que el conocimiento se manifiesta (Solares & Block, 2021).

Las matemáticas como práctica sociocultural que se manifiesta en actividades específicas

Como lo hemos expuesto en otras oportunidades, numerosos estudios llevados a cabo en América Latina exploran los conocimientos matemáticos que los sujetos ponen de manifiesto en actividades propias de su entorno (Solares & Block, 2021). Ello obedece al reconocimiento que hacen de las matemáticas como una práctica social y cultural, por lo que indagan la presencia de conocimientos es esta disciplina más allá de ámbitos escolares y académicos.

Yasukawa, et al. (2018) señalan que la Teoría de la Cognición Situada, la Teoría Histórico-Cultural de la Actividad, *Literacy as Social Practice* (en adelante LSP) y la Etnomatemática, tienen en común que conciben a la actividad matemática como cultural, histórica y políticamente situada. Con base en esa característica común, dichos autores ubican a tales teorías en una perspectiva más amplia: *Numeracy as Social Practice* (en adelante, NSP).

Según Yasukawa et al. (2018), el término “Numeracy” suele referirse a cómo las personas piensan y actúan frente a una tarea que implica demandas matemáticas. Con base en esa definición general, los autores analizan las

teorías anteriormente mencionadas e identifican planteamientos que consideran “clave” en la caracterización de la perspectiva NSP:

- Más que centrarse en el desempeño de las habilidades matemáticas en contextos aislados, se centran en prácticas que implican matemáticas (*numeracy practices*) y que tienen lugar en interacciones sociales y en contextos particulares.
- Consideran que la actividad matemática (*numeracy activity*) está situada en términos culturales, históricos y políticos.
- Señalan que toda actividad matemática es ideológica.
- Reconocen que las relaciones de poder pueden hacer más o menos visibles ciertas actividades. NSP se interesa tanto en las matemáticas “visibles” como en las “invisibles”.
- Para estudiar las prácticas de “*numeracy*” *in situ*, suele tener lugar una aproximación etnográfica.

Una de las preguntas que se generan desde las cuatro teorías anteriores, particularmente en la Cognición Situada y en LSP, es: ¿cómo el contexto local conforma prácticas sociales incluyendo las de “numeracy”? (Yasukawa et al., 2018). Esta pregunta atañe a las exploraciones que hemos hecho con población adulta no escolarizada. Enseguida haremos algunas acotaciones.

Por una parte, los estudios que se desarrollan en el marco de la LSP exploran prácticas de lectura y escritura situadas en diversos contextos (Street, 1984); conciben a la alfabetización (*literacy*) como una práctica social e histórica que no se limita a las habilidades para leer y escribir, sino que abarca las interacciones entre personas en torno a los documentos escritos (Barton & Hamilton, 1988).

En Solares y Block (2021); Solares (2018), hemos expuesto cómo la teoría LSP nos ha permitido indagar y comprender las interacciones que ciertas poblaciones tienen en torno a documentos con información numérica escrita. Esas indagaciones encuentran eco en algunos de los planteamientos generales de *Numeracy as Social Practice* (NSP) señalados anteriormente; en particular, coincidimos en el interés de explorar cómo las personas piensan y actúan frente a una tarea que implica demandas matemáticas, y cómo el contexto local conforma las prácticas de “numeracy” (Yasukawa et al., 2018).

Por otra parte, Lave (1991) plantea la necesidad de caracterizar empírica y teóricamente lo que denomina la *actividad cognitiva situacionalmente específica*; para ello, propone una *teoría de la práctica*. Un aspecto relevante de esa teoría es que pone en el centro a la actividad cotidiana, pues la autora considera que los procesos de cognición se construyen en función de las actividades sociales en las cuales tienen lugar. De esa forma, señala que la práctica aritmética se constituye *in situ*, por lo que para investigarse debe ser considerada la *especificidad situacional* de la actividad matemática.

En Solares y Block (2021), así como en Solares et al. (2016), hemos expresado nuestras cercanías con la perspectiva de la Cognición Situada

desarrollada por Lave (1991, 2011), particularmente con su conceptualización sobre las formas en que las personas problematizan y resuelven determinadas situaciones poniendo en juego –o no– conocimientos matemáticos. De manera más específica, coincidimos en el reconocimiento de la importancia que tiene la dimensión social –las interacciones entre los participantes– en la problematización y resolución de esas situaciones.

El carácter relativo del conocimiento matemático de acuerdo con la situación y/o la institución en la que se manifiesta

El reconocimiento de las matemáticas como una práctica social y cultural ha tenido lugar no sólo en investigaciones desarrolladas en contextos extra escolares, sino también en el ámbito escolar. Por ello, parte de nuestros referentes teóricos y metodológicos exploran la diversidad de prácticas y de conocimientos matemáticos que se manifiestan en la escuela misma.

La Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) reconocen, cada una desde su propio marco, el carácter relativo del conocimiento matemático de acuerdo con la situación (TSD) o con la institución (TAD) en la que se manifiesta.

La TSD plantea que el significado de un mismo concepto matemático puede variar en situaciones distintas, y que los actores que participan en tales situaciones también pueden tener conocimientos diferentes sobre una misma noción matemática, de acuerdo con las condiciones en que esta es recreada, utilizada o aprendida por los sujetos.

La definición de los conocimientos en relación con su función en una situación ratifica el hecho de que para una misma noción matemática, cada actor (sociedad, profesor, alumno) desarrolla conocimientos diferentes a priori según las condiciones en las cuales los utiliza, los crea o los aprende (Brousseau, 2000, p. 23).

Por ejemplo, el significado de la fracción $\frac{1}{2}$ que resulta de repartir un paquete de arroz entre dos personas (fracción que expresa una cantidad), es distinto al que adquiere en una situación como “la cantidad de tazas de arroz debe ser $\frac{1}{2}$ de la cantidad de tazas de agua”, en la que expresa la relación “por cada taza de arroz, dos tazas de agua” (fracción como expresión de una razón). Cada significado está relacionado, además, con las condiciones de su uso: es distinto si únicamente se debe hacer el reparto del paquete de arroz, a si adicionalmente debe expresarse de manera numérica el resultado. Cabe recordar que los significados de las nociones implicadas también están en relación con los conocimientos previos de los sujetos que participan en tales situaciones; por ejemplo, alguien podría recurrir a la fracción como herramienta para resolver la situación porque la conoce, mientras que otra persona podría no conocerla.

De acuerdo con lo anterior, la investigación que aquí presentamos requirió identificar qué conceptos matemáticos están implicados en algunas de las

actividades en las que participa la población estudiada (mujeres productoras agrícolas), cuáles son sus significados según las funciones que cada concepto cumple en esas actividades, y cuáles fueron los procedimientos y dificultades que las participantes manifestaron al enfrentar las situaciones problemáticas que diseñamos, como se mostrará más adelante.

Por su parte, la TAD plantea que las prácticas y saberes matemáticos pueden tener distintos significados de acuerdo con la institución específica –escolar o no– en la que se desarrollan. Por ello, puede haber diversas prácticas matemáticas relacionadas con un mismo saber, según las instituciones en las que tales prácticas tengan lugar (Castela, 2008). Así, en lo que respecta a la medición, mientras que a las mujeres productoras se les ha indicado que deben dosificar el alimento de las gallinas usando un gramaje determinado según la etapa de desarrollo en que se encuentren las aves, ellas no pesan el alimento –aunque dispongan de básculas–, sino que usan recipientes cuya capacidad es similar a la cantidad de alimento que establece el gramaje. Esto les permite realizar su tarea usando técnicas que les faciliten su ejecución y que, al mismo tiempo, les garanticen cierta confiabilidad en los resultados.

Los planteamientos teóricos aquí expuestos nos permitieron aproximarnos a las actividades productivas de este grupo de mujeres para, posteriormente, diseñar situaciones problemáticas basadas en esas actividades. El propósito de tales situaciones fue explorar ciertos conocimientos que poseen las participantes. Para indagar los alcances y límites de esos conocimientos fue necesario, al mismo tiempo, hacer adecuaciones a las situaciones problemáticas, como se explicará más adelante.

METODOLOGÍA

La población y sus necesidades educativas

Los datos que analizamos en este capítulo fueron recabados en el marco de un proyecto educativo que se llevó a cabo en el sureste de México, en Yucatán, por la Fundación Zorro Rojo A. C., a solicitud de la Fundación Legorreta A. C.

A través del apoyo de personas denominadas “facilitadoras”, la Fundación Legorreta ha desarrollado en distintas localidades de Yucatán actividades de capacitación y de acompañamiento a mujeres mayas que emprenden actividades productivas. La Fundación Zorro Rojo proporcionó asesoría pedagógica a las facilitadoras para atender necesidades educativas que ellas han identificado en las mujeres productoras; su propósito es que las mujeres puedan hacer sus actividades productivas de mejor manera y con mayor autonomía. La mayor parte de las necesidades educativas están relacionadas con la apropiación de la lengua escrita y con el cálculo numérico. Las personas entrevistadas fueron cinco productoras agrícolas de distintas edades con baja o nula escolaridad y tres facilitadoras. Cabe señalar que, de acuerdo con los datos del Censo de Población y Vivienda del Instituto Nacional de

Geografía (2020), en Yucatán 6 de cada 100 personas de 15 años y más no saben leer ni escribir. Entre las actividades productivas que llevan a cabo las mujeres mayas se encuentran el cultivo de hortalizas y la cría de gallinas de manera “ecológica”. Ambas actividades implican procedimientos específicos que deben ser vigilados para cumplir con los estándares de “productos orgánicos”. Para iniciar la crianza de las gallinas, las mujeres recibieron durante cinco años recursos económicos por parte de la Fundación Legorreta, esto mientras se consolidaba el proyecto; una vez que aprendieron el oficio (en 2018), se les comenzó a cobrar el 50% del alimento que consumen las gallinas. Por lo anterior, las facilitadoras han procurado que las mujeres aprendan a gestionar sus recursos promoviendo el uso de distintos formatos en los que se registran egresos e ingresos en varios momentos de la producción. En este artículo nos centraremos en el registro de ventas.

Las facilitadoras señalan que el registro de formatos suele ser complejo para las mujeres, ya que algunas de ellas afirman no saber leer ni escribir. La mayor parte de la población sabe escribir su nombre y la fecha, pero hay quienes presentan dificultades para escribir números. Las facilitadoras también señalan que algunas mujeres sí saben usar la calculadora, pero o no confían totalmente en ella o tienen dificultades para saber qué operación utilizar.

Las mujeres se apoyan en sus familiares o entre ellas para la elaboración de registros. Sin embargo, las facilitadoras insisten en la importancia de que cada una sea capaz de hacer la tarea: “Tenemos que hacer que todas al menos hagan lo básico, que es registrar, que es sumar, que es restar, multiplicar.”

Caracterización de las actividades productivas y exploración de conocimientos matemáticos de las participantes

Una parte fundamental de la indagación consistió en comprender en qué consisten y cuáles son los propósitos de las actividades productivas que las mujeres llevan a cabo de manera cotidiana o *rutinaria* en términos de Lave (1991), es decir, lo que la gente hace en sus ciclos normales de vida diaria, las actividades de carácter rutinario que tienen un entorno organizado para su realización. Para ello, hicimos entrevistas semi-estructuradas a tres facilitadoras de la Fundación Legorreta, quienes describieron en qué consisten algunas las diferentes actividades productivas, las fases en las que se realizan, las formas de desarrollarse y los propósitos de las mismas, así como las necesidades que se han identificado en las mujeres productoras para realizar esas actividades de manera autónoma, particularmente en lo que se refiere a la generación de informes escritos de las ventas que llevan a cabo. En esa primera etapa analizamos distintos informes de ventas para comprender las lógicas de producción de esa información numérica.

Entrevistamos también de manera grupal a ocho mujeres de entre 26 y 60 años, quienes eran beneficiarias del programa, y de manera individual a

tres de ellas. Describieron en qué consisten las actividades que realizan y cómo las desarrollan, así como sus necesidades de aprendizaje. Asimismo, observamos *in situ* un momento en que las mujeres entregaban sus productos a la Fundación y hacían sus registros de venta.

Por otra parte, considerando las necesidades de cálculo, de interpretación y de escritura de números que las facilitadoras habían identificado entre la población, nos apoyamos en la teoría de LSP para indagar cómo las mujeres interactúan con documentos portadores de información numérica en sus actividades productivas. Por lo anterior, en las entrevistas con las facilitadoras y las mujeres productoras profundizamos en qué documentos se generan durante los diferentes momentos de producción agrícola, cuál es la información –particularmente la numérica– que cada uno de ellos aporta, quiénes la producen y para qué. Además, mediante el planteamiento de situaciones problemáticas que emulaban las que resuelven cotidianamente, profundizamos en la indagación de sus procedimientos de resolución, a qué obedecían esos procedimientos y qué conocimientos matemáticos se manifestaban.

Una vez identificadas algunas actividades productivas que parecían involucrar conocimientos matemáticos, nos dimos a la tarea de diseñar situaciones similares para indagar dichos conocimientos en una segunda etapa. Para ello, y en consonancia con la TSD; recurrimos a un análisis epistemológico de los conocimientos, esto es la identificación de problemas asociados a su desarrollo y a su uso, las diferentes formas de representación, los vínculos con otros conocimientos. Recurrimos también a un análisis cognitivo, es decir, a la identificación de los errores característicos, los procedimientos posibles y su evolución. Cabe señalar que estos análisis, epistemológico y cognitivo, son característicos de investigaciones que recurren a experiencias de enseñanza experimental o “diseño de tareas” tales como la ingeniería didáctica (Artigue, 1995), la investigación sobre diseño (Cobb, 2003; Gravemeijer & Cobb, 2006), u otras de este género, aunque en nuestro caso no hay, por ahora, un propósito didáctico en juego. Echamos mano, además, de un valioso recurso propuesto en el línea de LSP (Barton & Hamilton, 1988; Kalman & Street, 2009) que consiste en utilizar portadores de texto que sean familiares para los usuarios con la finalidad de identificar cómo interactúan con esos documentos, particularmente cómo interpretan la información numérica que contienen.

Análisis previo de la situación exploratoria

Como se mencionó, en una segunda etapa de la investigación planteamos situaciones problemáticas para explorar los alcances y límites de ciertos conocimientos implicados en algunas de las actividades productivas. Con esa finalidad modificamos ciertas características de actividades que las mujeres ya conocen; es decir, ante un contexto conocido les planteamos

determinados retos. La situación exploratoria que presentaremos consistió en completar un registro de venta (Figura 1). Cabe aclarar que en la versión que resolvieron las mujeres había un error en el importe total (decía: \$299.50), del cual ellas se dieron cuenta.

Las mujeres están familiarizadas con este formato, pues contiene los elementos de los registros que hacen una vez a la semana. Hay quienes los completan de manera autónoma, mientras que otras lo hacen con ayuda. Lo que cambiamos del formato original fue dar el dato del costo total de algún producto para que ellas calcularan la cantidad comprada. Como se mencionó, dichas modificaciones se hicieron para profundizar en la exploración de sus procedimientos e identificar los alcances y límites de éstos.

Todas las participantes pudieron interpretar los datos que se les presentaron durante la implementación, así como hacer los cálculos, incluso quienes dijeron no saber leer ni escribir. Algunas participantes tuvieron más dificultad que otras, pero no se trató de una situación que estuviera totalmente fuera de su alcance.

La situación consistió en encontrar los valores faltantes en relaciones proporcionales entre cantidades de ciertos productos y su costo. Este tipo de problemas se suele llamar “de cuarta proporcional”, pues consisten en encontrar un dato a partir de otros tres. Por ejemplo, encontrar cuánto se debe pagar por 46 huevos si un huevo cuesta \$2.50

Las magnitudes y las medidas

Los productos se venden por pieza (huevos) o por grupos de piezas (atados), se trata de magnitudes discretas que se cuantifican por conteo. Otros productos se venden por peso y se expresan con la unidad kilogramo, por ejemplo, la berenjena. Se trata aquí de una magnitud continua, es decir, teóricamente divisible de manera infinita. Por lo anterior, las cantidades discretas suelen cuantificarse con números naturales, mientras que las continuas requieren conjuntos numéricos que tengan la propiedad de la densidad, como los números racionales o los números reales. Cabe agregar que las fracciones, si bien no se aplican a unidades discretas, sí se pueden aplicar a grupos de unidades discretas. Un caso de éstos lo constituyen las unidades compuestas (formadas por unidades simples) como los atados, las docenas, las gruesas, etc. Por ejemplo, se puede hablar de la mitad de una canasta de huevo, de las $\frac{3}{4}$ partes de una población, etc.

Hay cantidades continuas que tienen la propiedad de comportarse a la vez como discretas: son todas aquellas que existen como objetos individuales, por lo que se pueden cuantificar mediante conteo, pero a la vez son divisibles; por ejemplo, es posible hablar de conjuntos de naranjas (la gruesa tiene 60 naranjas), pero también de fracciones de una naranja. La naranja no pierde las propiedades que interesan de ella por el hecho de que se fraccione.

Figura 1
Registro incompleto de ventas

Completar los datos que faltan en las columnas de “Cantidad comprada” y “Total”.
Asegurarse de que el importe total efectivamente sea \$301.50

REGISTRO DE VENTAS GRANJAS ECOLÓGICAS K'Í'KIL'JE				
COMUNIDAD: E'k-Balam				
BENEFICIARIA: Aura		FOLIO DE HOJA:		
FECHA DE COMPRA: 28-11-2018	FECHA DE PAGO: 12-12-18		PERSONA QUE PAGA: Mayra	
PRODUCTO	UNIDAD	PRECIO	CANTIDAD COMPRADA	TOTAL
HUEVO GRANDE	pza	\$2.50	46	
HUEVO CHICO	pza	\$2.00	16	
CILANTRO	Atado	\$10		\$30
RÁBANOS	Atado	\$5	6	
BERENJENA	kilo	\$20		\$15
LECHUGA OREJONA	Atado	\$10	1	
LECHUGA LOCAL	Atado	\$10	2	
ACELGA	Atado	\$8		\$32
CEBOLLA	Kilo	\$35		17.5
IMPORTE TOTAL				\$301.50

Otro elemento que interviene en las medidas de las magnitudes son los cambios de unidad. Las fracciones de kilogramo pueden expresarse usando medidas fraccionarias, como $\frac{3}{4}$ de kg, o bien, subunidades más pequeñas, como 750 gramos. Más adelante, al analizar las resoluciones de las mujeres entrevistadas, veremos que esta doble forma de expresar una medida trajo consigo interesantes dificultades.

Finalmente, está la magnitud dinero, expresada con la unidad “pesos”. Esta magnitud teóricamente también es continua, pues el valor de las mercancías es infinitamente divisible, pero en la práctica del comercio, la subdivisión está acotada por las monedas fraccionarias existentes. En este caso, el uso de las fracciones no es usual, sino el de la subunidad más pequeña.

Cabe hacer un breve comentario sobre la importancia de que magnitudes y medidas estén presentes en el trabajo didáctico con números y operaciones. Las magnitudes y sus medidas están en el origen histórico de los sistemas numéricos, y en particular de las fracciones y los decimales: los números responden a la necesidad de medir (Brousseau, 2001). A finales del siglo XIX la necesidad de unificación de las matemáticas, aunado al desarrollo del álgebra, dieron lugar a un trabajo de abstracción en el que las magnitudes tendieron a quedar fuera de la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, más allá de la efímera reforma de las matemáticas modernas de mediados del siglo pasado, actualmente hay un fuerte consenso cuando de enseñanza se trata, en partir de la función de los números como expresiones de cantidades y de medidas (Brousseau, 2001; Lamon, 2007). Lo anterior es tanto más pertinente en el caso de la enseñanza a adultos parcialmente escolarizados debido a su experiencia de vida, sobre todo en situaciones relacionadas con el dinero y, eventualmente, también por su experiencia laboral.

La proporcionalidad

La situación del registro de venta pone en juego relaciones de proporcionalidad entre cantidad de un producto y su costo. Las relaciones de proporcionalidad suelen estar presentes también en un gran número de situaciones vinculadas al universo de las medidas. Para empezar, están presentes en hechos que nos resultan tan obvios que muchas veces no los vemos, como el que las medidas de las cantidades son proporcionales a las cantidades mismas (por ejemplo, una longitud que es lo doble de otra, también mide lo doble, no importa con qué unidad se mida); o que las medidas de una cantidad son inversamente proporcionales al tamaño de la unidad. Por otra parte, en las situaciones de compra venta, la proporcionalidad entre la cantidad de un producto y su costo es la propiedad por excelencia que rige el funcionamiento del comercio. Aun en los casos en los que el precio por unidad disminuye en compras al mayoreo, la proporcionalidad sigue siendo un referente.

La proporcionalidad se caracteriza por cualquiera de sus dos propiedades básicas: a) hay una constante de proporcionalidad, en este caso el precio por kilo, o bien, b) la razón que hay entre dos valores cualesquiera de una de las magnitudes se conserva entre los dos valores correspondientes de la otra magnitud, por ejemplo, por el doble de mercancía se paga lo doble. La constante de proporcionalidad establece una relación entre los valores de una magnitud (por ejemplo kilos) con los de la otra magnitud (por ejemplo pesos). Se trata de una razón externa constante. Las razones que se establecen entre dos valores de la misma magnitud, por ejemplo, entre dos cantidades de peso, o entre dos precios, suelen llamarse razones internas.

Cuando se calculan valores en situaciones de proporcionalidad, se acude de manera implícita a una u otra de estas propiedades. No sobra decir que el manejo de dichas propiedades en la práctica pocas veces se hace explícito. Las excepciones suelen ser los casos en los que la proporcionalidad se rompe cuando uno se pregunta, por ejemplo, ¿por qué por dos cosas me cobraron más del doble que por una?

Las medidas fraccionarias y decimales

Las fracciones que se utilizan en la vida cotidiana en situaciones de medición suelen ser pocas y casi siempre del tipo $\frac{1}{2^n}$ (medios, cuartos, octavos, etc.). Los decimales, en cambio, se utilizan con más frecuencia en todo tipo de medidas.

El paso de fracciones a decimales y viceversa exige cierto nivel de conocimiento de ambos. Aunado a ello, con los cambios de unidad se multiplican las formas posibles de expresar la medida de las cantidades.

Entramados de nociones

Así, las nociones de medición, cambios de unidad, proporcionalidad, fracciones y decimales, constituyen un entramado de nociones articuladas entre sí que se hace presente en numerosas situaciones. Vergnaud (1988)

proporcional. Veremos la resolución de una de las entrevistadas, Ana, debido a que fue particularmente explícita.

Según se puede ver en el registro, en poco tiempo Ana da un resultado correcto.

Ana: *Aquí el kilo está a veinte, veinte el kilo y quince (en el total) /señalando la fila de la berenjena/ quiere decir que se compró uno y medio, no, tres cuartos, /hace pausa/ sí tres cuartos. No sé cómo se escriben los tres cuartos.*

Posteriormente explicó:

Ana: *Quiere decir que un medio son diez pesos, cuarto son cinco pesos.*

Es decir, a través de “sacar mitades” dos veces a partir de 20, obtuvo el peso correspondiente a la cantidad de \$5.00, que es $\frac{1}{4}$ de kg. La cantidad de \$5 es cómoda para calcular lo que corresponde a \$15, pues 5 es divisor de 15. Ana optó por descomponer \$15 en \$10 (doble de 5) más \$5, como se muestra en la Figura 3.

Figura 3

Procedimiento de Ana para calcular cuánto se da por \$15 de berenjena

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{1}{2} \text{ de} & \left(\begin{array}{c} \$20 \rightarrow 1\text{kg} \\ \$10 \rightarrow \frac{1}{2} \text{ kg} \end{array} \right) & \frac{1}{2} \text{ de} \\
 \frac{1}{2} \text{ de} & \left(\begin{array}{c} \$5 \rightarrow \frac{1}{4} \text{ kg} \end{array} \right) & \frac{1}{2} \text{ de} \\
 & \$15 \rightarrow \frac{3}{4} \text{ de kg (porque a \$10 + \$5 le corresponde } \frac{1}{2} \text{ kg + } \frac{1}{4} \text{ kg)} &
 \end{array}$$

En este procedimiento están en juego varios conocimientos que detallamos a continuación.

De proporcionalidad: se conservan las razones internas “sacando mitades” (a la mitad de precio corresponde la mitad de producto), y luego se aplica otra propiedad de la proporcionalidad implícita, por supuesto, que asegura que a la suma de dos cantidades de una de las magnitudes (10 pesos + 5 pesos) le corresponde la suma de las cantidades de la otra magnitud ($\frac{1}{2}$ kg + $\frac{1}{4}$ kg). Los procedimientos basados en estas dos propiedades –conservación de las razones internas, y aquella que posibilita sumar término a término– se suelen llamar procedimientos de construcción progresiva (*Building up procedures*, en inglés; Lamon, 2007). Se ha visto que estos procedimientos, en contraste con otros como el recurso al valor unitario constante, o a la “regla de tres”, constituyen la forma usual de abordar los problemas de cuarta proporcional, no solamente entre quienes no han estudiado de manera sistemática en la escuela (Ávila, 2006; Soto & Rouche, 1995, entre otros), sino incluso entre personas escolarizadas (Hart, 1978). No obstante, el uso de estos procedimientos suele estar limitado a casos como el anterior, cuyas razones internas implicadas son relativamente sencillas, como la mitad o la cuarta parte.

De fracciones: sabe que la mitad de uno es un medio o dos cuartos y que la mitad de un medio es un cuarto; sabe también que la suma de ambas es tres cuartos. No sabe cómo se escribe esta última fracción.

Fracciones, decimales, y cambios de unidad de medida: nociones entrelazadas en el marco de un problema de proporcionalidad

Está documentado que los adultos no escolarizados suelen tener conocimientos, expresados oralmente, sobre algunas fracciones tales como un medio, un cuarto o “medio cuarto”, en el contexto de la medición de magnitudes (Ávila, 2006). En nuestro estudio confirmamos lo anterior y tuvimos la oportunidad de observar la manifestación de algunos conocimientos sobre la escritura de dichas fracciones. Además, algunas de las mujeres entrevistadas mostraron saber que esas medidas se expresan también con decimales, eventualmente usando el punto decimal. Las situaciones en las que se presentaron estos conocimientos tuvieron la complejidad adicional de los cambios de unidad, kilos a gramos y viceversa, los cuales afectan a las medidas. Cada una de las entrevistadas manifestó tener distinto dominio de esto último, en general incipiente, lo que dio lugar a más confusiones con la escritura, pero también a la posibilidad de confrontar distintas opciones. El contexto de la medición de pesos se reveló fecundo para abordar estas problemáticas.

Representaciones para medio kilo: $\frac{1}{2}$, 0.5, 500g, 0.500, 0.500g...

Frente al problema de la cebolla (el kilo cuesta \$35, se pagaron \$17.50, ¿cuánto se compró?), surgieron varias escrituras para la respuesta de “medio kilo”.

Primer momento. Dos escrituras para “medio kilo”: $\frac{1}{2}$ y 0.5

Minerva escribe primero 0.5, pero enseguida lo tacha y escribe $\frac{1}{2}$ (Figura 4). Explica:

Minerva: *No, porque me dice que ellas escriben medio (0.5) /se refiere a María Elena y Noemí/ pero yo le digo no, yo siempre así escribo el medio / señalando $\frac{1}{2}$ en su hoja/.*

Así, entran en juego la fracción $\frac{1}{2}$ y el decimal 0.5 en calidad de escrituras equivalentes. La unidad kilogramo no se menciona, pero está implícita. Al parecer, para Minerva se trata de dos representaciones simbólicas tipo etiquetas (Ávila, 2006) que conoce por su uso frecuente.

Segundo momento. Interviene el cambio de unidad: “500 gramos”

Más adelante vuelven al problema de la cebolla y, cuando están de acuerdo en que la respuesta es “medio kilo”, la Entrevistadora 1 pregunta: “¿Cómo se escribe la mitad de un kilo?”. Gloria responde: “quinientos gramos”. Interviene una tercera representación correcta para medio kilogramo. Hay un cambio de unidad, de kilogramo a gramos, permitiendo que la medida se exprese con un número entero: 500.

Figura 4

Escritura fraccionaria de Minerva ($\frac{1}{2}$)

	PRECIO	CANTIDAD	COMPRADA	TOTAL
pa	\$2.50		46	
pa	\$2.00		16	11.5
Atado	\$10		3	3.2
Atado	\$5		6	30
kilo	\$20		1	50
Atado	\$10		2	\$15
Atado	\$10		1	10
Atado	\$8		1	20
pa	\$35		17.5	\$32
			17.5	17.5
				5299.50

Tercer momento. “0.500... ¿va un punto siempre?”

Sin embargo, un poco más adelante se propone otra escritura: la de 0.500

Nancy: *Cero punto quinientos*

Entrevistadora 1: *Ajá, cero punto quinientos, ¿entonces siempre se pone el punto o no?*

Gloria: *Debe de ir*

Minerva: *Si no, no va a salir la cuenta de...*

Esta última escritura (0.500) es correcta si la unidad es el kilogramo. Pero en este momento no se hace explícita la unidad, como si no tuviera que ver. Más adelante esta indefinición llevará a errores.

Cuarto momento. Tres representaciones para un medio: $\frac{1}{2}$, 0.500 y 500, y una confusión con la unidad

La tercera vez que se plantea cómo escribir un “medio kilo” se hacen explícitas tres posibilidades: 0.500 (g), 500, y $\frac{1}{2}$:

Gloria: *Yo puse cero punto quinientos o también ponle solo quinientos/dirigiéndose a una de sus compañeras/.*

Entrevistadora 2: *Podría ser así o como decían de un uno y la diagonal y un dos*

Minerva: */Escribe $\frac{1}{2}$ /.*

Entrevistadora 2: *Ajá, esa sería una forma, o la otra es cero punto quinientos, pero aquí no serían kilos, serían gramos nada más...*

Gloria: */Agrega la g de gramos/.*

Entrevistadora 2: *Ajá, exacto.*

De manera implícita, el uso de la fracción parece estar asociado al kilogramo, y el de los naturales, a los gramos. Pero también se hace presente la expresión decimal 0.500, como alternativa para expresar “medio kilo”. La Entrevistadora 2 hace explícita la unidad y la posibilidad de cambiarla, pero se confunde y acaba proponiendo la escritura 0.500 con la unidad gramos.

La confusión en el uso de dos unidades (kg y g) y escrituras con y sin punto decimal reaparece en la siguiente situación, con respecto a $\frac{3}{4}$ de kilo y 750 gramos.

Escrituras para 3 kilos y medio: $3\frac{1}{2}$ o 3.500. Un vínculo entre dos registros

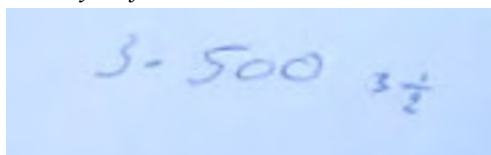
A raíz de un ejemplo que Minerva da para mostrar cómo escribe $\frac{1}{2}$, se introduce otra discusión: “¿Cómo se escribe 3 kilos y medio?”

Minerva: *Es que así nos enseñaron antes, yo vengo a mi venta y así, como dices, lleno mi papel, traigo tres kilos de algo, vamos a suponer, yo pongo así, / escribiendo en la hoja/ tres kilos más medio, pongo un punto y así mira, quinientos (...). Ajá y me enseñaron que cuando escribiera el medio sería mucho mejor, así / escribiendo $3\frac{1}{2}$ /. Yo pongo así: tres kilos más medio, pongo un punto y así mira, quinientos. (Figura 5).*

Parece claro entonces, al menos para Minerva, que $\frac{1}{2}$ y 0.5, así como $3\frac{1}{2}$ y 3.500 son escrituras equivalentes. Lo que no se explicita es qué pasa cuando se cambia la unidad a gramos, o en qué casos se puede escribir 500 en lugar de .500 Tampoco se analiza por ahora la posibilidad de omitir los ceros de “.500”

Figura 5

Escritura con punto decimal y con fracción de Minerva



Escrituras para tres cuartos de kilo: $\frac{3}{4}$ de kg, 075, 750

Al resolver el problema sobre la berenjena (el kilo de berenjena cuesta \$20, se pagaron \$15. ¿Cuánto se compró?), Minerva contesta: *Cero setenta y cinco gramos.*

Hay tres maneras de expresar la cantidad de tres cuartos de kilogramo:

- Sin cambiar de unidad, con fracciones: $\frac{3}{4}$ de Kg
- Sin cambiar la unidad, con decimales: 0.75 Kg o bien 0.750 Kg
- Cambiando de unidad, con decimales (en este caso, naturales): 750 g

La respuesta de Minerva parece estar entre las dos últimas. Su respuesta es correcta, pero pudo ser casual. Al decir 075 gramos, pudo haber equivocado la unidad (dijo gramos en lugar de kilogramos) y omitió el punto, o bien, al usar la unidad gramos equivocó la medida (75 en lugar de 750).

Gloria, por su parte, titubea explícitamente entre las dos últimas formas anteriores (b y c), y considera que sólo una es correcta, aunque no expresa la unidad.

Gloria: *Yo puse cero setenta y cinco pero creo que no es cero setenta y cinco, (sino) setecientos cincuenta.*

Más adelante, hacia el final de este episodio, cuando la Entrevistadora 1 les pregunta, para cerrar, cómo se escribe tres cuartos y cuál es la medida equivalente en gramos, Gloria y María Elena dejan ver de nuevo una confusión.

Gloria: *Y no llega ni a cien gramos (cero setenta y cinco)*

María Elena: *Nos falta veinticinco para un gramo*

Probablemente, Gloria pensó en el kilogramo, pero se confundió al decir 100 gramos en lugar de 1000. María Elena quizá quiso decir algo como “nos faltan 250 gramos para un kilo”.

Cabe notar que, más allá de las dificultades que hemos mostrado, las mujeres entrevistadas demuestran tener una idea de la relación de las cantidades referidas ($\frac{1}{2}$ kg, $\frac{3}{4}$ kg) con el kilogramo y saben que hay otras formas de escribir esas cantidades, en las que aparecen los números 500 y 750, a veces con un punto.

En otra entrevista, cuando Ana ha calculado que a \$15 le corresponden $\frac{3}{4}$ de kilo de berenjena y ha expresado que “no llega ni a un kilo”, la Entrevistadora 1 le pregunta por el peso que marcaría la báscula, y Ana contesta rápidamente “750” sin especificar la unidad. ¿Sabe que se trata de gramos y que 1000 gramos equivalen a un kilo? Es probable, pues Ana tiene mucha más experiencia que sus compañeras por el hecho de ser dueña de una tienda y usar ahí frecuentemente la báscula.

Un denominador común en las respuestas anteriores es cierta desvinculación entre el número que expresa la medida y la unidad. Esto constituye un reto para la enseñanza. Volveremos sobre este punto en el apartado de consideraciones didácticas.

Dudas en la escritura de las fracciones: ¿ $3\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$?

Se trata de una dificultad en el registro de fracciones, sin relación con los cambios de unidad. En la discusión acerca de cómo escribir con números la fracción “un medio”, Minerva enfatiza su preferencia por la escritura fraccionaria y da un ejemplo: tres y medio se escribe “ $3\frac{1}{2}$ ”. Al ver esa escritura, Gloria propone otra.

Gloria: *Pero sería mejor como nos dijo, el tres y dos abajo (...)*

Entrevistadora 1: *¿También serían tres kilos y medio?*

Mujeres: *No*

Minerva: *Porque el dos está abajo*

Posiblemente la escritura “ $3\frac{1}{2}$ ” es interpretada por Gloria como “3 veces $\frac{1}{2}$ ”, y por eso la ve como equivalente de $\frac{3}{2}$. Con la intervención de la Entrevistadora 1 se aclara que tres medios es uno y un medio.

Entrevistadora 1: *El dos está abajo, ahí dice, tres medios ¿Cuántos es tres medios?, ¿cuándo se cuenta tres veces medios?*

Gloria: *Uno y medio.*

Entrevistadora 1: *Uno y medio*

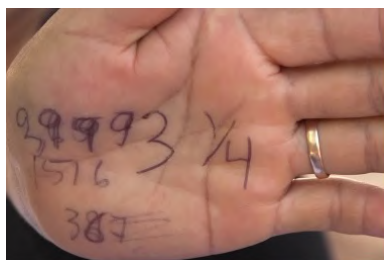
Gloria no quedó totalmente convencida, pues más adelante presenta la duda con otra fracción: una vez que estuvieron de acuerdo en que el resultado del problema de la berenjena era tres cuartos de kilo, la Entrevistadora 1 planteó: “¿Cómo se escribe tres cuartos?” En algún momento, Gloria pro-

pone $3\frac{1}{4}$ (Figura 6), de manera parecida a lo acordado antes, pero para “tres un medio”. Parece confirmarse que interpreta esa escritura como “3 veces $\frac{1}{4}$ ”, así como antes interpretó $3\frac{1}{2}$ como 3 veces $\frac{1}{2}$ y como $\frac{3}{2}$. Esta interpretación es muy factible —después de todo, $3a$ se interpreta como 3 veces a —, por lo que conviene tenerla presente en la enseñanza.

En otra entrevista, la señora Ana deja ver que sabe que uno y medio se escribe $1\frac{1}{2}$, y que tres cuartos “lleva un tres y un cuatro”.

Figura 6

Escritura de Gloria para “tres cuartos”



Comentario sobre la problemática de los cambios de unidad

En los problemas revisados están implicadas tres maneras de expresar las medidas: con fracciones, con decimales y con números naturales, como se muestra en la Tabla 1.

Así, convergen en las resoluciones a los problemas planteados tres conocimientos: a) cambios de unidad de medida de peso (*kg* y *g*); b) expresiones de medio kilo y tres cuartos de kilo con fracciones y c) con decimales. Las mujeres entrevistadas mostraron disponer de algunos de estos conocimientos: conocen las escrituras fraccionarias $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$, con pequeñas confusiones, y tienen una idea vaga de la escritura con punto, seguramente por su presencia en precios y medidas. De lo que parecen no estar conscientes es de que los cambios de unidad afectan las expresiones de las medidas, ni tampoco comprenden totalmente el papel del punto decimal, el cual no saben si se coloca siempre o cuándo va.

Tabla 1

Distintas maneras de expresar las medidas

Fracciones	Decimales	Naturales
$\frac{1}{2}$ kg, $\frac{3}{4}$ kg	0.5 kg; 0.75 kg, o bien 0.500 kg; 0.750 kg	500 gr, 750 gr

Derivaciones para la enseñanza

No fue propósito de este estudio llevar a cabo una investigación didáctica, es decir, explorar formas de enseñanza adecuadas para una población adulta semi escolarizada, sino identificar conocimientos matemáticos que los adultos

ponen en juego al resolver situaciones de su entorno laboral. Sin embargo, consideramos que de los resultados obtenidos se pueden inferir algunas observaciones que podrían ser útiles en un proyecto de enseñanza, mismas que presentamos a continuación.

Los procedimientos y las respuestas que hemos analizado, incluyendo las dudas, las preguntas y las confusiones, sugieren que el contexto de la medición de magnitudes familiares –principalmente el peso, la cantidad de productos, y el dinero– es favorable para abordar de manera integral varias nociones clave: la proporcionalidad entre cantidades y precio mediante procedimientos de aproximación, la expresión de las medidas con fracciones y decimales, los cambios de unidad. Hemos intentado destacar los beneficios de este entramado de nociones implicadas en una misma tarea, en particular el estudio de números no enteros, fracciones y decimales, expresando medidas de magnitudes en el contexto de situaciones de proporcionalidad. Si bien la enseñanza se ve obligada a tratar dichas nociones por separado –al menos al inicio– para facilitar unos aspectos o para concentrarse en otros, en esta experiencia de investigación advertimos el beneficio de recuperar progresivamente la complejidad de los problemas: es la manera de seguir aprendiendo varias nociones a la vez, de aprovechar cierta sinergia entre las mismas y de no volver demasiado artificiales los problemas. Así, en un proyecto de enseñanza se puede considerar una especie de ir y venir entre el estudio de la medición y el de los otros contenidos, como se ilustra en la Figura 7.

Figura 7

Interrelaciones entre nociones de matemáticas en un proyecto de enseñanza



Asimismo, la experiencia que hemos presentado nos permite hacer las siguientes recomendaciones.

Valorar, explicitar y ayudar a mejorar los procedimientos para abordar situaciones de proporcionalidad, en particular el de aproximaciones progresivas (uso de las razones internas) y el del valor unitario. No reducir la enseñanza de procedimientos a la regla de tres, la cual, por su naturaleza algebraica, es difícil de comprender y da lugar a errores. En la experiencia que aquí reportamos, la conservación de las razones internas se confirmó como un procedimiento intuitivo y accesible (por ejemplo, cuando se dice “al

doble le corresponde el doble”). Un paso importante sería hacer explícitas las operaciones de multiplicar o dividir (“sacar mitades”) que se aplican a las cantidades de ambas magnitudes, así como la posibilidad de sumar “término a término”. Convendría usar primero las razones “doble” y mitad”. No obstante, este recurso es insuficiente para números más difíciles (por ejemplo, cantidades que no se obtienen duplicando o sacando mitad a una cantidad inicial), por lo que en cierto momento habría que introducir otro procedimiento de aplicación más general, como el de calcular el valor unitario.

Con respecto a las fracciones y los decimales, convendría centrar el estudio con la cadena de fracciones del tipo $\frac{1}{2^n}$ (cuartos, octavos y dieciseisavos), para sistematizar el procedimiento de partir en mitades y trabajar, dentro de esa cadena, la equivalencia, la suma y la resta, la multiplicación y división por /entre un entero. La propuesta de restringirse a las fracciones del tipo $\frac{1}{2^n}$ se basa en tres consideraciones: 1) son las fracciones que se usan con más frecuencia en los contextos de medición con los que los adultos suelen tener familiaridad (y, muchas veces, son las únicas); 2) las fracciones se obtienen mediante particiones sucesivas en mitades, lo cual las hace accesibles y, además, generan un sistema dentro del cual es relativamente fácil comparar y operar; 3) por último, pero no menos importante, estas fracciones permiten aproximarse a cualquier cantidad, al igual que el sistema de fracciones decimales. En general, convendría que los contextos impliquen, lo más frecuentemente posible, las magnitudes de peso, capacidad y tiempo, en las cuales el uso de fracciones es relativamente frecuente. Asimismo, conviene tratar de ir más allá de los típicos repartos de pizzas y pasteles por lo poco usual que resulta el uso de fracciones en esos contextos (Ávila, 2006), pero sí buscar la manera de incluir la superficie, pues brinda una representación gráfica que puede ser útil para comprender las fracciones.

En cierto momento es necesario trabajar con decimales. Como pudimos ver, las mujeres entrevistadas muestran tener un conocimiento de su existencia, pero nada más. La meta sería usarlos para expresar medidas, cuando la unidad se fracciona en 10, 100 y 1000, y estudiar los cambios de unidad. Al mismo tiempo, conocer algunas de sus características básicas desde el punto de vista matemático, por ejemplo, el hecho de que los ceros a la derecha no afectan la cantidad, o el hecho de que ya no comparten con los naturales la propiedad de que entre más cifras tiene un número mayor es.

CONCLUSIONES

Partimos de la consideración básica, ampliamente compartida (Soto & Rouche, 1995; Ávila, 2006; Broitman, 2012; Mariño, 1997; Delprato, 2002; Lave, 2011; entre otros) de que todas las personas desarrollan conocimientos matemáticos personales fuera de la escuela, en su vida diaria y laboral, por la necesidad de interactuar con su entorno y de resolver diversas tareas, entre

las que destacan las relativas a la compra venta por su universalidad. Explorar e identificar estos conocimientos es valioso no solamente porque aporta elementos a la comprensión de los procesos de aprendizaje de las personas en general, sino porque dichos conocimientos deberían constituir el antecedente primordial de un proyecto educativo que pretenda incrementarlos y potenciarlos. Finalmente, consideramos que un recurso básico para realizar esta exploración con fines de investigación didáctica es el planteamiento de situaciones problemáticas que emulen las que se resuelven cotidianamente, incluso con variantes no usuales que exigen ir más allá de lo habitual para explorar, además, cómo las personas utilizan sus conocimientos para generar otros nuevos. Por supuesto, esto tendría que confirmarse con estudios de corte didáctico.

En este proyecto incluimos también como recurso de exploración documentos que competen a las personas y con los cuales están familiarizadas (Barton & Hamilton, 1988), bajo el supuesto de que dichos documentos contribuirían a la creación de un entorno familiar, favorable a la puesta en juego de los conocimientos personales (Yasukawa et al., 2018).

Consideramos que los resultados aquí presentados confirman las hipótesis de partida y permiten avanzar en el proyecto de identificar conocimientos ligados a los oficios de adultos con baja o nula escolaridad. El uso de un registro de venta similar al que las mujeres utilizan permitió, efectivamente, una comprensión inmediata de las relaciones implicadas en la situación (precio unitario, cantidad, costo total); y la utilización, además, de una variante no usual en ese tipo de documento (averiguar la cantidad comprada, conociendo el costo total y el precio unitario) posibilitó demostrar que las mujeres ponen en marcha formas propias, originales –en el sentido de no aprendidas en otro lado– para resolver las dificultades. Nos referimos, en particular, a los procedimientos para resolver situaciones de proporcionalidad por aproximación, mediante manipulación de las razones internas y de la suma término a término.

Resultó particularmente interesante conocer la forma en que la aparición de cantidades no enteras fue enfrentada por las mujeres a partir de sus conocimientos previos. Dejaron ver un conocimiento de las nociones de mitad y cuarta parte de una cantidad y cierto conocimiento de la manera de simbolizar por escrito dichas cantidades. Ellas mismas trajeron a colación dos variantes más para la expresión de las medidas no enteras: el cambio de unidad –de kilogramos a gramos– y el uso de decimales, dejando ver también ausencias importantes en su conocimiento de ambos recursos, las cuales se revelan como interesantes desafíos didácticos.

Hemos comprendido que las personas adultas podrían desarrollar conocimientos por caminos distintos, más eficientes para ellas, que aquellos por los que transitan los alumnos de la escuela básica, pero nos parece que se ha

avanzado poco en el estudio de alternativas. Diseñar, probar y rediseñar secuencias de situaciones didácticas para trabajar con adultos con escasa escolarización interesados en incrementar sus conocimientos matemáticos es un reto que nos interesa. Consideramos que lo aquí expuesto puede contribuir en el trazo de caminos alternativos para la enseñanza.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Fundación Zorro Rojo A.C. y a la Fundación Legorreta Hernández por hacer posible la realización del trabajo de campo, así como a Natalia García Hess y a Samanta Guerrero Neri por sus excelentes transcripciones.

REFERENCIAS

- Área de Apoyo y Seguimiento a la Mejora Continua e Innovación Educativa. (2020). Detrás de los números Rezago Educativo. *Educación en Movimiento*, 7. <https://bit.ly/3JRIF94>
- Ávila, A. (2006). Prácticas cotidianas y conocimiento sobre las fracciones. *Estudio con adultos de escasa o nula escolaridad. Educación Matemática*, 18(1), 5–35. <https://bit.ly/3pKnnnb>
- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Gómez, P. (Ed) *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y las innovaciones en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 7–24). Grupo Editorial Iberoamérica. <https://bit.ly/3PRZEvS>
- Barton, D., & Hamilton, M. (1998). *Local literacies. Reading and writing in one community*. Routledge. <https://bit.ly/3JPuiT2>
- Broitman, C. (2012). *Adultos que inician la escolaridad: sus conocimientos aritméticos y la relación que establecen con el saber y con las matemáticas*. [Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de La Plata]. Repositorio Institucional FaHCE-UNLP. <https://bit.ly/3XHTa4P>
- Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*, 12(1), 5–37. <https://doi.org/10.24844/EM1201.01>
- Brousseau, G. (2001). *Les grandeurs dans la scolarité obligatoire*. Université Victor Segalen Bordeaux 2. <https://bit.ly/3O8GdxK>
- Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 28(2), 135–182. <https://bit.ly/3Da6OnJ>
- Cobb, P. (2003). Investigating students' reasoning about linear measurement as a paradigm case of design research. En M. Stephan, J. Bowers, P. Cobb, & K. Gravemeijer (Eds.), *Supporting students' development of measuring conceptions: analyzing students' learning in social context* (pp. 1–23). National Council of Teachers of Mathematics. <https://doi.org/10.1007/BF03217400>

- Delprato, F. (2002). Los adultos no alfabetizados y sus procesos de acceso a la simbolización matemática. [Tesis de Maestría no publicada]. Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV.
- Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. En J. Van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research: The design, development and evaluation of programs, processes and products* (pp. 45–85). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203088364>
- Hart, K. (1978). The understanding of fractions in the secondary school. En E. Cohors-Fresenborg, & I. Wachmuth (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177–183). Universität Osnabrück. <https://bit.ly/46LYjwB>
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía. (2020). *Analfabetismo*. INEGI. <https://bit.ly/3XMmLdf>
- Kalman, J., & Street, B. (Eds.) (2009). *Lectura, escritura y matemáticas como prácticas sociales. Diálogos con América Latina*. Siglo XXI. <https://bit.ly/3rp1HNR>
- Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629–667). Information Age Publishing.
- Lave, J. (1991). *La cognición en la práctica*. Paidós.
- Lave, J. (2011). *Apprenticeship in Critical Ethnographic Practice*. The University of Chicago Press. <https://bit.ly/3XOp1QA>
- Mariño, G. (1997). Los saberes previos de jóvenes y adultos: alcances y desafíos. En Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (Ed.), *Conocimiento matemáticos en la educación de jóvenes y adultos. Jornadas de reflexión y capacitación sobre la matemática en la educación* (pp. 77–100). UNESCO. <https://bit.ly/3O9OOQy>
- Solares, D., Solares, A., & Padilla, E. (2016). La enseñanza de las matemáticas más allá de los salones de clase. Análisis de actividades laborales urbanas y rurales. *Educación Matemática*, 28(1), 69–98. <https://doi.org/10.24844/EM2801.03>
- Solares, D. (2018). Registros numéricos en un campo de cultivo. Escrituras en tensión en un ambiente laboral. *PNA*, 12(4), 209–228. <https://doi.org/10.30827/pna.v12i4.7850>
- Solares, D., & Block, D. (2021). Mujeres que leen, escriben y calculan para participar en la economía familiar y local. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 19, 55–70. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i19.396>
- Soto, C., & Rouche, N. (1995). Problemas de proporcionalidad resueltos por campesinos chilenos. *Educación Matemática*, 7(1), 77–95. <https://doi.org/10.24844/EM0701.06>

- Street, B. (1984). *Literacy in theory and practice*. *Cambridge Studies in Oral and Literate culture* (Vol. 9). Cambridge University Press.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. En J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grade* (Vol. 2, pp. 141–161). Lawrence Erlbaum Associates y National Council of Teachers of Mathematics.
- Yasukawa, K., Jackson, K., Kane, P., & Coben, D. (2018). Mapping the terrain of social practice perspectives of numeracy. En K. Yasukawa, A. Rogers, K. Jackson, & B. Street (Eds.), *Numeracy as social practice* (pp. 3–18). Routledge.
<https://doi.org/10.4324/9781315269474>

Aplicación de una trayectoria de aprendizaje en estadística universitaria usando tecnología en un proyecto integrador

Miriam Estela Lemus¹ y Dominique Brun Battistini²

RESUMEN

En la Universidad es preciso proporcionar herramientas teóricas de matemáticas que fomenten el razonamiento crítico. Se aplica el uso de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje en la materia de Probabilidad y Estadística de las carreras de Ingeniería de la Universidad Iberoamericana. La estrategia de enseñanza a partir de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje podría ofrecernos resultados favorables en el aprendizaje. Se busca favorecer el aprendizaje de los temas a partir de un problema de aplicación, enlazando estadística con temas de cálculo y álgebra lineal, y haciendo uso de la tecnología por medio de temas transversales de corte socio-emocional. Los resultados reflejan la evolución del pensamiento estadístico en el estudiantado, aterrizando los conocimientos en un proyecto con datos reales. Al calcular los resultados en cada etapa del trabajo áulico se observa una favorable interconexión con las otras materias y el aprovechamiento de la tecnología. Se muestra la apropiación del aprendizaje.

PALABRAS CLAVE

Razonamiento, Trayectoria de aprendizaje, Estadística, Probabilidad, Tecnología.

¹ miriam.lemusg@gmail.com
Universidad Iberoamericana
<https://orcid.org/0000-0002-3884-9232>

² dominique.brun@ibero.mx
Universidad Iberoamericana
<https://orcid.org/0000-0003-3351-510X>

Lemus, M. E., & Brun Battistini, D. (2023). Aplicación de una trayectoria de aprendizaje en estadística universitaria usando tecnología en un proyecto integrador. En A. Castañeda, (Ed.), *Aportes y recursos para la innovación en la educación matemática* (pp. 43–68). SOMIDEM Editorial. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S1/2023/01-02>

ANTECEDENTES

Las materias de probabilidad y estadística que se han implementado desde nivel medio superior y superior en general resultan áridas y poco claras para quien las estudia. En México, el estudiantado cursa en los dos primeros años de preparatoria cálculo diferencial e integral, y es hasta el último año, y de manera opcional, que puede cursar probabilidad y estadística, generando una desconexión entre estas materias y las materias de matemáticas precedentes. La experiencia muestra que el estudiantado asume estas asignaturas como un ejercicio plenamente de uso de fórmulas sin involucrar reflexión sobre la aplicación de las mismas. Así mismo, la falta de desempeño del estudiantado es un hecho recurrente, y las evidencias muestran que la actitud al estudiarlas no es favorable (Julca Vera et al., 2017; Pérez Laverde et al., 2015; Figueroa et al., 2012; Blanco, 2008).

Análogamente, a nivel licenciatura, la materia de probabilidad es considerada sumamente abstracta y difícilmente se le observa aplicación. Así, Sánchez y Valdéz (2017) sostienen que el primer objetivo en la enseñanza de esta materia es la comprensión de los temas asociados con la probabilidad, destacando la importancia de promover el razonamiento en el estudiantado. En el caso de estadística, el alumnado la puede encontrar un poco más tangible, pero no necesariamente se apropia de la aplicación de esta materia a nivel profesional (Ruiz de Miguel, 2015).

Se ha observado en la cátedra que, aun cuando el estudiantado reconoce la importancia que tiene la estadística, no necesariamente se apropia del conocimiento, de tal manera que lo disocia de las demás materias, otorgando una diferencia en importancia entre las materias curriculares que cursa (cálculo, álgebra, programación, entre otras) y la estadística. Por ende, la aplicación de la estadística queda relegada a la resolución de ejercicios teóricos de clase, inscritos en algún libro de texto, los cuales en general provienen de editoriales norteamericanas; es decir, no se abordan problemas cercanos al alumnado. Estas dificultades también se presentan a nivel posgrado. Estudios anteriores ponen de manifiesto que la estadística es vista con cierto recelo por los estudiantes, y que sus actitudes varían de acuerdo a las experiencias previas que hayan tenido con ella (Vilà Baños & Rubio Hurtado, 2016; Ruiz de Miguel, 2015).

En estudios asociados con la actitud del alumnado hacia la estadística, algunos investigadores sostienen que las ideas preconcebidas y las experiencias anteriores con ella, a nivel superior o medio superior, generan en el estudiantado actitudes de rechazo a la materia (Rodríguez-Santero & Gil-Flores, 2019; Vilà Baños & Rubio Hurtado, 2016; Pérez Laverde et al., 2015; Auzmendi 1992), y aunque algunos de ellos muestran inquietud por aprenderla, no dejan de sentir ciertos niveles de angustia al cursarla (Vilà Baños & Rubio Hurtado, 2016).

De acuerdo a nuestra experiencia con estadística en licenciaturas de ingeniería, las aplicaciones son útiles y abarcan un abanico amplio en el desarrollo profesional, desde la industria hasta las ciencias experimentales y las finanzas, propias para el desarrollo de competencias profesionales que impulsen en los estudiantes integración de conocimientos, habilidades y capacidades, así como de actitudes que les permitan afrontar problemáticas a nivel profesional. Por otro lado, también se ha observado que la actitud del alumnado no es favorable para crear un ambiente de aprendizaje propicio, principalmente debido a sus experiencias pasadas o falta de interés por el aprendizaje de esta materia que se considera (por ellos) de menor relevancia (Rodríguez-Santero & Gil-Flores, 2019; Blanco, 2008).

En la Universidad Iberoamericana, las materias de estadística y de probabilidad forman parte del *currículum* de una gran diversidad de licenciaturas. Para el caso de las ingenierías, en la Tabla 1 se presenta el esquema general de la materia de probabilidad y estadística y taller (PEyT), en la cual se describen las secciones con los temas macro que se deberían abordar durante un curso. Los temas generales que abarca esta materia curricular engloban, una parte de estadística descriptiva, seguida de probabilidad, y termina con estadística inferencial y análisis de regresión, tal como se muestra a continuación.

Tabla 1
Plan de cátedra de la materia de PEyT (IBERO)

Temas	Subtemas
Estadística Descriptiva	Análisis y manejo de datos estadísticos descriptivos cualitativos y cuantitativos.
Probabilidad	Probabilidad clásica, axiomática. Análisis y modelos de fdp discretas y continuas. Graficación y análisis.
Muestreo y distribuciones muestrales	Teoría del muestreo. Población y muestra. Tipos de muestreo. Distribución muestral de la media, de la proporción, de la varianza. Teorema de límite central. Distribuciones Ji cuadrada, t-student, F.
Inferencia Estadística	Estimador. Estimación puntual. Estimación por intervalo. Prueba estadística de Hipótesis.
Análisis de Regresión y Correlación	Análisis de correlación y regresión con datos de una base real. Interpretación de resultados.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La problemática en el aprendizaje de la probabilidad y la estadística a diferentes niveles de educación se expresa en diversos artículos de investigación, en los cuales se explica que son varios los elementos que entran en juego

para que el alumnado no se involucre en su aprendizaje y, por ende, que sus actitudes para estudiarlas no sean favorables (Rodríguez-Santero & Gil-Flores, 2019; Mamani & Martínez Pérez, 2018; Sánchez-Matamoros et al., 2018; Vilà Baños & Rubio Hurtado, 2016; Pérez Laverde et al., 2015; Figueroa et al., 2012).

Algunos investigadores proponen que las experiencias anteriores que el alumnado ha tenido, lo abstracto de los temas e incluso la forma de presentar dichas materias, a veces no favorecen su aprendizaje, lo que genera una actitud de rechazo (Vilà Baños & Rubio Hurtado, 2016) y, eventualmente, reprobación.

En un número considerable de investigaciones se menciona la importancia de trabajar de forma secuenciada los temas, a manera de estrategia de enseñanza de forma que la metodología empleada con el uso de trayectorias bien definidas permita al alumnado mejorar su aprendizaje (Gómez-Chacón et al., 2020; Ivars et al., 2020; Inzunza Cazarez & Islas Anguiano, 2019; Sánchez-Matamoros et al., 2018; Martínez et al., 2015; Clements & Sarama, 2004; Gómez & Lupiáñez, 2007).

Otra faceta de la problemática en el aprendizaje de la probabilidad y la estadística es la disociación de estas con el resto del currículum. Es decir, el estudiantado percibe estas materias como aisladas del cálculo, del álgebra, e incluso de la tecnología, lo cual le ofrece menos incentivos para asociarla con su futura vida profesional (Mamani & Martínez Pérez, 2018; Vilá Baños & Rubio Hurtado, 2016; Ruiz de Miguel, 2015).

Adicionalmente, la secuenciación de los temas que se abordan en un curso de probabilidad y estadística no es uniforme entre las instituciones, lo que hace aún más interesante el estudio de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (Vilà Baños & Rubio Hurtado, 2016).

El objetivo de este escrito es el diseño y aplicación de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) en la materia de Probabilidad y Estadística y Taller, perteneciente a las carreras de Ingeniería de la Universidad Iberoamericana Ciudad de México, a fin de favorecer el aprendizaje de los temas previamente establecidos en el plan de estudios. Se diseñará y aplicará una THA de acuerdo con los temas propios de la materia, propiciando el enriquecimiento de esta con asignaturas como cálculo, álgebra lineal y el uso de la tecnología.

Se propone el uso de la tecnología a través de software especializado: Excel, Matlab y Symbolab. Excel para el manejo de la base datos, la selección de la muestra, gráficas y tablas; para la solución de sistemas de ecuaciones, Matlab o Symbolab, de acuerdo con la preferencia del alumnado. El uso de software especializado es indispensable al trabajar con una muestra de tamaño 100. Adicionalmente, se favorece el aprendizaje con la visualización gráfica y elaboración de tablas de resultados, el desarrollo del modelo de probabilidad y la generación de un polinomio interpolante que requiere la

solución de sistemas de ecuaciones. Así se logran integrar las materias de cálculo y álgebra lineal.

Entre las principales aportaciones que se proponen en esta investigación se encuentra la interconexión de materias curriculares que el alumnado cursa o ha cursado en su licenciatura, con la materia de probabilidad y estadística, a fin de observar la asignatura como la aplicación de los conocimientos adquiridos hasta entonces en su licenciatura de ingeniería. Se espera que estos no se queden en el aula una vez acreditada la materia, pues tienen una diversidad de aplicaciones que se pueden desarrollar inclusive en su vida profesional.

Por añadidura, la incorporación de temas transversales en las clases de matemáticas ha sido materia de estudio en la época reciente, volviendo más cercanas al estudiantado las ecuaciones y las gráficas en tanto que reflejan la realidad que se vive, en particular en temas como sustentabilidad, género, interculturalidad, pobreza, entre tantos otros. Textos como el de Karaali y Khadjavi (2021) presentan un compendio de diferentes casos didácticos para jóvenes en un gran abanico de temas, todos relacionados con las matemáticas.

Adicionalmente, como investigadoras nos hemos planteado consolidar nuestra competencia docente de “Mirar profesionalmente” a través del análisis del pensamiento matemático del alumnado de Ingeniería (Gómez-Chacón et al., 2020; Ivars, et al., 2020; Martínez et al., 2015).

En la siguiente sección se dará una perspectiva global de las investigaciones desarrolladas respecto a las aplicaciones de trayectorias de aprendizaje en el campo de la enseñanza de las matemáticas, así como algunas de las principales aportaciones, conceptos y experiencias de investigadores que se han desarrollado en diferentes niveles de aprendizaje. De igual forma, se mencionan autores que han abordado la actitud del alumnado hacia la estadística y que proponen la búsqueda de alternativas de enseñanza para coadyuvar en la mejora de las experiencias áulicas.

MARCO TEÓRICO

El constructo de trayectoria de aprendizaje se puede entender según Clements y Sarama (2004) como un camino hipotético por el que el estudiantado, en este caso universitarios, puede progresar en su aprendizaje de un tópico matemático concreto.

Una trayectoria hipotética de aprendizaje consiste en los objetivos para el estudiantado, las tareas matemáticas que se usarán para promoverlo y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje del estudiantado (Cárcamo et al., 2021; Gómez-Chacón et al., 2020; Inzunza Cazarez & Islas Anguiano, 2019; Sánchez-Matamoros et al., 2018; Sánchez & Valdez, 2017; Simon, 2014; Clements & Sarama, 2004).

De acuerdo con el análisis de Gómez y Lupiáñez (2007) respecto al uso de las trayectorias de aprendizaje matemático y su aplicación, quedó patente su importancia en la enseñanza de las matemáticas, y en particular en la planeación del profesorado cuando diseña las actividades de enseñanza y aprendizaje. Coincidimos con la propuesta de la utilización de la THA que proponen dichos autores acerca de identificar, caracterizar y seleccionar las capacidades del estudiantado que aparecen del estudio del constructo matemático asociado.

Como docentes se debe considerar y plantear el camino que hay que recorrer para alcanzar el aprendizaje que se pretende, teniendo presente que es un proceso cíclico en el cual hay que considerar las capacidades del alumnado que se quieren desarrollar. Es decir, una vez realizada la actividad por parte del grupo, considerar si se ha alcanzado el objetivo planteado en la actividad correspondiente, de ser así, se sigue la secuencia. En caso contrario, determinar áreas de oportunidad para corregir o encauzar la trayectoria dando continuidad a partir de la situación que se vive en ese momento. La evaluación de la trayectoria a partir del logro de los objetivos es una forma de fortalecer el camino a seguir (Clements & Sarama, 2004).

En la literatura se pueden encontrar las competencias que debería desarrollar el estudiantado en el campo específico de materias de estadística. Según Figueroa et al. (2012), se manejan las competencias de la organización, el análisis y la resolución de problemas, así como la interpretación de los datos, incluyendo el uso de la tecnología y el trabajo colaborativo. Por su parte, Inzunza Cazarez e Islas Anguiano (2019) proponen el diseño y aplicación de una trayectoria de aprendizaje mediada por el uso de la tecnología, a fin de desarrollar competencias como el razonamiento del estudiantado sobre temas específicos de estadística: el muestreo, las distribuciones muestrales y la variabilidad, para lo cual utilizan la simulación por computadora como herramienta de aprendizaje. Dichos autores sostienen que esta forma de enseñanza no sólo favorece el desarrollo del razonamiento del alumno, sino que también sienta las bases para la comprensión de la inferencia estadística.

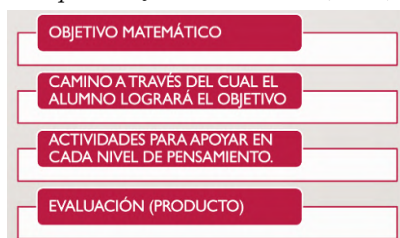
Por otro lado, Ribeiro Campos y Pavan Perin (2020) categorizan las competencias en dominio del lenguaje, pensamiento y razonamiento estadístico, así como la reflexión crítica de aspectos estadísticos. Incluso ha propuesto una competencia adicional muy interesante que tiene que ver con la actitud del estudiantado. Estos autores hacen hincapié en la conciencia socialmente crítica que puede adquirir el estudiantado de materias de estadística, en particular, si los datos son generados por ellos mismos.

En la Figura 1 se establece que, según Simon (2014), se parte de un objetivo matemático establecido por el personal docente, y enseguida se plantea el camino o trayectoria que hipotéticamente el alumnado seguiría para lograr el aprendizaje. De esta manera, mediante la secuencia de temas y

subtemas, se espera que el alumnado alcance el objetivo planteado en el plan de cátedra. Posteriormente, se generan actividades apropiadas para alcanzar el objetivo, mismas que favorecen el desarrollo de las habilidades de pensamiento, en particular las de analizar, comprender y aplicar (Clements & Sarama, 2004; Gómez & Lupiáñez, 2007). Por último, se realiza la evaluación de los aprendizajes a partir de cierto producto.

Figura 1

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje en Matemáticas (THA)



Nota. Adaptación de Simon (2014)

Las THA también son conceptualizadas como un constructo que puede ayudar al cuerpo docente a diseñar propuestas de enseñanza que tengan en cuenta estas progresiones en la comprensión de los tópicos matemáticos del estudiantado (Martínez et al., 2015; Ruiz de Miguel, 2015; Clements & Sarama, 2004; Gómez & Lupiáñez, 2007).

Asimismo, estos bloques permiten construir la THA con sus respectivos objetos matemáticos, los objetivos de aprendizaje planteados y las actividades propuestas (Figura 1).

En la literatura se reporta el uso de la THA como un instrumento conceptual que describe el aprendizaje del alumnado como una “acción instrumental”, y se proponen tareas en función de la comprensión observada (Ivars et al., 2020; Inzunza Cazarez & Islas Anguiano, 2019; Ruíz de Miguel, 2015; Martínez et al., 2015; Gómez & Lupiáñez, 2007).

Según autores como Ivars et al. (2020), Gómez-Chacón et al. (2020) y Martínez et al. (2015) entre otros, el generar la posibilidad de aprender de la propia práctica favorece el desarrollo o el incremento de destrezas didácticas en el personal educativo a fin de mejorar su enseñanza. De ahí que la utilización de una THA en la materia que nos ocupa nos permite, como docentes, fortalecer la competencia de Mirar profesionalmente el trabajo del grupo e ir perfeccionando la trayectoria de enseñanza y aprendizaje de acuerdo con las fortalezas observadas en relación a las competencias, habilidades y actitudes del alumnado para apropiarse del aprendizaje, siendo éste un trabajo cíclico (Gómez & Lupiáñez, 2007).

Con el diseño y la implementación de una THA, el personal docente ya cuenta con el conocimiento específico de matemáticas que quiere enseñar

(transmitir) al alumnado (Sánchez & Valdéz, 2017). Dentro del diseño de la THA, resolver problemas asociados al concepto matemático a desarrollar, y, en este caso, al concatenar las actividades de la THA con el uso (aplicado) de conocimientos de otras materias de matemáticas, en particular la tecnología (Figuerola et al., 2012), se potencia la oportunidad para que el estudiantado se apropie y aprenda no sólo el conocimiento en cuestión, sino que articule una red más compleja o completa sobre el uso de la materia de matemáticas que está cursando.

METODOLOGÍA

En este estudio participaron 11 estudiantes (ocho hombres y tres mujeres) de las carreras de ingeniería que se encontraban inscritos, durante el verano de 2022, en la materia de Probabilidad y Estadística Aplicada y Taller (PEyT), correspondiente al 3º y 4º semestre de los planes de estudio de la Universidad Iberoamericana CDMX. Los cursos de verano en la Universidad Iberoamericana son primordialmente intensivos, con una duración de 15 horas a la semana por seis semanas; en este periodo, el estudiantado elige libremente qué materias tomar. Este grupo estaba formado por estudiantes de Ingeniería Civil, Industrial, Mecánica, Mecatrónica, Telecomunicaciones y Biomédica.

La materia en cuestión fue planeada con la elaboración de una trayectoria hipotética de aprendizaje, considerando los temas que habrían de abordarse de manera secuencial, interconectándose con temas de materias como cálculo y álgebra lineal. Como herramienta tecnológica se utilizó Excel como hoja de cálculo, y MatLab o Symbolab.

Se diseñó un *camino hipotético* en el que el estudiantado puede progresar en su aprendizaje de la probabilidad y la estadística.

En la Figura 2 se presenta el esquema general de la materia de probabilidad y estadística que se aborda durante el curso, en el cual se describen tres grandes bloques con los temas que se deberán adquirir.

Figura 2

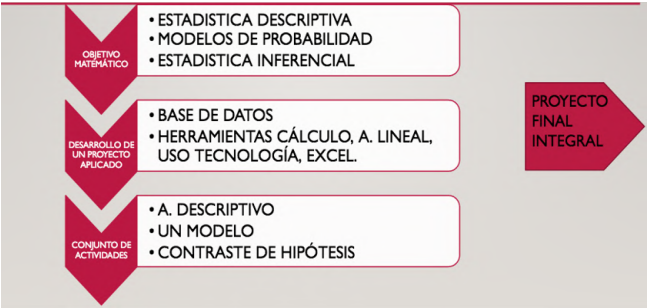
Programa curricular de la materia de Probabilidad, estadística aplicada y taller



Así mismo, tal y como se muestra en el Figura 3, estos bloques permiten construir la THA con sus respectivos objetos matemáticos, los objetivos de aprendizaje planteados y las actividades propuestas.

Figura 3

Diseño general de la trayectoria hipotética de aprendizaje para PeyT



Se comentó con el alumnado la forma de trabajo para este curso y todos decidieron participar en el proyecto que habríamos de desarrollar en nuestra materia. Se formaron cuatro equipos de dos personas y un equipo de tres.

En las clases diarias de tres horas, de lunes a jueves, se abordaron los temas teóricos en el orden propuesto en el plan de clase, y el viernes de cada semana se trabajó a manera de laboratorio para desarrollar la parte del proyecto que se debía cubrir.

Con respecto al desarrollo de las competencias, se realizó una adaptación de los enfoques de Ribeiro Campos y Pavan Perin (2020) para efectos de este proyecto, incluyéndose los factores de trabajo colaborativo y uso de la tecnología (Figuerola et al., 2012) entre las competencias.

El hilo conductor de la THA que se propone es un proyecto donde se incorporan los temas a desarrollar a lo largo del curso, siguiendo una secuencia (conformando etapas) que conduzca y dirija al alumnado a darle sentido a los conceptos de estudio, además de aplicar y apropiarse del conocimiento para aterrizar en un producto cada viernes. Esto permitió corregir y retroalimentar el trabajo realizado de manera semanal y dar continuidad a la trayectoria.

En la Tabla 2 se muestran las etapas del proyecto. Fueron cuatro etapas correspondientes a cada uno de los objetivos planteados en la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA).

El antecedente general se describe a continuación:

La base de datos proporcionada por el profesorado del grupo está conformada por cuatro variables en columnas de datos denominadas confianza, utilidad, ansiedad y motivación hacia las matemáticas; se trata de una base de datos elaborada para el programa doctoral de una de las investigadoras, y se refiere a una escala de Likert aplicada a 380 estudiantes de un bachillerato

de la UNAM que cursaban las materias de Cálculo Diferencial e Integral y/o de Probabilidad y Estadística. De esta manera se incorporan los temas transversales con datos reales que muestran la respuesta socioemocional de estudiantes frente a una clase de estadística. Este contexto favoreció que los equipos eligieran dos variables de estudio que les permitieron generar implícitamente una pregunta de investigación que quisieran responder por medio de la estadística.

A continuación se describen las etapas que conforman la trayectoria con sus objetivos y actividades asociadas.

Etapas 1. Muestreo y Estadística Descriptiva

Se proporcionó a los estudiantes de PeyT la base de datos que será considerada como población de estudio. Se explicó el contexto de su aplicación para dar sentido a sus conclusiones.

Tabla 2

Planeación de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje

Etapas	Objetivo matemático	Camino / Actividades	Producto de evaluación por etapa
1	Estadística descriptiva	Selección de variables y de la muestra Conformación de una base de datos en Excel.	Análisis descriptivo completo de la muestra obtenida para cada una de las variables seleccionadas.
2	Modelos de probabilidad	A partir de valores de la tabla de frecuencias de la muestra, generación de un polinomio interpolante. Para la solución de sistemas de ecuaciones, uso de calculadora, wolfram, MatLab, Symbolab y Excel.	Un modelo empírico de probabilidad, para las dos variables de estudio.
3	Inferencia estadística	Realización de Intervalos de confianza para la media de cada variable elegida. Prueba de hipótesis para la media de la muestra contrastada con la media poblacional (base de datos completa) diferencia de medias contrastando las dos variables.	Los intervalos de confianza para la media. Prueba de hipótesis para la media y para la diferencia de medias.
4	Análisis de regresión	Análisis de regresión y correlación identificando si hay relación entre las dos variables de estudio.	Diagrama de dispersión Coeficiente de correlación Modelo de regresión.

Objetivo 1

Con la comprensión de los conceptos de población y muestra, y utilizando la herramienta de Excel, generar una muestra de números aleatorios a partir de la base de datos proporcionada para abordar apropiadamente el análisis descriptivo.

Actividades 1

En Excel, agregar a la base de datos una columna de números aleatorios del 1 al 100 para seleccionar la muestra de la población. Utilizar los números consecutivos de los registros para hacer la selección de la muestra.

Una vez seleccionada la muestra de 100 estudiantes, los equipos eligieron dos de las cuatro variables y articularon su muestra con los datos y variables seleccionadas.

Con los datos de las dos variables, los equipos hicieron todo el análisis estadístico descriptivo para cada una de ellas, utilizando Excel como hoja de cálculo.

Una vez concluidos sus cálculos y gráficas, se les pidió elaborar un reporte con todos los elementos trabajados en esta primera parte, incluyendo tablas de resultados, gráficas y conclusiones o comentarios.

Etapla 2. Modelo de probabilidad

Objetivo 2

Con los datos de la muestra, los equipos han de generar un modelo de probabilidad empírico interconectando conocimientos previamente adquiridos de cálculo y álgebra lineal, e incorporando la teoría de probabilidad.

Actividades 2

Durante la práctica de la segunda semana, los equipos han de generar un modelo de probabilidad a partir de los intervalos de clase del histograma construido la semana anterior. Se seleccionaron los cinco ($n=5$) intervalos más representativos, utilizando las marcas de clase y las frecuencias absolutas a fin de construir un polinomio de grado 4.

El estudiantado ha de generar un polinomio interpolante resolviendo un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas; esto por el método de Gauss-Jordan y a través de MatLab o Symbolab.

Este polinomio habría de normalizarse a partir de su integración para así representar una función de densidad de probabilidad, resultando en un modelo de probabilidad empírico.

Para esta etapa se concatenan conocimientos previos y herramientas tales como: Excel, Álgebra lineal (Sistemas de ecuaciones), Matlab, Symbolab y Cálculo Integral.

Etapla 3. Estadística inferencial

Objetivo 3

Los equipos han de contrastar las medidas muestrales y poblaciones a través de estimación por intervalo y pruebas de hipótesis.

Actividades 3

El trabajo de la tercera semana consistió en que los equipos habrían de desarrollar estimaciones por intervalo de confianza para la media poblacional y la diferencia de medias, así como pruebas de hipótesis sobre la media de cada variable elegida. Igualmente, prueba de hipótesis para la diferencia de medias, generando conclusiones en términos del problema y de los parámetros de estudio.

Etapla 4. Análisis de correlación y Regresión

Objetivo 4

Los equipos deberán buscar una relación lineal entre dos de sus variables de estudio, analizando los resultados obtenidos en términos del problema.

Actividades 4

Los estudiantes habrían de desarrollar un modelo de regresión lineal contrastando dos de las variables seleccionadas al inicio del proyecto, dando un sentido al concepto del mejor modelo lineal asociado para la búsqueda de correlación entre dos variables. Se calculó el coeficiente de correlación de Pearson y se realizó una prueba de hipótesis sobre la significancia de beta (β) verificando si la pendiente de la recta de regresión es diferente de cero.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Al inicio del curso, y para fines del proyecto de investigación y aplicación de la THA, las investigadoras explicaron al grupo el contexto del proyecto del cual se derivó la base de datos a la cual considerarían como sus datos poblacionales. Por esta razón, cuando los equipos eligieron libremente sus variables de trabajo, de forma implícita se generaba una pregunta de investigación para responder en la materia de probabilidad y estadística. Esto se vio reflejado en el desarrollo de cada etapa del trabajo semanal con sus comentarios y reflexiones, y en el avance de la THA.

Los equipos fueron avanzando en cada etapa, recibiendo retroalimentación y fortaleciendo el objetivo de “Mirar profesionalmente” al estudiantado. Vale la pena destacar que se observó la evolución del aprendizaje a través de las competencias evidenciadas, tales como la apropiación del uso del lenguaje asociado a la materia y la coherencia de sus conclusiones reflexionadas y pertinentes en términos de las problemáticas que se plantearon de inicio.

Los equipos desarrollaron las actividades propuestas en el laboratorio de cómputo de la Universidad. Se puede destacar que la organización al inte-

rior de cada equipo fue óptima, como la distribución del trabajo y la presentación de resultados; los integrantes hacían cálculos y describían e interpretaban sus resultados en un documento PDF. Sólo hubo un equipo que demeritó su trabajo por falta de compromiso observable en sus documentos entregados.

En esta sección se presenta una muestra de los avances de cada etapa del proyecto realizados por los cinco equipos.

Las variables seleccionadas por cada equipo se encuentran en la Tabla 3.

Tabla 3
Variables de estudio por equipo

Equipo	Variables elegidas
1	Confianza y Ansiedad
2	Confianza y Motivación
3	Confianza y Utilidad
4	Confianza y Motivación
5	Confianza y Ansiedad

A continuación, se presentan algunos ejemplos del trabajo desarrollado, además de las conclusiones y discusión asociada de los equipos con cada una de las actividades descritas en la metodología.

Objetivo 1

Con la comprensión de los conceptos de población y muestra, y utilizando la herramienta de Excel, generar una muestra de números aleatorios a partir de la base de datos proporcionada para abordar apropiadamente el análisis descriptivo.

Evidencias de aprendizaje

Las siguientes evidencias demuestran que el estudiantado se ha apropiado de los conceptos de muestra, muestreo, variabilidad, forma y sesgo, y medidas de tendencia central. Este manejo del lenguaje indica un alto nivel de comprensión de los conceptos del análisis descriptivo. Se observa que el nivel de análisis que maneja el alumnado es congruente con el aprendizaje adquirido, logrando conclusiones específicas del tema abordado.

He aquí algunos ejemplos de las conclusiones de los equipos tomadas de sus documentos finales, estas demuestran la evolución de su aprendizaje.

Equipo 1: ... *Con ayuda del histograma de frecuencia absoluta de la variable ansiedad de una muestra de 100 alumnos, podemos concluir que las medidas de tendencia central coinciden en el intervalo [2.78,3.15), (...). También se puede ver que tiene un desfase hacia la izquierda, hay aproximadamente un 23% de variación de los datos, por lo tanto, la curtosis es platocúrtica.*

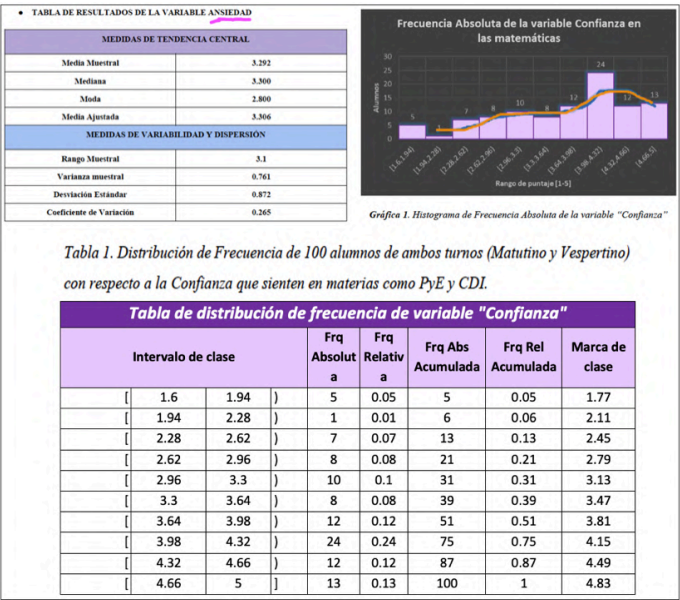
Equipo 3: ... Con esta tabla podemos ver que hay una gran concentración de datos en el extremo superior de los datos por lo tanto hay varios alumnos que se sienten con confianza hacia las matemáticas. (...) por otro lado, vemos que también existe un mayor puntaje donde los alumnos sienten que las matemáticas son de gran utilidad.

Equipo 4: ... Mediante la estadística descriptiva se logró hacer un estudio sobre la confianza y motivación de alumnos de preparatoria hacia las matemáticas, en ambos casos se puede observar un sesgo en las gráficas, donde hay mayor frecuencia en grados de motivación y confianza altos, lo cual indica que están contentos con la materia y desean seguir mejorando su desempeño en la misma.

En la Figura 4 se presenta una tabla de medidas de tendencia central y de variabilidad, una distribución de frecuencias y un histograma.

Figura 4

Muestra de tablas y gráficas desarrolladas en relación con el objetivo 1



Objetivo 2

Con los datos de la muestra, los equipos han de generar un modelo de probabilidad empírico interconectando conocimientos previamente adquiridos de cálculo y álgebra lineal, e incorporando la teoría de probabilidad.

Evidencias de aprendizaje

Las siguientes evidencias demuestran que se ha alcanzado el objetivo concerniente a los modelos probabilísticos, en tanto que sus reflexiones indican que reconocen el vínculo con asignaturas anteriores, pues utilizan métodos aprendidos previamente, adecuándose a la generación de un modelo empírico del uso de la tecnología. Nuevamente, sus conclusiones son reflejo del nivel adecuado de aprendizaje esperado.

En la Figura 5 se presenta el desarrollo de un polinomio interpolante de grado 4 que representa un modelo empírico de probabilidad asociado a las variables de estudio. Aquí se observa la interconexión entre las materias de álgebra lineal, cálculo y el uso de software para la solución de la etapa. Por otro lado, en la Figura 6 se muestra una gráfica del polinomio resultante del modelo empírico para la variable “confianza”.

Figura 5

Muestra de tablas de resultados y procesos desarrollados en relación con el objetivo 2

En esta tabla se tomó en cuenta los valores de la marca de clase (x), respecto a la frecuencia absoluta (y), para así determinar la matriz y resolverla mediante un sistema de ecuaciones, despejando las incógnitas a0, a1, a2, a3 y a4.

Tabla 19. Ecuaciones y solución de las mismas.

Ecuaciones	Incógnitas	Valor
a+1.770b+3.133c+5.545d+9.815e=5	a0	-376.02
a+2.790b+7.784c+21.718d+60.592e=8	a1	559.31
a+3.130b+9.797c+30.664d+95.979e=10	a2	-296.58
a+4.150b+17.223c+71.473d+296.615e=24	a3	67.51
a+4.83b+23.329c+112.679d+544.238e=13	a4	-5.51

Polinomio Interpolante			
$P(x) = -376.02 + 559.31x - 296.58x^2 + 67.51x^3 - 5.51x^4$			
Integral Solución	Valor K	Despeje	
50.05	$K \cdot 50.05 = 1$	$K = 0.0199$	

Se muestran las ecuaciones armadas a partir de la tabla 18, y sus respectivos valores de cada incógnita.

Imagen 1. Solución de la matriz por Gauss Jordan.

Solución

Reducir matriz a la forma escalonada

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a & \dots & b & & & & & & & \\ 0 & \dots & 1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & c & & & & & & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1.77 & 3.133 & 5.545 & 9.815 & 5 & & & & \\ 0 & 3.06 & 20.196 & 107.134 & 534.423 & 8 & & & & \\ 0 & 0 & -2.312 & -22.49611... & -151.35733... & 1.44444... & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1.75236... & -23.59304... & 11.77316... & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.68996... & 3.80407... & & & & \end{array} \right)$$

Reducir matriz a su forma escalonada reducida por renglones

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & \dots & b & & & & & & & \\ 0 & \dots & 1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -376.02336... & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 559.31187... & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -296.58390... & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 67.51177... & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5.51340... & & & & \end{array} \right)$$

Rango

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1.77 & 3.133 & 5.545 & 9.815 & 5 \\ 1 & 2.79 & 7.784 & 21.718 & 60.592 & 8 \\ 1 & 3.13 & 9.797 & 30.664 & 95.979 & 10 \\ 1 & 4.15 & 17.223 & 71.473 & 296.615 & 24 \\ 1 & 4.83 & 23.329 & 112.679 & 544.238 & 13 \end{array} \right) = 5$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1.77 & 3.133 & 5.545 & 9.815 & 5 & & & & \\ 1 & 2.79 & 7.784 & 21.718 & 60.592 & 8 & & & & \\ 1 & 3.13 & 9.797 & 30.664 & 95.979 & 10 & & & & \\ 1 & 4.15 & 17.223 & 71.473 & 296.615 & 24 & & & & \\ 1 & 4.83 & 23.329 & 112.679 & 544.238 & 13 & & & & \end{array} \right) \xrightarrow{I_1} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ 1.77 & 2.79 & 3.13 & 4.15 & 4.83 & & & & & \\ 3.133 & 7.784 & 9.797 & 17.233 & 23.329 & & & & & \\ 5.545 & 21.718 & 30.664 & 71.473 & 112.679 & & & & & \\ 9.815 & 60.592 & 95.979 & 296.615 & 544.238 & & & & & \\ 5 & 8 & 10 & 24 & 13 & & & & & \end{array} \right)$$

La solución del equipo fue obtenida por el método de Gauss-Jordan.

Equipo 1: Algo que aprendimos en esta práctica es la influencia que tienen otras materias en la Probabilidad y Estadística, la importancia de cada una de ellas (...). Durante la realización de esta práctica nos pudimos dar cuenta cómo es el proceso para obtener la constante K (...); se tuvieron que aplicar varios

conocimientos previamente aprendidos en materias como álgebra lineal, cálculo integral y sistemas de ecuaciones.

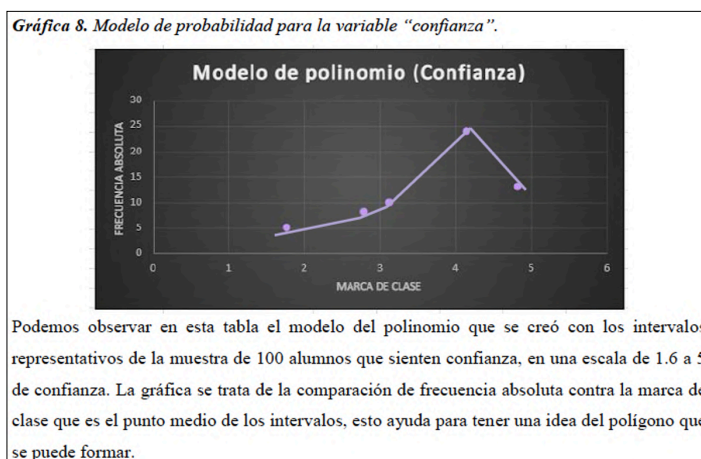
Equipo 3: *Con esta práctica podemos ver la importancia de construir un modelo adecuado que nos ayude a tener un mejor entendimiento de los datos y a su vez proporciona una mayor facilidad para poder analizar los resultados y obtener conclusiones.*

El equipo siguiente muestra, además del objetivo propuesto, la relación que tienen los datos estudiados con los resultados observados.

Equipo 4: *Tras generar el modelo de probabilidad se logró analizar la motivación hacia las matemáticas de los estudiantes de preparatoria, donde se ve claramente una frecuencia mayor en el punto medio del puntaje (...) esto nos dice que la mayoría de los alumnos se sienten con una motivación promedio hacia las matemáticas y muy pocos se sienten con muy poca motivación (...). En la parte de Confianza, se pudo observar igualmente una tendencia en la confianza mayor al promedio (...), indicando que gran mayoría de los alumnos se consideran con confianza ante las matemáticas.*

Figura 6

Muestra de la gráfica de modelo probabilístico (objetivo 2)



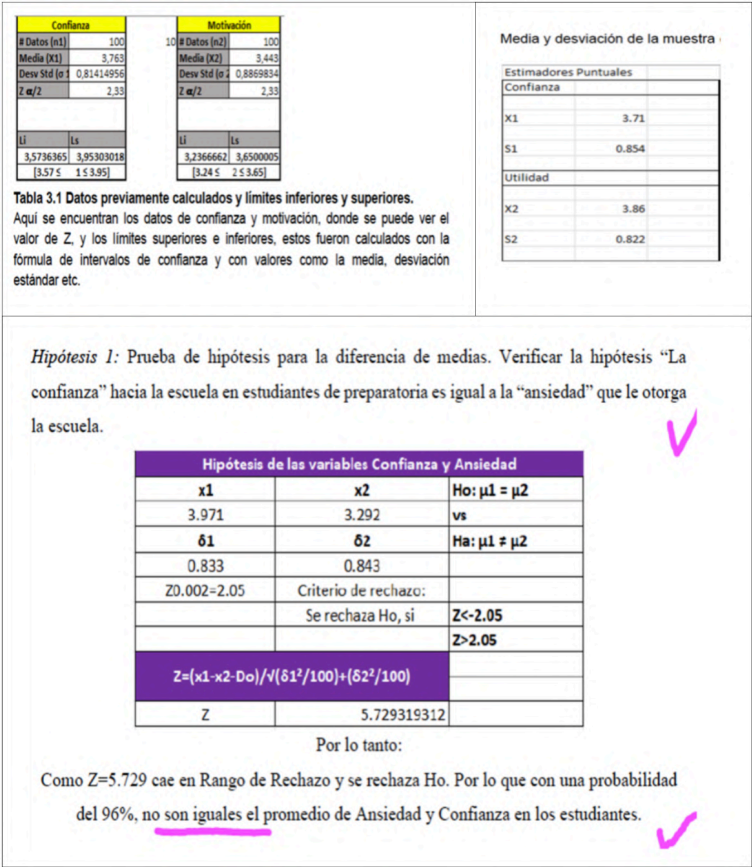
En el siguiente comentario se muestra, como desafortunado ejemplo, un equipo que presentó sus análisis con poca claridad en la redacción y sin suficiente compromiso respecto al desarrollo de su trabajo.

Equipo 5: *...Se puede observar en el histograma de confianza que tenemos una mayor concentración en los alumnos en el Intervalo de 4.2 a 4.6, con 21 valores, al calcular las "a" para obtener un polinomio de grado 4 y después introducir los valores resultantes en una matriz, obtenemos nuestros valores de la resultante, con la cual podemos proceder a calcular mediante una integral el valor de K con el que se tiene una función de densidad de probabilidad que permite modelar los datos, el cual lo despejamos y nos da como resultado: 0.0125.*

Objetivo 3

Los equipos han de contrastar las medidas muestrales y poblaciones a través de estimación por intervalo y pruebas de hipótesis.

Figura 7
Muestra de tabla de resultados y análisis inferencial asociados al objetivo 3



Evidencias de aprendizaje

Las siguientes evidencias demuestran un dominio de los elementos de estadística inferencial, como son los intervalos de confianza y las pruebas de hipótesis. El análisis realizado por los equipos respecto a la asociación del cálculo con el significado en términos del problema, se plasma en la redacción de las conclusiones y análisis presentados.

Una muestra de una estimación de intervalo de confianza y de una prueba de hipótesis se presenta en la Figura 7.

Equipo 1: Para la comparación en que la confianza es mayor a la ansiedad en las matemáticas, se obtuvo Z=2.01, afirmando que(...) se rechaza la Ho. Así se tiene que con una probabilidad del 96%, no son iguales el promedio de Ansiedad y Confianza en los estudiantes.

Equipo 3: Todos estos procesos son de gran ayuda para observar y analizar una hipótesis y ver si ésta se cumple, o si no es el caso también ayuda a poder replantearse para poder realizar otra prueba.

Equipo 4: *Tras realizar estos intervalos de confianza para las dos variables, se puede ver de forma clara cómo la confianza de los estudiantes hacia las matemáticas en esta muestra, se encuentra entre los valores de 3.57 y 3.95, por otro lado, en la motivación sus valores van de 3.24 a 3.65. En ambos casos hay valores que están por debajo del límite inferior o por arriba del superior, estos valores no entran dentro de nuestro intervalo y no se tomarían en cuenta.*

Objetivo 4.

Los equipos deberán buscar una relación lineal entre sus variables de estudio, analizando los resultados obtenidos en términos del problema.

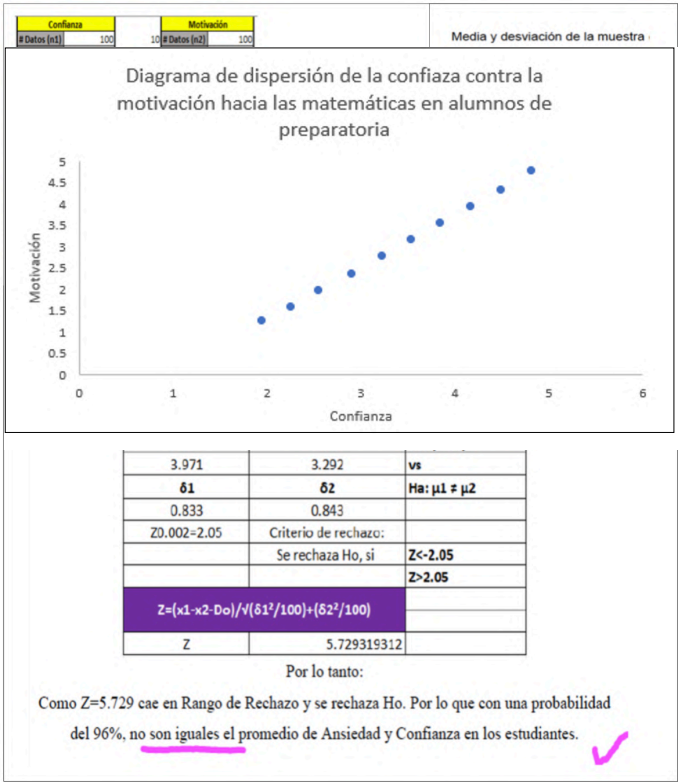
Evidencias de Aprendizaje

Las siguientes evidencias muestran un manejo adecuado del lenguaje, apropiación del conocimiento, y claridad en lo que se refiere a la relación lineal entre dos variables. Se logra la comprensión de la prueba de significancia de BETA. Destaca el aterrizaje de las conclusiones en términos del problema en particular. Sin embargo, hay indicios de la falta de comprensión del concepto de causalidad en contraposición con el de la correlación.

Una muestra de una gráfica de regresión lineal se puede observar en la Figura 8.

Figura 8

Muestra de una gráfica de regresión relacionada con el objetivo 4



Equipo 1: *La ecuación de regresión de mínimos cuadrados ($\hat{y} = -0.441 + 1.088x$), habla de que nos ayudó a saber qué tan relacionados están los comportamientos que provocan las matemáticas a los alumnos de preparatoria. (...) en la prueba de hipótesis se puede concluir que Como $T = 46400502 > 1.984$ cae en región de rechazo por lo que se rechaza H_0 . Por lo tanto, se acepta que B es diferente de 0 y sí hay una relación lineal entre la confianza y la motivación a las matemáticas con una confianza del 95%, dándonos a conocer que la ansiedad influye en la motivación que sienten los alumnos de preparatoria ante las matemáticas.*

Equipo 2: *Al ser el coeficiente de correlación (...) cercano a uno, se puede entender que las dos variables, confianza y motivación, están directamente relacionadas una con la otra; por otro lado, un coeficiente de determinación (r^2) igual a uno, significa un ajuste lineal perfecto (...). Mediante la realización de este trabajo (...) se comprobó que las variables mencionadas están relacionadas de forma directa y lineal, por lo tanto, se podría inferir que los estudiantes que tienen niveles de confianza más altos son los que más motivación tienen en estas materias, el caso contrario igual funciona, ya que se comprobó gráficamente que los diagramas de dispersión con la recta ajustada, siguen un modelo similar al de una recta identidad; por lo tanto, consideramos que el análisis de los resultados obtenidos puede ser de gran ayuda para la realización de planes de estudio o técnicas de enseñanza, en las que se busque priorizar la confianza, esto como consecuencia traería niveles de motivación más alto y a su vez desempeños superiores de los alumnos.*

Equipo 3: *Después de realizar el ejercicio podemos apreciar que la hipótesis planteada es rechazada por mucho, esto nos da a entender que se acepta que B es diferente a 0 y hay una relación lineal entre las dos variables de Confianza y Utilidad, consideradas de importancia en las actitudes hacia las matemáticas en los estudiantes tanto de nivel medio superior y superior.*

Equipo 4: *Con los 10 datos se logró calcular el coeficiente de correlación de Pearson y el coeficiente de determinación, el primero resultó muy grande, esto nos dice que hay mucha relación entre la Confianza y la Motivación. Por otro lado, en el coeficiente de determinación podemos ver cómo el 94.95% de la variación de la motivación es influido por la variación de la Confianza.*

En la sección del análisis de la hipótesis, el equipo 4 planteó lo siguiente:

La confianza hacia las matemáticas en estudiantes de Preparatoria es igual a la motivación que le otorgan a las matemáticas. Por lo que se realizaron los cálculos según las variables (...) para así desarrollar y comprobar si ésta podría ser una hipótesis aceptable o totalmente rechazada con una confianza del 96%. Inicialmente, la hipótesis se presentó con una alta probabilidad de rechazo pues ésta estuvo dentro del área de rechazo al tener un valor mayor que 2.05, límite de la zona de rechazo.

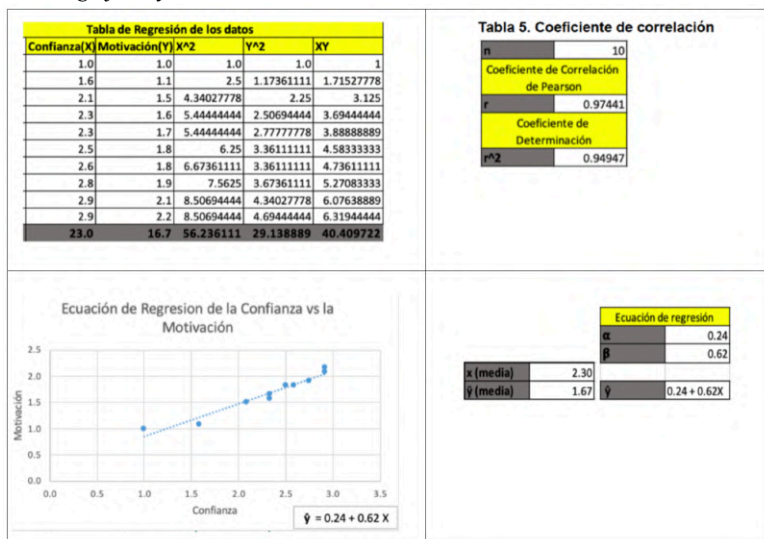
De esta manera, al analizar los datos de la confianza y motivación podemos guiarnos por el entendido de que a mayor grado de confianza presentado en los alumnos, mayor motivación ante las matemáticas, siendo directamente proporcional el grado de confianza y de motivación en alumnos de preparatoria.

Con esta interpretación, el equipo 4 demuestra capacidad de análisis y razonamiento crítico, competencias que nos propusimos desarrollar en el estudiantado.

La Figura 9 muestra la tabla de cálculos conducentes a la obtención de los parámetros de la ecuación de regresión, los coeficientes de correlación y de determinación, y una gráfica ilustrativa.

Figura 9

Muestra de gráficas y tablas relacionadas con el objetivo 4



El equipo hizo una reflexión general que engloba los objetivos del proyecto. Esta reflexión vincula los aspectos socioemocionales y muestra la inclusión de temas transversales que, por lo general, se exploran poco en las ingenierías:

Equipo 4: *Tras hacer una serie de cálculos y su análisis, se puede concluir que hay una gran relación entre la confianza que puede sentir un alumno en las matemáticas y la motivación que la materia le brinde, por lo que es sumamente importante que tenga un buen nivel de confianza y motivación, para así tener un gran desempeño en la materia de matemáticas.*

Con esto dicho, vemos cómo en las materias es sumamente importante el aspecto psicológico del alumno y que con un buen nivel de confianza y motivación pueden sacar mejores resultados, ya que así se siente con mayor impulso para mejorar su aprendizaje y desempeño.

Este equipo no se limitó al contexto de donde se tomaron los datos, si no que profundizó en su análisis hasta llegar a generar recomendaciones para la enseñanza de las matemáticas.

A través de los comentarios y conclusiones de los equipos, se pudo apreciar que el hecho de que el estudiantado realizara la selección de las variables a analizar, planteando de manera implícita preguntas de investigación que estaban asociadas con aquello que tuvieron la inquietud de estudiar, condujo a una actitud más favorable para el aprendizaje de la estadística y la probabilidad. El poder concluir en términos del problema es reflejo del

desarrollo de las competencias planteadas. Asimismo, al ser un tema cercano al alumnado, que además les es interesante, el tratamiento de datos deja de ser frío y tiene un contexto socioemocional motivador.

En la Tabla 4 se resumen las competencias desarrolladas por cada equipo en cuatro diferentes niveles de aprendizaje, basados en la categorización de Ribeiro Campos & Pavan Perin (2020), a la cual se agregó el trabajo colaborativo y el uso de la tecnología.

Tabla 4
Competencias desarrolladas por cada equipo

Competencia/ Equipo	1	2	3	4	5
Dominio del lenguaje	Sobresaliente	Sobresaliente	Satisfactorio	Sobresaliente	Suficiente
Razonamiento	Sobresaliente	Sobresaliente	Sobresaliente	Sobresaliente	Satisfactorio
Pensamiento	Sobresaliente	Satisfactorio	Satisfactorio	Sobresaliente	Suficiente
Reflexión crítica	Sobresaliente	Satisfactorio	Sobresaliente	Sobresaliente	Deficiente
Aprendizaje colaborativo	Sobresaliente	Sobresaliente	Sobresaliente	Sobresaliente	Suficiente
Uso de la tecnología	Sobresaliente	Satisfactorio	Sobresaliente	Sobresaliente	Deficiente

Nota. adaptación de Ribeiro Campos y Pavan Perin (2020)

Al término del curso, de manera individual, el estudiantado reflexionó acerca de su aprendizaje mediante un cuestionario proporcionado por las investigadoras. En la primera parte se les preguntaron datos generales de carrera y semestre, seguida de una sección donde se les daban tres opciones de apreciación acerca de la secuencia temática del curso: lógica, conveniente para comprender los temas, no conveniente para comprender los temas. La tercera sección indaga específicamente en el orden de los temas estudiados en clase. Las fortalezas y oportunidades se preguntan en la siguiente parte para finalmente dejar un espacio para sus reflexiones. El alumnado destacó las competencias observadas en sí mismos, las de mayor frecuencia fueron el pensamiento lógico, compromiso y trabajo en equipo. Cabe destacar que consideraron adecuada la secuencia de los temas estudiados en clase, validando así la THA diseñada; la calificaron en su gran mayoría como lógica, y en segundo lugar como conveniente para la comprensión de los temas. No se presentó ninguna mención respecto a que fuera inconveniente para comprender los temas. Entre las principales fortalezas destacan la mejor comprensión de los temas a través de un análisis más profundo, acompañado

del uso de software y apalancado en el trabajo colaborativo. Las reflexiones fueron positivas, mostrando su satisfacción con la forma de llevar el curso, en particular con el proyecto y con el uso de datos reales en él.

CONCLUSIONES

De acuerdo con estudio realizado, los resultados y análisis obtenidos, llegamos a las siguientes conclusiones.

En principio, consideramos que cumplimos los objetivos planteados en esta investigación. Aún más, consideramos que hemos rebasado las expectativas dado que el estudiantado mostró un interés tangible en el compromiso con su aprendizaje, y también una actitud positiva hacia la probabilidad y la estadística. De acuerdo a los resultados, el estudiantado concluyó adecuadamente sus productos, lo cual refleja un nivel de apropiación más que satisfactorio para un curso de esta naturaleza.

La elaboración del proyecto contó con una característica particular: su diseño contempló una THA acumulativa, de tal manera que los objetivos matemáticos se fueron sumando secuencialmente hasta obtener un producto que, dentro de la lógica del estudiantado, habría de tener sentido. Las THA que hemos observado en la literatura parten de un objeto matemático, y a partir de ello se presenta la secuencia. En nuestro caso, el hilo conductor fue el tema del proyecto, con objetivos parciales acumulativos y con actividades secuenciadas.

Es decir, analizar y estudiar por medio de la materia de probabilidad y estadística una problemática cercana al estudiantado como es la confianza, la ansiedad, motivación o la utilidad hacia las matemáticas, temas transversales socio-emocionales y estrechamente relacionados con su acontecer cotidiano, no sólo le dio un propósito a los análisis que realizaron los equipos, sino que buscaron dar un sentido a sus resultados analíticos y, por medio de su razonamiento, expresar lo que sus cálculos numéricos arrojaron.

Consideramos que los estudiantes le encontraron sentido a la utilidad que representa la materia en cuestión para abordar un proyecto desarrollado de forma secuencial (trayectoria), evidencia tangible de la apropiación del aprendizaje que se logró en la mayoría de los equipos.

Durante el transcurso de la THA fue posible observar la evolución del pensamiento analítico del estudiantado a medida que fue relacionando la materia con asignaturas anteriores y aprovechando el uso de la tecnología.

La propuesta de THA para el caso de materias PEyT favoreció que, como docentes, se monitoreen las actividades del alumnado, evaluando los niveles de aprendizaje y adecuando la trayectoria para favorecer el mayor aprovechamiento. De esta forma se logró el fortalecimiento de la competencia “Mirar profesionalmente” el pensamiento, razonamiento y evolución del aprendizaje en el alumnado, cubriendo así otra de las metas que fue planteada de inicio.

La THA proporcionó al cuerpo docente herramientas para diseñar oportunidades que permitan al estudiantado la apropiación de los conocimientos y el alcance de los objetivos matemáticos planteados, así como distinguir los diferentes niveles cognitivos que desarrolló el alumnado. Fue posible observar esto en el cuestionario de autoevaluación, donde se reporta el desarrollo de sus competencias lógicas, pensamiento secuencial y trabajo en equipo. La categorización de las competencias realizadas permitió elaborar rúbricas más definidas que apoyarán tanto al estudiantado como al profesorado.

Como autorreflexión, por medio del uso y aplicación de esta THA, también fue posible darles un sentido y un contexto a los temas transversales (aspectos socioemocionales y la actitud hacia las matemáticas) en las carreras de ingeniería, y el aprovechamiento de la tecnología para favorecer la aplicación de los conceptos aprendidos. Se observó que la elección libre del alumnado sobre las variables de estudio impactó positivamente en su actitud y en un trabajo colaborativo eficiente. Esto se vio reflejado en sus conclusiones.

Entre las recomendaciones que podemos aportar está la de que el alumnado pueda decidir el tema a abordar en el proyecto a partir de las generalidades propuestas por el cuerpo docente. Cabe señalar que el abanico de los temas transversales es amplio, con temas tales como género, sustentabilidad, derechos humanos, actitudes socioemocionales hacia las matemáticas, entre otros; dichos temas son propicios para disparar preguntas de investigación que el estudiantado podrá responder en un proyecto por medio de la estadística, convirtiéndose en una posible línea de investigación a futuro.

Otra recomendación es la secuenciación que se siguió: estadística descriptiva, teoría de la probabilidad, pasando por muestreo antes de iniciar la estadística inferencial, y culminar con regresión. En futuros trabajos se podrían analizar modificaciones a esta seriación y comparar resultados.

Este estilo de enseñanza cumple la función de que el estudiantado vea la aplicación a nivel profesional de estas materias. De esta forma, se considera que el alumnado ya no ve solamente cálculos numéricos realizados de manera automática sin un contexto o propósito.

Finalmente, constatamos que el desarrollo y evolución de las matemáticas a través de la historia ha sido para buscar soluciones de problemas observados por el ser humano, el cual se da a la tarea de implementar herramientas adecuadas para solventarlo. Al dar una problemática al estudiantado para resolver con herramientas de probabilidad y estadística, se da un sentido y un por qué a su aprendizaje de la materia.

Algunas de las limitaciones observadas en este curso fueron las siguientes.

El curso se desarrolló de manera intensiva durante seis semanas, eso favoreció a la secuencia de trabajo semanal. En algún punto esto es una limitación por la carga académica que tiene el docente al evaluar semana a semana una parte importante del proyecto.

Una segunda limitación es la pertinencia de involucrar el uso de herramientas de cómputo, *in situ*, para monitorear que el trabajo se desarrolle en forma equitativa en cada equipo, y al observar la evolución de los equipos, hacer evaluaciones sustantivas de los procesos desarrollados y de las evidencias en su aprendizaje. El fin es permanecer observando y evaluando cualitativamente.

El factor humano es determinante para la respuesta en torno a la THA: la falta de motivación de uno de los equipos y el trabajo poco satisfactorio que desarrolló, puede considerarse como otra limitación del proyecto. No es posible predecir la respuesta actitudinal del estudiantado.

Esta situación obedece al circuito monitoreo-retroalimentación-evaluación de una THA. Por esta razón, la carga de trabajo deberá ser compartida por al menos dos docentes.

Independientemente del trabajo cotidiano durante el desarrollo del curso y aún considerando las limitaciones observadas, los cortes semanales favorecen el desarrollo y fortalecimiento de la competencia docente denominada Mirar profesionalmente al estudiantado situación que habrá que solventar en un curso semestral.

REFERENCIAS

- Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Mensajero.
- Blanco, A. (2008). Una revisión crítica de la investigación sobre las actitudes de los estudiantes universitarios hacia la Estadística. *Revista Complutense de Educación*, 19(2), 311–330. <https://bit.ly/3OZRX64>
- Cárcamo, A., Fortuny, J. M., & Fuentealba, C. (2021). Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje: un ejemplo en un curso de álgebra lineal. *Enseñanza de las Ciencias*, 39(1), 45–63. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2857>
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning Trajectories in Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81–89. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_1
- Figueroa, S., Perez, M., Baccelli, S., Prieto, G., & Moler, E. (2012). Actitudes hacia la estadística en estudiantes de ingeniería. *Premisa*, 52, pp. 37–49. <https://bit.ly/44dO2XL>
- Gómez, P. & Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, 1(2), 79–98. <https://doi.org/10.30827/pna.v1i2.6214>
- Gómez-Chacón, I.M., Ortuño, T., & de la Fuente, A. (2020). Aprendizaje-Servicio en Matemáticas: Uso de Trayectorias de Aprendizaje en la formación universitaria. *REDU Revista de docencia universitaria*, 18(1), 213–231. <https://doi.org/10.4995/redu.2020.12079>

- Inzunza Cazares, S., & Islas Anguiano, E. (2019). Análisis de una trayectoria de aprendizaje para desarrollar razonamiento sobre muestras, variabilidad y distribuciones muestrales. *Educación Matemática*, 31(3), 203–230. <https://bit.ly/45rIKKe>
- Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. (2020). Uso de una trayectoria hipotética de aprendizaje para proponer actividades de instrucción. *Enseñanza de las Ciencias*, 38(3), 105–124. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2947>
- Julca Vera, N., Delgado Arenas, R., & Pérez Pérez, M. (2017). Actitud hacia la Estadística y estilos de aprendizaje hacia la estadística en los estudiantes de una Universidad Privada de la Ciudad de Lima. *Revista Científica Pokomuros*, 5(1). <https://doi.org/10.37787/pakamuros-unj.v5i1.52>
- Karaali, G., & Khadjavi, L. (2021). *Mathematics for Social Justice*. American Mathematical Society.
- Mamani, A. R. N., & Martínez Pérez, S. R. (2018). Actitudes hacia la estadística y factores asociados en estudiantes universitarios. *Investigación y Negocios*, 11(18), 64–71. <https://bit.ly/3OFyzK3>
- Martínez, F. J., Llinares, S., & Torregrosa, G. (2015). Propuestas de enseñanza centradas en una trayectoria de aprendizaje de un contenido matemático usando materiales didácticos. En M. T. Tortosa Ybáñez, J. D. Álvarez Teruel, & N. Pellín Buades (Coords.), *XIII Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria. Nuevas estrategias organizativas y metodológicas en la formación universitaria para responder a la necesidad de adaptación y cambio* (pp. 585–600). Universidad de Alicante. <https://bit.ly/47E453R>
- Pérez Laverde, L. E., Aparicio Pereda, A. S., Bazán Guzmán, J. L., & João Abdounur, O. (2015). Actitudes hacia la estadística de estudiantes universitarios de Colombia. *Educación Matemática*, 27(3), 111–149. <https://bit.ly/45AP0yp>
- Ribeiro Campos, C., & Pavan Perin, A. (2020). About critical and behavioral competences in Statistics Education. *Zetetiké*, 28, 1–18. <https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8656795>
- Rodríguez-Santero, J., & Gil-Flores, J. (2019). Actitudes hacia la estadística en estudiantes de Ciencias de la Educación. Propiedades psicométricas de la versión española del Survey of Attitudes Toward Statistics (SATS-36). *Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa*, 25(1) art.3. <https://doi.org/10.7203/relieve.25.1.12676>
- Ruiz de Miguel, C. (2015). Actitudes hacia la Estadística de los alumnos del grado en pedagogía, educación social, y maestro de educación primaria de la UCM. *Educación XX1*, 18(2), 351–374. <https://doi.org/10.5944/educxx1.12158>
- Sánchez, E., & Valdéz, J. (2017). Las ideas fundamentales de probabilidad en el razonamiento de estudiantes de bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 11, 127–143. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i11.180>

- Sánchez-Matamoras, G., Moreno, M., Pérez-Tyteca, P., & Callejo, M. L. (2018). Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de Educación Infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(2), 203–228. <https://doi.org/10.12802/relime.18.2124>
- Simon, M. (2014). Hypothetical Learning Trajectories in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 272–275). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_72
- Vilá Baños, R., & Rubio Hurtado, M.J. (2016). Actitudes hacia la Estadística en el alumnado del grado de Pedagogía de la Universidad de Barcelona. *REDU. Revista de Docencia Universitaria*, 14(1), 131–149. <https://doi.org/10.4995/redu.2016.5766>

Recomendaciones para promover la modelación en el aula: cerrando la brecha entre investigación y práctica

Verónica Vargas-Alejo¹ y Luis E. Montero-Moguel²

RESUMEN

La modelación es una tendencia internacional en la educación matemática cuya inserción en el aula requiere de atención debido a la escasez de recursos para que los profesores utilicen los resultados de las investigaciones empíricas para impulsarla. Este capítulo, fundamentado en la Perspectiva de Modelos y Modelación, tiene como objetivo presentar cinco recomendaciones respaldadas por investigaciones empíricas para que los profesores puedan impulsar la modelación en su entorno educativo. Se reporta el estudio de caso cualitativo de un profesor de matemáticas de nivel superior en su primer curso de modelación matemática, el cual se basó en las cinco recomendaciones para la implementación de MEAs en el aula, descritas en este estudio. Los resultados del estudio de caso revelaron que estas recomendaciones permitieron al docente reflexionar y cambiar ideas iniciales sobre el tipo de problemas, sus ambientes de resolución y los procesos de evaluación.

PALABRAS CLAVE

Modelación, modelos, Profesores, MEAs, Conocimiento matemático.

¹ veronica.vargas@academicos.udg.mx
Universidad de Guadalajara
<https://orcid.org/0000-0002-7431-0568>

² luis.monteromoguel@utsa.edu
The University of Texas at San Antonio
<https://orcid.org/0000-0002-9009-1377>

ANTECEDENTES

Este capítulo tiene el objetivo principal de contribuir a la ampliación de herramientas que permitan a los profesores de matemáticas incorporar los hallazgos de las investigaciones en modelación matemática en sus clases mediante la presentación de cinco recomendaciones. Consideramos que este capítulo puede ser útil para los profesores de matemáticas que tienen su primer acercamiento con la modelación matemática. Además, pensamos que puede ser relevante para los formadores de profesores e investigadores debido a la vigente discusión sobre cómo debería ser el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el aula, desde los niveles básicos hasta los niveles superiores, ya que una de las tendencias actuales internacionales que se promueve es la modelación (English, 2021; Garfunkel & Montgomery, 2019; Lesh, 2010; Sevinc, 2021). En esta tendencia se busca cambiar los enfoques memorísticos y algorítmicos, y se promueve una formación de los estudiantes que posibilite el desarrollo no solo de conocimientos, sino también de formas de pensar flexibles para enfrentar los problemas actuales y los retos del futuro incierto. De acuerdo con la “Declaración de Incheon y Marco de acción para la realización del Objetivo de Desarrollo Sostenible 4”, esto es importante en tanto se requiere una educación de calidad que implique que los ciudadanos desarrollen aptitudes, valores, actitudes y conocimientos suficientes para llevar vidas sanas y plenas, para tomar decisiones con ciertos fundamentos, y para hacer frente a los desafíos de orden local y mundial (Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura, 2016).

Algunas preguntas clave abordadas en varias investigaciones (Ärlebäck & Doerr, 2018; English, 2021; Garfunkel & Montgomery, 2019; Makar et al., 2020; Montero-Moguel & Vargas-Alejo, 2022) que proponen el uso de la modelación en el salón de clases son: ¿Qué es la modelación? ¿Qué es un modelo? ¿Qué significa incorporar la modelación en el salón de clase? ¿Qué ocurre cuando se incorpora?

Las respuestas a estas preguntas conducen a reflexiones útiles no sólo para investigadores, sino también para docentes interesados en la incorporación de la modelación en el salón de clase.

Otra de las preguntas clave abordadas es ¿con qué tipo de situaciones problema o actividades puede incorporarse la modelación? Lesh y Doerr (2003) y Lesh (2010) han encontrado que el uso de situaciones problemas no triviales es el eje central para generar ambientes de modelación. Estas situaciones problema (denominadas MEAs por sus siglas en inglés: *Model Eliciting Activities*) deben ser cercanas a la vida real y poseer ciertos atributos. Las investigaciones en torno a la modelación matemática han destacado que los estudiantes, al estar expuestos a problemas no triviales, con frecuencia crean, extienden significativamente, revisan o refinan sus formas de pensar

(Lesh & Doerr, 2003) a través de uno o más ciclos de modelación. Durante este proceso, los estudiantes matematizan y se ven inmersos en ambientes donde es importante justificar, argumentar y tomar decisiones para elegir el o los modelos que ofrezcan las mejores respuestas para un cliente.

A pesar de los hallazgos y la relevancia de la modelación matemática descrita por las investigaciones, existen “barreras y desafíos fuertes que deben superarse si queremos asegurarnos de que los modelos y la modelación tengan un lugar y un papel adecuados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en aulas ordinarias en todo el mundo” (Niss & Blum, 2020, p. 3). Dentro de estos desafíos destaca el proveer a los profesores con herramientas que les permitan realizar cambios profundos en sus prácticas para que impulsen la creación de ambientes de modelación en el aula que contribuyan al desarrollo del conocimiento matemático (y multidisciplinario) y habilidades de los estudiantes. Las investigaciones en torno a la modelación matemática (e.g., Montero-Moguel et al., 2020; Corum & Garofalo, 2019) demuestran que el desafío es mayor cuando los profesores tienen su primer acercamiento a la modelación matemática.

Aunque se han realizado investigaciones en el ámbito de la modelación matemática, Niss y Blum (2020) destacan que persisten problemas en la disponibilidad de recursos para los profesores y en la inclusión de secciones de modelación en los libros de texto. Además, existe una brecha entre las investigaciones empíricas y la formación docente. Por lo tanto, con la finalidad de contribuir en la reducción de esta brecha, el presente capítulo proporciona a los profesores de matemáticas recomendaciones para que puedan tomar la iniciativa de fomentar la modelación en su entorno educativo.

Este capítulo fue estructurado en tres secciones fundamentadas en investigaciones empíricas de la Perspectiva de Modelos y Modelación [MMP por sus siglas en inglés: *Models and Modeling Perspective*]. La primera sección aborda los fundamentos teóricos de la MMP con el objetivo de generar una reflexión profunda sobre la modelación matemática.

La segunda sección está compuesta por *cinco recomendaciones para la implementación de las MEAs en el aula*, cuidadosamente estructuradas, que ofrecen iluminación sobre el primer acercamiento de los profesores a la modelación matemática: 1) análisis curricular previo a seleccionar las MEAs, 2) diseño o selección de las MEAs para el aula, 3) adaptación de la MEA al contexto de los estudiantes, 4) recursos para la implementación en el aula, y 5) evaluación de los modelos que emergen al resolver las MEAs. Finalmente, reportamos el estudio de caso de un profesor de matemáticas del nivel superior en su primera experiencia en un curso de modelación matemática, el cual se basó en las *cinco recomendaciones para la implementación de las MEAs en el aula*, incluidas en este capítulo.

MARCO TEÓRICO

Este capítulo utiliza como marco teórico la perspectiva de modelos y modelación. La MMP plantea que aprender matemáticas puede describirse como un proceso no lineal de desarrollo de sistemas conceptuales o modelos que se modifican de manera continua durante la interacción de un individuo o estudiante con sus compañeros o maestros al resolver una situación problema (Lesh, 2010).

Los modelos son sistemas conceptuales (que consisten en elementos, relaciones y reglas que gobiernan las interacciones) expresados mediante el uso de sistemas de notación externa, y utilizados para construir, describir, o explicar los comportamientos de otros sistemas –de tal forma que el otro sistema pueda ser manipulado o predicho de manera inteligente.

Un modelo matemático se enfoca en las características estructurales (más que, por ejemplo, en las características físicas o musicales) de los sistemas relevantes. (Lesh & Doerr, 2003; p. 10)

Las observaciones que hace un individuo de su entorno están influidas por sus teorías, ideas y experiencias, que a su vez estructuran ese entorno en modelos. Es decir, los individuos pueden identificar aspectos, organizarlos y estructurarlos. Modelar es mapear de un sistema a otro con el objetivo de describir, explicar o predecir algún fenómeno. En este proceso de modelación se consideran sólo algunas características del fenómeno en estudio, es decir, se simplifican o distorsionan algunos aspectos, mientras se mantienen otros que se pueden manipular para apoyar la explicación, descripción y predicción del fenómeno. En términos de Brady y Lesh (2021), “modelar es desarrollar innovaciones conceptuales en respuesta a las necesidades que impone el mundo; el resultado (un modelo) es una forma de pensar sobre ese mundo, que posibilita la interpretación y la acción” (p. 96).

La MMP propone el uso de la modelación en el aula, con los siguientes objetivos: a) que los estudiantes desarrollen conocimiento a través de la construcción de modelos y b) fomentar la práctica de la modelación. Propone crear experiencias en el salón, que más que copias de las actividades que hacen los profesionistas, propicien aspectos claves de la futura práctica profesional de los estudiantes (Lesh, 2010). Busca que “en apoyo al aprendizaje en el aula a través de la modelación, los maestros y los investigadores en la MMP se comprometan en una forma específica de modelación de segundo orden: a crear ambientes educativos que promuevan los modelos y la práctica de modelación” (Brady, 2018, p. 45).

La MMP propone el uso de MEAs, que son actividades que contienen situaciones problema cercanos a la vida real (Lesh, 2010). Se diseñan para que los estudiantes reconozcan la necesidad de desarrollar algún tipo específico de modelo matemático y para revelar su pensamiento durante el proceso de resolución; demandan la construcción de modelos y no sólo respuestas puntuales a preguntas específicas: “involucran herramientas concep-

tuales compartibles, manipulables, modificables y reutilizables para construir, describir, explicar, manipular, predecir, o controlar otros sistemas matemáticamente significativos” (Lesh & Doerr, 2003, p. 3).

Tabla 1
Seis principios de diseño para las MEAs

Principio	Cómo saber que el principio se cumple y cómo promueve la evolución
Principio de significado personal	Los estudiantes dan sentido a la tarea, la perciben como significativa y recurren a sus propias experiencias de la vida real para resolverla. Esto asegura que los grupos de estudiantes traigan diversas perspectivas.
Principio de autoevaluación	Los estudiantes juzgan sus soluciones en proceso por sí mismos al evaluar qué tan útiles son para el “cliente” de la MEA en lugar de preguntarle al maestro u otra “figura de autoridad”. Las necesidades del cliente representan un mecanismo de selección que asegura la supervivencia de las ideas más viables.
Principio de construcción del modelo	Los estudiantes articulan un sistema conceptual (modelo) basado en una forma particular de ver la situación problema. En el trabajo en grupo, se ponen en comunicación los modelos de diferentes alumnos entre sí.
Principio de documentación del Modelo	Para mediar en la discusión a nivel de grupo, los estudiantes generan representaciones externas de su pensamiento. Este principio también se refiere a la comunicación y reproducción de modelos.
Principio de generalización del modelo	Los estudiantes muestran cómo generalizar sus soluciones para responder a una variedad de condiciones que el cliente puede enfrentar. Tal modelo ocupa un espacio análogo a un nicho ecológico.
Principio de prototipo simple	La MEA ingresa a la memoria compartida que representa un tipo de estructura matemática y se invoca apropiadamente en la resolución de problemas futuros. Esto asegura la supervivencia y la propagación en escalas de tiempo más largas, análogas a la supervivencia de una especie en evolución.

Nota. Tabla extraída de Brady (2018, p. 46).

Estas actividades posibilitan documentar y evaluar la comprensión conceptual de los estudiantes y, por lo tanto, identificar las fortalezas y debilidades conceptuales. Las MEAs se construyen bajo seis principios de diseño (Tabla 1).

Las MEAs están estructuradas por tres secciones principales: una *nota periodística* para ayudar a los estudiantes a situarse en el contexto del problema que resolverán, *preguntas de calentamiento* que propician la reflexión del contexto, y una *situación problema* que solicita la escritura de una carta con soluciones para un cliente concreto (Lesh et al., 2000). Se necesitan al

menos uno o dos periodos completos de clase, aproximadamente 90 minutos en total, para su resolución.

Las MEAs propician que los estudiantes desarrollen procesos de matematización que implican “cuantificar, dimensionar, coordinar, categorizar, algebrizar y sistematizar objetos, relaciones, acciones, patrones y regularidades relevantes” (Lesh & Doerr, 2003, p. 5). Las respuestas que los estudiantes construyen para las MEAs generalmente involucran el desarrollo de descripciones o explicaciones complejas.

Las descripciones, explicaciones y construcciones no son procesos simples que los estudiantes usan con el propósito de producir “la respuesta” y, no son sólo posdatas que los estudiantes dan después de que la “respuesta” se ha producido. Ellas son los componentes más importantes de las respuestas que se requieren. Así, el proceso es el producto. (Lesh & Doerr, 2003, p. 3)

Al resolver las MEAs, los modelos iniciales que construyen los estudiantes pueden ser inconsistentes o incompletos, pero la revisión y evaluación continua de las ideas permite a los alumnos reflexionar, probar, autoevaluarse, reconstruir y refinarlos. Los modelos se vuelven cada vez más complejos y útiles (Lesh & Doerr, 2003; Makar et al., 2020); es decir, los estudiantes se ven inmersos en procesos continuos de modificación, extensión y refinamiento de ideas para dar sentido a las problemáticas a las que se enfrentan. De tal manera que el desarrollo de interpretaciones involucra una serie de ciclos de modelación.

La MMP plantea que el conocimiento es social, construido por los individuos. Sugiere, por lo tanto, la creación de comunidades donde los estudiantes puedan comunicar sus modelos a otros, analizarlos, discutirlos, negociarlos y evaluarlos; en consecuencia, esto permite la modificación, ampliación y refinamiento de las formas de pensar. Así pues, el uso de MEAs puede contribuir al desarrollo de habilidades fundamentales en la práctica de la modelación, como las consideradas en el siglo XXI: la “comunicación, colaboración, creatividad, pensamiento crítico, toma de decisiones y autorregulación” (Sevinc, 2021, p. 19).

La MMP reconoce la importancia del maestro como facilitador de procesos de modelación mediante el uso de MEAs (Lesh & Doerr, 2003). El maestro es quien puede propiciar entornos colaborativos en el aula donde los estudiantes interaccionan con las maneras de pensar de sus compañeros. Esta interacción posibilita la reflexión y la autoevaluación de las propias formas de pensamiento. Sevinc (2021) señala que los profesores pueden

promover la creatividad de los estudiantes al alentarlos a traer sus perspectivas subjetivas para crear modelos únicos, pero matemáticamente válidos y apropiados para el problema dado en un contexto del mundo real. Además, modelar podría ser visto como una oportunidad de ayudar a los estudiantes a tomar conciencia de su proceso de autorregulación en el cual ordenan gradualmente sus formas de pensar para desarrollar modelos poderosos. (p. 19)

Los alcances mencionados no son una tarea trivial para los profesores. Inclusive, con base en investigaciones en torno a la formación docente en la MMP (Montero-Moguel et al., 2020), se considera que es complejo para un profesor construir MEAs que cumplan con los seis principios de diseño (Tabla 1) cuando no ha tenido acercamiento previo a la MMP.

Con el propósito de orientar a los profesores que desean crear ambientes de modelación en el aula, hemos estructurado cinco recomendaciones que consideramos fundamentales para que los profesores implementen las MEAs. Estas recomendaciones son descritas con detalle en la siguiente sección.

CINCO RECOMENDACIONES PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE LAS MEAs EN EL AULA

En este apartado se describen elementos importantes que pueden apoyar a los docentes para utilizar las MEAs en el aula con el propósito de desarrollar conocimiento y fomentar la práctica de la modelación. Estos elementos se derivan de investigaciones sustentadas en la MMP, realizadas por los autores de este capítulo y llevadas a cabo con estudiantes de bachillerato y profesores. Estos elementos se describen como una serie de recomendaciones ejemplificadas a través de las MEAs que fueron implementadas en diferentes contextos educativos. Cabe destacar que no pretendemos ofrecer una lista exhaustiva de sugerencias ni una descripción detallada debido a las limitaciones de espacio en el documento. Además, no consideramos que estas sugerencias deban seguirse al pie de la letra de manera lineal o paso a paso. Nuestro objetivo es ofrecer sugerencias a los docentes que tengan la intención de diseñar, analizar, implementar y evaluar MEAs para promover la modelación en el aula.

Análisis curricular previo a seleccionar las MEAs

Es importante que el profesor revise y analice los objetivos y metas curriculares del plan de estudios de sus alumnos, del programa del curso, o bien, de una unidad del curso a impartir. Al realizar esta revisión, el docente podrá percibir que los objetivos no se limitan únicamente a la memorización de conceptos y la automatización de algoritmos. Además, identificará, tal como señala Sevinc (2021), la necesidad de fomentar en sus estudiantes el desarrollo de habilidades propias del siglo XXI, tales como la comunicación, la colaboración, la creatividad, el pensamiento crítico, la toma de decisiones y la autorregulación.

Se propone al docente, a partir de recomendaciones de la literatura de investigación (Lesh & Doerr, 2003), que trate de identificar cuáles son las ideas poderosas o ideas integradoras en el currículo escolar, por ejemplo: proporcionalidad, variación, funciones. Enseguida lo exhortamos a que desempaque la red conceptual existente alrededor de esta idea fundamental.

Es decir, sugerimos que el profesor extraiga todos los conceptos inmersos en las grandes ideas. Hemos encontrado que por medio de mapas conceptuales de las grandes ideas los profesores pueden desempaquetar los conceptos inmersos y observar la relación entre ellos.

Diseño o selección de una MEA

Una vez que el profesor identifique las ideas integradoras y los objetivos curriculares de su plan de estudio, programa educativo o unidad del programa, estará en condiciones de seleccionar, adaptar o diseñar una MEA o conjunto de MEAs. También podría armar Secuencias de Desarrollo de Modelos mediante una elección cuidadosa de un conjunto de MEAs (al respecto puede revisarse Lesh, 2010; Makar et al., 2020; Montero-Moguel et al., 2020).

El diseño de una MEA

El diseño puede tomar varias horas porque implica seguir las sugerencias que se describen en los seis principios de diseño de las MEAs (Tabla 1). Un ejemplo de MEA diseñada, así como su análisis en términos de los seis principios de diseño, puede observarse en la Figura 1.

La MEA Deforestación fue diseñada para estudiantes del nivel medio superior, pertenecientes a comunidades cercanas al bosque mencionado. El diseño tomó aproximadamente 80 horas, ya que hubo varias acciones que se tuvieron que realizar, como buscar investigaciones en instituciones que brindaran datos reales. Incluso, se buscó información únicamente registrada en bases de datos gubernamentales. Por otra parte, se hizo un pequeño piloto para identificar si la situación problema planteada tenía potencial matemático. Aunque se implementó con estudiantes y profesores del nivel medio superior, únicamente se publicaron en Vargas-Alejo et al. (2018b) los resultados obtenidos con profesores.

La selección de una MEA

Una alternativa al diseño es elegir alguna de las MEAs existentes y documentadas. Si un docente está promoviendo por primera vez un ambiente de modelación en el aula, sugerimos seleccionar una MEA. Es fundamental tomar en cuenta que la MEA seleccionada esté alineada con los conceptos matemáticos que se desea que los estudiantes profundicen, y que cumpla con el principio de significado, es decir, que esté relacionada con el contexto de los estudiantes.

Los profesores pueden recurrir a MEAs en diversos artículos de investigación (e.g., Årlebäck & Doerr, 2018; Lesh & Doerr, 2003; Makar et al., 2020; Montero-Moguel & Vargas-Alejo, 2022; Vargas-Alejo et al., 2018a), así como a los análisis de los resultados obtenidos al implementarlas. Ade-

más, existen varias bases de datos desarrolladas por universidades de prestigio e investigadores de renombre donde pueden encontrarse MEAs (e.g., <https://bit.ly/3QFPajx>, <https://bit.ly/448hP48>).

Figura 1
Mea Deforestación

Morelia, Michoacán
Lunes, 7 de agosto de 2017

SECCIONES: [Inicio](#) [Michoacán](#) [México](#) [Deportes](#) [Economía](#) [Campus Viviente](#)

El cultivo de Aguacate

Bosques michoacanos convertidos en cultivo de aguacate

Contenido extra

El enfoque

Ayúdanos

No olvides escribirnos

Entérate

Morelia, Mich. - En la Meseta Purépecha, de Michoacán se produce el 75 por ciento del aguacate de ese estado y el 65 por ciento de todo el país. Sin embargo, ante la amenaza de una regulación efectiva para delimitar las áreas de conservación forestal, así como de alternativas reales y competitivas para el buen manejo de los recursos forestales, el cultivo de aguacate sigue creciendo de manera desmedida sobre los bosques.

Continúa en la página 2

Morelia, Mich. a 7 de agosto de 2017

(Continuación)

Desde hace varios años, las siembras del aguacate han provocado la deforestación de miles de hectáreas de bosques de pino y encino, según datos oficiales. La desaparición de los bosques purépechas se debe principalmente al crecimiento de la superficie dedicada a monocultivos de aguacate y a la urbanización. Sin considerar la conversión de parcelas que tradicionalmente se destinaban al cultivo de temporal o a la ganadería.

Muchos de los cultivos de aguacate son ilegales. Se cultiva aguacate en zonas boscosas sin permiso de la Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales (Semarnat) para el cambio de uso de suelo. Incluso, algunos incendios forestales son provocados para sembrar aguacates.

El cultivo de aguacate ha traído una serie de efectos sociales positivos y negativos. Entre los positivos destaca, sin duda, el incremento del ingreso en la región por lo bien cotizado del producto. En torno a la actividad ha crecido un conjunto de servicios asociados, como empresas de fertilizantes e insecticidas, sistemas de irrigación, servicios agrícolas, etc. Adicionalmente, se ha abierto una fuente de empleo temporal que permite a un importante número de jóvenes ocuparse en la temporada de cosechas; también ha dado lugar al crecimiento de la infraestructura de los pueblos aguacateros en la región.

Sin embargo, los grandes ganadores de la actividad son compañías familiares ubicadas sobre todo en la ciudad de Uruapan, que controlan, además de importantes áreas de producción, la venta de insumos, el empaque y comercialización de la fruta en el mercado internacional y nacional. Por otra parte, el éxito comercial se ha convertido en una amenaza para los bosques de Michoacán, donde existen algunas de las reservas forestales más importantes del país.

El problema se agrava, porque además el desplazamiento de las superficies boscosas puede tener impacto ambiental sobre la captura y disponibilidad de agua en la región. Otros factores que pueden tener efectos negativos sobre las condiciones ambientales de la zona y sobre el bienestar de su población son el elevado uso de agroquímicos y la demanda de grandes volúmenes de madera para el empaque y transporte del aguacate.

Morelia, Mich. A 7 de agosto de 2017

AYÚDANOS

Yuri, funcionaria joven de la comunidad de Tingambato, preocupada por la reciente noticia sobre la pérdida de bosque que ocurre en la Meseta Purépecha, investigó en internet la problemática con el fin de solicitar apoyo para detener la deforestación. Pero, primero se propuso informarse mejor sobre la situación, de manera que ello le permitiera describirla. Su intención es, primero, concientizar a la población y finalmente, conseguir apoyo de toda la comunidad para resolver la problemática. La información que encontró fue la siguiente:

Un estudio realizado por el Centro de Investigaciones en Geografía Ambiental- UNAM, en los municipios de Charapan, Charán, Los Reyes, Nahuatzen, Nuevo San Juan Parangaricutiro, Parícuti, Peribita, Tancitaro, Tingambato, Uruapan y Zacuamirón muestra cómo se perdieron 20 mil 32 hectáreas de bosques entre 1976 y 2005. Y sólo de 2000 al 2005 esta pérdida se aceleró y adquirió un ritmo de 509 hectáreas por año.

Un periódico de abril de 2017 señaló que cada año se pierden entre 600 y 1000 hectáreas de bosque en todo el estado, según datos gubernamentales del Instituto Nacional de Investigaciones.

En el año 2014 de acuerdo con la Forestal la superficie con bosque (pino, pino-encino y encino) en la Meseta Purépecha era de 147 744 ha. La Meseta Purépecha tiene una extensión territorial de 381 357 ha.

Yuri, a partir de esta información, tiene muchas preguntas. Le inquieta saber ¿cuánto bosque existió en 1976?, ¿cuánto bosque existió en 2005?, ¿cuánto bosque existe actualmente?, ¿cuánto bosque existirá dentro de 10 años? Si el ritmo de pérdida de hectáreas continúa siendo el señalado ¿cuánto dejará la Meseta Purépecha de tener bosques? Yuri considera que el bosque pronto desaparecerá. Sabe que la deforestación está relacionada con el crecimiento de cultivo de aguacate por lo que buscó más información para cotejar o evaluar la veracidad de los datos anteriores. Encontró la siguiente información:

En 1960 no existían monocultivos de aguacate en la meseta purépecha; había variedades criollas que daban cobertura de sombra al cultivo de café. Hasta 1975 calculamos una superficie de agricultura frutícola de 34 606 hectáreas, cuyo cultivo dominante ya era el monocultivo de aguacate Hass, aunque sin persistir áreas de cafetales. Hasta el año 2000 el cultivo del aguacate domina la superficie frutícola y alcanza las 55 627 ha, y en el año 2006 aumenta aún más hasta las 67 181 ha. El cultivo de huertas de aguacate ha traído profundos cambios.

Basado en información del censo del aguacate de SAGAR, establece el área cubierta por aguacate en 5 municipios dentro de la Meseta Purépecha en 39 849 hectáreas para el año 1993, mientras que Corti y Martínez, a partir de la interpretación de fotografías aéreas de 1991, obtienen un total de 41 957 hectáreas para la Meseta Purépecha (62 393 para el estado de Michoacán).

Ayúdame a Yuri a encontrar un método o procedimiento para dar respuesta a cada una de sus dudas planteadas. Escribe una carta donde expliques tu procedimiento.

Nota: MEA extraída de Vargas-Alejo et al. (2018b).

Adaptación de la MEA al contexto de los estudiantes

Para hacer que la MEA sea significativa y permita a los estudiantes relacionarla con sus propias experiencias de la vida real al resolverla, se sugiere adaptar el contexto si éste resulta demasiado ajeno a ellos. De esta manera, se asegura que los grupos de estudiantes puedan aportar desde diversas perspectivas y construir diferentes modelos siguiendo el principio de significado personal. Una manera de adaptar las MEAs es mediante la incorporación de información proveniente de reportes de investigación, la revisión de periódicos locales y visitas a lugares cercanos a los estudiantes. A continuación se presentan dos ejemplos de adaptación de MEAs.

Carmona (ver en Vargas-Alejo et al., 2018a) hizo una adaptación de la MEA original “Big foot” de Lesh y Doerr (2003) para un curso de profesores y estudiantes de posgrado de Michoacán. La MEA “Big foot” fue diseñada en el contexto de un detective llamado Tom Brown que vive en New Jersey y que desea conocer la altura de una persona que arrojó los bebederos del parque de esta comunidad. La MEA solicita que los estudiantes construyan un procedimiento para estimar la altura de las personas basada en la huella de un zapato. Esta MEA, donde subyace el concepto de proporcionalidad, tiene la estructura general de las MEAs compuesta por tres secciones: *nota periodística del contexto*, *preguntas de calentamiento* y *situación problema*. Dentro de la situación problema de esta MEA se incluye una imagen impresa de la huella del zapato de un jugador real de básquetbol.

La MEA de Carmona (Vargas-Alejo et al., 2018a) titulada “El Gigante bondadoso” está construida en el contexto del bosque de Maravatío, Michoacán. Las modificaciones realizadas fueron construidas sobre datos reales de la localidad de los profesores. En la Figura 2 se muestra la primera sección de la MEA “El Gigante bondadoso” y el ejemplo de la huella incluida en la situación problema (16 pulgadas de largo).

La MEA “El gigante bondadoso” fue readaptada con el propósito de promover el refinamiento de ideas de proporcionalidad de profesores de Guadalajara. El contexto se basó en el parque González Gallo de la Zona Metropolitana. La adaptación de la MEA conservó las tres secciones originales de la MEA “El Gigante Bondadoso”. En la Figura 3 se muestran en orden las tres secciones de la MEA re-adaptada.

La relevancia de los contextos en las MEAs, como ya se mencionó en el principio de significado personal, tiene que ver con el hecho de que los estudiantes le dan sentido a la tarea, la perciben como significativa y recurren a sus propias experiencias de la vida real para resolverla. Los grupos de estudiantes aportan diversas perspectivas para la construcción de modelos. Las investigaciones de Vargas-Alejo et al. (2018a) destacan que al conocer el contexto, los estudiantes tuvieron la posibilidad de entender e incluir más información (cuando así fue necesario) en el modelo; esto les permitió

construir una diversidad de modelos en términos del conocimiento de la complejidad de la situación.

Figura 2

Sección del contexto de la MEA Gigante Bondadoso en el contexto de Michoacán y muestra de la huella de la situación problema

VOZ VIVIENTE

www.campusviviente.org

La Voz de la Ciencia para la Comunidad

Miércoles, 12 de agosto de 2015

El Gigante Bondadoso

¡Increible descubrimiento en el Parque Alameda la Estación!

Todo Maravatío se moviliza para encontrar a sujeto desconocido.

Maravatío, Mich. - ¡Increible el descubrimiento hecho por Juan Aguirre esta mañana! Juan Aguirre, empleado del municipio de Maravatío, llegó al Parque Alameda la Estación esta mañana para cumplir con sus labores diarias de limpiar las hojas que caen de los árboles y la basura que algunas personas descuidadas dejan tiradas el día anterior.

“¡No podía creer mis ojos, cuando vi que los juegos del parque estaban completamente arreglados! Todos recién pintaditos. Les quitaron lo oxidado y además aceitaron las cadenas, por lo que los columpios ya no rechinan.” Aguirre comentó al reportar el incidente.

Aguirre venía acompañado de su esposa, Chelita, quien todos los días trabaja en el parque vendiendo tamales. “Mi esposo y yo llegamos siempre al parque entre cuatro y media y cuarto para las cinco, pues mis clientes empiezan a pedirme tamales y atole desde las cinco de la mañana. Mi puesto lo pongo a un lado de las resbaladillas, frente a los columpios, pues no estoy al paso de todos, pero cuando pasan por el parque es fácil que me vean.”

Según Chelita y Juan Aguirre lo que sucedió no tiene precedentes. “Por lo general, la gente de Maravatío es muy amable, pero a la persona que se le ocurrió arreglar los juegos del parque para los niños es realmente bondadosa. ¡Todos en Maravatío tenemos que agradecerle!”

Sin embargo, este agradecimiento tendrá que esperar, ya que la identidad de quien arregló el parque es un misterio. La única pista que dejó son las huellas de sus



Fuente: Vivemaravatio.com

Parque Alameda la Estación, Maravatío.

zapatos, pues como llovió ayer en la noche, la tierra estaba húmeda y se quedaron marcadas hasta esta mañana.

“Chelita fue la primera que vió las huellas cuando llamamos a las autoridades”, explicó Juan Aguirre. “¡Son enormes!”

En nuestra entrevista, Chelita comentó, “Yo no sé quién habrá sido. Juan se ríe porque le digo que es El Gigante Bondadoso, pues las huellas que encontré son ¡casi el doble de mis pies! Lo que sí se es que todos en Maravatío tenemos que agradecerle. En especial los niños de las escuelas quienes podrán aprovechar los juegos una vez más.”

¡No cabe duda que todo es posible en el Parque Alameda la Estación!



Fuente: vivemaravatio.com

Chicos y grandes, todos agradecidos con El Gigante Bondadoso

Contenidos

1- El Gigante Bondadoso



2- Enfoque



3- Ayúdanos



El Gigante Bondadoso

© Guadalupe Carmona, 2002-2015, basado en Lesh, Hoover & Kelly, 1992



Recursos para la implementación en el aula

Después de diseñar, seleccionar o adaptar la MEA, el profesor debe resolverla para identificar su potencial en cuanto a los conocimientos matemáticos y habilidades que pueden requerirse, así como la práctica de modelación a la que puede dar lugar. Las MEAs, tal como lo mencionan Makar et al. (2020), nos pueden ayudar a: “revelar las ideas iniciales de los estudiantes sobre una situación problema” (p. 147). El análisis del potencial del problema permite al docente planificar sus intervenciones, en caso de ser necesarias, durante el proceso de resolución de la MEA. Además, le permite enfocar su observación en determinados procesos de los estudiantes con el objetivo de conocer las fortalezas y debilidades, tanto conceptuales como en habilidades.

Los docentes, tras resolver las MEAs, expresan preocupación por el hecho de que si el problema les resultó difícil, sus alumnos también tendrán dificultades y necesitarán ayuda para extraer o buscar los datos, las incógnitas y las variables que pueden utilizar, así como las relaciones o conexiones que pueden establecer. Además, señalan que los estudiantes están acostumbrados a buscar respuestas únicas y a ser evaluados en términos de la solución final.

El profesor reconoce el desafío que genera en los estudiantes enfrentarse a situaciones complejas como las MEAs. Por lo tanto, las implementaciones con frecuencia implican que los profesores tengan dudas respecto a cómo generar confianza en sus estudiantes durante el proceso de solución. Con base en las investigaciones se derivan las siguientes sugerencias para ayudar al profesor a enfrentar estos desafíos en el aula.

La diversidad de modelos y la no respuesta única

La diversidad de modelos que emergen se deriva del diseño de la MEA acorde a los seis principios de diseño (Tabla 1). No siempre emerge un modelo único, y ello debe ponerse a discusión, permitiendo que los estudiantes justifiquen y argumenten las decisiones tomadas en cada momento. Ejemplos al respecto pueden verse en Vargas-Alejo et al. (2018a) donde, por ejemplo, los estudiantes generaron modelos basados en proporciones y en proporcionalidad para resolver la MEA Gigante Bondadoso.

Los profesores con quienes se implementó la misma MEA, además de lo mencionado anteriormente, también utilizaron su conocimiento estadístico. Con base en sus creencias mencionaron que posiblemente debía haber sido un hombre, ya que son fuertes y tienen pies más grandes que una mujer.

En la MEA Deforestación, los profesores utilizaron modelos lineales y exponenciales (Vargas-Alejo et al., 2018b). Los modelos construidos fueron elaborados a partir de ciertas suposiciones basadas en el contexto de la situación, los datos y la experiencia personal. El rol del investigador como docente fue sumamente importante para validar estos modelos que emergieron, y para propiciar la evaluación del potencial del modelo tanto en lo

matemático como en términos del contexto de la situación. Se apoyó la existencia de la diversidad de modelos, permitiendo a los profesores justificar y argumentar sus decisiones con base en la interpretación que se hizo de la situación.

Figura 3
MEA Gigante Bondadoso en el contexto del parque González Gallo de Guadalajara

El Informador

Periodismo veraz

Guadalajara, Jalisco a 23 de febrero de 2018

<https://plus.google.com/u/0/communitas/100132094403282712939/>

El Gigante Bondadoso

¡Increíble acontecimiento en el Parque González Gallo!

Todo Guadalajara se movilizó para encontrar A sujeto desconocido

Contenido extra

El enfoque

Ayúdanos

No olvides escribirnos

¡Tu aportación es muy importante! No olvides escribirnos tu carta con posibles propuestas para encontrar soluciones a las problemáticas aquí planteadas



Increíble...

Guadalajara, Jalisco. - ¡Increíble el descubrimiento hecho por Mario González esta mañana! Mario, empleado del municipio de Guadalajara, llegó al Parque González Gallo esta mañana para cumplir con sus labores diarias de regar plantas y limpiar la basura que algunas personas descuidadas dejan tiradas el día anterior cuando visitan el bosque.

Continúa en la página 2

Campus Viviente

Jalisco

ENFOQUE

Guadalajara, Jalisco a 23 de febrero de 2018

AYÚDANOS

Guadalajara, Jalisco a 23 de febrero de 2018

(Continuación)

“No podían creer mis ojos, cuando vi que el área de ejercicios del Parque González Gallo estaba completamente arreglada! Todos estaban bien chidos, recién pintados y arreglados. Trajeron nuevos aparatos, quitaron los que ya estaban deteriorados y reacomodaron. Además, pusieron aparatos para niños y jóvenes con capacidades diferentes.”

Mario comentó al reportar el incidente.

Mario González venía acompañado de su esposa Minerva, quien todos los días trabaja en el Parque vendiendo lonches, dulces y agua. “Ehey... mi esposo y yo llegamos siempre al parque entre cinco y media y cuarto para las seis, pues mis clientes empiezan a pedirme agua desde las seis de la mañana. Mi puesto lo pongo a un lado de donde hay un área de ejercicio, así que nos utilizan los aparatos pueden comprarse agua después de hacer su ejercicio. Es más fácil que me vean y me compren.”

Según Minerva y Mario lo que sucedió no tiene precedentes. “Por lo general, la gente de Guadalajara es amable, pero a la persona que se le ocurrió arreglar el área de juegos es realmente bondadosa.”

“Todos en Guadalajara tenemos que agradecerle!”

Sin embargo, este agradecimiento tendrá que esperar, ya que la identidad de quien arregló el Parque es un misterio. La única pista que dejó son las huellas de sus zapatos, pues se quedaron marcadas en el suelo hasta esta mañana.

“Minerva fue la primera que vio las huellas cuando llamamos a las autoridades”, explicó Mario.

“¿Son enormes?”

En nuestra entrevista, Minerva comentó, “Yo no sé quien habrá sido. Mario se ríe porque le digo que es El Gigante Bondadoso, pues las huellas que encontró son ¡casi el doble de mis pies! Lo que sí sé, es que todos en Guadalajara tenemos que agradecerle. Es especial las familias quienes podrán aprovechar el espacio una vez más.”

Los jóvenes de la Escuela Politécnica U de G, están agradecidos con El Gigante Bondadoso. Sin embargo, quisieran saber la verdadera identidad de esta persona para hacerle un reconocimiento. Por la huella que dejó, esta persona debe tener una gran estatura.

Aquí te presentamos una copia en papel de la huella que encontró Minerva en el Parque. Para encontrar quién es en realidad El Gigante Bondadoso, los estudiantes de bachillerato deben encontrar su estatura.

Escribe una carta a los estudiantes explicándoles un método para encontrar la estatura de una persona si tienes el tamaño de su huella del pie. Este método debe servir para encontrar la estatura del Gigante Bondadoso, pero también la de cualquier otra persona, si conocemos el tamaño de su pie.

De acuerdo con el texto contesta las siguientes preguntas

1. ¿Qué sucedió misteriosamente en el Parque González Gallo?
2. ¿Qué pista dejó el Gigante Bondadoso?
3. ¿Por qué Minerva le llama al Gigante Bondadoso?



Huella del Gigante Bondadoso
Indicando Dos Metros



El Gigante Bondadoso, basado en Lesh, Hoover & Kelly, 1992

Los profesores se dieron la oportunidad de ser creativos al pensar las situaciones problema desde distintos ángulos, y al entender que no siempre puede haber una solución o modelo único. En este caso, los profesores que argumentaron la construcción de un modelo lineal para predecir la desaparición del bosque lo hicieron a partir de que el municipio propusiera reglas y manejara una tala moderada.

La evolución de modelos

La interpretación de la situación problema incluida en una MEA siempre está cambiando y evolucionando durante el proceso de solución. De acuerdo con la MMP, “la modelación implica que los estudiantes expresen interpretaciones matemáticas del problema y patrones en sus estructuras conceptuales con la ayuda de representaciones concretas, simbólicas, verbales, gráficas o pictóricas” (Sevinc, 2021, p. 7). Ejemplos de ello se pueden revisar en Montero-Moguel y Vargas-Alejo (2022) y Vargas-Alejo et al. (2018a), donde se muestra cómo los modelos evolucionaron y se refinaron de acuerdo con la interpretación del contexto, las incógnitas y los datos identificados por los estudiantes. Se puede ver cómo los estudiantes, en la medida que resolvieron el problema, fueron extendiendo, modificando y refinando sus ideas, integrando cada vez más representaciones para presentar al cliente un modelo, al menos situado. Algunos estudiantes lograron construir modelos comparables y reutilizables.

Como sugerencia, para promover la evolución de modelos es necesario que el profesor aprenda a escuchar a los estudiantes para saber plantear las preguntas adecuadas sin dar la solución. Esto le permitirá motivar a los estudiantes para que aprendan a autorregular sus procesos de resolución y autoevaluar “la idoneidad de sus soluciones y artefactos colaborativos en proceso (es decir, modelos emergentes), en lugar de depender de juicios externos o autorizados (maestros) sobre la calidad o utilidad de sus producciones” (Sevinc, 2021, p. 7). El estudiante debe autoevaluar que los modelos sean matemáticamente válidos y apropiados para el problema dado en el contexto del mundo real. Adquirir conciencia del proceso de autorregulación es importante para lograr la modificación, extensión o refinamiento de los modelos a través de la organización gradual de las formas de pensar.

Promover la interacción

Se debe fomentar el trabajo individual, en equipo y la discusión grupal, ya que los estudiantes interactúan a través de los ambientes colaborativos con las diferentes formas de pensamiento de sus compañeros, poniendo a debate sus propias ideas desarrolladas de manera individual o en equipo. Estos ambientes colaborativos permiten la reflexión y autoevaluación de los propios procesos de pensamiento, lo que a menudo conduce a una evolución en la forma de pensar. Para ilustrar este punto, se pueden encontrar ejemplos

en las investigaciones de Montero-Moguel y Vargas-Alejo (2022), así como en Vargas-Alejo et al. (2018a).

Se puede observar cómo los estudiantes modifican, extienden o refinan sus modelos a partir de las discusiones en equipo y grupales. De acuerdo con la MMP, “la modelación requiere que los estudiantes construyan formas de pensar que puedan compartir con otras personas, aplicables en contenidos de problemas similares o isomórficos, y generalizables para su uso en situaciones similares” (Sevinc, 2021, p. 7). Hemos observado que esto se logra al promover la interacción en equipos y en grupo (Montero-Moguel & Vargas-Alejo, 2022; Vargas-Alejo et al., 2018a).

Evaluación de los modelos que emergen al resolver las MEAs

La evaluación de los modelos matemáticos construidos para dar solución a problemas cercanos a la vida real va más allá de decidir si una solución es correcta o incorrecta, pues implica identificar qué tan bien se adapta el modelo a los propósitos que se han definido en la actividad de modelación (Niss & Blum, 2020). Concebir la evaluación como una verificación del modelo al final del proceso enfatiza únicamente las respuestas correctas y soluciones normativas, mientras que, si se considera como una actividad continua, se fomenta la toma de decisiones por parte de los estudiantes (Czocher, 2018). Dentro de la MMP se privilegia todo el proceso de construcción del modelo, por tanto, las evaluaciones de los modelos se consideran como un proceso continuo y dinámico. Las MEAs propician diferentes oportunidades para evaluar los modelos construidos por los estudiantes. En este capítulo nos enfocaremos en dos oportunidades: la autoevaluación y la evaluación externa.

Autoevaluación

Cuando los estudiantes trabajan en equipos para resolver problemas complejos como las MEAs, a menudo se generan choques de ideas debido a las diferentes formas de pensamiento (Lesh et al., 2000). Por lo tanto, es importante que los equipos desarrollen procesos de autoevaluación continua para alinear sus ideas. La autoevaluación durante el proceso de solución de las MEAs implica evaluar y poner a prueba de forma iterativa (i.e., evaluación continua de cada modelo) las diversas opciones de solución que los estudiantes proponen durante la construcción de sus modelos. De esta manera, se pueden desarrollar diferentes ciclos de modelación, lo que les permite construir modelos cada vez más refinados para dar solución a la MEA.

Así, la autoevaluación se convierte en un elemento clave para el éxito de los estudiantes en el trabajo en equipo y en la resolución de problemas complejos. Por medio del proceso de autoevaluación, los estudiantes tienen la oportunidad de:

- (a) detectar deficiencias en sus formas actuales de pensar; (b) comparar ideas alternativas y seleccionar las que sean más y menos útiles; (c) integrar las fortalezas y minimizar las debilidades de formas alternativas de pensar; (d) extender o refinar las interpretaciones que son más prometedoras; y (e) evaluar las adaptaciones que se realicen. (Lesh et al., 2000, p. 620)

Este proceso es posible porque las MEAs son construidas bajo el principio de autoevaluación que “significa que el problema proporciona el contexto y la información necesaria para ayudar a los estudiantes a evaluar su progreso mientras trabajan en un problema” (Diefes-Dux et al., 2006, p. 53).

La implementación de la MEA propuesta por Diefes-Dux et al. (2006) describe el proceso de autoevaluación que desarrollaron los estudiantes. La MEA “*Nano Roughness MEA*” solicita a los estudiantes construir un modelo para cuantificar la rugosidad de una superficie metálica a partir de tres diferentes fotografías de diferentes escalas de un microscopio de fuerza atómica. Los estudiantes tuvieron la oportunidad de probar y mejorar sus métodos para medir la rugosidad al utilizar diversas imágenes. Durante este proceso, los estudiantes tuvieron que evaluar si sus métodos eran efectivos en diferentes escalas y decidir si era necesario tomar en cuenta sus variaciones. Además, los equipos de estudiantes debían tomar decisiones sobre cómo abordar estas diferencias de escala en sus modelos (Diefes-Dux et al., 2006).

Evaluación externa

Como se ha mencionado previamente, las MEAs se diseñan para que la construcción del modelo satisfaga las necesidades de un cliente; por lo tanto, la evaluación externa debe generarse desde la perspectiva de este cliente. Es decir, los estudiantes, profesores y/o investigadores asumen el papel de la persona o grupo de personas para el cual fue construido el modelo. Es importante evitar que las MEAs se valoren con “rúbricas de calificación que cambian las reglas del juego al evaluar el trabajo de los estudiantes utilizando criterios que no se comunicaron (explícita o implícitamente) en la asignación de las MEAs” (Lesh, 2010, p. 32). Esta misma obra sugiere centrarse en dos criterios importantes derivados de los principios de las MEAs, el primero es que “las soluciones que son ‘más prácticas’ también deben ser soluciones que involucren el tipo de pensamiento matemático que los investigadores de la MMP están tratando de investigar”, es decir, los conceptos matemáticos inmersos en la MEA; y el segundo “la posibilidad de compartir y reutilizar las herramientas y los artefactos que los estudiantes producen durante los MEAs” (p. 32). Bajo estos dos criterios fundamentales, Lesh (2010) propone la “Guía de evaluación de calidad de las MEAs”, que puede ser revisada en el artículo de Lesh, 2010 (p. 32).

Por su parte, Montero-Moguel y Vargas-Alejo (2022) proponen la “Guía de evaluación de modelos relacionados con el concepto de función [GEMF], la cual permite clasificar el tipo de modelos construidos por los

estudiantes al resolver MEAs que propician la construcción, modificación, ampliación y refinamiento del concepto de función” (p. 226). La GEMF permite identificar el tipo de modelo y el razonamiento covariacional de los estudiantes desde la perspectiva del cliente. Montero-Moguel y Vargas-Alejo (2022) sugieren el uso de esta guía bajo un enfoque dinámico de la construcción de modelos, es decir, analizar los diferentes ciclos de modelación que desarrollan los estudiantes durante el proceso de solución de las MEAs o de las secuencias de desarrollo de modelos.

Los hallazgos de Montero-Moguel y Vargas-Alejo (2022) muestran cómo por medio de la GEMF se pudo identificar que un grupo de estudiantes universitarios “exhibieron ideas de linealidad en sus primeros modelos, los cuales evolucionaron para convertirse en modelos exponenciales; al mismo tiempo, el razonamiento covariacional de los estudiantes se modificó, amplió y refinó a través de distintos niveles” (p. 214) y, además, los modelos fueron herramientas compartibles y útiles para el cliente.

EJEMPLO DE IMPLEMENTACIÓN DE LAS CINCO RECOMENDACIONES: UN ESTUDIO DE CASO

En esta sección presentamos un estudio de caso de un profesor en su primer acercamiento a la modelación matemática. El profesor estaba tomando un curso de modelación que se basó en las *cinco recomendaciones para la implementación de las MEAs en el aula*. El marco teórico que fundamentó este estudio fue la MMP, el cual se describió previamente en este capítulo. La pregunta de investigación que guió este estudio fue la siguiente: ¿Cómo facilitan las cinco recomendaciones para la implementación de las MEAs en el aula el primer acercamiento a la modelación matemática de un profesor?

Metodología del estudio de caso

La metodología para este estudio de caso es descrita en las siguientes secciones.

Diseño del estudio

Para este estudio, se llevó a cabo un enfoque cualitativo mediante un estudio de caso. Esta elección se basó en el interés por obtener un conocimiento profundo de las interpretaciones del profesor seleccionado como sujeto de estudio, considerando la complejidad del contexto (Punch, 2014). Específicamente, se adoptó un enfoque de “estudio de caso instrumental, donde se examina un caso particular para dar una idea de un problema o para refinar una teoría” (Punch, 2014, p. 121). Se seleccionó este diseño debido al interés de analizar a profundidad el primer acercamiento a la modelación de un profesor, con el objetivo de comprender a fondo su enfoque inicial y obtener información que permitiera refinar las ideas y prácticas relacionadas con las *cinco recomendaciones para la implementación de las MEAs en el aula*.

Contexto y participantes

El estudio de caso tuvo una duración de un semestre, el participante seleccionado para el estudio fue un profesor de matemáticas del nivel superior que estaba cursando la Maestría en enseñanza de las matemáticas. El profesor fue seleccionado debido a que expresó que era su primer acercamiento a la modelación matemática. El profesor participaba en un curso sobre modelación matemática impartido por la investigadora principal de este estudio. El curso se basó en *cinco recomendaciones para la implementación de las MEAs en el aula* descritas en este capítulo. Durante el estudio, el profesor impartía un curso de matemáticas a 22 estudiantes de ingeniería de innovación agrícola sustentable; en este grupo de estudiantes se implementó una de las MEAs de forma presencial.

Instrumentos de recolección de datos

Con el objetivo de comprender a profundidad el caso del profesor en su entorno natural, se obtuvieron los datos para este estudio a partir de las interacciones entre el investigador-profesor, profesor-estudiantes y estudiantes-estudiantes. Se recopilaron datos de las grabaciones y transcripciones de las interacciones entre el investigador y el profesor, las notas de campo del investigador, los diarios del profesor y los modelos construidos por los estudiantes para dar solución a las MEAs. Los modelos de los estudiantes se recopilaron a lo largo de todo el proceso de resolución de la MEA, e incluyeron tanto documentos escritos como expresiones verbales.

Procesos de Análisis

Todos los datos recopilados fueron organizados y revisados a detalle por los investigadores. Posteriormente se siguieron las recomendaciones de Richards (2021) para las investigaciones cualitativas que sugiere que los investigadores realicen un trabajo analítico al involucrarse en la interpretación y codificación de los datos a lo largo del proyecto. Para conseguir este objetivo, se desarrollaron dos procesos seriados. En el primer proceso los investigadores fragmentaron, examinaron y compararon la información en busca de patrones, similitudes y discrepancias. El segundo ciclo de codificación se centró en identificar los elementos relevantes relacionados con a) el análisis curricular desarrollado por el profesor, b) selección y adaptación de las MEAs, c) la implementación en el aula, y d) la autoevaluación y evaluación de los modelos de los estudiantes.

Criterios de Validez

Para este estudio se atendieron dos formas de validez propuestas por Richards (2021) para las investigaciones cualitativas. Se empleó *la triangulación de información* al examinar los hallazgos a través de diversas fuentes de evidencia

(previamente descritas). Asimismo, se llevó a cabo *la verificación por pares de la codificación* de la siguiente manera: el primer investigador realizó los procesos de codificación, mientras que el segundo llevó a cabo las revisiones y proporcionó retroalimentación.

RESULTADOS

En esta sección se muestra el seguimiento dado al profesor durante su participación en el curso. Los resultados fueron agrupados en cinco fases que fueron identificadas como relevantes en el análisis del estudio de caso.

Fase 1. El profesor participó en lecturas y discusiones relacionadas con la MMP (e.g., Lesh & Doerr, 2003), las cuales fueron dirigidas por la investigadora principal. Durante las discusiones se plantearon preguntas como: ¿Qué tipo de formación matemática es necesaria para los individuos en esta era? y ¿En qué medida los planes de estudio y curriculum de tus clases de matemáticas aportan para satisfacer estas necesidades? Se presentan en orden las respuestas del profesor a estas preguntas.

Reflexivos, críticos, responsables, trabajar en equipo, capaces de transmitir y aplicar sus conocimientos matemáticos en áreas diversas y el uso de las nuevas tecnologías.

Desde el aula de matemáticas se debe contribuir a la formación de profesionistas competentes, que no solo tengan un cúmulo de conocimientos, sino que tengan capacidad de aplicarlo para resolver problemas de su sociedad.

Fase 2. El profesor, en colaboración con otros cinco profesores de matemáticas, participó en la resolución de la MEA “El Gigante Bondadoso” (Figura 3). Para este estudio se modificó el contexto para hacerlo más cercano a los participantes. La implementación de la MEA fue conducida por la investigadora. Después de resolverla, el profesor hizo las siguientes reflexiones.

Fue una actividad que en la primera leída que le di me pareció muy sencilla de resolver, y aparte me llamó la atención la manera en que estaba presentada, como una noticia de periódico. Sin embargo, al empezar a resolverla pensé en cómo sustentar mi solución, no pude hacer mediciones porque la hice ya por la tarde y no contaba con personas suficientes para tomar medidas de referencia, así que busqué en internet información al respecto con lo que terminé sustentando mi respuesta al problema. A decir verdad, me quedé con dudas sobre si mi procedimiento y solución eran correctos.

Fase 3. En esta fase, el profesor tuvo la oportunidad de seleccionar una de las MEAs del banco de MEAs para implementar con su grupo. Se optó por la MEA “El Gigante Bondadoso”. Sin embargo, se reconoció la necesidad de hacer modificaciones en el contexto, para las que se propuso un parque cercano a la escuela de los estudiantes.

Al periódico con la noticia del Gigante Bondadoso se le cambió el dato del parque con el fin de que les pareciera a los estudiantes un lugar familiar para ellos. En lugar de mencionar el Parque González Gallo, se mencionó la Unidad Deportiva Hugo Sánchez.

Después de llevar a cabo la adaptación, el profesor procedió a planificar la implementación de la MEA. Gracias al análisis previo del potencial de la actividad pudo anticipar posibles intervenciones necesarias durante el proceso de resolución, así como enfocar su observación en ciertos aspectos del desarrollo matemático de los estudiantes. Estos detalles fueron registrados y compartidos durante el curso, como se puede apreciar en el siguiente fragmento incluido en las reflexiones del profesor.

Es importante resolver primero las actividades o problemas antes de implementarlas con los estudiantes. También es importante visualizar los diferentes métodos que los estudiantes puedan llevar a cabo en la resolución, incluso adelantarse a las dificultades que pudieran tener. Eso ayuda a diseñar mejor las MEAs y los problemas a implementar.

Fase 4. El profesor llevó a cabo la implementación de la actividad con su grupo de matemáticas de ingeniería. Durante la actividad, él desempeñó el papel de facilitador y observador. Su observación no se limitó únicamente a los modelos finales, sino que registró y siguió de cerca todo el proceso de construcción. En relación a esto, el maestro mencionó lo siguiente:

La primera reacción de muchos, después de leer [la MEA], fue que no se podía saber con exactitud la altura de la persona, pero que por su huella era muy alto, dedujeron esto al comparar la huella de Minerva y su propia huella con la del gigante. Algunos mencionaron que era obvio, que entre más grande la huella, la persona es más alta, y entre más pequeña, la persona es más bajita.

Un alumno mencionó “el tamaño del pie del gigante es el doble que el de Minerva, así que la estatura del gigante es el doble que la de Minerva”. Asumió que ella tenía una estatura de 1.6 m (la tomó como la medida promedio de las mujeres de su comunidad), y concluyó que el gigante medía 3.2 m.

Otro ejemplo de modelo que el profesor identificó fue el siguiente.

Otros estudiantes, mostraron dificultad para iniciar a resolver el problema, no sabían por dónde empezar, querían que el profesor les dijera como hacerlo, tenían la idea que ya existía un método o fórmula que les ayudara a resolverlo. Así que lo primero que hicieron fue usar sus celulares para buscar en google información de cómo hacerlo.

Luego, en base a la discusión con sus compañeros, pensaron en obtener medidas más precisas, así que midieron con regla el tamaño de su pie y la del gigante para hacer mejor la comparación.

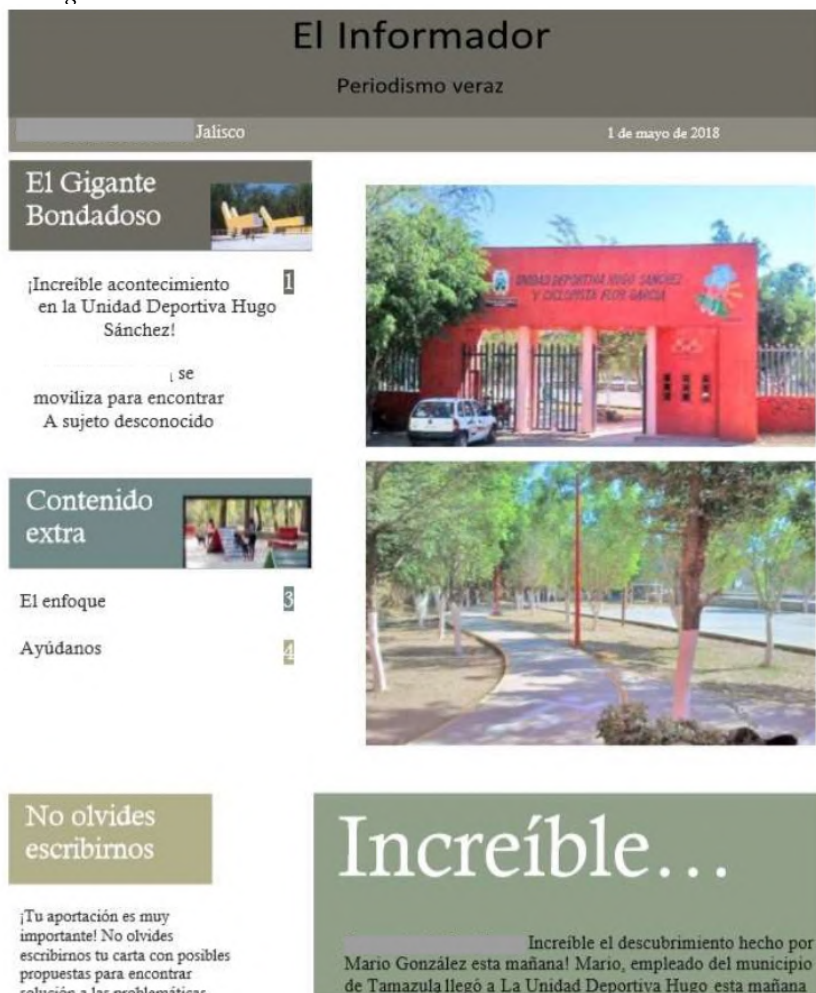
En este momento, los estudiantes compararon sus propias medidas del pie con la del gigante e hicieron una regla de tres. Uno mencionó “mi pie mide 27 cm. y mi estatura es de 1.75 m, así que, como la huella del gigante mide 38 cm, entonces su estatura se obtiene multiplicando 38 por 1.75 y dividiendo ese resultado entre 27, lo cual es igual a 2.46 m”. La mayoría hizo esto mismo, pero con sus propias medidas del pie y estatura.

El profesor también registró la forma de trabajo de los estudiantes.

El trabajo colaborativo fue muy importante para la realización de la actividad, favoreció que surgieran ideas, que se sintieran más seguros para hallar la solución, incluso dio un toque de dinamismo y buen humor a la actividad. Todos participaron y se mostraron con buena actitud.

Figura 4

Sección de nota periodística de la MEA Gigante Bondadoso adaptada de la MEA mostrada en la Figura 3



Fase 5. El profesor realizó reflexiones finales sobre la implementación en el aula, abordando aspectos de evaluación importantes. En primer lugar, describió el proceso de autoevaluación que los estudiantes llevaron a cabo durante la construcción de la MEA, así como la autoevaluación final de sus propios modelos. Además, incluyó reflexiones de sus evaluaciones sobre los modelos construidos por los estudiantes. A continuación, se presentan algunos ejemplos que ilustran las descripciones relacionadas con el proceso de autoevaluación durante la construcción de la MEA.

Los estudiantes empezaron a comparar sus resultados y verificar si sus procedimientos y resultados coincidían. Con ello se dieron cuenta que tenían un mismo

procedimiento, pero con resultados distintos, esto porque cada quien estaba usando sus propias medidas y con ellas a través de una regla de tres, deduciendo la altura del gigante. Como era de esperarse las estaturas del gigante que obtenían eran distintas. A pesar de los distintos resultados, algunos dijeron que, aunque eran diferentes las estaturas obtenidas del gigante, con varios de sus compañeros no variaba con muchos cm, así que sus resultados eran aceptables.

Otros estudiantes no conforme con ello [sus modelos iniciales] optaron por establecer una medida promedio para las mujeres y otra medida promedio para los hombres. Dijeron que la estatura promedio de las mujeres era de 1.60 m y la del hombre 1.7 m. también dijeron que la medida promedio del pie de la mujer era de 24 cm y la del hombre 27 cm. Además, asumieron que el gigante bondadoso era hombre así que la mejor estatura para el gigante se obtenía de la siguiente manera: multiplicando 38 por 1.7 y dividiendo el resultado por 27, lo cual daba 2.39 m.

El profesor también incluyó descripciones de la autoevaluación desarrollada por los estudiantes respecto a sus modelos finales, como se menciona a continuación.

Finalmente, la mayoría de los estudiantes dijeron que para calcular la altura de cualquier persona si solo conocían la longitud de su pie, primero necesitaban saber si era hombre o mujer. Si se trataba de una mujer su estatura se obtendría “multiplicando la longitud de su pie por 1.6 y luego dividiendo el resultado por 24”, si se trataba de un hombre, su estatura se obtendría “multiplicando la longitud de su pie por 1.7 y luego dividiendo el resultado por 27”

Por otra parte, el estudiante que había obtenido la estatura del gigante multiplicando por 6 la medida de su pie, empezó a pedir las medidas de los pies de sus compañeros, multiplicarlas por 6 y comparar sus resultados con las respectivas estaturas, se dio cuenta que como con el 80% de sus compañeros su método funcionaba, le quedó claro que para el otro 20% no aplicaba en lo absoluto y consciente de que puede haber un error si se toma la medida de otras personas que no son del grupo concluyó que en general, con cierto error, la estatura de cualquier persona se puede calcular “multiplicando la longitud de su pie por 6”.

Las descripciones del profesor también incluyeron su propia evaluación de los modelos, como se muestra a continuación.

Cabe mencionar, que ninguno [de los equipos] estableció una expresión algebraica para la fórmula obtenida, simplemente la expresaron con palabras y la aplicaron con algunos valores dados a manera de ejemplos.

La realización de la carta fue muy adecuada para fortalecer las habilidades de comunicación, argumentación y ordenamiento de ideas, eso les facilitó poder explicar a sus compañeros sus soluciones.

DISCUSIÓN

Las reflexiones del profesor durante la fase 1 respecto a la formación deseada para los estudiantes coinciden con varios aspectos mencionados por Sevinc (2021), que destacan la importancia de incluir habilidades del siglo XXI, como el pensamiento crítico y la colaboración, en la formación matemática.

Durante la fase 2, al resolver la MEA, el profesor transitó por varios procesos, tal como lo señalan Sevinc (2021) y Lesh y Doerr (2003). Por ejemplo, pasó de ideas o interpretaciones intuitivas a formales cuando le

pareció sencilla la actividad, pero luego se encontró con obstáculos que requerían información adicional para argumentar y respaldar su solución. El profesor identificó la necesidad de matematizar en el sentido de Lesh y Doerr (2003), es decir, de cuantificar medidas de pies, estaturas y establecer relaciones entre ellas, identificar patrones y descubrir regularidades relevantes para resolver el problema. Esta fue la razón por la que consultó internet.

En la fase 3, el profesor tuvo la oportunidad de elegir una MEA para implementar en su salón de clases, pero enfatizó la importancia de hacer modificaciones al contexto. Esto concuerda con el principio de significado personal de la MEAs (Lesh et al., 2000; Lesh & Doerr, 2003) y con la idea de permitir que los estudiantes le den sentido en función de sus propias creencias.

Al realizar su planificación, el profesor tomó en cuenta los procesos que él mismo siguió para resolver la MEA. Como menciona Makar et al. (2020), esto le permitió tener ideas iniciales sobre cómo podrían actuar los estudiantes y qué posibles intervenciones podría llevar a cabo en el aula.

Durante la fase 4, el profesor observó cómo los estudiantes articulaban su sistema conceptual (modelo) basado en su propia forma de ver la situación problema, lo cual está relacionado con el principio de construcción de modelos (Lesh et al., 2000; Sevinc, 2021). Los estudiantes crearon sus propias representaciones externas relacionadas con su pensamiento proporcional y las comunicaron verbalmente tanto dentro de sus equipos como en el grupo, lo que refleja el principio de documentación del modelo (Lesh et al., 2000; Sevinc, 2021). El profesor describió los procesos de solución que evidenciaban ciclos de interpretaciones.

En la fase 5 se observó el principio de autoevaluación (Lesh et al., 2000; Sevinc, 2021), ya que los estudiantes evaluaron sus propias soluciones del proceso, aunque no necesariamente desde la perspectiva del “cliente” de la MEA. Las ideas del docente evolucionaron en relación al tipo de problemas a proponer en el aula, así como a la forma de abordarlos y evaluarlos. Inicialmente, el enfoque del docente en cuanto a evaluación estaba centrado en respuestas únicas, pero esto cambió hacia la evaluación de procesos. El docente evaluó los modelos, señalando el tipo de representación utilizado, en este caso, verbal, para responder a las preguntas del problema. Además, el profesor valoró la importancia de la carta como medio para fortalecer habilidades de comunicación, argumentación y organización de ideas, en línea con las propuestas de Sevinc (2021).

CONCLUSIONES

El análisis del estudio de caso reveló que las cinco recomendaciones facilitaron al profesor revisar y realizar modificaciones en su práctica docente, las cuales resultaron fundamentales al implementar las MEAs en el aula. La

recomendación relativa al análisis curricular fue relevante para que el profesor identificara la importancia de impulsar las habilidades del siglo XXI dentro del currículo de su curso de matemáticas (Sevinc, 2021). Las recomendaciones sobre la selección y adaptación de las MEAs contribuyeron a superar el desafío que enfrentan los profesores para transitar del uso de problemas tradicionales a actividades de modelación. Además, las recomendaciones propiciaron que el profesor asumiera un papel de facilitador al implementar la MEA en el aula, como lo señala la MMP (Lesh & Doerr, 2003; Montero-Moguel et al., 2020). Aunque el proceso de evaluación de modelos por el profesor no fue abordado desde el punto de vista “del cliente”, como sugiere la MMP (Lesh & Doerr, 2003), se identificaron y evaluaron las interpretaciones y el proceso de construcción de éstas por los estudiantes, como parte integral del modelo; es decir, el profesor no se enfocó únicamente en el producto final.

Se pudo observar una notable evolución en las ideas e inquietudes iniciales del docente relacionadas con la modelación matemática en el salón de clase. Principalmente, se destaca un tránsito suave donde el profesor fue refinando sus interpretaciones. Reconocemos que la preparación docente basada en la modelación requiere múltiples ciclos de revisión y refinamiento, sin embargo, los resultados revelan que estas cinco recomendaciones pueden ser una herramienta valiosa para que los profesores utilicen resultados de las investigaciones basadas en la MMP con el objetivo de promover la modelación en el aula.

Dado que sabemos que acercarse a la modelación es un desafío para los profesores (Corum & Garofalo, 2019), en este capítulo se han sustentado cada uno de los elementos de la herramienta brindada. Con ello se busca apoyar la introducción de actividades de modelación en el aula basada en la MMP, específicamente las MEAs, y brindar claridad al profesor en términos de cómo acceder, seleccionar o adaptar las MEAs a su propio contexto, cómo implementarlas y evaluar los resultados. Además, esperamos que los fundamentos teóricos le permitan al docente adentrarse en diferentes conceptos e ideas en las que se han construido las MEAs. Todas las recomendaciones incluidas se basan en hallazgos derivados de investigaciones empíricas de la MMP, por lo que invitamos a los docentes a utilizarlas.

Introducirse a la MMP es un tema complejo que requiere profundidad en diferentes direcciones, por lo que un solo capítulo es insuficiente para desarrollar una comprensión profunda; frente a esto, invitamos a los lectores a ampliar sus conocimientos sobre los fundamentos teóricos de la MMP en Lesh y Doerr (2003). Al igual que el proceso de los estudiantes, sugerimos que el profesor perciba su propio aprendizaje sobre la implementación de las MEAs en el aula como un proceso que será ampliado y refinado a medida que interactúa con sus estudiantes, sus colegas e investigadores.

Las matemáticas traspasan los límites de la disciplina y toman una posición fundamental para que los individuos puedan comprender y generar cambios en los retos reales que enfrenta la sociedad. En consecuencia, la formación en las aulas debe dar a los estudiantes la oportunidad de construir un conocimiento vinculado con los problemas del mundo real. Las investigaciones en torno a la modelación matemática han demostrado que al participar en estas actividades, los estudiantes tienen la oportunidad de describir, predecir y controlar fenómenos en contextos reales (Lesh & Doerr, 2003). Además, las MEAs propician que los estudiantes desarrollen habilidades del siglo XXI como el trabajo en equipo, pensamiento y toma de decisiones (Sevinc, 2021). En consecuencia, resulta crucial fomentar investigaciones futuras que permitan ampliar el conocimiento de la formación docente en el ámbito de la modelación matemática. Es relevante que estas investigaciones propicien la creación de oportunidades y herramientas que permitan a los profesores extraer conocimientos de los documentos de investigación y llevarlos a sus aulas con el propósito de impulsar el desarrollo del conocimiento matemático, estableciendo conexiones entre la realidad y la experiencia en la práctica de modelación.

REFERENCIAS

- Ärleback, J. B., & Doerr, H. (2018). Students' interpretations and reasoning about phenomena with negative rates of change throughout a model development sequence. *ZDM*, 50(1-2), 187-200. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0881-5>
- Brady, C. (2018). Modelling and the representational imagination. *ZDM*, 50(1-2), 45-59. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0926-4>
- Brady, C., & Lesh, R. (2021). Development in Mathematical Modeling. En J. M. Suh, M.H. Wickstrom, & L. D. English (Eds.), *Exploring Mathematical Modeling with Young Learners* (pp. 95-110). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63900-6_5
- Corum, K., & Garofalo, J. (2019). Engaging Preservice Secondary Mathematics Teachers in Authentic Mathematical Modeling: Deriving Ampere's Law. *Mathematics Teacher Educator*, 8(1), 76-88. <https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.8.1.0076>
- Czocher, J. A. (2018). How does validating activity contribute to the modeling process? *Educational Studies in Mathematics*, 99(2), 137-159. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9833-4>
- Diefes-Dux, H., Hjalmarson, M., Zawojewski, J., & Bowman, K. (2006). Quantifying aluminum crystal size part 1: The model-eliciting activity. *Journal of STEM Education*, 7(1), 51-63. <https://bit.ly/3qCt14n>

- English L. D. (2021). Mathematical and Interdisciplinary Modeling in Optimizing Young Children's Learning. En J. M. Suh, M. H. Wickstrom, & L. D. English (Eds.), *Exploring Mathematical Modeling with Young Learners*. (pp. 3–23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63900-6_1
- Garfunkel, S., & Montgomery, M. (Eds.). (2019). *Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modeling Education*. Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://bit.ly/45t2YCf>
- Lesh, R. (2010). Tools, researchable issues and conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(2), 16–48. <https://bit.ly/3OVZ4LN>
- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought revealing activities for students and teachers. En M. Hoover, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591–645). Routledge. <https://bit.ly/3qxHANq>
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond constructivism: A models & modelling perspective on mathematics problem solving, learning & teaching*. Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781410607713>
- Makar, K., Doerr, H., & DelMas, R. (2020). Developing statistical modeling with paper helicopters. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK–12*, 113(2), 147–151. <https://doi.org/10.5951/MTLT.2019.0243>
- Montero-Moguel, L., Vargas-Alejo, V., & Rodríguez-González, I. (2020). Conceptual system when implementing model-eliciting activities. En A. I. Sacristán, J. C. Cortés-Zavala, & P. M. Ruiz-Arias (Eds.), *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mexico* (pp. 1653–1661). Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. <https://doi.org/10.51272/pmna.42.2020-261>
- Montero-Moguel, L., & Vargas-Alejo, V. (2022). Ciclos de modelación y razonamiento covariacional al realizar una actividad provocadora de modelos. *Educación Matemática*, 34(1), 214–248. <https://doi.org/10.24844/EM3401.08>
- Niss, M., & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. Routledge. <https://bit.ly/3OAmENU>
- Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2016). *Educación 2030: Declaración de Incheon y Marco de Acción para la realización del Objetivo de Desarrollo Sostenible 4: Garantizar una educación inclusiva y equitativa de calidad y promover oportunidades de aprendizaje permanente para todos*. UNESCO. <https://bit.ly/3qyc2XH>
- Punch, K. F. (2014). *Introduction to social research: Quantitative and qualitative approaches* (3a ed.). SAGE. <https://bit.ly/3ODbmYZ>

- Richards, L. (2021). *Handling qualitative data: A practical guide* (4a ed.). SAGE.
<https://bit.ly/3OXw8UI>
- Sevinc, S. (2021). Toward a reconceptualization of model development from models-and-modeling perspective in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 109(3), 611–638.
<https://doi.org/10.1007/s10649-021-10096-3>
- Vargas-Alejo, V., Cristóbal-Escalante, C., & Carmona, G. (2018a). Competencias Matemáticas a través de la implementación de actividades provocadoras de modelos. *Educación Matemática*, 30(1), 213–236.
<https://doi.org/10.24844/EM3001.08>
- Vargas-Alejo, V., Reyes-Rodríguez, A., & Cristóbal-Escalante, C. (2018b). La deforestación como consecuencia del incremento de áreas de cultivo: Actividad Provocadora de Modelos. *Épsilon*, 99, 7–28. <https://bit.ly/45cyipk>

Multiplicación y división de fracciones: Excel y otras tecnologías digitales para reflexionar sobre su enseñanza

Alexandra Angel¹, Olimpia Figueras² y Carlos Valenzuela-García³

RESUMEN

En este documento se describen resultados del análisis de recursos educativos de Telesecundaria propuestos en el libro de matemáticas del alumno de primer grado para el estudio de la multiplicación de fracciones mediante Excel. A partir de esos resultados se diseñó una secuencia de actividades dirigida a profesores con el propósito de promover su reflexión sobre la enseñanza de la multiplicación y división de fracciones. Se presentan, además, hallazgos de un estudio exploratorio con la participación de profesores de secundaria en formación, estructurando sus respuestas de acuerdo con los componentes del marco de los Modelos Teóricos Locales. Finalmente, se discuten las áreas de oportunidad identificadas al usar Excel como herramienta cognitiva. Se concluye que el Modelo de Enseñanza de Telesecundaria es un ambiente potencial para enriquecer el conocimiento de profesores acerca de los conceptos de multiplicación y división de fracciones y su enseñanza, integrando tecnologías digitales.

PALABRAS CLAVE

Multiplicación y división de fracciones, Recursos educativos de matemáticas, Uso de libros de texto, Uso de hojas de cálculo, Telesecundaria.

¹ alexandra.angel@cinvestav.mx

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
<https://orcid.org/0000-0003-3912-9883>

² figueras@cinvestav.mx

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
<https://orcid.org/0000-0003-0334-9470>

³ carlos.valenzuela@academicos.udg.mx

Universidad de Guadalajara
<https://orcid.org/0000-0002-0776-5757>

ANTECEDENTES

Esta sección se organiza en tres partes. En la primera se analiza el uso de recursos educativos de matemáticas por los docentes. La segunda trata del empleo de Excel en el proceso de enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La última parte versa sobre cómo el conocimiento del profesor acerca de los conceptos de multiplicación y división de fracciones puede ser una fuente de dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del tema.

El uso de recursos educativos en educación matemática

Shulman (1986) sostiene que los recursos educativos, junto con los planes y programas de estudio, constituyen herramientas fundamentales en el oficio de los docentes. Pepin et al. (2013) afirman que los profesores interpretan y rediseñan los recursos educativos para adaptarlos a sus necesidades y costumbres, en este proceso de apropiación moldean y dan forma al contenido matemático.

El grupo temático de trabajo dedicado a las investigaciones centradas en los recursos curriculares y el diseño de tareas, desarrollado en el decimotercer Congreso de la Sociedad Europea para la Investigación en Educación Matemática, celebrado en 2023 (*Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*), destaca que dichos recursos se aplican tanto a nivel macro, sirviendo como perspectivas específicas para analizar los sistemas curriculares y pedagógicos, como a nivel micro, identificando potencialidades y áreas de mejora en las tareas sugeridas. Por ende, su análisis desempeña un papel crucial en la educación matemática.

Rezat (2012) enfatiza la relevancia de los recursos educativos para expresar y compartir ideas, especialmente en el ámbito del desarrollo curricular, la formación docente y la práctica cotidiana. Si bien su estudio se centra principalmente en el libro de texto de matemáticas como recurso educativo, el investigador señala que, dada la variedad de artefactos disponibles, no siempre es clara la comprensión de cómo usarlos. Asimismo, subraya que este asunto constituye un importante problema de investigación.

A lo largo de esta década es notable cómo numerosos libros de texto incorporan referencias a recursos educativos digitales, tales como páginas web, software, aplicaciones y videos. Estas herramientas expresan y difunden perspectivas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, entre profesores, estudiantes, autoridades educativas e investigadores especializados en matemática educativa.

Los profesores son usuarios activos de los recursos educativos. De acuerdo con Pepin et al. (2013) existen dos dimensiones principales en la interacción de los docentes con los recursos: la primera se refiere al diseño y la calidad, mientras que la segunda concierne al aprendizaje del docente y su desarrollo

profesional. La investigación global en curso, en la cual se inscribe este documento, se centra en esta última dimensión.

Hegedus y Moreno-Armella (2009) destacan que, ante la creciente integración de tecnología digital en las escuelas, las interrogantes acerca de su empleo han cambiado. Ya no nos preguntamos simplemente por qué utilizarla, sino con qué finalidad. Estos investigadores sostienen que, “el conocimiento que emerge de un medio digital es diferente del conocimiento que emerge de un medio de lápiz y papel porque el mediador no es epistemológicamente neutral” (p. 398). Por ello, a medida que la naturaleza misma de los temas que estudiamos en la escuela se transforma, las teorías del conocimiento, la didáctica y la educación en general deberían hacerlo también.

El uso de recursos educativos puede entenderse como el empleo de herramientas que extienden y aumentan las capacidades humanas, ya sean las motoras, las sensoriales o las de razonamiento (Bruner, 1966, citado en Arcavi, 2020). De acuerdo con Arcavi (2020), en matemática educativa son de especial interés las herramientas que aumentan las capacidades de razonamiento, también llamadas herramientas cognitivas, que “... se refieren principalmente a las posibilidades de potenciar el aprendizaje del contenido *per se* por medio de características como la visualización dinámica, interactividad, sorpresas que llevan a plantear preguntas y formular hipótesis, probar alternativas y similares” (p. 434).

Antecedentes del uso de Excel como herramienta cognitiva

Una de las herramientas cognitivas que se ha empleado en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es la hoja de cálculo. Aunque originalmente “no se creó con un propósito educativo específico... se ha encontrado que puede ser un gran apoyo para la enseñanza de diversos temas de matemáticas” (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2000, p. 15). Específicamente, Excel se ha implementado en la enseñanza de las matemáticas para temas como la divisibilidad, variación proporcional, ecuaciones, raíz cuadrada y cúbica, perímetro y área (SEP, 2000), funciones cuadráticas, probabilidad (Drier, 2001), área, volumen (Fuglestad, 2008), fracciones, porcentajes y números decimales (Drier, 2001; SEP, 2000; Fuglestad, 2008). A continuación se reseñan las investigaciones en las que se ha usado la hoja de cálculo para estudiar fracciones.

Drier (2001) propone que los estudiantes de primaria exploren la conexión entre fracciones y porcentajes a través del uso de la hoja de cálculo mediadas por la representación gráfica del todo y la parte. Las actividades diseñadas se fundamentan en el uso de un deslizador que permite al usuario ajustar el denominador de una fracción seleccionada y visualizar el resultado tanto numérica como gráficamente. La investigadora señala que, en varios cursos dirigidos a profesores en formación y en servicio, ha diseñado activi-

dades en una hoja de cálculo con la intención de ayudar a sus estudiantes a explorar conceptos matemáticos.

Por otra parte, Fuglestad (2008), reporta un proyecto de investigación en el que tres profesores desarrollaron aplicaciones en Excel para estudiar temas específicos del currículo como fracciones, área, volumen y porcentajes. Uno de los profesores diseñó una actividad para comparar porcentajes, fracciones y decimales. El objetivo era que los estudiantes indagaran las relaciones y determinaran las posibles reglas para cambiar entre diferentes representaciones de números racionales. Los profesores debatieron sobre las limitaciones y posibilidades del uso de la hoja de cálculo y cómo utilizar esa información para el diseño de tareas específicas. Fuglestad notó que, en una de las actividades de los profesores, la hoja de cálculo simplificaba inmediatamente $\frac{2}{4}$ a $\frac{1}{2}$, y dialogó con los profesores sobre la posibilidad de deshabilitar esa función. En este proyecto “la enseñanza es vista como un proceso de aprendizaje” (p. 1410).

En el marco del proyecto Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (EMAT) se elaboró el libro de texto “Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo” (SEP, 2000). Este libro, que se complementa con un disco compacto con archivos de hojas de cálculo, propone actividades exploratorias sobre fracciones equivalentes. Dentro de estas actividades, se insta a los estudiantes a reflexionar sobre el significado de las expresiones *máximo común divisor* y *mínimo común múltiplo*. Las fracciones que se muestran en pantalla deben ser simplificadas por los alumnos, dividiendo numeradores y denominadores entre dos y entre tres. Estas actividades están diseñadas para que los estudiantes las hagan en parejas, fomentando el diálogo y el intercambio de ideas a través de la manipulación de objetos o representaciones matemáticas.

Las investigaciones referidas proponen actividades matemáticas que promueven la reflexión y el debate. En estos estudios, el papel del docente es el de un coordinador que guía el uso de la tecnología de acuerdo con la idea de que “el objetivo principal del empleo de la tecnología en el aula no se reduce a practicar algoritmos, sino que ayuda al alumno a descubrir y construir conceptos y técnicas mediante ejercicios de reflexión” (SEP, 2000, p. 9). En las actividades propuestas se destaca que el uso de la hoja de cálculo como herramienta cognitiva (de acuerdo con Arcavi, 2020) favorece la visualización, interactividad, planteamiento de preguntas y formulación de hipótesis en las actividades de comparación.

Conocimiento del profesor sobre multiplicación y división de fracciones

La aritmética de las fracciones es reconocida como un tema desafiante tanto para los estudiantes de primaria y secundaria, como para profesores, ya sea en formación o en servicio, de esos niveles educativos (Ball, 1990; Siegler & Lortie-Forgues, 2017; Tirosch, 2000; Whitehead & Walkowiak, 2017).

Al efectuar operaciones aritméticas con fracciones, varios investigadores han señalado la diferencia entre conocer el procedimiento y entender su razón de ser, y simplemente saber cómo llevarlo a cabo sin comprender su justificación (Skemp, 1976, citado en Whitehead & Walkowiak, 2017).

En matemática educativa es abundante la literatura acerca del conocimiento de los profesores de primaria y secundaria en formación, y su dominio al usar y justificar algoritmos para multiplicar y dividir fracciones. A continuación, se mencionan algunas investigaciones al respecto.

Ball (1990) se centró en el conocimiento matemático de los profesores en formación de primaria y secundaria, poniendo especial atención en las fracciones. Una de las tareas que Ball propuso fue plantear un problema aritmético escolar verbal en el que se requería la división de fracciones. Los resultados revelaron que, para muchos, esa tarea fue muy complicada. En entrevistas con los participantes, Ball les pidió efectuar la división, y la mayoría obtuvo el resultado correcto. La investigadora argumenta que es importante que los profesores en formación conozcan los conceptos matemáticos, los procedimientos, y cómo se relacionan para poder hacer ambas tareas. Ella enfatiza que “los profesores deben ser no solo capaces de describir los pasos que involucra un algoritmo sino de discutir los juicios, hechos, significados y razones de ciertas relaciones y procedimientos” (p. 459).

Tiresh (2000), de manera similar, planteó actividades para profesores de primaria en formación sobre división de fracciones, tratando también los conceptos erróneos comunes de los estudiantes de ese nivel escolar respecto al tema. La investigadora reporta que a pesar de que la mayoría de los participantes sabía cómo dividir fracciones, encontró que muchos no podían justificar su método y desconocían las razones detrás de los errores frecuentes de los estudiantes en este campo.

Por su parte, Whitehead y Walkowiak (2017) analizaron la comprensión de profesores de primaria en formación sobre los algoritmos de multiplicación y división de fracciones, pidiéndoles explicar la razón por la que funcionaban dichos algoritmos. Para ello, diseñaron tareas orientadas a identificar y corregir errores en las respuestas de los estudiantes y a justificar por qué ciertas estrategias no eran efectivas. Los resultados revelaron que estos futuros docentes fundamentaban sus explicaciones en la mera repetición de las reglas que aplican al ejecutar estos procedimientos, en lugar de comprender a profundidad el porqué de dichas reglas.

Las tres investigaciones referidas evidencian que los profesores en formación de primaria y secundaria enfrentan dificultades para justificar e interpretar los algoritmos de la multiplicación y división de fracciones. Esto sugiere un dominio insuficiente de estos conceptos fundamentales.

Siegler y Lortie-Forgues (2017) han identificado algunos factores que influyen en la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, y los han clasifi-

cado en: inherentes al tema y de tipo cultural. Por ejemplo, el lenguaje empleado para nombrar a las fracciones, junto con los libros de texto usados, son factores de tipo cultural, que varían según las particularidades de la vida de los estudiantes. Asimismo, otro factor de este tipo, de acuerdo con el señalamiento de los investigadores es el conocimiento del profesor.

Enseguida se presenta una introducción a la modalidad Telesecundaria y al problema de investigación.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La educación secundaria en México se imparte en distintas modalidades, entre ellas la General, Técnica, Telesecundaria, Comunitaria y Para Trabajadores. Cada modalidad se creó con objetivos específicos para atender distintos problemas educativos en el país. La Telesecundaria se diseñó con base en el modelo educativo italiano, la *Telescuola*, y se integró al sistema educativo mexicano en 1968. “Ambos [modelos] intentaban brindar una alternativa de bajo costo a la demanda de educación secundaria en zonas donde no se contaba con escuelas formalmente establecidas” (SEP, 2010, p. 36).

Durante el ciclo escolar 2020-2021, más de 1.3 millones de jóvenes (de entre 12 y 14 años) asistieron a una escuela telesecundaria, representando el 21% de la población estudiantil de nivel secundaria en México (SEP, 2021). En la modalidad telesecundaria, un solo profesor imparte todas las asignaturas de un determinado grado escolar. Sin embargo, la falta de especialización de los profesores ha sido un factor que afecta su dominio sobre los temas que imparten (Calixto & Rebollar, 2008), en particular de los contenidos matemáticos.

Como apoyo al proceso de enseñanza y aprendizaje en la Telesecundaria, los profesores disponen de libros especializados “para el maestro” correspondientes a cada asignatura que imparten. Estos se complementan con recursos audiovisuales enfocados en didáctica. Por su parte, los estudiantes tienen a su disposición libros de texto para cada asignatura y una variedad de recursos educativos digitales, tanto audiovisuales, como informáticos, que se mencionan en los propios libros. Todos ellos se pueden consultar en la página web de Telesecundaria (SEP, 2010).

En el caso de la Telesecundaria en México, los libros de texto han representado, y continúan siendo, una de las herramientas esenciales para el profesor, como lo indicaba Shulman (1986). No obstante, su estructura y uso han evolucionado; por ejemplo, los libros de texto del ciclo escolar 2020-2021 están ahora integrados con recursos digitales. Dentro de una investigación en curso, se ha hecho un análisis de ciertos libros de texto de Telesecundaria (SEP, 2019a, 2019b), enfocándose en los contenidos matemáticos relacionados con la multiplicación y división de fracciones presentes tanto en recursos impresos, como digitales. Es relevante mencionar que una

porción significativa de los contenidos matemáticos de 1º y 2º grados de esta modalidad se centra en la aritmética de las fracciones. Estos tópicos, como se ha señalado previamente, representan desafíos notables para los profesores de secundaria.

En el libro de matemáticas para alumnos de primer grado (SEP, 2019b), se menciona un recurso audiovisual que instruye sobre el uso de Excel para multiplicar fracciones. Por otro lado, en un video de Telesecundaria dirigido a docentes (SEP, 2019a), se destaca la importancia de que los estudiantes analicen la relación entre los números en los numeradores y denominadores, tanto de los factores, como del resultado, con el objetivo de deducir el algoritmo para multiplicar fracciones. A partir de la revisión de estos libros, se procedió a un análisis más detallado del recurso audiovisual, explorando el uso de Excel no solo para la multiplicación de fracciones, sino también para la división.

Se propusieron distintas fracciones —propias, impropias y equivalentes, que van de una hasta cuatro cifras— para analizar el uso de la hoja de cálculo para multiplicar y dividir. Se observó que el software no siempre muestra en pantalla lo que el usuario introduce. Por ejemplo:

1. Si se digita $2/4$, entonces escribe $1/2$.
2. Si se digita $5/5$, entonces escribe 1.
3. Si se digita $7/3$, entonces escribe $2 \frac{1}{3}$.
4. Si la multiplicación hace referencia a una celda vacía, entonces interpreta el contenido de la celda como si tuviera escrito un 0.
5. Si el usuario digita una fracción de dos cifras como $11/20$, entonces escribe $5/9$.

En los casos 1 y 2, Excel simplifica las fracciones que el usuario digita. En el caso 3, Excel reescribe las fracciones impropias como fracciones mixtas. Mientras que, en el caso 5, el usuario digita una fracción de dos cifras y dado que por defecto la celda admite una fracción de hasta una cifra, Excel aproxima la fracción ingresada cuando esta se escribe con más cifras de las que el formato permite.

Del análisis anterior se concluyó que los cálculos que hace el software podrían generar confusión entre estudiantes y profesores. Sin embargo, también ofrecen una excelente oportunidad para profundizar en el estudio de las fracciones. Con base en estas observaciones, se diseñó una secuencia de actividades para acompañar a los docentes en la exploración de estos temas, inducirlos a la reflexión de esos conceptos y de su enseñanza, y coordinar las discusiones que se deriven. El propósito de este capítulo es detallar el estudio exploratorio en el que participaron profesores de secundaria en formación. A través de este, se busca utilizar los hallazgos para reconocer las oportunidades presentes al emplear Excel en línea con la perspectiva cognitiva de Arcavi (2020). Bajo este enfoque, Excel permite extender las capacidades de razonamiento debido a su capacidad de generar sorpresas, lo que a

su vez incita a formular preguntas, hipótesis y explorar distintas alternativas. Todo esto converge en el objetivo principal: descubrir el potencial de los recursos educativos ofrecidos para Telesecundaria.

El estudio exploratorio tiene como objetivo validar el diseño de la experimentación, lo que implica asegurar que las actividades planificadas efectivamente promuevan los procesos de reflexión y discusión previstos. Al lograrlo, se contará con elementos para indagar sobre la plausibilidad de la hipótesis de la investigación en la que se plantea que el modelo de enseñanza de Telesecundaria, específicamente para la multiplicación y división de las fracciones, es un ambiente potencial para que los profesores enriquezcan sus conocimientos acerca de estos conceptos, su enseñanza y la integración de tecnología digital en su práctica docente.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico y metodológico de los Modelos Teóricos Locales (MTLs), propuesto por Filloy (1999) ha sido usado para estructurar la presente investigación. De acuerdo con Puig (2008, p. 88), “los MTLs los elaboramos para dar cuenta ... de fenómenos que se producen en situaciones de enseñanza y aprendizaje, pero además concebimos las situaciones de enseñanza y aprendizaje como situaciones de comunicación y de producción de sentido”. En este caso, los fenómenos de interés son los procesos de comunicación y producción de sentido que tienen lugar en el intercambio de mensajes entre profesores y recursos educativos. Es decir, en la investigación global se indaga cómo los profesores de Telesecundaria amplían sus conocimientos sobre multiplicación y división de fracciones al ser usuarios activos de los recursos educativos, en la dimensión que señalaban Pepin et al. (2013) respecto al aprendizaje de los docentes y su desarrollo profesional. Este proceso, como señala Puig (2003, p. 184, citado en Puig, 2008, p. 90),

...se produce gracias a la lectura/transformación de esa secuencia de textos que llamamos Modelos de Enseñanza. Como consecuencia de esa lectura/transformación se producen conceptos nuevos a través de la producción de nuevos sentidos y el establecimiento de nuevos significados para el SMS [Sistema Matemático de Signos] (o los SMS) en que se describe y produce lo enseñado, que incluso conlleva a la elaboración de nuevos SMS.

En su práctica docente, el profesor de Telesecundaria usa las herramientas de su oficio, las interpreta antes de usarlas, y, en este caso, interpreta y usa los recursos educativos para estudiar la multiplicación y división de fracciones, con lo cual se identifica un proceso de lectura/transformación como señala Puig. De ahí que se haya elegido el marco teórico de los MTLs para dar cuenta de este fenómeno.

Los MTLs se construyen considerando cuatro componentes y sus interrelaciones, en términos de esta investigación: 1) el componente Modelos de Competencia Formal -que se abrevia como Componente Formal- se

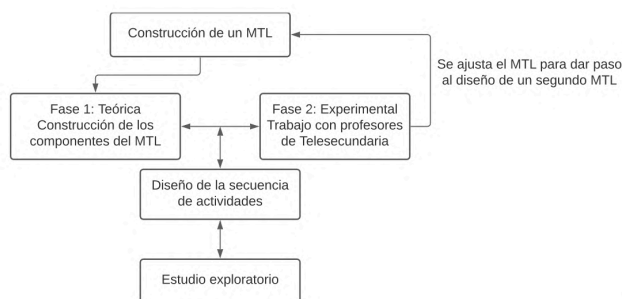
relaciona con un análisis sobre la multiplicación y división de fracciones como objetos matemáticos y el conocimiento que debe tener un usuario ideal de ellos; 2) el componente Modelos de Enseñanza involucra, entre otras cosas, el análisis de los textos matemáticos que se encuentran entre los recursos educativos que usan los profesores de Telesecundaria; en esos textos se caracterizan los significados de la multiplicación y división de fracciones y las tareas y contextos empleados para su enseñanza, es decir, su tratamiento didáctico; 3) el componente Modelos de Comunicación se refiere a la decodificación que hacen los docentes de los mensajes emitidos por los creadores de los recursos educativos; y finalmente; 4) el componente Modelos de Procesos Cognitivos versa sobre las actuaciones de los profesores, pero también sobre sus maneras de producir sentido acerca de las actividades matemáticas que hacen.

En el marco teórico y metodológico de los MTLs se emplea el término “competencia”. Puig (2008, p. 87) señala que ese término “es motivo de múltiples seminarios, artículos y manifiestos” debido a que en el ámbito educativo se ha usado asignándole diferentes sentidos. De acuerdo con el investigador, con la competencia matemática se explica y predice la conducta de un sujeto ideal, que es aquel que conoce el conjunto de las matemáticas socialmente establecidas en un momento histórico determinado. El describir la competencia del sujeto ideal permite dar cuenta de sus actuaciones posibles y predecirlas, esa información forma parte del Componente Formal del MTL. Sin embargo, cuando en la experimentación intervienen sujetos reales, el término competencia desde los MTLs se usa para describir sus actuaciones concretas, y esto forma parte del Componente de Procesos Cognitivos.

METODOLOGÍA

La construcción de un MTL se da en dos fases como se muestra en la Figura 1. La primera fase consiste en un análisis teórico para la construcción de los componentes del MTL. En Angel et al. (2022) se da cuenta de la construcción de los dos primeros componentes. La segunda fase es experimental e involucra la interacción de profesores de Telesecundaria con recursos educativos seleccionados de la modalidad.

Como parte de la segunda fase se diseñó la experimentación, constituida por actividades y hojas de trabajo para recolectar datos que se materializaron en un taller. Después se planeó la validación de los instrumentos, principalmente para observar si las actividades propuestas promueven los procesos de reflexión esperados. Esto se efectuó a través de un estudio exploratorio que se llevó a cabo en octubre de 2022 en el marco del quincuagésimo quinto Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, y formó parte de los talleres de docencia que tuvieron lugar en dicho evento.

Figura 1*Esquema de la metodología para construir el Modelo Teórico Local*

El taller impartido se tituló: “Multiplicación y división de fracciones, algo más que la enseñanza de algoritmos”, y se desarrolló de manera presencial. Este se organizó en tres sesiones independientes de dos horas cada una. En la Figura 2 se muestra un esquema de su estructura, cómo se tituló cada actividad y los recursos educativos digitales que se usaron.

Cada sesión se dividió en dos momentos. En el primero, los participantes hicieron actividades y recibieron hojas de trabajo para anotar sus reflexiones personales acerca de ellas. En el segundo momento, en plenaria, los participantes conversaron e intercambiaron ideas acerca de: 1) sus reflexiones; 2) la idoneidad de las actividades para la enseñanza de la multiplicación y división de fracciones; 3) el uso de los recursos educativos referidos en las hojas de trabajo que fueron proyectados durante las sesiones.

Participantes

Previo a la celebración del evento se publicó una convocatoria dirigida a profesores de nivel secundaria de todas las modalidades. Sin embargo, ningún profesor de Telesecundaria asistió, y la mayoría de los asistentes eran profesores de secundaria en formación. Específicamente, al taller asistieron dos estudiantes de la Licenciatura en Ciencias de la Educación con acentuación en Enseñanza de las Matemáticas; cinco estudiantes de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas; dos estudiantes de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas; y una profesora de nivel superior e investigadora en matemática educativa. Todos los participantes comparten el interés por la matemática educativa y se inscribieron al taller de manera voluntaria debido a su motivación por el tema. Se contó con un total de diez participantes, siete mujeres y tres hombres.

De acuerdo con la metodología de los MTLs, para concluir con la construcción del MTL de esta investigación se debe llevar a cabo la fase de experimentación con los profesores de Telesecundaria en servicio, como se muestra en el esquema de la Figura 1. El hecho de que en el estudio exploratorio no hayan participado profesores de Telesecundaria no va en detri-

mento de la investigación, por el contrario, permite validar los instrumentos, es decir, permite observar si las actividades propuestas promueven procesos de reflexión sobre la multiplicación y división de fracciones y su enseñanza de los participantes.

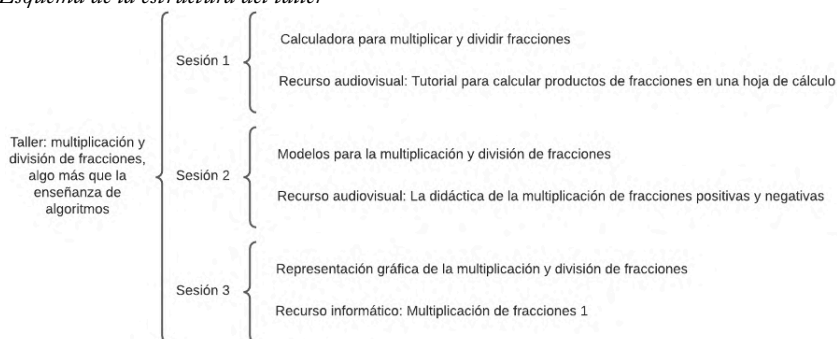
Instrumento

Con base en el modelo de enseñanza de Telesecundaria para la multiplicación y división de fracciones, se diseñó una secuencia de actividades, en modalidad de taller, dirigida a profesores. En ella se proponen escenarios hipotéticos del uso de Excel en clase y de las interrogantes que los estudiantes pueden plantear al usar el software. Todos los ítems relativos al uso de Excel fueron diseñados por los autores de este documento. Además, se crearon hojas de trabajo en las que se proponen actividades con lápiz y papel, cuyos ítems se plantean basándose en las investigaciones de Tirosh (2000) y Whitehead y Walkowiak (2017); en ellas se indaga sobre la interpretación y justificación de algunos de los algoritmos para multiplicar y dividir fracciones. Las actividades propuestas se extendieron al tema de la división de fracciones de acuerdo con las ideas de Lamon (2012).

El propósito de la secuencia de actividades es que los profesores 1) exploren el uso de Excel no solo para multiplicar, sino también para dividir fracciones; 2) analicen la validez de distintos algoritmos para multiplicar y dividir fracciones; y 3) reflexionen y discutan acerca de las áreas de oportunidad al usar Excel en términos de procesos de enseñanza y aprendizaje.

Figura 2

Esquema de la estructura del taller



Análisis de los datos

La recolección de datos durante el taller se hizo mediante hojas de trabajo y notas que tomaron los tres coordinadores del taller —autores de este capítulo— durante y después de las discusiones plenarias. Los investigadores intercambiaron observaciones después de cada sesión acerca de las notas que tomaron, e hicieron una triangulación de su interpretación sobre las actua-

ciones de los participantes. Los datos se presentan de manera descriptiva. Se refieren las palabras pronunciadas o escritas de los participantes —que en el texto se muestran entrecomilladas—, así como las acciones que se llevaron a cabo dentro del taller y que se analizan de forma cualitativa. La interpretación de los resultados se hace con base en los cuatro componentes del MTL.

RESULTADOS

Sesión 1: calculadora para multiplicar y dividir fracciones

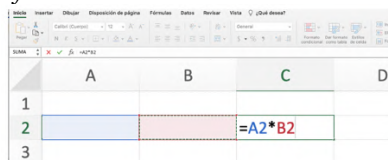
En la primera sesión del taller se proyectó el recurso audiovisual de Telesecundaria: “Tutorial para calcular productos de fracciones en una hoja de cálculo” (SEP, 2019b, p. 42). A cada participante se le entregaron las hojas de trabajo correspondientes y se les pidió que usaran Excel para construir una calculadora para multiplicar fracciones, como la que se muestra en la Figura 3. De acuerdo con el recurso audiovisual, al no cambiar en cada celda a “formato fracción”, Excel interpreta los datos como fechas. Por ejemplo al digitar “2/5”, el programa escribe “02-may”.

A continuación, se muestran algunos de los ítems planteados en las hojas de trabajo, así como algunas de las respuestas de los participantes.

Ítem 1: Ana escribió en la hoja de cálculo los ejemplos que se muestran en la Figura 4, fila 2 y 3, y le pregunta ¿por qué en la fila 2, en la que se multiplica $1/2 * 1/3$, se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador, pero en la fila 3 no? ¿Qué le respondería?

Figura 3

Calculadora para multiplicar fracciones en Excel



	A	B	C	D
1				
2			=A2*B2	
3				

Los usuarios dejan ver en sus respuestas en las hojas de trabajo nociones de fracciones equivalentes. La mayoría menciona que como resultado de simplificar $\frac{4}{10}$ se obtiene la fracción equivalente $\frac{2}{5}$. Sin embargo, también emergen otras cuestiones vinculadas a la idea de que el proceso de simplificación “achica a las fracciones”. Esto se observa en las expresiones escritas en las hojas de trabajo de 3 participantes: “le diría que es porque se simplifica, y Excel lo que hace automáticamente es dividir todo entre dos para reducir la fracción”; “porque excel simplifica la fracción. El resultado sin simplificar sería $\frac{4}{10}$, pero Excel lo divide entre 2 para que sea una fracción más pequeña”; “la fracción se simplifica, es decir no muestra números tan grandes. Fracciones equivalentes”. En la discusión colectiva, estas ideas erróneas pasaron desapercibidas.

Figura 4*Ejemplos referidos en las hojas de actividades*

	A	B	C
1	Fracción a	Fracción b	a*b
2	1/2	1/3	1/6
3	1/2	4/5	2/5
4	2/5	2/3	1/4
5	2/5	2/3	4/15
6	1/4	1 1/3	1/3

Ítem 2: Sin mostrarle su trabajo, Rodrigo le dice lo siguiente: –profé, calcule el producto de $1/2 \cdot 11/20$, a ver cuánto le da. ¿Usted qué resultado obtiene? ¿Cómo le explicaría a su alumno lo que está haciendo la hoja de cálculo?

La mayoría de los usuarios configuraron el formato de las celdas usando la instrucción “hasta un dígito”, por ello, cuando digitaron $11/20$, la hoja de cálculo no pudo mostrar esa fracción, en cambio escribió $5/9$. Esto sorprendió a la mayoría, sin embargo, algunos usuarios no lo notaron. Otros usuarios que eligieron el formato “hasta tres dígitos” no observaron ese fenómeno en sus pantallas. Después de que algunos participantes comentaron la manera en que configuraron el formato de las celdas, se llegó al consenso de que era conveniente seleccionar en la hoja de cálculo el formato de celdas de fracción de “hasta tres dígitos”. En la discusión también se mencionó la relación que hay entre las fracciones $11/20$ y $5/9$. Algunos participantes externaron que, si se fijaban en la representación decimal de ambas fracciones, era posible notar que $5/9$ es una aproximación de $11/20$.

Una pregunta adicional que se planteó en ese momento fue ¿cómo saber qué tan buena es la aproximación que hace Excel? Como respuesta se mencionaron dos técnicas para valorarla: 1) hacer una sustracción, entre más cercana sea la resta a 0, mejor será la aproximación; 2) hacer una división, entre más cercano sea el cociente a 1, mejor será la aproximación. Por otro lado, en las hojas de trabajo se observó que un participante hizo un uso indistinto de los términos: simplificar y aproximar, refiriéndose a:

“ $2/7 \leftarrow$ Resultado. Al configurar el formato de celdas, se deben escoger 2 dígitos para lograr que la aplicación no simplifique la fracción, ya que, al no configurarla, automáticamente buscará la fracción de 1 dígito + cercana”.

Ítem 3: Laura propuso los ejemplos que se muestran en la Figura 4, filas 4 y 5, y le pregunta ¿por qué los productos de las celdas C4 y C5 son distintos si tienen los mismos factores? ¿Cuál resultado es el correcto? ¿Cómo explicaría a la estudiante lo que está haciendo la hoja de cálculo?

La mayoría de los participantes respondieron en sus hojas de trabajo que esto se debe a la configuración de Excel, o al formato de las celdas, mencionaron que este planteamiento es similar al del ítem 2, y que $\frac{1}{4}$ es una aproximación de $\frac{4}{15}$. Algunos usuarios mostraron en sus hojas de trabajo que $\frac{1}{4}$ es equivalente a $\frac{4}{16}$. Sin embargo, hubo 2 usuarios que consideraron que ambos

resultados son correctos “los dos son correctos, solo lo diferente sería la configuración de la celda y aquí podemos enseñar las fracciones equivalentes, $\frac{1}{4}$ se aproxima a $\frac{4}{15}$ ”, “los dos resultados son correctos, pero se puede ver de dos maneras, ya que la configuración de las celdas decide si el resultado será de dos o de un dígito”. En este caso, se observa que los usuarios identifican el resultado, y atribuyen a la configuración del formato de las celdas el que no pueda escribirse el denominador de dos dígitos, por lo que concluyen que, en esencia, los dos son correctos. En la discusión se mencionó que eso se podía argumentar haciendo una aproximación por ensayo y error.

Ítem 4: Alejandro le comenta que la hoja de cálculo está haciendo algo raro, porque en la celda B6 que se muestra en la Figura 4, ha puesto una fracción y la hoja de cálculo ha escrito otra ¿qué está pasando? ¿Qué fracción ha escrito originalmente su alumno?

La mayoría de los usuarios argumentaron que Excel escribe las fracciones impropias en forma de fracción mixta. En sus respuestas usan expresiones como: “La computadora está haciendo” o “Excel está haciendo”, con lo cual ponen de manifiesto que están interpretando su funcionamiento. En la discusión, un usuario mencionó que de ser necesario usar fracciones impropias escritas en forma de fracción, se podrían usar las celdas como cajas para escribir los numeradores y denominadores de los factores y agregar el signo de multiplicación entre las celdas como se muestra en la Figura 5. Sin embargo, entre los mismos participantes surgió la discusión acerca de que un signo de multiplicación es suficiente, porque de lo contrario se fomenta entre los alumnos la idea de que el numerador y denominador de una fracción son números separados sin relación entre sí, lo cual puede ser contraproducente. Con respecto a la línea que divide al numerador del denominador, se mencionaron al menos dos formas de dibujarla usando herramientas de la hoja de cálculo.

Figura 5
Propuesta para escribir fracciones impropias en Excel

2		numerador	x	numerador
3		denominador	x	denominador

Ítem 6: ¿Cómo usaría la hoja de cálculo para mostrarle a sus alumnos que toda fracción multiplicada por 0 da como resultado 0?

En esta actividad, los usuarios propusieron distintas estrategias para mostrar en una situación de enseñanza que la propiedad mencionada se cumple “para toda fracción”. Por ejemplo: “cada quien elija la fracción que quiera y multiplíquela por cero. ¿Cuánto le da a cada quién?” “Que cada alumno realice la multiplicación $\times 0$ utilizando la fracción que cada uno quiera usar, sin restricción. –Dejar una celda vacía–”. En este caso, la noción de arbitra-

riedad reside en que la propiedad se cumple cualesquiera sean las fracciones que los alumnos propongan. También algunos expresaron la arbitrariedad usando letras, por ejemplo “ $\frac{a}{b} * 0 = 0$; $\frac{a * 0}{b * 1} = \frac{0}{b}$ ”. Utilizando la propiedad de que cualquier número entero por cero da cero”. Además, un usuario manifestó esta idea diciendo “otorgarles un papelito de fracciones donde venga alguna fracción y casualmente das un 0, y posteriormente abrimos la introducción al tema”. En este caso, la noción de arbitrariedad se comunica a los estudiantes al elegir una fracción al azar escrita en papelitos que se colocan en un recipiente.

Estos son ejemplos de la producción de sentido de los usuarios para la expresión “toda fracción”, “una fracción cualquiera” o “una fracción arbitraria”. Finalmente, hay quienes expresan la idea de que se puede construir una calculadora en Excel para multiplicar fracciones en la que uno de los factores sea cero y el otro factor puede ser propuesto por los estudiantes; de esta manera se verá que el producto será cero en todos los casos.

En la discusión se mencionó que los participantes descubrieron que, al dejar una celda vacía en la calculadora para multiplicar fracciones, el software interpreta su valor como cero. Algo que ellos no notaron es que Excel no permite escribir fracciones con numerador igual a cero.

Entre las preguntas respecto a las actividades de división de fracciones, se encuentran los ítems 16 y 17 que se comentan a continuación.

Ítem 16: ¿Qué actividades propondría para ampliar el estudio del algoritmo de la división de fracciones?

Algunas de las respuestas que dieron los participantes fueron “hacer representaciones manuales o ilustradas para posteriormente plasmarlas en la hoja de cálculo”; “usar el método gráfico”; “proponer distintos casos: dividir entre 1, entre 0, por el mismo número”; “¿Qué pasa si divides una fracción entre cero? Y ¿Cero entre una fracción? ¿Es conmutativa? ¿Cómo se divide un entero entre una fracción? ¿Y una fracción entre un entero?”. Finalmente, en la discusión se mencionó que la división no es conmutativa como la multiplicación. Sin embargo, se aclaró que la multiplicación es conmutativa en contextos matemáticos totalmente numéricos, pero cuando consideramos la resolución de problemas aritméticos, la conmutatividad depende del contexto situacional, es decir, en algunos casos cambiar el orden de los factores puede hacer referencia al enunciado de otro problema, e incluso a otro modelo de la operación aritmética.

Ítem 17: ¿Qué dificultades podrían encontrar los estudiantes al construir una calculadora para dividir fracciones en Excel?

Los usuarios mencionaron que, con el uso previo de Excel para multiplicar fracciones, conocían mejor lo que se puede esperar para el caso de la división de fracciones. Sin embargo, una de las cosas que preocupó a los usuarios fue

que es muy probable que los estudiantes pregunten por la división entre cero. Una duda que externó uno de los participantes es sobre cómo clasificar a la fracción $\frac{8}{8}$. Se respondió que es una fracción equivalente a la unidad y no es propia ni impropia.

En resumen, los cuestionamientos principales que surgieron en las discusiones colectivas de la sesión 1 fueron, acerca de cómo la hoja de cálculo procesa la información que recibe. Específicamente, acerca del funcionamiento del software, el cambio de representación que hace de las fracciones y cómo los participantes utilizarían este recurso en clase.

En la Tabla 1 se resumen las actuaciones de los usuarios que participaron en la sesión 1, en términos de nociones, contenidos y estrategias.

Por un lado, en términos del Componente Formal, los usuarios pudieron darse cuenta de las limitaciones de Excel y, al mismo tiempo, identificar áreas de oportunidad para estudiar: 1) fracciones equivalentes; 2) los números enteros como fracciones; 3) la relación entre fracciones impropias y mixtas; 4) los algoritmos de la multiplicación y división de fracciones; y 5) los recursos a los que recurren para estudiar la multiplicación y división de fracciones, y su propio conocimiento sobre ellas, particularmente sobre su representación decimal, pues reconocieron cómo emplearon dicha representación en el ítem 2.

Por otro lado, en términos del Componente de Modelos de Comunicación, se observó que los participantes usaron expresiones como “Excel está haciendo”, esto condujo a la reflexión colectiva acerca de Excel como una calculadora muy particular en la que no solo se puede configurar el formato de los números que puede procesar, sino también su visualización. Es posible usar otros elementos, por ejemplo, colores para resaltar celdas y poner énfasis en determinadas relaciones; los usuarios emplearon colores para ilustrar la propiedad de conmutatividad de la multiplicación. En la discusión, ellos ampliaron esta idea mencionando que cuando se combinan dos colores diferentes de pintura, no importa el orden en el cual se mezclen, el color de la pintura que se obtiene es el mismo.

Dentro del marco de uso de la hoja de cálculo, los participantes señalaron que, para que el resultado de una multiplicación de fracciones sea la unidad, es indispensable multiplicar una fracción propia con una impropia. Sin embargo, Excel representaría esta última como una fracción mixta. Esto podría dificultar que los estudiantes noten que los factores son, necesariamente, fracciones recíprocas entre sí. En la discusión mencionaron estrategias que emplearían para guiar a los estudiantes a observar esa relación, estas incluían modificar aspectos de la visualización de Excel y escribir a las fracciones mixtas como impropias usando papel y lápiz.

Con relación al Componente de Procesos Cognitivos se identifica que en las actuaciones generales de los usuarios, ellos discutieron sobre el

concepto de multiplicación de fracciones. Los participantes del taller también reflexionaron acerca de las posibles dificultades con las que se pueden enfrentar los estudiantes al hacer estas actividades en Excel, -esto se relaciona con el Componente de Modelos de Enseñanza-. Y finalmente, respecto al uso de la tecnología digital, principalmente para el diseño de tareas en función de las características del software.

Tabla 1
Nociones, contenidos y estrategias relacionados con los componentes del MTL en la sesión 1

Componentes del MTL	Nociones, contenidos y estrategias
1. Modelos de competencia formal	1a. Fracciones equivalentes
	1b. Los números enteros como fracciones
	1c. Fracciones impropias y mixtas
	1d. Algoritmos para la multiplicación y división de fracciones
	1e. Representación decimal de las fracciones
2. Modelos de enseñanza	2a. Dificultades de los estudiantes al usar Excel
	2b. Enseñanza de los algoritmos para multiplicar y dividir fracciones
	2c. Estrategias para generar fracciones arbitrarias
3. Modelos de comunicación	3a. Excel como calculadora configurable
	3b. Visualización en Excel
	3c. Uso de lápiz y papel para hacer cálculos con fracciones mixtas
4. Modelos de procesos cognitivos	4a. Diseño de tareas sobre la multiplicación y división de fracciones en Excel
	4b. Posibilidades y limitaciones de Excel como herramienta cognitiva
	4c. Desarrollo de estrategias para compensar las limitaciones de Excel

Sesión 2: modelos para la multiplicación y división de fracciones

Ítem 1: Sara no está segura por qué cuando se multiplican dos fracciones como $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ se permite multiplicar directo. Qué explicación le daría a Sara sobre el porqué este método funciona.

En la discusión se mencionó cómo a veces solo se responde: “es que así es, así se hace”, y esas son respuestas muy limitadas. Los participantes estaban invitados a escribir la manera en la que ellos mismos se explicaban la validez del algoritmo; en las respuestas hubo quienes mencionaron que, si un medio

se multiplicara por dos y luego se dividiera entre tres, se obtenía el mismo resultado que al multiplicar directo. Algunos mencionaron que el procedimiento consiste en tomar la mitad de $\frac{2}{3}$. Otros, que se apoyarían en una representación gráfica, que usarían las representaciones decimales para multiplicarlas, y luego expresarían el producto como fracción.

Otras justificaciones fueron: “al igual que los números naturales $\mathbb{N}$ se multiplican de forma directa, una fracción es exactamente lo mismo, pero representado de otra forma debido a que pertenece a otro conjunto de números $\mathbb{Q}$ ”. “Que toda multiplicación se realiza de manera directa y no hay otro método, lo mismo pasa si se convierte a decimal”. Se concluyó que podemos recurrir a otras representaciones para interpretar el producto, y que también es posible usar Excel como calculadora y preguntar a los estudiantes ¿cómo obtener el número del producto a partir de los números de los factores?, en correspondencia con el enfoque de Telesecundaria (SEP, 2019a).

Ítem 2: Henry está tratando de calcular $\frac{1}{4} \cdot 3\frac{3}{5}$. A continuación, se muestran su razonamiento y cálculos. ¿Es válido el método de Henry? ¿Por qué sí o por qué no? Haga los cálculos para comparar.

$$1\frac{1}{4} \times 3\frac{3}{5} = (1 \times 3) + (1\frac{1}{4} \times \frac{3}{5})$$

$$3 + \frac{3}{20} = 3\frac{3}{20}$$

Uno de los asistentes pasó al pizarrón para efectuar la operación y mostró que el resultado de Henry fue incorrecto. En la discusión se mencionó que la igualdad que Henry escribe no es válida y debería de tener una adición de 4 sumandos en lugar de los 2 que tiene.

El método de comprobación al que más recurrieron los participantes fue reescribir las fracciones mixtas en forma de fracciones impropias y multiplicarlas. Otro participante usó la representación decimal de las fracciones y las multiplicó, luego, expresó el resultado de Henry en su representación decimal, comparó los valores y concluyó que eran distintos. En la discusión se comentó que una fracción mixta se descompone en la suma del entero y la fracción y no representa el producto del entero por la fracción.

Después de discutir sobre los ítems 1 y 2, se proyectó el recurso educativo audiovisual de Telesecundaria titulado: “La didáctica de la multiplicación de fracciones positivas y negativas” (SEP, 2019a). Tras su proyección, se generó un debate acerca del contenido, centrado en cómo elaborar una representación gráfica del modelo de área para la multiplicación de fracciones. Un participante se acercó al pizarrón para ilustrar la multiplicación de fracciones utilizando dicho modelo. En general, la mayoría de los presentes estaba familiarizada con esa forma de representación.

Ítem 6: Daniela dice que ella prefiere dividir fracciones de manera similar a cómo se multiplican. Por ejemplo $\frac{2}{9} \div \frac{1}{3} = \frac{2 \div 1}{9 \div 3} = \frac{2}{3}$. ¿Aceptaría la propuesta de Daniela? ¿Por qué?

En el aula, la opinión estaba dividida al respecto de si el método de Daniela era válido o no. Los participantes comentaron que utilizaron el algoritmo de Daniela para dividir otras fracciones y obtenían respuestas correctas. Uno de los participantes incluso comentó que sería buena idea enseñar a los estudiantes a dividir usando ese algoritmo.

Una participante insistía en que el algoritmo no podía ser válido, por lo que se le pidió un contraejemplo. Otro de los participantes se convenció de que el método era válido porque en realidad se hacía algo similar al algoritmo, que consiste en multiplicar medios por medios y extremos por extremos. Se le pidió pasar al pizarrón a probar la validez del algoritmo. El participante usó letras en vez de números para representar a las fracciones y, aunque hubo pasos en los que dudaba, continuó con su demostración hasta que pudo expresar la equivalencia de las expresiones:

$$\frac{a \div b}{c \div d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

La participante que estaba buscando un contraejemplo mencionó que si a, b, c y d son números que no tienen factores en común, al final se tiene que recurrir a otro algoritmo para hacer la división.

En la plenaria se llegó al consenso de que el método es válido, solo que cuando a y b , por un lado y c y d por el otro, tienen factores en común, entonces el algoritmo es simple en términos operativos, de lo contrario se tiene que recurrir a otros algoritmos para calcular el cociente.

En la Tabla 2 se resumen las nociones, conceptos y estrategias que se identificaron en las competencias de los participantes durante la sesión 2, es decir, en el conjunto de sus actuaciones.

Sesión 3: representación gráfica de la multiplicación y división de fracciones

A la última sesión del taller asistieron menos de la mitad de los participantes por ser de las últimas actividades del Congreso. Se repartieron las hojas de trabajo, pero solo para comentar las actividades propuestas. En virtud de que ya anteriormente se había discutido acerca de la representación gráfica de la multiplicación de fracciones con base en un modelo de área, se tomó la decisión de dedicar la última parte del taller a ese modelo de la división.

En las hojas de trabajo se les proporcionó a los asistentes el ejemplo de la interpretación gráfica de la división de $\frac{3}{5}$ entre $\frac{1}{3}$, que se muestra en la Figura 6, con base en la interpretación de Lamón (2012, pp. 200–201). Uno de los investigadores que dirigió el taller desarrolló el ejemplo en el pizarrón

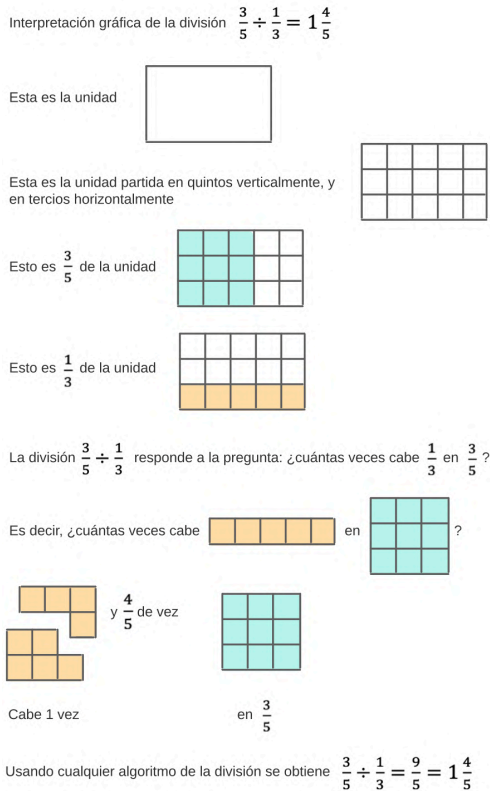
con la finalidad de discutir acerca del procedimiento propuesto. Los asistentes comentaron que ninguno de ellos había visto antes la representación gráfica de la división de fracciones y solamente la conocían para el caso de la multiplicación de fracciones.

Tabla 2
Nociones, contenidos y estrategias relacionados con los componentes del MTL en la sesión 2

Componentes del MTL	Nociones, contenidos y estrategias
1. Modelos de competencia formal	1a. Algoritmo de la multiplicación y la división de fracciones
	1b. Fracciones mixtas
	1c. Simplificación de fracciones
	1d. Fracciones arbitrarias
	1e. Representación decimal de las fracciones
2. Modelos de enseñanza	2a. Representación gráfica de la multiplicación de fracciones con el modelo de área
	2b. Los diferentes algoritmos para dividir fracciones
3. Modelos de comunicación	3a. Uso de lápiz y papel para hacer multiplicaciones y divisiones con fracciones
4. Modelos de procesos cognitivos	4a. La demostración en matemáticas
	4b. El uso de contraejemplos

Como parte de la discusión que originó el uso de la representación gráfica, se pidió a los asistentes que reflexionaran acerca de la pregunta ¿cuántas veces cabe una fracción en otra?, y sobre la posibilidad de plantearnos la pregunta en los mismos términos de ‘cuántas veces cabe un número en otro’. Se concluyó que esa pregunta es válida para cualquier clase de números y que, en el caso de las fracciones, incluso plantearse esa pregunta puede proporcionarnos el cociente sin tener que usar un algoritmo escrito para encontrarlo. Por ejemplo, en el caso de la división $\frac{1}{2}$ entre $\frac{1}{4}$, si uno se pregunta ¿cuántas veces cabe un cuarto en un medio?, la pregunta se puede responder en virtud de que $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{2}{4}$, y por lo tanto, $\frac{1}{4}$ cabe dos veces en un $\frac{1}{2}$. Esta cuestión se asocia al significado de la división cuotitiva, en contraparte de la división partitiva, en la que la pregunta se relaciona con cuánto le toca a cada quién en un reparto, por ejemplo.

Figura 6
Representación gráfica de la división de fracciones usando un modelo de área



En la Tabla 3 se resumen las nociones, contenidos y estrategias que se observaron en la sesión 3.

Tabla 3
Nociones, contenidos y estrategias relacionados con los componentes del MTL en la sesión 3

Componentes del MTL	Nociones, contenidos y estrategias
1. Modelos de competencia formal	1a. Significado de la fracción como parte todo
	1b. Equivalencia de fracciones
	1c. Definición de dividendo, divisor y cociente
	1d. La división coutitiva y partitiva
2. Modelos de enseñanza	2a. Modelo de área para representar la división de fracciones
3. Modelos de comunicación	3a. Representación gráfica para la división de fracciones
	3b. Visualización en matemáticas
4. Modelos de procesos cognitivos	4a. Interpretación del dividendo, divisor y cociente

CONCLUSIONES

Aunque la hoja de cálculo no fue diseñada específicamente para el ámbito educativo, en este documento hemos destacado su propuesta de uso tanto en Telesecundaria, como en diversos proyectos de investigación. Es esencial seguir explorando el diseño de tareas que integren su aplicación, con el fin de identificar sus potenciales beneficios. Esto nos orientará hacia una comprensión más profunda del papel de la hoja de cálculo en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En este capítulo se muestra parte de una secuencia de actividades que involucra el uso de esa hoja de cálculo para multiplicar y dividir fracciones. Las fracciones que el usuario digita en Excel no siempre son las mismas que las que aparecen en pantalla, pues en las actividades que se analizan en este capítulo se señalan al menos tres procesos que efectúa el software: 1) simplificar, 2) aproximar y 3) reescribir. Esto induce al usuario de la hoja de cálculo a un proceso de descodificación, que en el estudio exploratorio para validar la secuencia de actividades se observó que se da de manera espontánea en el razonamiento de algunos usuarios, pero no para todos, porque no todos verifican los cálculos de Excel. Sin embargo, luego de las discusiones y reflexiones colectivas, todos los usuarios pudieron participar de ese proceso de descodificación.

Las hojas de cálculo que usaron los participantes en el taller no estaban prediseñadas, pues no se les proporcionó ningún archivo elaborado previamente. Tampoco hubo una introducción con respecto al uso de Excel, de modo que las actividades propuestas en las hojas de trabajo sirvieron como guías para los asistentes al taller en su recorrido al explorar las funciones del software. La secuencia de actividades que se diseñó es una propuesta de cómo se pueden superar las dificultades que surgen al usar Excel para multiplicar y dividir fracciones, tomando como base sus áreas de oportunidad para reflexionar acerca del funcionamiento de esa calculadora particular.

Los participantes se involucraron en las actividades, reflexiones y discusiones; de esta manera tuvieron la oportunidad de probar sus ideas, así como de desarrollar otras como resultado de sus reflexiones personales y colectivas. Esto apunta a que el enfoque reflexión-discusión con el que se diseñó la secuencia de actividades ha favorecido el uso de Excel como herramienta cognitiva. Más aún, de las demás tecnologías digitales que se emplearon, y también de las hojas de trabajo.

La interacción de los asistentes con los recursos educativos de Telesecundaria se percibe como una oportunidad de aprendizaje. La interactividad de Excel, su adaptabilidad en la ejecución de tareas y cuestionamientos planteados en los ítems motivaron a los participantes a formularse preguntas e involucrarse en la ampliación de sus propios conocimientos acerca de los conceptos de multiplicación y división de fracciones. Se ha observado que

Excel puede ser usado como herramienta cognitiva para estudiar estos conceptos dada la forma en que el software opera con las fracciones. Así mismo, induce un proceso de decodificación por parte de los usuarios que los lleva a formular hipótesis acerca de su funcionamiento y de la relación que guardan las fracciones que el usuario digita y las que Excel escribe.

En cuanto al diseño de la recopilación de datos, se notó que la información reunida en las hojas de trabajo ayudó a identificar aspectos que no se manifestaron durante las discusiones. Estos aspectos están principalmente vinculados a concepciones erróneas por parte de los participantes.

Para concluir la segunda fase en la construcción del MTL, el taller se deberá llevar a cabo con la participación de profesores de Telesecundaria en servicio. Se considera que habría que incluir en las discusiones, las ideas erróneas que se identificaron con el grupo que participó en el estudio exploratorio, y que tienen que ver con los procesos de simplificación y aproximación de fracciones.

Al concluir el recurso audiovisual “Tutorial para calcular el producto de fracciones”, se destaca que dentro del Drive asociado a las cuentas de Gmail, se dispone de una aplicación gratuita que funciona como hoja de cálculo y que puede utilizarse en línea, dada la consideración de Excel como una marca registrada. En el marco de la investigación en curso, se examinó no solo Excel, sino también las hojas de cálculo de GeoGebra y Google Sheets en relación con la multiplicación de fracciones. Se identificó que el empleo de diferentes hojas de cálculo ofrece variadas oportunidades reflexivas, ya que cada una representa y opera las fracciones de manera particular.

El componente de Modelos de Competencia Formal ha servido, entre otras cosas, como una herramienta para caracterizar el componente de Modelos de Enseñanza de Telesecundaria sobre la multiplicación y división de fracciones. Conocer el Modelo de Enseñanza ha permitido formular la hipótesis de la investigación, así como el diseño de la secuencia de actividades. La validación de la secuencia ha implicado el desarrollo de un taller en el que los usuarios de Excel piensen en un proceso de decodificación de su funcionamiento como calculadora configurable; esto ha dado información respecto a su uso como herramienta cognitiva en el sentido de Arcavi (2020) y se relaciona con el Componente de Modelos de Comunicación.

Finalmente, el estudio exploratorio ha informado sobre las competencias de los usuarios de acuerdo con Puig (2008), es decir, ha proporcionado un catálogo de las actuaciones de los participantes que, a su vez, ha permitido identificar las nociones, contenidos y estrategias que emergen al desarrollar las actividades propuestas, lo cual forma parte del Componente de los Procesos Cognitivos.

Los resultados del estudio exploratorio nos permiten concluir que la hipótesis global de la investigación es plausible: el Modelo de Enseñanza

para la multiplicación y división de las fracciones de Telesecundaria es un ambiente potencial para que los profesores enriquezcan sus conocimientos acerca de esos conceptos, su enseñanza y la integración de tecnología digital en su práctica docente. Se trata de una hipótesis que tuvo origen una vez que se construyó el componente Modelos de Enseñanza del MTL, y que en virtud del estudio exploratorio se refuerza. Con la salvedad de que los elementos de reflexión y discusión que se han incorporado al análisis de Excel, en este caso, así como la ampliación del contenido hacia el concepto división de fracciones, parecen ser relevantes en términos de la producción de sentido que menciona Puig (2008), que consiste en la descodificación de los mensajes emitidos por Excel, y los otros recursos digitales mencionados que tratan sobre varios conceptos vinculados con las fracciones.

REFERENCIAS

- Angel, A., Figueras, O. & Valenzuela, C. (2022). Una herramienta para analizar recursos educativos de Telesecundaria: el caso de la división de fracciones. En T. F. Blanco, C. Nuñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 139–147). SEIEM. <https://bit.ly/3KKfMfu>
- Arcavi, A. (2020). From tools to resources in the professional development of mathematics teachers: General perspectives and crosscutting issues. En O. Chapman & S. Llinares (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (Volume 2, pp. 421–437). Brill. https://doi.org/10.1163/9789004418967_016
- Ball, D. L. (1990). The mathematical understanding that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, 90(4), 449–466. <https://doi.org/10.1086/461626>
- Calixto, R., & Rebollar, A. M. (2008). La telesecundaria ante la sociedad del conocimiento. *Revista Iberoamericana de Educación*, 44(7), 1–11. <https://doi.org/10.35362/rie4472187>
- Drier, H. S. (2001). Teaching and learning mathematics with interactive spreadsheets. *School science and mathematics*, 101(4), 170–179. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2001.tb18020.x>
- Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Fuglestad, A. B. (2008). Developing tasks and teaching with ICT in mathematics in an inquiry community. En Pitta-Pantazi, D. & Philippou, G. (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1409–1418). CERME. <https://bit.ly/3QLUXnV>
- Hegedus, S. J., & Moreno-Armella, L. (2009). Introduction: The transformative nature of “dynamic” educational technology. *ZDM*, 41(4), 397–398. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0201-9>

- Lamon, S. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Routledge.
- Pepin, B., Guedet, G. & Trouche, L. (2013). Re-sourcing teachers' work and interactions: a collective perspective on resources, their use and transformation. *ZDM*, 45, 929–943. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-05342>
- Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 2(3), 87–107. <https://doi.org/10.30827/pna.v2i3.6199>
- Rezat, S. (2012). Interactions of teachers' and students' use of Mathematics textbooks. En G. Guedet, B. Pepin & L. Trouche (Eds.), *From text to 'lived' resources: mathematics curriculum materials and teacher development*, *Mathematics Teacher Education* (Vol. 7, pp. 231–446). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-1966-8>
- Secretaría de Educación Pública. (2010). *La telesecundaria en México: un breve recorrido histórico por sus datos y relatos*. SEP. <https://bit.ly/45fRIJJ>
- Secretaría de Educación Pública. (2019a). *Libro para el maestro. Matemáticas. Primer grado. Telesecundaria* (2.ª ed.). SEP. <https://bit.ly/3Oz65la>
- Secretaría de Educación Pública. (2019b). *Matemáticas. Telesecundaria. Primer grado* (2.ª ed.). Secretaría de Educación Pública. <https://bit.ly/45CjzDV>
- Secretaría de Educación Pública. (2000). *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo. Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología*. SEP.
- Secretaría de Educación Pública. (2021). *Principales cifras del sistema educativo nacional 2020–2021*. SEP. <https://bit.ly/44ogvu8>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2017). Hard Lessons: Why Rational Number Arithmetic Is So Difficult for So Many People. *Current Directions in Psychological Science*, 26(4), 346–351. <https://doi.org/10.1177/0963721417700129>
- Tirosh, D. (2000). Prospective Teachers' Knowledge of Children's Conceptions: The Case of Division of Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 5–25. <https://doi.org/10.2307/749817>
- Whitehead, A. N., & Walkowiak, T. A. (2017). Preservice Elementary Teachers' Understanding of Operations for Fraction Multiplication and Division. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 18(3), 293–317. <https://doi.org/10.4256/ijmtl.v18i3>

Experiencia de enseñanza para fomentar el razonamiento inferencial informal de estudiantes de secundaria

Juan Carlos Huerta Orozco¹ y Ana Luisa Gómez Blancarte²

RESUMEN

El objetivo de este artículo es mostrar cómo estudiantes de secundaria pueden desarrollar elementos de un razonamiento inferencial informal en una experiencia de enseñanza con el apoyo de la tecnología. Se describe el diseño e implementación de una secuencia didáctica, desarrollada bajo la heurística de crecer la muestra, a fin de que los estudiantes construyeran argumentos para responder a la pregunta: *¿Quiénes tienen más riesgo de morir por COVID-19 en México, hombres o mujeres?* Los resultados ilustran los modelos de argumentación de los estudiantes y ofrecen un entendimiento de los elementos del razonamiento inferencial informal que surgieron. Se concluye el potencial de la experiencia de enseñanza para fomentar en los estudiantes la articulación de argumentos basados en generalizaciones, evidencias que integran un conocimiento estadístico y del contexto, uso de expresiones de incertidumbre y la aparición de principios generales como consecuencia de la heurística de crecer la muestra.

PALABRAS CLAVE

Razonamiento inferencial informal, Inferencia estadística, Educación secundaria, Heurística de crecer la muestra, Software Fathom.

¹ juan.huerta.oro@chih.nuevaescuela.mx
Escuela Secundaria Técnica #19
<https://orcid.org/0009-0004-7317-1510>

² algomez@ipn.mx
Instituto Politécnico Nacional
<https://orcid.org/0000-0002-8837-8643>

ANTECEDENTES

La inferencia estadística provee de herramientas tanto para generar argumentos válidos como para generalizar un aspecto de una población a partir del análisis de una muestra tomada de esta (Zieffler et al., 2008). La investigación en educación estadística ha mostrado que el estudio de la inferencia estadística es difícil para los alumnos, pues demanda conocimientos de diferentes conceptos estadísticos y de una lógica probabilística (Makar & Rubin, 2018). Por ello, enseñar un enfoque informal de inferencia estadística ha sido sugerido como una estrategia para apoyar a los alumnos de educación básica a construir bases de un entendimiento de ideas formales de inferencia estadística (Tobías-Lara & Gómez-Blancarte, 2019). Dicho enfoque informal implica enseñar conceptos de inferencia desde una “versión simplificada” para que los estudiantes puedan comprenderlos (Makar, 2013), así como centrarse en fomentar un razonamiento inferencial informal (RII).

Promover un RII desde edades tempranas favorece en los estudiantes la posibilidad de debatir empleando términos estadísticos (centro, variación y distribución) a un nivel apropiado para su edad, y de usar los datos como evidencia para generar conclusiones con cierto nivel de incertidumbre (Makar, 2013). De acuerdo con Ben-Zvi et al. (2012), “prestar atención a las articulaciones emergentes de incertidumbre de los alumnos al emitir juicios sobre patrones y tendencias en los datos puede brindar la oportunidad de desarrollar comprensiones más sofisticadas de la inferencia estadística” (p. 913).

Las tareas que pueden contribuir al desarrollo del RII involucran: (1) estimar o dibujar la gráfica de una población a partir de los datos de una muestra, (2) comparar dos muestras de datos para inferir si hay una diferencia real entre sus poblaciones y (3) juzgar cuál de dos modelos o argumentos es más probable que sea verdad (Zieffler et al., 2008). Estos tipos de tareas buscan que el alumno presente inferencias hacia una población a partir de los datos de una muestra y priorizan la presentación de argumentos para soportar las inferencias expuestas. Se pueden desarrollar dentro de actividades que plantean preguntas de investigación sobre temas diversos a fin de que los estudiantes las respondan mediante un ciclo de investigación (e.g., Makar, 2013; Pfannkuch, 2011). Es necesario tomar en cuenta factores importantes que impactan en el desarrollo del RII, como son el contexto de los datos –conocimiento del contexto del problema–, el contexto de la experiencia de aprendizaje –los antecedentes del estudiante sobre la tarea y el ambiente físico y social en que se trabaja– (Pfannkuch, 2011), y la estructura de la pregunta de investigación (Makar, 2013).

Además de las tareas y actividades, la tecnología es otro factor importante para fomentar un RII. Los programas de cómputo Tinkerplots y Fathom son dos herramientas tecnológicas destacadas en la educación estadística

que apoyan ese razonamiento. Según Henriques y Oliveira (2016), la construcción de gráficos en Tinkerplots coadyuvó a que los alumnos de educación secundaria “generalizaran a partir de las características observadas usando los datos como evidencia en lugar de basar sus inferencias en su experiencia personal” (p. 76). Por su parte, Hernández Trevethan (2018) señala que el uso combinado de ambos programas (Tinkerplots y Fathom) apoyó el entendimiento y aplicación, por parte de estudiantes de bachillerato, de temas de inferencia estadística (e.g., pruebas de ANOVA e independencia) desde un enfoque informal. No obstante, cabe aclarar que el uso de la tecnología por sí misma no garantiza un entendimiento y razonamiento de conceptos abstractos de estadística (Kula & Koçer, 2020). En este sentido, es importante considerar que los recursos tecnológicos en la enseñanza y aprendizaje de la inferencia estadística deben usarse para promover un entendimiento de los conceptos estadísticos y no del uso mismo del software.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Dada la dificultad para entender nociones de inferencia estadística por parte de estudiantes de niveles superiores, diversos investigadores han atendido la sugerencia de promover un RII en estudiantes de educación preuniversitaria (e.g., Ben-Zvi et al., 2012; Henriques & Oliveira, 2016; Makar, 2013; Pfannkuch, 2011; Zieffler et al., 2008). En México, este tipo de investigaciones también son necesarias, pues los estudiantes de Educación Superior (ES), incluso los de Educación Media Superior (EMS), presentan dificultades en temas de inferencia estadística como lo son las pruebas de hipótesis (e.g., Silvestre Castro & Urrea Bernal, 2021). Además, el enfoque de enseñanza de la estadística que suelen fomentar tanto los programas de estudio como los profesores que la imparten, con pocas excepciones, no favorece un razonamiento inferencial estadístico.

El estudio de la inferencia estadística tiene lugar en la mayoría de los cursos de estadística que se ofertan en la ES y en pocas asignaturas de Probabilidad y Estadística de la EMS. De acuerdo con Gómez Blancarte et al. (2022), de ocho programas de estudio de dicha asignatura que se usan en instituciones públicas representativas de la EMS del país, solo dos de ellos fomentan algunos elementos del razonamiento inferencial, y uno de los dos programas oferta la asignatura de manera optativa. En consecuencia, es muy posible que la mayoría de los estudiantes de EMS tengan dificultades en temas de inferencia estadística cuando ingresan a la ES.

Los estudios de Cruz López y Ojeda Ramírez (2021) y Pinto Sosa (2020) dan cuenta de que los programas de estudio de la ES para la enseñanza de la estadística suelen enfatizar los procedimientos estadísticos y cálculos matemáticos (e.g., realizar gráficos y cálculos de medidas descriptivas). Cruz López y Ojeda Ramírez analizaron 410 programas de cursos de esta-

dística de diversas instituciones mexicanas de ES. Los autores reportan una omisión considerable de aspectos importantes para resolver problemas mediante la investigación estadística (e.g., formular preguntas de investigación, plantear preguntas acerca de las generalizaciones hechas a una muestra, discutir resultados basados en datos) y una carencia en la promoción de habilidades necesarias para transmitir resultados y construir argumentos basados en datos. Tanto el proceso de investigación estadística como las habilidades de argumentación son claves para desarrollar un razonamiento inferencial.

Por su parte, Rivera Pérez y Gómez Blancarte (2022), en su estudio, señalan que los profesores de ES parecen enfocar su enseñanza en la aplicación de métodos estadísticos para resolver problemas, pero se centran más en el análisis de datos sin tomar en cuenta el planteamiento de preguntas de investigación ni la interpretación de los resultados estadísticos para emitir conclusiones. En este sentido, lo que hacen los profesores participantes en dicho estudio coincide con las propuestas curriculares de los programas analizados por Cruz López y Ojeda Ramírez (2021). Además, el estudio de Sepúlveda Vega y Sánchez Sánchez (2022) muestra que algunos profesores de EMS desconocen el enfoque informal de inferencia estadística para resolver problemas de significación estadística y para interpretar el razonamiento que subyace en la solución, por parte de sus estudiantes, a problemas similares.

Desarrollar un RII es uno de los enfoques que se sugieren para apoyar el entendimiento formal de nociones de inferencia estadística. Así pues, son necesarios estudios que ofrezcan al profesor estrategias para promover el RII de sus estudiantes. Derivado de una investigación más amplia (ver Huerta Orozco, 2021), el presente estudio reporta una experiencia de enseñanza, basada en la heurística de “crecer la muestra” (Ben-Zvi et al., 2018) y en el uso de la tecnología, para fomentar el RII en estudiantes desde nivel secundaria. El objetivo es analizar los argumentos de los estudiantes cuando resuelven una situación inferencial, a fin de responder a la pregunta: ¿Qué elementos del RII desarrollan estudiantes de secundaria cuando resuelven una situación inferencial con apoyo de la tecnología?

MARCO TEÓRICO

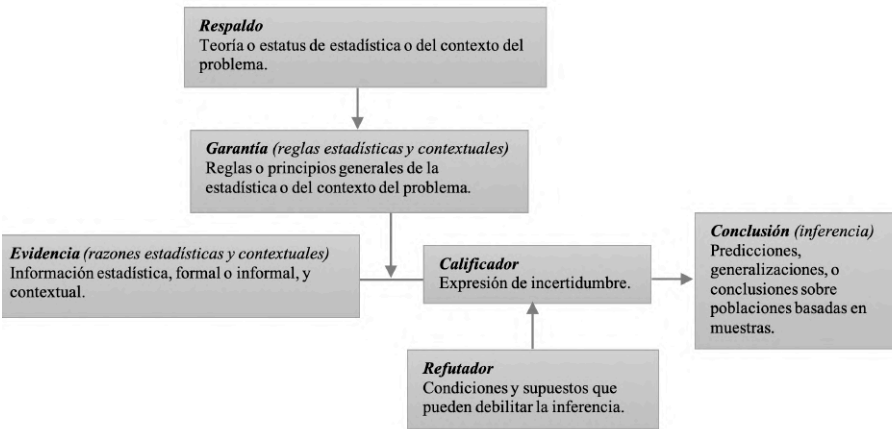
De acuerdo con Makar y Rubin (2018), el RII se caracteriza por: (1) presentar una generalización, predicción o estimaciones de parámetros y conclusiones, que van más allá de describir los datos, (2) usar lenguaje probabilístico al desarrollar la generalización, que incluye una referencia informal de la incertidumbre de las conclusiones obtenidas, (3) utilizar los datos como evidencia de las generalizaciones, (4) centrarse en la cualidad de conjunto de una distribución, y (5) integrar un conocimiento del contexto.

Por su parte, Zieffler et al. (2008) consideran que el desarrollo de un RII integra argumentos fundados en evidencia para hacer juicios, afirmaciones o predicciones de una población según sus muestras.

Por un lado, el RII demanda un conocimiento informal de temas estadísticos aprendidos en la escuela y de experiencias fuera de ella, así como de un razonamiento limitado a la experiencia de los estudiantes (Zieffler et al., 2008). Por otro, requiere de un conocimiento del contexto del problema y de los datos que serán analizados para realizar la inferencia, lo que Pfannkuch (2011) denomina “contexto de los datos”.

Para analizar el razonamiento inferencial estadístico (RIE), Gómez-Blancarte y Tobías-Lara (2018; 2023), con base en el modelo de argumentación de Toulmin et al. (1984), proponen el modelo de argumentación del RIE (ver Figura 1). El tipo de argumentos que el RIE demanda se clasifican en “argumentos por generalización”, los cuales implican afirmaciones basadas en la examinación de características de una “muestra suficientemente amplia y representativa” de una población (Toulmin et al., 1984, p. 219).

Figura 1
Modelo de argumentación del RIE



Nota: Tomado de Gómez Blancarte y Tobías Lara (2023).

El modelo de argumentación del RIE se explica en términos de los seis elementos de un argumento: *conclusión*, *evidencia*, *garantía*, *respaldo*, *calificador* y *refutador*. A continuación, basados en la propuesta de Gómez-Blancarte y Tobías-Lara (2023), se describen cada uno de estos elementos.

Conclusión. Enunciado que se presenta para su aceptación en general. Este elemento es semejante a la primera característica del RII: presentar o

emitir generalizaciones, predicciones, estimaciones de parámetros, conclusiones o juicios, que van más allá de describir los datos (Makar & Rubin, 2018).

Evidencia. Declaraciones que especifican determinados hechos que actúan como evidencia para apoyar la conclusión. En el RIE, la evidencia se basa en un análisis estadístico de los datos o en otra información del contexto. En este sentido corresponde con la tercera característica del RII: utilizar los datos como evidencia de las generalizaciones (Makar & Rubin, 2018).

Tanto el conocimiento estadístico como el del contexto juegan un papel primordial en la generación de razones sobre las cuales se apoya una inferencia. Por un lado, el conocimiento estadístico da lugar a las razones estadísticas, las cuales se desprenden del análisis estadístico de los datos; las razones contextuales provienen del contexto del problema o situación de la cual se derivan los datos que son analizados para realizar la inferencia. El conocimiento del contexto juega un papel fundamental porque sirve para interpretar y darle sentido a los datos.

Garantía. Son reglas o principios generales necesarios para demostrar que el paso de la evidencia a la afirmación es legítimo; pueden ser principios y estatutos legales, reglas empíricas, formulas o generalizaciones comunes basadas en intuiciones o experiencias. En el RIE, las garantías pueden ser normas o reglas procedentes de la estadística (reglas estadísticas) o del contexto del problema en el que se produce la inferencia (reglas contextuales). Dado que la garantía respalda el paso de la evidencia a la conclusión, su función es validar la conexión entre los datos y la conclusión.

Respaldo. Al igual que la garantía apoya a la evidencia, el respaldo apoya a la garantía. Se trata de un cuerpo de conocimiento aceptado en determinada ciencia, o de estatutos generales que actúan como argumentos autorizados donde descansan las garantías. La propuesta para el RIE es que ese cuerpo de conocimiento o estatuto general pueden provenir de la disciplina estadística o del contexto del problema. Además, el respaldo apoya a conclusiones que pueden ser conflictivas porque existen diferentes caminos de razonamiento para llegar a ellas, no por la verdad o falsedad de la evidencia.

Calificador y Refutador. Estos elementos determinan la fuerza de un argumento. El calificador se refiere al “grado y el tipo de certeza que acompaña a las diferentes conclusiones” (Toulmin et al., 1984, p. 82), se expresa con adverbios modales como: “ciertamente”, “presumiblemente”, “muy probablemente”, “muy posiblemente” (Toulmin et al., 1984, p. 86). En inferencia estadística, las conclusiones son por naturaleza inciertas, pues están basadas en un examen de la muestra de la población hacia la cual se infiere. En este sentido, este elemento se corresponde con la segunda característica

del RII: el uso del lenguaje probabilístico al desarrollar la generalización, que incluye una referencia informal de la incertidumbre de las conclusiones obtenidas (Makar & Rubin, 2018). Por su parte, el refutador actúa como las condiciones o circunstancias extraordinarias o excepcionales que podrían debilitar los argumentos de apoyo a la conclusión. En otras palabras, la conclusión está garantizada sólo en ausencia de esas condiciones.

METODOLOGÍA

El estudio se enmarcó en la metodología de *experimento de enseñanza*, la cual se compone de episodios de enseñanza cuyo propósito es explorar el aprendizaje de conceptos matemáticos y el razonamiento de los estudiantes (Steffe & Thomson, 2000). Cada episodio cuenta con un agente de enseñanza (el docente), uno o más alumnos participantes, un testigo (e.g., el asesor de tesis) y un método de grabación de las sesiones.

Secuencia didáctica

El experimento de enseñanza consistió en el desarrollo de una secuencia didáctica de seis actividades (Tabla 1) que giran en torno a responder las preguntas de investigación estadística: *¿Quiénes tienen más riesgo de morir por COVID-19 en México, hombres o mujeres? ¿A qué crees que se deba ese riesgo?* La primera pregunta cuestiona sobre una diferencia en la proporción de decesos por COVID-19 entre las poblaciones de hombres y mujeres. La segunda cuestiona las razones que pudieron provocar la posible diferencia de decesos. Estas preguntas buscan que el alumno se motive a encontrar una respuesta a través del análisis de datos, como lo sugieren Makar (2013) y Pfannkuch (2011).

Los datos que los estudiantes requerían para realizar el análisis estadístico y así poder responder a las preguntas de investigación, se descargaron de las bases de datos de la página de la Secretaría de Salud (disponibles en el sitio web: <https://datos.covid-19.conacyt.mx/>). Dicha base se preparó a fin de que los estudiantes exploraran únicamente los decesos confirmados (85,252) en el periodo del 28 de febrero al 15 de octubre de 2020. Se mantuvieron las variables de sexo, semana epidemiológica del fallecimiento, edad de la persona y factores de riesgo de cada individuo fallecido. Posteriormente, para estudiar si existía una diferencia entre las proporciones de decesos de ambos géneros, se aplicó un muestreo aleatorio para generar muestras de 25, 50, 100 y 250 casos, respectivamente. Además, para realizar un análisis del factor de riesgo responsable de la diferencia en las proporciones de decesos entre ambos géneros, se realizó otro muestreo aleatorio estratificado a la base de datos de decesos para conseguir una muestra de 500 casos, 250 hombres y 250 mujeres.

Tabla 1

Actividades de la secuencia didáctica

Actividades	Propósito
Actividad 1	
Tarea 1. Conocimiento acerca de COVID-19: a. ¿Qué es el COVID-19? b. ¿Cuáles son los diagnósticos para saber si se tiene COVID-19? c. ¿En qué consiste una prueba SARS-COV-2 (en adelante Prueba)? d. ¿Cuáles son los factores de riesgo para que una persona muera al contraer COVID-19?	Generar un conocimiento del contexto del problema.
Tarea 2. Información sobre la cantidad de decesos por COVID-19, en el periodo del 28 de febrero al 15 de octubre de 2020, y sobre la diferencia en la mortalidad por COVID-19 entre hombres y mujeres que reportan algunos estudios de investigación. Se plantean las preguntas de investigación: <i>¿Quiénes tienen más riesgo de morir por COVID-19 en México, los hombres o las mujeres? ¿A qué crees que se deba ese riesgo?</i>	Presentar las preguntas de investigación para motivar la realización de la investigación estadística y conocer las respuestas de los alumnos, previo a la exploración de datos.
Tarea 3. Inicio de la heurística “crecer la muestra”. Se entrega a los estudiantes la base de 25 datos ($n = 25$) para que en Fathom construyan una gráfica de puntos y obtengan el porcentaje de decesos de hombres y mujeres.	Analizar las gráficas y porcentajes a fin de responder quienes murieron más, hombres o mujeres, y justificar la respuesta.
Tarea 4. Dibujar, a lápiz y papel, la gráfica de puntos que, según el estudiante, debería formarse con $n = 50$.	Explicar la gráfica de puntos dibujada y compararla, durante la Actividad 2, con la construida en Fathom.
Actividad 2	
Tarea 1. Se entrega a los estudiantes la base de 50 datos ($n = 50$) para que en Fathom construyan una gráfica de puntos y obtengan el porcentaje de decesos de hombres y mujeres.	Analizar las gráficas y porcentajes a fin de responder quienes murieron más, hombres o mujeres, y justificar la respuesta.
Tarea 2. Comparación de la gráfica de predicción (para $n = 50$), realizada en la Actividad 1, con la gráfica construida en la tarea anterior.	Promover la observación de similitudes y diferencias entre la gráfica de predicción (dibujada por el estudiante) y la gráfica con los datos reales (construida en Fathom).
Tarea 3. Dibujar, a lápiz y papel, la gráfica de puntos que, según el estudiante, debería formarse con $n = 100$.	Explicar la gráfica de puntos dibujada y compararla, durante la Actividad 3, con la construida en Fathom.

Actividad 3

Tarea 1. Se entrega a los estudiantes la base de 100 datos ($n = 100$) para que en Fathom construyan una gráfica de puntos y obtengan el porcentaje de decesos de hombres y mujeres.

Analizar las gráficas y porcentajes a fin de responder quienes murieron más, hombres o mujeres, y justificar la respuesta.

Tarea 2. Comparación de la gráfica de predicción (para $n = 100$), realizada en la Actividad 2, con la gráfica construida en la tarea anterior.

Promover la observación de similitudes y diferencias entre la gráfica de predicción (dibujada por el estudiante) y la gráfica con los datos reales (construida en Fathom).

Tarea 3. Dibujar, a lápiz y papel, la gráfica de puntos que, según el estudiante, debería formarse con $n = 250$.

Explicar la gráfica de puntos dibujada y compararla, durante la Actividad 4, con la construida en Fathom.

Actividad 4

Tarea 1. Se entrega a los estudiantes la base de 250 datos ($n = 250$) para que en Fathom construyan una gráfica de puntos y obtengan el porcentaje de decesos de hombres y mujeres.

Analizar las gráficas y porcentajes a fin de responder quienes murieron más, hombres o mujeres, y justificar la respuesta.

Tarea 2. Comparación de la gráfica de predicción (para $n = 250$), realizada en la Actividad 3, con la gráfica construida en la tarea anterior.

Promover la observación de similitudes y diferencias entre la gráfica de predicción (dibujada por el estudiante) y la gráfica con los datos reales (construida en Fathom).

Tarea 3. Fin de la heurística “crecer la muestra”. Dibujar la gráfica que debería formarse con la totalidad de la población ($N = 85,252$), según lo observado en las gráficas previas.

Estimar y explicar la distribución de decesos en la población.

Actividad 5

Tarea 1. Se entrega a los estudiantes una base de 500 datos ($n = 500$), 250 hombres y 250 mujeres fallecidas, de factores de riesgo (enfermedad cardiovascular, pulmonar, tabaquismo, obesidad e inmunosupresión) y edad.

- Construcción de gráficas por edad y sexo.
- Construcción de gráficas por cada factor de riesgo y sexo.
- Obtención del porcentaje de decesos de hombres y mujeres para cada factor de riesgo.

Analizar las gráficas y porcentajes para considerar si alguna de las enfermedades o la edad pueden ser un factor de riesgo que determine una posible diferencia entre las poblaciones de donde se desprenden dichas muestras.

Actividad 6

Tarea 1. Cierre de la secuencia didáctica. De acuerdo con las actividades previas, los estudiantes respondieron las siguientes preguntas:

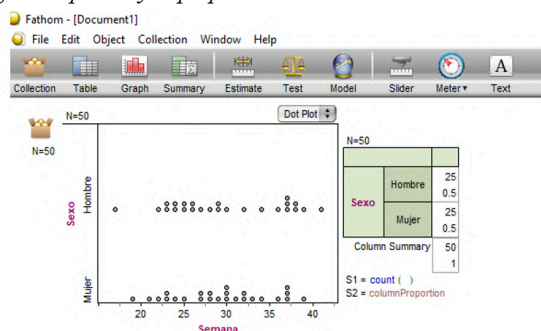
- A qué conclusión llegas sobre quiénes tienen más riesgo de morir por COVID-19 en México, ¿los hombres o las mujeres?
- ¿Cómo llegaste a esa conclusión? ¿Cuáles son tus evidencias?
- ¿Es confiable tu conclusión? ¿Por qué?
- ¿Cuáles son las condiciones para considerar que tu conclusión se cumple?

Explicitar los elementos del modelo de argumentación, de acuerdo con las actividades previamente realizadas.

Las primeras cuatro actividades de la secuencia didáctica estuvieron basadas en la heurística de “crecer la muestra” (Ben-Zvi et al., 2018). Dicha heurística consiste en presentar una gráfica de una muestra de datos tomada de la población en estudio para, posteriormente, realizar una inferencia respecto a cómo sería la gráfica de una muestra de mayor tamaño. Después, los alumnos realizan una comparación entre su inferencia y una gráfica de las muestras con mayor tamaño. Esta idea permite un ciclo de inferencias en las que se presenta una gráfica, se realiza una predicción y se hace una comparación que se puede repetir múltiples ocasiones con muestras cada vez mayores. Durante la aplicación de la Actividad 1, los alumnos construyeron en el programa Fathom (<https://fathom.concord.org>) una primera gráfica de puntos (Figura 2) para una muestra de tamaño 25. Los puntos de la gráfica representan los casos de decesos por género y por semana epidemiológica. Además, se determinó la proporción de decesos de cada género según la muestra graficada. Posteriormente, se solicitó al alumno dibujar en papel la forma que tomaría la gráfica al agregar mayor cantidad de datos (crecer la muestra). El ciclo de inferencias continuó al entregar una muestra con mayor cantidad de datos para ser analizados a través del programa Fathom, tal y como se describió en la Tabla 1.

Figura 2

Ejemplo de la gráfica de puntos y la proporción de decesos construida en Fathom



La actividad 5 gira en torno al estudio de una muestra de $n = 500$, con 250 hombres y 250 mujeres. Los alumnos, con apoyo del mismo programa, construyeron las gráficas de comparación por sexo para explorar el factor de riesgo, enfermedades (Figura 3) y edad (Figura 4) que podía generar la diferencia entre las proporciones de decesos de ambos géneros.

Figura 3
Ejemplo de algunas de las gráficas de enfermedades construidas en Fathom

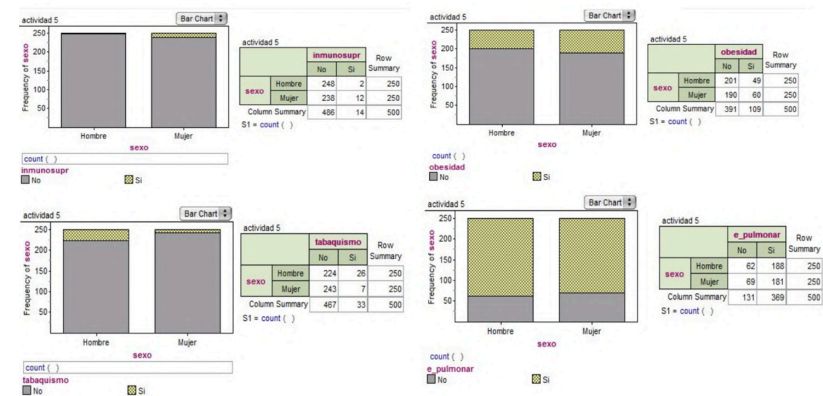
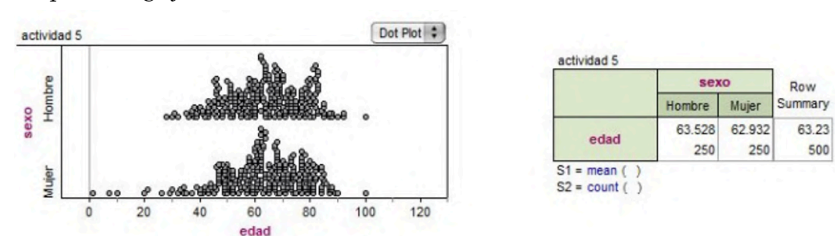


Figura 4
Ejemplo de las gráficas de edad construidas en Fathom



Finalmente, la actividad 6 consistió en un debate guiado para fomentar la aparición de los elementos del modelo de argumentación del RIE, al proveer un espacio de discusión y puesta en común de lo observado a lo largo de las actividades realizadas.

Implementación de la secuencia didáctica

El experimento de enseñanza se desarrolló en un contexto educativo en el que participaron estudiantes de tercer grado de educación secundaria de la Escuela Secundaria Técnica #19, ubicada en el municipio de Ignacio Zaragoza, una zona semi rural del estado de Chihuahua. El docente (Autor 1) invitó a sus alumnos a que, de manera voluntaria, participaran en el experimento de enseñanza. Además, informó a los padres para contar con su aprobación y apoyo durante la aplicación de la secuencia didáctica. Debido

al contexto de la zona donde se ubica el plantel y a la situación de la pandemia que obligó a tener clases en línea, solo participaron cuatro alumnos que contaban con equipo de cómputo y acceso a internet. Se usaron seudónimos para identificar a los participantes: Arturo, Estrella, Sol y Lucero. Según el promedio de calificaciones, uno de ellos se consideró de aprovechamiento alto, dos de aprovechamiento medio y uno de aprovechamiento bajo.

Se llevaron a cabo cinco sesiones de enseñanza a través de la plataforma *Meet*, las cuales duraron entre 45 y 70 minutos cada una. Antes de iniciar el desarrollo de las actividades, el docente solicitó a los alumnos realizar la instalación (versión de prueba) del programa Fathom en cada uno de sus equipos de cómputo. Al inicio de las primeras cuatro actividades, el docente enseñó a los alumnos a usar las herramientas básicas necesarias de Fathom para que pudieran llevar a cabo las tareas de las actividades de manera autónoma. Los alumnos lograron comprender cómo utilizar el programa, por lo que las dudas respecto a su uso fueron disminuyendo conforme se progresó en las tareas de la secuencia didáctica. Así, durante las primeras cuatro actividades, el docente realizó 1) una breve discusión de aprendizajes previos sobre el tema o lo que se observó en las sesiones anteriores, 2) una explicación del uso del programa Fathom. Posteriormente, los alumnos 3) realizaron las tareas de las actividades y, al finalizar, 4) expusieron y justificaron sus respuestas a cada una de las tareas de la actividad.

Para el desarrollo de la actividad 5, los alumnos ya contaban con experiencia manejando el programa. Sin embargo, debido a la necesidad de crear gráficas diferentes a las realizadas en las actividades previas, el docente explicó el proceso para generar una gráfica de comparación y encontrar los valores de las proporciones de decesos por cada uno de los factores de riesgo. Posteriormente, los alumnos construyeron de manera independiente sus propias gráficas. En caso de duda, el docente guiaba verbalmente las acciones a realizar en el programa para que los estudiantes prosiguieran con el manejo autónomo del programa. Para finalizar la aplicación de la secuencia, durante la actividad 6, únicamente se discutieron las respuestas a las preguntas correspondientes.

Recolección y análisis de datos

Los datos recolectados provienen de la transcripción de los videos de las sesiones de clase, las respuestas escritas a cada actividad y de mensajes de *WhatsApp* que los alumnos escribían al profesor. Con estos datos se realizó un análisis de contenido para distinguir las respuestas de los alumnos a las preguntas de investigación en cada una de las actividades que conformaron la secuencia didáctica. Dicho análisis se refiere a desarrollar una categorización de los datos para proveer de estructura al texto y llevar a cabo un

proceso sistemático de interpretación (Kuckartz, 2019). En este caso, se realizó una categorización de las respuestas de acuerdo con los elementos del modelo de argumentación del RIE, se utilizaron los códigos C, E, G, B, Q y R. La C corresponde a la conclusión a la pregunta de investigación (*¿Quiénes tienen más riesgo de morir por COVID-19 en México, hombres o mujeres?*); la E hace referencia a las razones estadísticas, razones o explicaciones contextuales que respaldaban a la conclusión y que estaban motivadas por la justificación que dieron a la respuesta de la pregunta de investigación. Se utilizó Q para identificar las expresiones de incertidumbre o certeza expuestas por los alumnos. G, B y R representaron a la garantía, el respaldo y el refutador, respectivamente. Dado que el análisis se hizo por cada una de las actividades, se utilizaron subíndices numéricos en cada código para enumerar los elementos presentados a lo largo de la secuencia didáctica. Por ejemplo, C₁ representa la conclusión presentada en la Actividad 1, E₄ representa a la evidencia número 4, pero no necesariamente hace referencia a la Actividad 4, pues el alumno podía proporcionar más de una evidencia para una sola conclusión. Finalmente, se construyó el modelo de argumentación de cada alumno por actividad.

RESULTADOS

Por razones de espacio, en esta sección se expone el RII de Arturo. Se eligió a este participante porque, a diferencia de sus compañeras, proporcionó un mayor número de evidencias para apoyar sus conclusiones. Esto nos permitió ejemplificar con mayor detalle la integración de razones estadísticas y razones contextuales, así como exponer el tipo de explicaciones contextuales usadas para la interpretación de los datos. De hecho, su compañera Lucero también proporcionó evidencias que detallan dicha integración, pero, por razones de conectividad, no desarrolló la Actividad 1. Por su parte, el RII de Sol y Estrella se caracterizó por proporcionar evidencias cuyos argumentos enfatizaban más un tipo de razones: razones estadísticas (Sol) o razones y explicaciones contextuales (Estrella). Es decir, aunque integraban razones estadísticas y contextuales, el soporte principal de su conclusión estaba en uno de esos dos tipos.

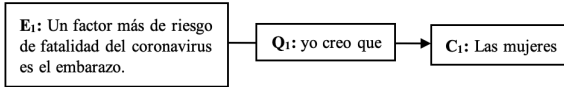
Modelo de argumentación de Arturo previo a la exploración de datos

Durante la Tarea 2 de la Actividad 1, previo a la exploración de los datos, los alumnos respondieron, de acuerdo con su conocimiento del contexto, a las preguntas: *¿Quiénes tienen más riesgo de morir por COVID-19 en México, los hombres o las mujeres? ¿A qué crees que se deba ese riesgo?* Las respuestas de Arturo mostraron tres elementos del modelo de argumentación (Figura 5). Su conclusión (C₁) fue que las mujeres tenían mayor riesgo, utilizó la expresión “yo creo que” (Q₁) para denotar cierta incertidumbre en su con-

clusión. Su principal evidencia (E1) fue una razón contextual, la cual se apoyó en el hecho de que las mujeres tienen un factor de riesgo que no tienen los hombres: el embarazo. En este sentido, para Arturo la población de mujeres tenía más riesgo de fallecer por COVID-19.

Figura 5

Modelo de argumentación de Arturo, previo a la exploración de dato

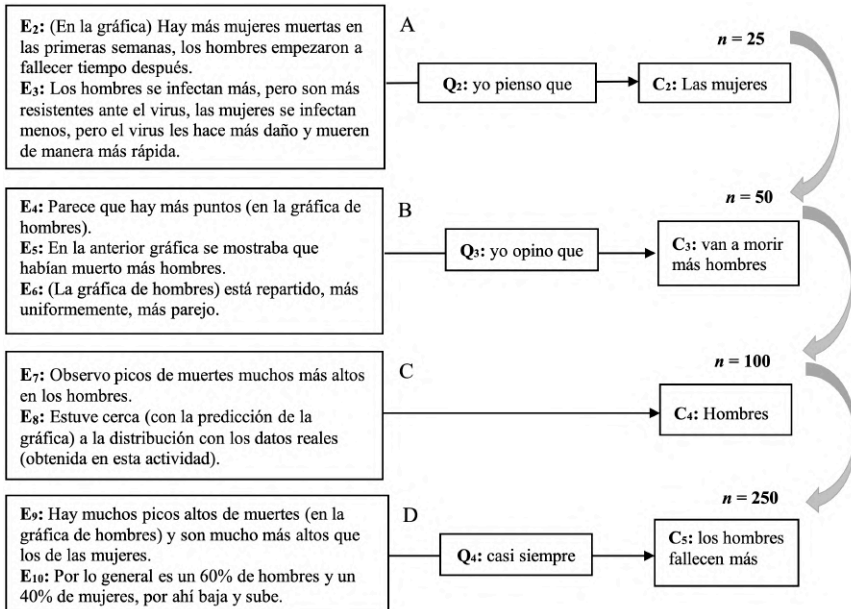


Modelos de argumentación de Arturo durante la “heurística de crecer la muestra”

A partir de la Tarea 3 de la Actividad 1 y hasta la Tarea 3 de la Actividad 4, los alumnos hicieron uso del programa Fathom para analizar los datos. En los argumentos producidos después de la exploración de los datos de la muestra $n = 25$ (Figura 6A), Arturo mantuvo su argumento de que las mujeres tenían mayor riesgo de fallecer por COVID-19 que los hombres (C₂). Conforme fue explorando más datos, su argumento cambió y concluyó que eran los hombres quienes corrían el mayor riesgo (Figuras 6B, 6C, 6D).

Figura 6

Modelos de argumentación de Arturo, durante la “heurística de crecer la muestra”



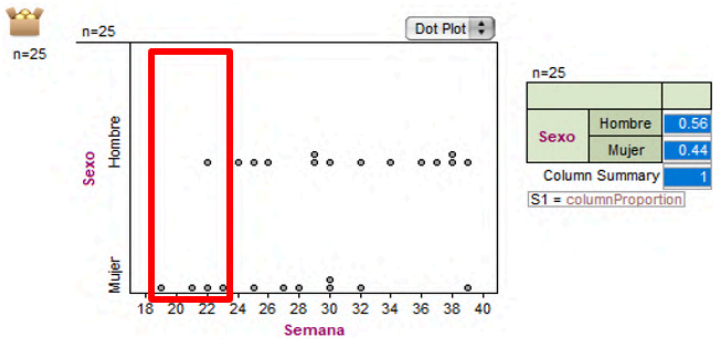
En los cuatro argumentos, derivados de la heurística de crecer la muestra, Arturo utilizó en tres de ellos calificadores modales como “yo pienso que”

(Q₂), “yo opino que” (Q₃) y “casi siempre” (Q₄). El Q₂ manifiesta un nivel de incertidumbre que puede ser atribuido a que él mantuvo su pensamiento de que “el virus les hace más daño” (E₃) a las mujeres, posiblemente por el factor embarazo que ya había expresado en su E₁. En cambio, como se mostrará más adelante, el calificador Q₄ denota un poco más de confianza en su conclusión debido a las observaciones que hizo durante la exploración de los datos.

En la gráfica de la muestra de 25 casos (Figura 7), Arturo comparó los decesos de las primeras semanas y observó que “hay más mujeres muertas en las primeras semanas, los hombres empezaron a fallecer tiempo después” (E₂). En la muestra analizada, la gráfica de mujeres tuvo un par de fallecimientos antes de la aparición del primer fallecimiento de los hombres (Figura 7, barra roja); estos datos fueron información suficiente para que Arturo pensara que las mujeres fallecían más.

Figura 7

Gráfica construida por Arturo para n =25



La E₂ es una razón estadística porque está basada en la exploración de los datos presentados en la gráfica. No obstante, Arturo solo utilizó como evidencia una parte del conjunto de los datos, posiblemente para sostener su pensamiento previo sobre que son las mujeres las de mayor riesgo. Además de la E₂, Arturo explicó que “los hombres se infectan más pero son más resistentes ante el virus” (E₃). Arturo parecía reconocer que la muestra mostraba más fallecimientos de hombres, tal vez observó las proporciones de fallecimientos (0.56 para hombres y 0.44 para mujeres) que también realizó en el programa Fathom (Figura 7, cuadro derecho), pero su idea de que las mujeres tenían mayor riesgo la explicó diciendo que a ellas “el virus les hace más daño y mueren de manera más rápida” (E₃). En este sentido, la explicación contextual (E₃) que utilizó Arturo muestra la manera en que él interpretó los datos a fin de darle sentido a su conclusión (C₂).

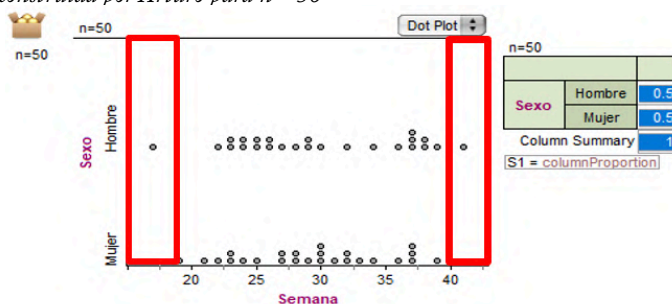
Después del análisis de la muestra de 50 casos, Arturo cambió su argumento de que las mujeres tenían el mayor riesgo y concluyó que eran los

hombres (C_3). La expresión “van a morir más hombres” (Figura 6B) es una predicción que denota una generalización que va más allá de la muestra analizada. Además, su conclusión se apoyó únicamente en razones estadísticas (E_4 , E_5 , E_6). La primera razón (E_4) se basó en la observación de la gráfica construida (Figura 8), pues vio “más puntos” en la gráfica de hombres. Dado que son la misma cantidad de puntos, posiblemente él vio los puntos extremos de la gráfica (Figura 8, rectángulos rojos) y se enfocó en el rango de los datos de la de hombres, lo que lo hizo percibir “más puntos”.

La E_5 (“En la anterior gráfica se mostraba que habían muerto más hombres”) es una razón estadística basada en la actividad previa. El alumno tomó en cuenta que en la gráfica realizada con la muestra de $n = 25$ había mayor proporción de hombres fallecidos. Es decir, esta razón se basa en un resultado previo que Arturo utiliza como un hecho para apoyar una conclusión posterior. En otras palabras, la misma gráfica que el alumno usó para apoyar su C_2 (“Las mujeres”), la usó ahora para apoyar su C_3 (“van a morir más hombres”), la diferencia radica en el tipo de interpretación de los datos que hizo Arturo sobre la misma gráfica. Lo anterior ejemplifica cómo las evidencias estadísticas (una mejor interpretación de las gráficas) empezaron a influir en su razonamiento.

Figura 8

Gráfica construida por Arturo para $n = 50$



A pesar de que la proporción de fallecidos en la muestra de 50 datos fue igual en ambos grupos, Arturo concluyó que eran los hombres según el comportamiento que los datos estaban mostrando desde la gráfica de 25 datos. Además, en la E_6 , Arturo comenzó a tomar en cuenta la forma de la distribución de los datos, utilizó las palabras “repartido”, “uniformemente” y “parejo” para referirse de manera informal a la distribución de los puntos observados. De hecho, su C_4 (Figura 6C) se apoyó en una razón estadística (E_7) que da cuenta de otra observación en la distribución de los datos: se enfocó en la cantidad de puntos apilados en la gráfica de la muestra de hombres, que llamó “picos de muertes”; realizó una comparación entre ellos y observó “picos de muertes mucho más altos en los hombres”. Es decir,

observó la frecuencia de fallecimientos por semana y las comparó en ambas gráficas (en la Figura 9 se utilizaron un par de rectángulos rojos, con las mismas dimensiones, para mostrar la diferencia entre los puntos apilados).

En la E₈ (“Estuve cerca a la distribución con los datos reales”) Arturo utilizó el término “distribución” para referirse a la forma en que dibujó la gráfica de predicción solicitada en la Tarea 3 de la Actividad 2. El alumno consideró que su predicción de la gráfica de datos (Figura 10) coincidió parcialmente con el comportamiento de la gráfica realizada en Fathom (Figura 9). En otras palabras, Arturo ya predecía que serían los hombres quienes presentarían un mayor número de muertes en la siguiente muestra. En este sentido, el análisis de las gráficas estaba modificando y sosteniendo el razonamiento de Arturo.

Figura 9

Gráfica construida por Arturo para n = 100

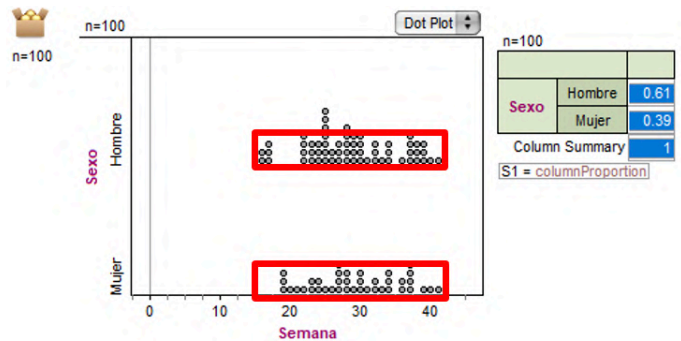
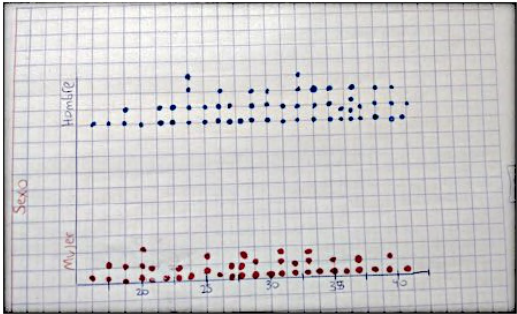


Figura 10

Gráfica de predicción de una muestra con n = 100 realizada por Arturo



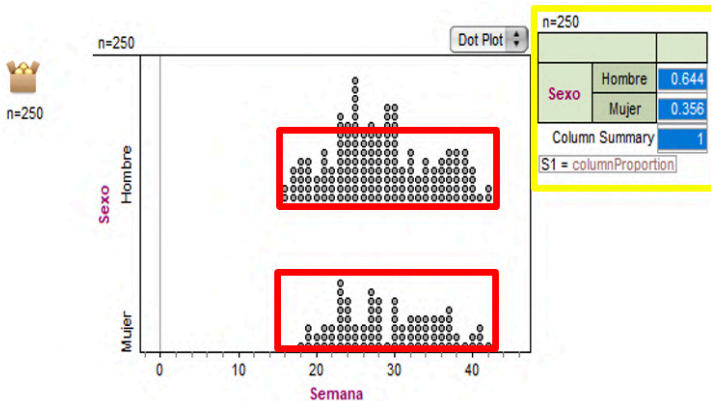
Cabe aclarar que en su C₄ Arturo no manifestó una frase que denotara incertidumbre sobre su conclusión (Figura 6C). En cambio, en su argumento correspondiente al análisis de la muestra de 250 datos (Figura 6D), Arturo utilizó una frase de incertidumbre (Q₄: “casi siempre”), diferente a las previas (Q₂: “yo pienso que”, Q₃: “yo opino que”), la cual denota un poco más de

confianza en su conclusión, debido a los resultados estadísticos que había observado en los análisis previos. Con la muestra de 250 casos, Arturo se apoyó en dos razones estadísticas (E_9 y E_{10}) para concluir que los “hombres fallecen más” (C_5). La E_9 es una interpretación de las características observadas en la gráfica (Figura 11), en la cual Arturo comparó la altura de los puntos, E_9 : “Hay muchos picos altos de muertes y son mucho más altos que los de las mujeres”, similar a lo observado en la E_7 .

La E_{10} (“Por lo general es un 60% de hombres y un 40% de mujeres, por ahí baja y sube”) está basada en los valores de las proporciones observadas (Figura 11, rectángulo amarillo). Sin embargo, es importante notar que Arturo no dio los valores exactos que arrojó el programa; en su lugar, señaló que esos valores estaban alrededor (“por ahí baja y sube”) de 60% de muertes de hombres y 40% para el caso de las mujeres. El hecho de observar que la proporción esperada de muertes para cada población se encuentra alrededor de cierto valor es una característica importante del RII, pues muestra una inferencia de un valor poblacional que fue determinado por la exploración de los datos de las muestras graficadas. Además, toma en cuenta la variabilidad de los datos, lo cual es un aspecto fundamental del razonamiento estadístico.

Figura 11

Gráfica construida por Arturo para $n = 250$



Modelo de argumentación de Arturo sobre los factores de riesgo

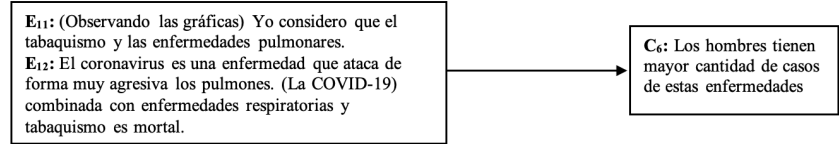
Posterior a realizar el análisis de las gráficas sobre los factores de riesgo, Arturo concluyó que “los hombres tienen mayor cantidad de casos de estas enfermedades” (C_6 , Figura 12), lo que significa que su razonamiento fue más descriptivo, centrado en la muestra explorada, que inferencial.

Las evidencias usadas por Arturo estuvieron formadas por una razón estadística E_{11} y una explicación contextual E_{12} . Sobre E_{11} , surgió directamente de la observación de las gráficas exploradas. El tabaquismo y las

enfermedades pulmonares fueron los únicos dos factores en los que se observó una mayor proporción en los hombres (Figura 13, rectángulo rojo y rectángulo azul) en comparación con las mujeres. En el resto de los factores, fueron las mujeres quienes presentaron mayor proporción.

Figura 12

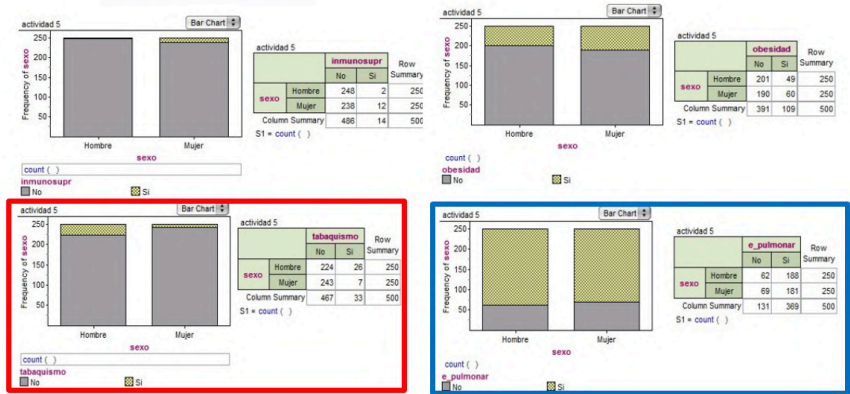
Modelo de argumentación de Arturo sobre los factores de riesgo



Arturo presentó una hipótesis para dar sentido al hecho de que los hombres tenían una mayor proporción en factores de riesgo como tabaquismo y enfermedades pulmonares. Esta hipótesis es una explicación contextual (E₁₂) de la E₁₁, ya que explica que la COVID-19 “ataca de forma muy agresiva a los pulmones” y que “combinada con enfermedades respiratorias y tabaquismo es mortal” (E₁₂). Estas razones contextuales que ofreció Arturo pueden derivarse del conocimiento contextual sobre el virus, expuesto a través de los medios de comunicación.

Figura 13

Gráficas de comparación por factores de riesgo para n = 500



Modelo de argumentación final de Arturo

Durante la Actividad 6, Arturo concluyó que “los hombres son más afectados” (C₇, Figura 14), es decir, los hombres son la población con mayor prevalencia a fallecer por COVID-19. Arturo mostró un nivel de incertidumbre sobre su C₇ al considerar que su conclusión no es confiable, Q₅: “Mi respuesta no es tan confiable, apenas me estoy metiendo a este terreno”. En este sentido, el lenguaje de incertidumbre parece denotar una falta de confianza en los

conocimientos de Arturo respecto a los procedimientos estadísticos implicados en la tarea.

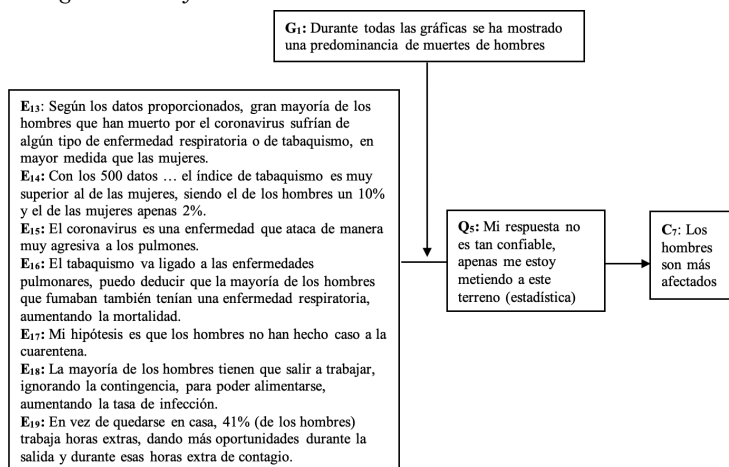
Arturo utilizó diferentes razones ($E_{13} - E_{19}$), tanto estadísticas como contextuales, para sostener su conclusión. Además, logró expresar, por primera vez, una garantía (G_1) en la cual apoyó el paso de las evidencias a la conclusión.

La E_{13} es una razón estadística porque hace referencia al análisis de la muestra de datos (“Según los datos proporcionados ...”) sobre los factores de riesgo causantes de la muerte de hombres (“...gran mayoría de los hombres que han muerto por el coronavirus sufrían de algún tipo de enfermedad respiratoria o de tabaquismo, en mayor medida que las mujeres”).

La evidencia E_{14} es otra razón estadística que complementa a la E_{13} , pues hace referencia al tamaño de la muestra analizada ($n = 500$) y a los valores de las proporciones de las personas fallecidas (10% vs. 2%) que padecían tabaquismo, advirtiendo un mayor valor para el caso de los hombres.

Figura 14

Modelo de argumentación final de Arturo



En la E_{15} se puede apreciar una razón contextual, la cual usó Arturo como una explicación contextual para asociar el tabaquismo con la enfermedad del COVID-19: “El coronavirus es una enfermedad que ataca de manera muy agresiva a los pulmones” (E_{15}). En otras palabras, Arturo usa esta razón para evidenciar que los hombres mueren más por el tabaquismo, factor que afecta en los pulmones al igual que lo hace el virus del COVID-19. De hecho, en su E_{16} conecta el tabaquismo con las enfermedades respiratorias, pues supone que los hombres con tabaquismo tenían una enfermedad respiratoria que los hace tener un mayor riesgo de morir. Luego supone que los hombres no hicieron caso a la cuarentena obligatoria (E_{17}) para reducir

el número de contagios de COVID-19. Al parecer, Arturo contaba con información sobre el porcentaje de hombres que salían a trabajar horas extras (E₁₉). Esta información se convirtió en una razón más para apoyar su hipótesis explicativa (E₁₈) sobre la mayor exposición de contagio por parte de los hombres.

En el argumento de Arturo se puede observar el uso de la garantía G₁: “Durante todas las gráficas se ha mostrado una predominancia de muertes de hombres”. Es importante recalcar que el alumno utilizó los resultados estadísticos de las gráficas realizadas como un hecho general de sus evidencias particulares (E₁₃ y E₁₄) para dar lugar a su conclusión.

CONCLUSIONES

El análisis del RII de Arturo ofrece una visión de la posibilidad de fomentar en el aula ese razonamiento cuando se desarrolla una situación didáctica de inferencia estadística con el uso de una herramienta computacional para el análisis de los datos. El desarrollo de esta secuencia motivó, en mayor o menor medida, el surgimiento de elementos del RII, según el modelo de argumentación del RIE, como se muestra en las principales conclusiones del estudio:

- La heurística de “crecer la muestra” coadyuvó a que las conclusiones de algunos de los alumnos manifestaran una generalización más allá de la muestra. Por ejemplo, la C₃ de Arturo (“van a morir más hombres”) indica un pensamiento más inferencial que determinístico. En este sentido, se coincide con Ben-Zvi et al. (2012) sobre que dicha heurística contribuye a que los alumnos formulen predicciones, mejorando en aspectos de inferencia informal.
- El programa Fathom apoyó la visualización de los datos, lo que permitió que los alumnos se centraran más en el análisis de estos que en la construcción de sus representaciones. En este sentido, la tecnología fue útil para promover el surgimiento de razones estadísticas y fomentar un razonamiento estadístico; en particular, un razonamiento estadístico sobre distribuciones, ya que la interpretación de las gráficas dio lugar para que los alumnos visualizaran y mencionaran, de manera informal (e.g., “uniformemente”, “picos”), características de la distribución de los datos.
- La información del contexto que utilizaron los alumnos comenzó a tomar en cuenta datos de la situación estudiada, lo que permitió una integración más equilibrada de razones estadísticas y razones contextuales. El fenómeno de sustentar las conclusiones en creencias (e.g., E₁: “Un factor más de riesgo de fatalidad del coronavirus es el embarazo”) se redujo conforme se avanzó en la secuencia didáctica, pues se comenzaron a presentar mayor cantidad de razones estadísticas.

- Aunque el uso de calificadores modales no fue constante, se identificaron dos tipos: aquellos que expresaban incertidumbre y aquellos que expresaban más certidumbre sobre las conclusiones. Según Henriques y Oliveira (2016), los alumnos tienden a expresar la incertidumbre de manera cualitativa, lo cual es algo esperado cuando se desarrolla un RII, ya que se aceptan frases apropiadas al nivel del estudiante. Las frases que utilizaron los estudiantes (e.g., “yo pienso”, “yo opino”, “casi siempre”, “mi respuesta no es tan confiable”) son reconocidas como indicadores de incertidumbre en el sentido de que le otorgan a la conclusión un estatus de duda, es decir, que no son conclusiones incuestionables, sino, como señalan Ben-Zvi et al. (2012), son “tentativas, temporales y relativas a la información disponible” (p. 924). No obstante, es importante enfatizar el uso del lenguaje de incertidumbre como un indicador inherente de los procedimientos estadísticos, y no de la confianza que se tenga sobre ellos.
- Los alumnos identificaron un patrón en las actividades realizadas, lo que ayudó a formular sus garantías. Al trabajar durante varias sesiones con la misma pregunta de investigación, pero con diferentes tamaños de muestra, los alumnos iban observando patrones en los datos. Luego, observaban que la evidencia actual era un caso particular de esos patrones, garantizando con ello su conclusión. En otras palabras, los patrones se convirtieron en principios que autorizaban la conexión entre la evidencia y la conclusión.

En general, la situación didáctica permitió el desarrollo de un RII en los estudiantes porque se apoyó en: 1) tareas que motivaron la presentación de inferencias hacia una población a partir de los datos de las muestras de esa población (Zieffler et al., 2008), 2) preguntas de investigación que despertaron el interés en los estudiantes y motivaron la exploración de los datos haciendo uso de la tecnología (Makar, 2013), y 3) uso de un contexto familiar para los estudiantes. Como señala Pfannkuch (2011), el contexto expande el RII de los estudiantes porque les permite generar una conexión entre la información abstracta de los datos (e.g., las proporciones de fallecidos, las distribuciones de los datos en las gráficas) y la generación de una historia plausible sobre ellos. Además, el modelo de argumentación del RIE fue un referente clave para guiar los procesos de argumentación de los propios estudiantes. En este sentido, el estudio aporta ideas importantes y necesarias para fomentar un RII en los estudiantes de educación secundaria, y da cuenta de la posibilidad de llevar al aula estrategias didácticas que apoyen dicho razonamiento a fin de potenciar el aprendizaje tanto de conceptos estadísticos como de un uso de la estadística para juzgar situaciones reales basados en argumentos válidos.

REFERENCIAS

- Ben-Zvi, D., Aridor, K., Makar, K., & Bakker, A. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 44(7), 913–925.
<https://doi.org/10.1007/s11858-012-0420-3>
- Ben-Zvi, D., Gravemeijer, K., & Ainley, J. (2018). Design of statistics learning environments. En D. Ben-Zvi, K. Makar & J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 473–502). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_16
- Cruz López, C., & Ramírez Ojeda, M. M. (2021). Un diagnóstico de los cursos de servicio en estadística en México. *Statistics Education Research Journal*, 20(2).
<https://bit.ly/3EyQcH0>
- Gómez Blancarte, A. L., Chávez Aguilar, R. D., & Miranda Viramontes, I. (2022). Enfoques de la enseñanza de la estadística en los programas de estudio de educación superior. *IE Revista de investigación educativa de la REDIECH*, 13.
https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v13i0.1394
- Gómez-Blancarte, A., & Tobías-Lara, M. G. (2018). Using the Toulmin model of argumentation to validate students' inferential reasoning. En M. A. Sorto, A. White, & L. Guyot (Eds.), *Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS-10)*. International Statistical Institute.
<https://bit.ly/3PyeOpK>
- Gómez-Blancarte, A., & Tobías-Lara, M. G. (2023). The integration of undergraduate students' informal and formal inferential reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 113(2), 251–269.
<https://doi.org/10.1007/s10649-022-10205-w>
- Henriques, A., & Oliveira, H. (2016). Students' expressions of uncertainty in making informal inference when engaged in a statistical investigation using Tinkerplots. *Statistics Education Research Journal*, 15(2), 62–80.
<https://bit.ly/3PasOnZ>
- Hernández Trevethan, H. (2018). High school, Tinkerplots, Fathom... and independence and ANOVA. How come? En M. A. Sorto, A. White, & L. Guyot (Eds.), *Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS-10)*. International Statistical Institute.
<https://bit.ly/3r9NPYc>
- Huerta Orozco, J. C. (2021). *Secuencia didáctica para fomentar el desarrollo del razonamiento inferencial informal en alumnos de secundaria* [Tesis de maestría, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria (CICATA-Legaria), del Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio de CICATA-Legaria. <https://bit.ly/3Rg1dV7>
- Kuckartz, U. (2019). Qualitative text analysis: A systematic approach. En G. Kaiser & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education*, (pp. 181–197). Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7>

- Kula, F., & Koçer, R. G. (2020). Why is it difficult to understand statistical inference? Reflections on the opposing directions of construction and application of inference framework. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 39(4), 248–265. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrz014>
- Makar, K. (2013). Predict! Teaching statistics using informal statistical inference. *Australian Mathematics Teacher*, 69(4), 34–41. <https://bit.ly/44TSV8Q>
- Makar, K., & Rubin, A. (2018). Learning about statistical inference. En D. Ben-Zvi, K. Makar & J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 261–294). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_8
- Pfannkuch, M. (2011). The role of context in developing informal statistical inferential reasoning: A classroom study. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1–2), 27–46. <https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538302>
- Pinto Sosa, J. E. (2020). El cambio en el currículo en Educación Estadística en el ámbito universitario: dificultades y retos. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 3(2), 56–74. <https://bit.ly/3Ptd29b>
- Rivera Pérez, J. G., & Gómez Blancarte, A. L. (2022). Características de la enseñanza de la estadística en disciplinas de STEM en la Educación Superior. *Innovación Educativa*, 22(88), 9–31. <https://bit.ly/3Rflj1W>
- Sepúlveda Vega, F., & Sánchez Sánchez, E. A. (2022). Conocimiento de profesores de bachillerato sobre un acercamiento informal a las pruebas de significación estadística. En A. Saucedo & D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del profesorado para enseñar estadística: retos y oportunidades* (pp. 457–481). Centro de investigación de educación matemática y estadística de la Universidad Católica del Maule. <https://bit.ly/3sQgyBJ>
- Silvestre Castro, E., & Urrea Bernal, M. A. (2021). Análisis del razonamiento de estudiantes de bachillerato frente a una tarea introductoria al contraste de hipótesis. *SahuarUS Revista electrónica de Matemáticas*, 5(1), 16–34. <https://bit.ly/44KUIg3>
- Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 267–307). Erlbaum.
- Tobías-Lara, M. G., & Gómez-Blancarte, A. L. (2019). Assessment of informal and formal inferential reasoning: A critical research review. *Statistics Education Research Journal*, 18(1), 8–25. <https://bit.ly/44PP50a>
- Toulmin, S., Rieke, R., & Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning* (2a ed.). Macmillan Publishing Company.
- Zieffler, A., Garfield, J., delMas, R., & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 40–58. <https://bit.ly/488xRhu>

Creencias de estudiantes de secundaria, el pensamiento intuitivo y analítico en problemas con números racionales

Lorena Jiménez Sandoval¹ y Ofelia Montelongo Aguilar²

RESUMEN

En este estudio exploramos las creencias de once estudiantes de secundaria para entender su presencia en el pensamiento matemático. Elegimos problemas con números racionales, en los que el llamado sesgo del número natural ha documentado como una tendencia a responderlos empleando el conocimiento sobre números naturales llevándolos a dar respuestas incorrectas. Esto nos permitió distinguir entre el pensamiento intuitivo y el pensamiento analítico empleando la teoría del doble proceso para identificar si las creencias son diferentes en el empleo de uno u otro tipo de pensamiento. Diseñamos y aplicamos una escala de Likert para conocer el sistema de creencias, un cuestionario de opción múltiple sobre productos entre números racionales y naturales y comparación de fracciones, además de sumas y productos con números racionales. Encontramos que el pensamiento analítico estuvo presente en el 69% de los estudiantes y que las creencias ante esta ocurrencia son mayoritariamente positivas para con la matemática, junto con un alto sentido de autoeficacia.

PALABRAS CLAVE

Pensamiento analítico, Pensamiento intuitivo, Sistema de creencias, Números racionales, Nivel secundaria.

¹ lorenajimenez@uaz.edu.mx
Universidad Autónoma de Zacatecas
<https://orcid.org/0000-0002-1669-7178>

² omaguilar_m@hotmail.com
Universidad Autónoma de Zacatecas
<https://orcid.org/0000-0001-5340-2140>

ANTECEDENTES

Algunas investigaciones en torno a la enseñanza y aprendizaje de la matemática (Schoenfeld, 1992; Gómez-Chacon, et al., 2011; López et al., 2012; y Gómez-Chacon, et al., 2014,) buscan aportar elementos que permitan entender cómo es la interacción entre los aspectos cognitivos y afectivos cuando se construye conocimiento matemático, considerando que se ha demostrado desde diferentes perspectivas teóricas y que ambos están presentes en los procesos de aprendizaje, particularmente cuando se resuelven problemas de matemáticas.

El dominio afectivo ha ganado mayor atención en los últimos años, no solo porque permite entender los procesos de aprendizaje, sino también la forma en la que enfrentamos las dificultades en la vida cotidiana. Las aproximaciones teóricas al respecto han surgido desde diferentes áreas del conocimiento, Leron y Hazzan (2006) muestran cómo los aportes de algunas investigaciones hechas desde la psicología cognitiva en la última década del siglo XX y la primera del XXI, pueden ayudar a interpretar resultados obtenidos en este mismo sentido en educación matemática.

Schoenfeld (1992) explicaba que a través del tiempo se han declarado múltiples condiciones necesarias para el desarrollo del pensamiento matemático, pero la suficiencia de estas no ha convencido a los estudiosos de los campos de la psicología cognitiva ni de la matemática educativa. Según este autor, la comprensión de la importancia de la metacognición, considerada como integrada al dominio afectivo en el desarrollo del pensamiento matemático, se alcanzó a mediados y finales de la década de los 80's con las aportaciones de Flavell, y fue el concepto de creencias el que produjo un acercamiento entre las investigaciones cognitivas y afectivas. La progresión de las ideas y metodologías en ambos campos siguió más o menos la misma dirección, revelando la existencia de relaciones estadísticas entre el logro matemático y la autorregulación de aprendizaje, que es considerada como la articuladora de la dimensión cognitiva y motivacional en la construcción del conocimiento matemático.

Por su lado, López et al. (2012) explican que, aunque “la planeación organizada de tareas con miras al logro de una meta es fundamental para el aprendizaje de las matemáticas” (p. 41), esta no es suficiente, ya que, según estos autores, se requiere de la metacognición, que como una reflexión consciente ejercida sobre el proceso de solución de un problema conduce a un aprendizaje significativo; y que es la capacidad de análisis la que se asocia con un razonamiento matemático eficaz.

Según Leron y Hazzan (2006), en educación matemática se hace una división del nivel superior de pensamiento en cognición y metacognición, y es de esta última de la que las creencias forman parte. Estos autores aseguran que gran parte de la investigación en esta área se ocupa, explícita o implíci-

tamente, de la relación entre los modos intuitivo y analítico del pensamiento y comportamiento matemático. Kahneman (2003) establece una similitud entre la función de la intuición y el etiquetado como Sistema S1 por Stanovich y West (2000), considerando que ambos —la intuición y S1— se caracterizan por su inmediatez, alta accesibilidad, automaticidad y sencillez, se consideran sumamente útiles y confiables en condiciones normales de la vida diaria, pero están expuestos a errores en condiciones más complejas y abstractas. La intuición es opuesta al pensamiento analítico, el cual se caracteriza por ser lento y reflexivo, y que exige mayor atención y tiempo de análisis; se ubica en el ámbito de la cognición, aunque comparte con la metacognición la parte del autocontrol que contiene una funcionalidad adicional, entre las que se encuentran las creencias. Este sistema fue etiquetado por el mismo Stanovich y West (2000) como Sistema S2.

De acuerdo a Vamvakoussi, et al. (2012), la intuición está mediada por herramientas de representación cultural, y es claro que está presente cuando se resuelven problemas de matemáticas. Estos autores consideran que existe un estado intermedio del conocimiento que crea un puente entre la perspectiva inicial de los estudiantes sobre los conceptos matemáticos y la perspectiva científica prevista que aún no está disponible para ellos, misma que se conforma de varios antecedentes, suposiciones y creencias sobre el comportamiento de los entes matemáticos en cuestión. Particularmente refieren, por ejemplo, que antes de que los estudiantes se instruyan sobre números racionales, ellos ya han conformado creencias sobre cómo estos números se comportan, y recurren en gran medida a su comprensión inicial sobre números naturales. En su estudio dan cuenta del proceso de transición entre un estado de comprensión inicial que los estudiantes tienen sobre números racionales, y un estado de comprensión más sofisticado en el que están presentes conceptos que se pueden considerar contra-intuitivos.

Autores como Vamvakoussi, et al. (2012) y Van Hoof, et al. (2013), coinciden con la idea de que, es a partir de múltiples experiencias con los números naturales, e incluso a partir de algunas de carácter físico con materiales manipulables, que los estudiantes conforman creencias sobre qué son los números racionales y cómo deben comportarse.

Gómez-Chacón et al. (2014) discuten en torno a las variables presentes en la interacción de procesos intuitivos que se consideran inconscientes, implícitos y que se trabajan —algo así como lo que en el lenguaje común suele llamarse segundo plano—, y los procesos de pensamiento analíticos que se ponen en juego de manera consciente y explícita cuando se intenta dar respuestas a problemas que incluyen características presentes en problemas matemáticos como la abstracción, un lenguaje estrictamente simbólico, identificación de aspectos comunes para proyectar una generalización, entre otros. En su estudio centran la atención en la autorregulación metacog-

nitiva y de control, y en las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas y su aprendizaje, ya que las consideran predictoras del logro matemático. Estos autores reportan haber encontrado una correlación positiva entre las citadas variables y el logro matemático. Asumen la teoría del doble proceso que aporta la psicología educativa, y ubican la investigación en una línea que considera la presencia de un tercer sistema en el que juegan cuatro elementos de manera importante: las creencias de los estudiantes como un nivel metacognitivo que dota de un contexto a su actuación, la reflexión cognitiva a manera de regulación metacognitiva que está presente en la inhibición de respuestas intuitivas frente a las analíticas, los procesos y límites de la memoria, considerada como centro en el almacenamiento de la información, y las habilidades deductivas.

En este artículo se aportan elementos para entender las creencias presentes en un grupo de estudiantes de secundaria cuando aplican la intuición o dan paso al pensamiento analítico para resolver problemas con números racionales.

PROPÓSITO

La mayoría de los estudiantes tienen la creencia de que el tiempo que tardan en resolver un problema de matemáticas es representativo de la inteligencia que poseen, de tal forma que buscan dar respuestas más o menos rápidas a los problemas, obviando, muchas veces de manera consciente, un análisis detallado de las condiciones del problema; incluso es común que no se detengan demasiado tiempo para comprender qué es exactamente lo que deben resolver antes de emprender una estrategia de solución. Schoenfeld (1992) atribuye esta cuestión a al menos doce años de experiencia escolar sobre la solución de problemas de matemáticas, tiempo durante el cual se conforman creencias y se desarrolla cierto nivel de intuición.

De acuerdo con López (2006), la intuición ha sido investigada en relación con diversas temáticas, tales como “la resolución de problemas, imágenes, modelos, creencias y estadios de desarrollo de la inteligencia” (p. 29); comúnmente se considera que la intuición se asocia al sentido común y que puede “crear la apariencia de certeza” (p.29). Sin embargo, el proceso de representación intuitiva puede producir “una representación distorsionada de la realidad original y las predicciones pueden ser total o parcialmente incorrectas, por eso la intuición se considera como una fuente potencial de error” (p. 29). Aún cuando la intuición representa “una guía invaluable para la construcción de conocimiento” (p. 35), y ejerce “un efecto coercitivo sobre las vías de razonamiento” (p. 31), es difícilmente erradicable y generalmente se opone al razonamiento analítico. Según esta autora, aunque existen afirmaciones cuya verdad puede ser admitida intuitivamente “sin sentir necesidad alguna de una prueba formal o empírica” (p. 30), en matemáticas,

las analogías intuitivas son benéficas cuando “después de ser aceptadas pueden ser justificadas lógicamente” (p. 35).

Fischbein, 1987 (citado en Leron y Hazzan, 2006) explica que:

El problema principal es aprender a vivir con la carga intuitiva de conceptos, necesaria para la fluidez productiva del razonamiento, y, al mismo tiempo, controlar el impacto del curso mismo del razonamiento de estas influencias intuitivas. Para ello, el alumno debe aprender a tomar conciencia del significado formal y exacto y de las implicaciones de los conceptos matemáticos, por un lado, y de las intuiciones subyacentes, por otro. (p. 207).

En este sentido, se asume que cuando se resuelven problemas de matemáticas está presente la intuición, pero las respuestas que se dan no deberían obedecer exclusivamente al pensamiento intuitivo. De acuerdo Attridge y Inglis (2014), las matemáticas suelen requerir de la inhibición de la intuición para abrir la posibilidad de la aplicación de nuevas habilidades, conocimientos y fórmulas que exigen un pensamiento más analítico. Según estos autores, las teorías del doble proceso que se han desarrollado en áreas de la psicología cognitiva han sido aplicadas recientemente al pensamiento matemático, y proponen la diferenciación de al menos dos tipos de razonamiento que se ponen en juego cuando se resuelven problemas. Estos razonamientos pueden entrar en conflicto y sobreponerse uno al otro, dando respuestas incorrectas a problemas específicos.

La solución dada a problemas con números racionales permite distinguir la presencia del pensamiento intuitivo y analítico en la resolución de problemas. Se ha documentado una tendencia a responder problemas que involucran números racionales con el conocimiento que se tiene sobre ellos; esta tendencia se considera intuitiva y fue llamada por Ni y Zhou (2005, citado por Vamvakoussi, et al., 2012) como sesgo del número natural. Estudios como los de Vamvakoussi, et al. (2012) y Van Hoof, et al. (2013), han hecho evidente su presencia en estudiantes de todos los niveles educativos, incluyendo los de la edad adulta, cuando resuelven problemas de matemáticas. Esta es una de las razones por la que elegimos proponer en nuestra investigación la solución de problemas con números racionales en un grupo de estudiantes de secundaria. Se pretendía hacer evidente la presencia y diferenciar el pensamiento intuitivo del analítico, así como identificar las creencias existentes cuando estos dos tipos de pensamiento ocurren en la búsqueda de una su solución.

REFERENTES TEÓRICOS

De acuerdo con Attridge y Inglis (2014), la teoría del doble proceso podría mejorar la comprensión que se ha desarrollado sobre el pensamiento matemático y sus características, las cuales no solo están presentes cuando se resuelven problemas de matemáticas, sino en cualquier tipo de problema en lo cotidiano. Asumimos la postura de Leron y Hazzan (2006) en cuanto a

no profundizar en los matices de las diferentes teorías de procesos duales que se han desarrollado en la psicología cognitiva; y considerar la que Stanovich y West (2000) llaman visión prototipo (según traducción nuestra), que distingue dos tipos de razonamiento cuyas características se han expresado de manera más sistematizada en estudios posteriores.

Leron y Hazzan (2009) establecen que en nuestra cognición y comportamiento están presentes dos modos de pensamiento: el pensamiento analítico o sistema S2, y el pensamiento intuitivo o sistema S1. Ambos tipos de pensamiento difieren en la dimensión de accesibilidad. Estos autores explican que muchos de los errores que cometen los estudiantes cuando resuelven problemas de matemáticas se deben a que las soluciones exigen la aplicación de reglas que pueden ir en contra de su inteligencia natural o intuitiva. La función del sistema S1 es dar respuestas inmediatas altamente accesibles, automáticas y sencillas. S1 se considera sumamente útil y confiable en condiciones normales de la vida diaria, pero propenso a errores en condiciones más complejas y abstractas. Los errores en la solución de problemas generalmente son el resultado de un pensamiento intuitivo no controlado, pero también pueden originarse en un procesamiento analítico erróneo luego de que S2 anula la respuesta dada por S1, provocando que finalmente se emita una respuesta incorrecta (Van Hoof, et al. 2013).

El sesgo del número natural se atribuye a un pensamiento intuitivo no controlado que ocurre frente a la aplicación errónea del conocimiento que se tiene sobre los números naturales en la solución de problemas con números racionales. Las investigaciones antes citadas han empleado instrumentos que permiten identificar la presencia de ambos sistemas, S1 y S2, con la inclusión de ítems o problemas que se denominan congruentes o incongruentes con el conocimiento sobre números naturales. Los ítems o problemas congruentes se refieren a “aquellos en los que un conocimiento sobre los naturales permite obtener una respuesta correcta” (González-Forte, et al., 2019, p. 364), y se asocian a S1. Por ejemplo, en la pregunta sobre si el número que resulta del producto de 3.5 por 2 es mayor o menor que 2, el conocimiento que se tiene sobre el producto de números naturales de que el producto siempre es mayor que los factores llevaría a dar como respuesta que será mayor que 2. Cuando dicho conocimiento da una respuesta incorrecta se consideran ítems incongruentes y se asume que la respuesta correcta podría darse solo si se emplea el pensamiento analítico. Para este tipo de ítems funciona considerar el producto de 0.5 por 2, en el que el citado conocimiento sobre números naturales lleva a dar una respuesta incorrecta. Se ha reconocido la presencia de diferentes tipos de sesgos: el sesgo del número natural, el sesgo inverso y el pensamiento en diferencias. González-Forte, et al. (2019) explica que todos representan de igual forma la aplicación incorrecta de propiedades de los números naturales al identificar a los

números racionales o una parte de ellos, como el numerador, el denominador o a la parte decimal de un número racional, con los números naturales y su comportamiento; por ejemplo, considerar que el número $\frac{2}{5}$ es menor que $\frac{3}{10}$ porque 2 es menor que 3 y 5 menor que 10, o que entre los números 2.7 y 2.6 no hay ningún otro número porque entre 6 y 7 no existe otro número natural. El sesgo inverso se asocia a la representación parte-todo de un número racional y se caracteriza por comparar solo los denominadores de las fracciones, considerando mayor a la fracción con menor denominador porque se piensa que *las partes son más grandes*. El pensamiento en diferencias se basa, precisamente, en comparar las diferencias absolutas entre el numerador y denominador de ambas fracciones, considerando como fracción menor la asociada a la diferencia mayor; estos dos últimos sesgos se consideran como razones por las que algunos estudiantes resuelven incorrectamente los ítems congruentes y correctamente algunos de los ítems congruentes (González-Forte, et al., 2019).

Se coincide con De Corte (2004) respecto a la importancia de la disposición matemática que deben desarrollar los estudiantes para mejorar su competencia, y se destacan cinco categorías de aptitud que deben estar presentes como parte de esta disposición: 1) conocimiento y dominio matemático específico, bien organizado y flexiblemente accesible, 2) estrategias de búsqueda para la resolución de problemas, 3) metacognición sobre lo que se sabe, lo que lo motiva y las emociones que pueden impulsar el aprendizaje, 4) autorregulación de los procesos cognitivos y 5) creencias sobre sus capacidades, sobre el aprendizaje y la enseñanza, así como sobre la matemática y la solución de problemas (Traducción propia). En este sentido, nos interesa entender cómo la categoría de las creencias está presente en el actuar de S1 y S2.

Shoenfeld (1992) citó el reporte de la Evaluación Nacional del Progreso Educativo (NAEP por sus siglas en inglés) de 1983, en el que se dio cuenta que en los resultados de la encuesta aplicada, aproximadamente la mitad de los estudiantes estuvieron de acuerdo con la afirmación: *aprender matemáticas consiste principalmente en memorizar*; el 75% coincidieron en que: *hacer matemáticas requiere de mucha práctica para seguir reglas*; y nueve de cada diez estudiantes estuvieron de acuerdo con la afirmación: *siempre hay una regla que se debe seguir para resolver problemas de matemáticas*. Con esta base, Shoenfeld (1992) expresa que, dadas estas creencias de los estudiantes, es posible que ni siquiera intenten resolver problemas para los que no tienen un método claro que hayan aprendido con anterioridad, y que puedan explorar en su memoria o que claudiquen en la búsqueda de la solución de un problema luego de solo unos minutos de haber comenzado. Estas creencias de los estudiantes van en contra de la idea de Leron y Hazzan (2006) respecto a que en la enseñanza de la matemática se espera que los individuos dediquen una cantidad de tiempo importante a la solución de

problemas, que piensen detenidamente en lo que hacen y que expliquen con lujo de detalle sus respuestas; es decir, en la enseñanza de la matemática hay una necesidad de formar personas conscientes de la forma en que operan S1 y S2, y que esta conciencia forme parte de su actuar mientras resuelven problemas.

En la Tabla 1 se establecen las similitudes y diferencias establecidas por Leron y Hazzan (2006) en el abordaje del pensamiento intuitivo y analítico encontradas en la teoría de los procesos duales de la psicología cognitiva y la educación matemática.

Tabla 1
Perspectiva de la Teoría de los procesos duales vs Perspectiva de la Educación matemática

Perspectiva de la Educación Matemática	Cognición		Metacognición	
	Intuición	Pensamiento analítico	Autocontrol	Creencias y gestión de recursos, etc.
Perspectiva de la Teoría de los proceso duales	Sistema 1	Pensamiento regulado	Autocontrol	
		Sistema 2		
	Cognición			

Nota: Traducción nuestra. Leron y Hazzan (2006)

Mientras que para la psicología educativa la metacognición es parte de la cognición y está integrada a S2, en educación matemática la metacognición se entiende externa a la cognición y va más allá del autocontrol (De Corte, 2004).

Como ya hemos dicho en párrafos anteriores, nuestro estudio se centra en las creencias de los estudiantes, mismas que ubicamos en la categoría de la metacognición y que entendemos fuera del sistema S2. McLeod (1992) sitúa a las creencias en la frontera entre el afecto y la cognición, y las clasifica respecto del objeto o sujeto sobre el cual se manifiestan, esto es: creencias sobre la matemática como disciplina, creencias sobre uno mismo, creencias en relación con la enseñanza y la solución de problemas, y creencias sobre los contextos en los que se produce la enseñanza.

Las creencias sobre la matemática hacen referencia a aquellas que se tienen respecto a la importancia que tiene o no esta ciencia en la vida cotidiana, si son fáciles o difíciles o, por ejemplo, que las matemáticas son útiles pero implican principalmente memorizar y seguir reglas. Las creencias sobre uno mismo se refieren a las creencias de autoeficacia, es decir, creencias sobre las propias capacidades, y en el caso que nos ocupa, creencias sobre las capacidades para resolver problemas de matemáticas, particularmente problemas con números racionales; estas creencias incluyen el autoconcepto.

Las creencias sobre los contextos tienen que ver con las ideas que los estudiantes y profesores conforman respecto a las normas en el salón de clase y aquellos estereotipos sociales sobre alumnos y profesores de matemáticas y su comportamiento. Para Gómez-Chacón, et al. (2006), las creencias no aparecen de manera aislada, no son independientes y todas se interrelacionan, razón por la que suelen considerarse como un sistema. En la investigación que nos ocupa, el sistema de creencias se integra por las que los estudiantes tienen sobre las matemáticas, sobre la enseñanza, el aprendizaje y la resolución de problemas, y las creencias de autoeficacia en la resolución de problemas matemáticos.

Había que integrar, por un lado, la relevancia de la presencia de las creencias señalada por Shoenfeld (1992) y documentada por estudios como el de Vamvakoussi, et al., (2012), Van Hoof, et al., (2013) y De Corte (2015), cuando los estudiantes se enfrentan a resolver problemas, en el sentido de que estas pueden llevarlos a intentar responder siguiendo únicamente reglas aprendidas con anterioridad y trabajo de memoria, al que además deben concurrir con cierta rapidez y que los llevarían a emplear la intuición para dar una respuesta. Por otro lado, se debía integrar la necesidad señalada por Leron y Hazzan (2006) en torno a que el pensamiento matemático de los estudiantes debiera forjarse con, la llamada por Fischbein, una carga intuitiva que permita la ocurrencia productiva de un razonamiento influenciado por dicha intuición. Al tiempo, se debe controlar su incidencia, y tomar el tiempo necesario para analizar el problema y organizar adecuadamente aquello que lo lleve a dar una respuesta correcta (y fue la teoría del doble proceso la que permitió distinguir el pensamiento intuitivo del pensamiento analítico), y, finalmente, el tercer aspecto: el sesgo del número natural y demás sesgos señalados en este apartado hicieron posible que en la práctica se plasmara su ocurrencia de manera explícita cuando se resuelven problemas con números racionales.

MÉTODOS Y MATERIALES

Procedimiento

Se diseñaron tres instrumentos para el levantamiento de la información: una escala de Likert, que hizo posible identificar el sistema de creencias de los estudiantes, y dos cuestionarios, uno de opción múltiple y uno que incluía problemas para que los estudiantes los resolvieran libremente, pero en el que se les pedía que argumentaran sus respuestas. Estos dos cuestionarios permitieron identificar el tipo de razonamiento que emplean los estudiantes cuando resuelven problemas con números racionales. Dos de los tres instrumentos se presentaron en un cuestionario de Google, y el tercero se escribió en un archivo PDF para que los participantes lo resolvieran a modo de tarea y regresaran sus respuestas escritas en puño y letra.

Fueron las profesoras de matemáticas quienes se encargaron de distribuir los instrumentos entre los alumnos, a la vez que dieron instrucciones sobre cómo responderlos. Los links de los cuestionarios de Google y el PDF se enviaron a las maestras de los grupos el día 8 de marzo de 2021, el contacto que ellas tuvieron con los estudiantes fue en las sesiones sincrónicas que se tenían como parte de las clases de matemáticas de sus cursos ordinarios y que en ese momento de estaban llevando a cabo de manera virtual, esto porque el levantamiento de la información ocurrió durante el confinamiento por la pandemia SARS COVID-19.

La recepción de la información fue inmediata para el caso de la escala y el cuestionario de opción múltiple, las respuestas de los estudiantes se fueron reflejando una a una en el formulario de Google. Los PDF con las respuestas de los estudiantes fueron remitidas directamente por ellos a una dirección de correo que se les proporcionó al momento en el que se les compartieron los instrumentos.

Instrumentos

La escala tipo Likert fue construida con base en la escala CreeMat empleada por Gómez-Chacón, et al. (2014); de esta tomamos los ítems que hacían referencia a la identificación de las creencias sobre la matemática, sobre su enseñanza y aprendizaje, y la resolución de problemas y las creencias de autoeficacia, ítems 4,5,7, 9, 10, 11 y 13. Los ítems restantes fueron inspirados por el instrumento reportado en Gómez-Chacón, et al. (2006). El instrumento quedó integrado por catorce ítems; cuatro ítems para rescatar las creencias sobre la matemática (9, 2, 8 y 7), tres para identificar la dimensión de creencias sobre el aprendizaje (1,5 y 4), dos para las de la enseñanza (6 y 14) y cinco ítems para rescatar las creencias de autoeficacia (3, 10,11,12 y 13). Las respuestas se distribuyeron en cinco niveles, de lo negativo a lo positivo: *casi nunca, solo a veces, más o menos, casi siempre y siempre*; el formulario permitía la elección de una y solo una respuesta por cada ítem.

Para identificar la presencia del razonamiento intuitivo o sistema S1, o del razonamiento analítico o sistema S2 cuando los estudiantes resuelven problemas, diseñamos un cuestionario de opción múltiple integrado por problemas sobre números racionales dividido en dos partes. La primera estaba integrada por seis ítems de opción múltiple, cuatro de ellos tomados de los instrumentos de González-Forte, et al. (2019), que consiste en preguntar a los estudiantes si el resultado de la multiplicación de un número natural por un racional será mayor a menor que el número natural en cuestión, mismos que fueron diseñados “teniendo en cuenta dos variables: el tipo de representación” (p. 39) (fraccionaria o decimal) y la congruencia o incongruencia con el conocimiento implícito sobre la multiplicación de números naturales que consideran que el producto de dos números naturales

siempre es mayor que cualquiera de los factores. La segunda parte se integró de nueve problemas de comparación de fracciones que diseñamos empleando la idea de González-Forte, et al. (2019) de incluir problemas congruentes e incongruentes con el sesgo del número natural, y que resultaban congruentes o incongruentes con los otros tipos de sesgo que se han detectado en la literatura; el sesgo inverso y el pensamiento en diferencias. Por ejemplo, en el ítem diez se pedía a los estudiantes que encerraran en un círculo el número racional que consideraban mayor entre $\frac{12}{5}$ y $\frac{12}{8}$, este ítem es incongruente con el conocimiento sobre números naturales si se comparan solo los numeradores y denominadores, 12 es igual a 12 y 5 es menor que 8, luego $\frac{12}{5}$ es menor que $\frac{12}{8}$, o si sólo se comparan denominadores que los lleva a dar la misma respuesta errónea; sin embargo, es congruente con el sesgo inverso si se considera que las cinco partes de un entero son más grandes que las ocho partes. Esta idea llevaría a los estudiantes a dar una respuesta correcta considerando que el numerador es el mismo. Otro ejemplo es el ítem 14, en el que los números a comparar eran $\frac{29}{17}$ y $\frac{13}{20}$, este es congruente si sólo se comparan numeradores, el sesgo inverso también lleva a dar una respuesta correcta, pero el pensamiento en diferencias lleva a dar una respuesta incorrecta. Aun cuando no era nuestro centro de atención el identificar los sesgos presentes, fue de suma importancia tener consciencia de su existencia para que la interpretación dada a la respuesta de los estudiantes fuese más cercana a la realidad escolar.

Luego de cada ítem incluimos la pregunta explícita ¿cómo lo sabes?, que propone el autor citado en el párrafo anterior;. La parte importante de nuestra investigación radica en hacer evidente la presencia de S1 o S2 en la solución que dieran los estudiantes, por ello se esperaba que los estudiantes resolvieran los ítems congruentes empleando solo el pensamiento intuitivo y, a menos que la respuesta a la pregunta explícita contenga alguna idea sobre números racionales en tanto a la conceptualización de mayor qué y menor qué, es que se consideró la presencia de S2. Si el problema es incongruente y los estudiantes lo resolvieron de manera incorrecta, entonces esto ratificaría que sólo aplicaron S1. Si el problema es incongruente y lo resolvían de manera correcta, y su respuesta a la pregunta explícita se asocia a alguna definición o propiedad de los números racionales, se ratificaba el empleo de S2.

Se diseñó un segundo cuestionario integrado con problemas en los que los estudiantes tenían que calcular sumas (tres ítems), restas (tres ítems) y multiplicaciones (cinco ítems) de dos números racionales de manera libre. Este último instrumento contribuyó a rectificar la determinación de la presencia de S1 o S2 en las respuestas de los estudiantes, ya que también se les pedía que explicaran cómo calcularon su respuesta, y se incluían operaciones entre números racionales con igual y diferente denominador.

Muestra de estudio

Los instrumentos se diseñaron en el marco de un proyecto de tesis de mayor alcance en el que se trabaja desde mayo del 2020; en enero-febrero del 2021 se pretendía que su aplicación se realizara directamente a la población objetivo (en la cual fueron 585 estudiantes de cinco grupos de primero, segundo y tercero de una escuela secundaria del sector público en el estado de San Luis Potosí), cuando aún no sabíamos el alcance que tendría la cuarentena a la que fuimos confinados a finales de marzo del 2020. En la idea de probar los instrumentos y tomando en cuenta el hecho de que estos tendrían que ser aplicados de manera remota, consideramos importante que los grupos elegidos tuvieran una oportunidad real de responderlos desde sus dispositivos móviles o computadoras personales, de tal forma que se eligió una escuela secundaria del sector privado que le era accesible a una de las autoras del presente artículo a través de un familiar. Las profesoras a las que se contactó informaron que todos los alumnos que formaban parte de los grupos de primero, segundo y tercer grado de dicha escuela contaban con los medios necesarios para que esto ocurriera.

La escuela corresponde al sector privado y ofrece nivel educativo de secundaria y bachillerato en el turno matutino en la ciudad de Zacatecas. La mayoría de las familias de los estudiantes son de un estrato económico medio y alto, lo que garantizaba que todos tuvieran acceso a internet, equipos de cómputo y dispositivos móviles que hicieran posible la aplicación de los instrumentos. En este momento no se cuenta con elementos que permitan hablar de un sesgo dado las características particulares de la muestra tomada para el estudio.

Resultados de la aplicación de los instrumentos.

De un total de cincuenta y tres estudiantes de entre 13 y 14 años a los que se enviaron los instrumentos, obtuvimos cincuenta y tres respuestas de la escala de creencias. Solo treinta y tres resolvieron el cuestionario de opción múltiple, y únicamente trece resolvieron los problemas incluidos en el PDF. Considerando las intersecciones entre las respuestas obtenidas en los tres instrumentos, el total de alumnos que contestó los tres fue de once.

Análisis de la información.

Para el análisis de la información etiquetamos a los estudiantes como A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10 y A11, haciendo únicamente alusión a que eran Alumnos, y dado que no se tiene el objetivo de reportar características de género en el análisis y presentación de las respuestas se consideró suficiente informar que cinco de los estudiantes son hombres y seis mujeres.

Para el análisis e interpretación de los resultados se procedió a un vaciado de la información obtenida en la escala de creencias y los ítems de opción múltiple en una tabla de Excel en la que se podía identificar a los estudiantes

por renglón; en las columnas estaban las elecciones hechas por ellos a cada ítem. También se vaciaron en 22 columnas las respuestas numéricas dadas a las operaciones con números racionales y la justificación que dieron de sus cálculos, de este modo podíamos movernos en lo horizontal para revisar cada respuesta de un mismo participante, y en lo vertical para analizar las coincidencias o diferencias entre las respuestas de los once estudiantes. Además, podíamos revisar las imágenes de las respuestas a las operaciones cada vez que lo consideramos necesario.

Primero se realizó el análisis de la escala de creencias, para lo cual elaboramos un referente de contraste previo. Como ejemplo describimos la elaboración del citado referente para la dimensión del sistema de creencias de autoeficacia de la matemática que se correspondía con los ítems:

3. Cuando no puedo resolver un problema de matemáticas rápidamente dejé de intentarlo,
10. Puedo trabajar con cualquier tarea de matemáticas y obtener buenas calificaciones,
11. Puedo resolver cualquier problema de matemáticas, aunque sea difícil,
12. Puedo resolver correctamente cualquier problema con fracciones y
13. Entiendo todo lo que mi profesor explica sobre fracciones.

Consideramos que dicha dimensión del sistema de creencias era favorable al pensamiento S1 y, por tanto, desfavorable al pensamiento analítico si su respuesta era *Siempre* o *Casi siempre* al ítem 3, y *Casi nunca* o *solo a veces* al ítem 11; es decir, se interpretó que un estudiante que *Siempre* o *Casi siempre* cuando no puede resolver un problema de matemáticas rápidamente deja de intentarlo y *Casi nunca* o *Solo a veces* puede resolver un problema de matemáticas aunque sea difícil, tiene una tendencia a aplicar el pensamiento intuitivo, ya que el estudiante cree que el tiempo juega en contra de las habilidades en la solución de problemas.

En este sentido encontramos que ningún estudiante cayó en esta clasificación, ya que todos respondieron que *solo a veces* o *casi nunca* abandonan un problema cuando no lo pueden resolver con rapidez, y nueve de estos estudiantes respondieron que *más o menos*, *casi siempre* o *siempre* pueden resolver un problema de matemáticas aunque sea difícil. Los otros dos estudiantes que respondieron al ítem 11 con un *solo a veces*, responden *más o menos* al ítem 10 y *casi siempre* o *más o menos* a los ítem 12 y 13. Por esta y otros resultados descritos en el apartado correspondiente, se reporta que encontramos un alto sentido de autoeficacia en la mayoría de los estudiantes. Luego de analizar los resultados de la escala de creencias se procedió a la elaboración de la Figura 1, que facilitó observar el sistema de creencias de los estudiantes de manera sintetizada.

Paso seguido, se procedió al análisis del cuestionario de opción múltiple para identificar el empleo del razonamiento intuitivo y/o analítico, se revisaron las respuestas a los ítems congruentes y se hizo una tabla con número

de ítems congruentes resueltos de manera correcta e incorrecta por cada estudiante; esto hacía evidente la presencia de la aplicación del razonamiento intuitivo. Luego se analizaron las respuestas a los ítems incongruentes y se agregaron dos columnas más en las que se anotó la cantidad de ellos que fue resuelta de manera incorrecta, y en otra la cantidad de ítems incongruentes resueltos de manera correcta; esta tabla permitió descartar solo el empleo del razonamiento intuitivo cuando la mayoría de los ítems incongruentes eran resueltos de manera correcta y se corroboraba la presencia de alguna definición o conocimiento específico sobre números racionales en su respuesta a la pregunta *¿Cómo lo sabes?* El análisis del cuestionario de problemas fue posterior a los dos primeros análisis, y se recurrió directamente a los resultados cuando existía duda respecto a la ratificación del empleo del razonamiento analítico en la respuesta a la pregunta *cómo lo sabes*, que dejaba duda sobre el conocimiento empleado acerca de números racionales.

Tal fue el caso de A10, que respondió incorrectamente la mitad de los ítems congruentes (cuatro de ocho) y a tres de los ítems incongruentes (tres de siete), de tal forma que lo que definió su tipo de razonamiento empleado fueron sus respuestas a las preguntas *¿Cómo lo sabes?* y las justificaciones que da al cuestionario de operaciones con números racionales.

RESULTADOS, DISCUSIÓN Y APORTACIONES

En el reporte de los resultados emplearemos cursivas para resaltar las frases que corresponden literalmente con las preguntas incluidas en alguno de los instrumentos empleados, y pondremos entre comillas y con letra cursiva la transcripción textual de las respuestas de los estudiantes a la pregunta *¿Cómo lo sabes?* que se incluyó luego de cada ítem de opción múltiple.

Sobre la Escala de creencias

Las respuestas de la escala de creencias se distribuían en cinco niveles, de lo negativo a lo positivo: *casi nunca*, *solo a veces*, *más o menos*, *casi siempre* y *siempre*. Los resultados indican que la mayoría de los estudiantes tienen creencias sobre la matemática que podrían considerarse positivas, por ejemplo, diez de los once estudiantes asocian la idea de que solo los genios aprenden matemáticas con un *casi nunca*, y con un *siempre* o *casi siempre* la idea sobre que *cualquiera puede aprender matemáticas*. Siete de los once creen que “las matemáticas nos permiten entender mejor el mundo en que vivimos”, y los once estudiantes creen que “las matemáticas se tratan de entender los procedimientos para aplicarlos en la solución de problemas”.

Si la creencia de que *las matemáticas se tratan de procedimientos que tenemos que memorizar* la interpretamos como una creencia desfavorable para la actuación de S2, los resultados indican que el 82% de los estudiantes tienen una buena disposición al pensamiento analítico, ya que nueve consideran que la memorización se requiere *solo a veces* o *más o menos*, y solo tres consi-

deran que la memorización está presente en el aprendizaje de la matemática *siempre o casi siempre*.

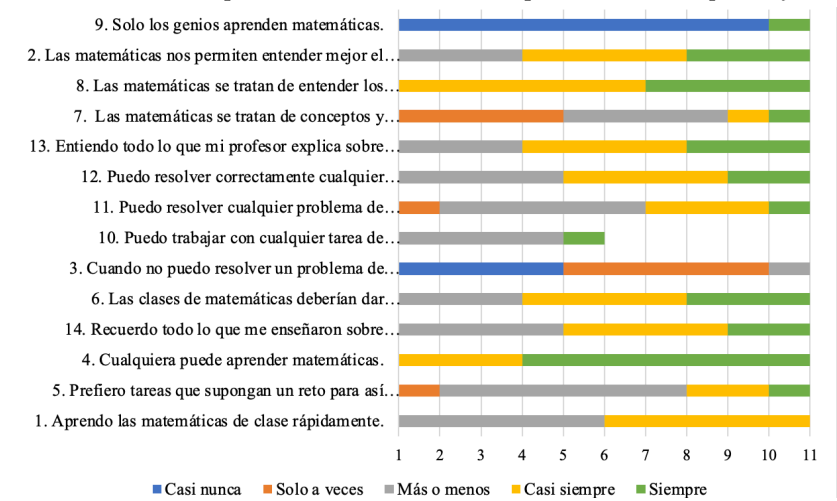
Las creencias de autoeficacia son en general altas en la mayoría de los estudiantes, en sus respuestas encontramos que nueve de los once creen que *más o menos, casi siempre o siempre pueden resolver cualquier problema de matemáticas aunque sea difícil*, seis de ellos creen que *más o menos o siempre* pueden además obtener buenas calificaciones. Los once estudiantes creen que *más o menos, casi siempre o siempre* han entendido todo lo que su profesor explicó sobre fracciones, que lo recuerdan y que pueden resolver cualquier problema con ellas.

Los resultados indican que todos los estudiantes creen que “las clases de matemáticas debieran dar importancia a la solución de problemas”, esta se interpretó como una creencia sobre la enseñanza favorable al pensamiento analítico.

Los once estudiantes consideran que *más o menos o casi siempre* aprenden las matemáticas rápidamente, y además que *siempre o casi siempre* cualquiera puede hacerlo. Nueve de los once prefieren *más o menos, casi siempre o siempre* que las tareas supongan un reto para así aprender cosas nuevas de matemáticas en casa.

La figura 1 puede ilustrar la generalidad de las respuestas dadas por los estudiantes.

Figura 1
Resultados de la escala tipo Likert de creencias ordenadas por objeto-sujeto al que se refieren.



Nota. Ordenamos las creencias respecto al objeto-sujeto al que hacen referencia: creencias sobre la matemática ítems 9, 2, 8 y 7, creencias de autoeficacia: ítems 13, 12, 11, 10 y 3, creencias sobre la enseñanza: ítems 6 y 14 y creencias sobre el aprendizaje: ítems 4, 5 y 1. Se muestran completas algunas de las preguntas, los puntos suspensivos al final de algunas, indican que la pregunta está incompleta en la gráfica.

Sobre el cuestionario de opción múltiple de multiplicación y comparación de números racionales.

De los seis ítems sobre multiplicación de fracciones incluidos en el cuestionario de opción múltiple, cuatro eran congruentes y dos incongruentes. En coincidencia con lo reportado en González-Forte, et al. (2019), los estudiantes sí tuvieron más éxito en los ítems congruentes que en los incongruentes, aunque porcentualmente la diferencia fue mucho menor: 86% y 81% contra 94.64% y 83.93%, que es la reportada por dicho autor.

El ítem incongruente con menos respuestas correctas, ocho de once, fue el ítem de la multiplicación de 5 por $\frac{1}{2}$. Entre las respuestas a la pregunta *¿cómo lo sabes?*, encontramos: “porque un medio vale .5”, “transformé la expresión” y “los multiplique”; interpretamos que las dos últimas respuestas dan cuenta de que los estudiantes calcularon la representación decimal del producto, a pesar de la indicación explícita que se daba en la presentación del cuestionario sobre que respondieran sin calcular el producto. Inicialmente se puede entender que estos dos estudiantes, A9 y A10 respectivamente, tienen problemas de aprendizaje con la comparación de fracciones en cualquiera de sus formas, fraccionaria o decimal.

En el caso de A10, esto se confirma con los resultados de sus respuestas en dicho apartado del cuestionario, ya que 6 de las 9 que da sobre la comparación de fracciones son incorrectas, tres de estas en problemas incongruentes en los que se hace evidente la presencia del sesgo del número natural de acuerdo con su respuesta a la pregunta *¿cómo lo sabes?* En el ítem *¿Qué número es mayor entre $\frac{24}{36}$ y $\frac{24}{51}$?*, A10 escribe: “por el 51”, es decir, considera erróneamente que $\frac{24}{51}$ es mayor porque 51 es mayor que 36. A10 da las otras respuestas erróneas a ítems congruentes. Cuatro respuestas incorrectas se podrían explicar con el sesgo de pensamiento en diferencias, ya que todas son congruentes con la idea que lo subyace. Las creencias presentes en A10 no se diferencian de las de la mayoría de los estudiantes; tiene un alto sentido de autoeficacia, considerando que declara haber entendido todo lo que sus profesores le enseñaron sobre fracciones, que *casi siempre* puede resolver los problemas aunque sean difíciles y sacar buenas calificaciones, que “cualquiera puede aprender matemáticas y que las matemáticas se tratan de entender los procedimientos para poder aplicarlos en la solución de problemas”, considera, además, que “solo a veces las matemáticas se tratan de procedimientos que tenemos que memorizar”.

En el caso de A9, los resultados de sus respuestas en el apartado de comparación de fracciones obtienen únicamente tres respuestas incorrectas, las tres correspondientes con ítems incongruentes y con el sesgo del número natural. La presencia de dicho sesgo se hace evidente en las respuestas correctas que justifica diciendo “el numerador es más grande que el otro”, “el numerador es más grande” o “el numerados es mayor”. A9 es el único que

asocia un *más o menos* a la creencia “cualquiera pueden aprender matemáticas”, y uno de los tres que asocian esta misma respuesta a la creencia “las matemáticas nos permiten entender mejor el mundo en que vivimos”. Sus creencias de autoeficacia se corresponden más bien con un nivel medio, ya que sus respuestas para la escala en cuatro de estos ítems las asocia con un *más o menos* o *solo a veces*, aunque declara que *casi nunca* deja de intentar rápidamente un problema cuando no puede resolverlo.

A4, quien es el otro caso con menos respuestas correctas en el apartado de multiplicación de fracciones y que en el ítem de la multiplicación de 5 por $\frac{1}{2}$ justifica su respuesta diciendo “porque un medio vale .5”, da 5 respuestas incorrectas a los ítems de comparación de fracciones, a pesar de que en tres de estas se comparan números racionales con el mismo denominador y que son congruentes en el marco del sesgo del número natural. Las otras dos se corresponden con ítems incongruentes, pero sus respuestas no se asocian ni al pensamiento en diferencias ni al sesgo inverso, en ambos casos su respuesta a la pregunta *¿Cómo lo sabes?* es “*por lo que vale la fracción*”. Dicha respuesta es la misma para los seis ítems que responde de manera correcta, lo que podría indicar que llama valor de la fracción a la representación decimal, pero no fue posible hacer una interpretación de sus errores y aciertos. En cuanto a sus creencias, A4 es el único que asocia un *casi nunca* a la creencia de que “las clases de matemáticas deberían dar importancia a la resolución de problemas matemáticos”, y es de los tres estudiantes que asocia un *más o menos* a la creencia de que “las matemáticas nos permiten entender mejor el mundo en que vivimos”. Sus creencias de autoeficacia también se corresponden con un nivel medio, ya que sus respuestas para la escala en cuatro de estos ítems las asocia con un *más o menos* o *solo a veces*, aunque declara que *casi nunca* deja de intentar rápidamente un problema cuando no puede resolverlo.

Presentando este nivel de detalle en uno de los estudiantes que responde correctamente a los 15 ítems, A7, podemos afirmar la presencia de razonamiento analítico dadas las justificaciones que escribe en sus respuestas a cada ítem de producto, a saber “porque $\frac{1}{2}$ es menor que uno”, “porque $\frac{3}{2}$ es mayor que uno”, “porque $\frac{5}{2}$ es mayor que uno”, “porque .5 es menor que uno”, “porque 1.5 es mayor que uno” y “porque 2.5 es mayor que uno”, y las que escribe en sus respuestas a cada ítem sobre comparación de fracciones “es mayor que un entero”, “se acerca más a un entero” “tiene más enteros” “es mayor a la mitad del entero y el otro no” y “supera el entero”. A7 asocia un siempre a las creencias: Cualquiera puede aprender matemáticas, Las clases de matemáticas deberían dar importancia a la resolución de problemas matemático, Las matemáticas se tratan de entender los procedimientos para poder aplicarlos en la solución de problemas, Puedo resolver correctamente cualquier problema con fracciones, Entiendo todo lo que mi profesor explica

sobre fracciones; un casi siempre a las creencias: Aprendo las matemáticas de clase rápidamente, Las matemáticas nos permiten entender mejor el mundo en que vivimos, Puedo trabajar con cualquier tarea de matemáticas y obtener buenas calificaciones, Puedo resolver cualquier problema de matemáticas, aunque sea difícil, Recuerdo todo lo que me enseñaron sobre fracciones; un más o menos a la creencia: Prefiero tareas que supongan un reto para así aprender cosas nuevas de matemáticas; y un casi nunca a la creencia Cuando no puedo resolver un problema de matemáticas rápidamente dejo de intentarlo. Cabe resaltar que A7 asocia un siempre a la creencia de que las matemáticas se tratan de conceptos y procedimientos que tenemos que memorizar, por lo que interpretamos que es consciente de la carga intuitiva de los conceptos matemáticos y de la necesidad de esta para la fluidez productiva del razonamiento, al mismo tiempo que controla su impacto en el curso del propio razonamiento (Fischbein, 1987, citado en Leron y Hazzan, 2006).

En promedio, los ítems congruentes fueron respondidos correctamente por el 81% de los estudiantes, a la vez que, en promedio, los ítems incongruentes se respondieron correctamente por el 74% de los estudiantes. De acuerdo a nuestra interpretación en la que consideramos que si los estudiantes respondían correctamente los ítems congruentes e incorrectamente los ítems incongruentes, estaríamos ante la presencia de un pensamiento intuitivo, pero que si respondían correctamente también a los ítems incongruentes y sus respuestas a las preguntas abiertas reflejaban el reconocimiento del comportamiento y propiedades de los números racionales y sus operaciones; entonces podemos afirmar que los estudiantes dieron paso al pensamiento analítico.

Los resultados indican que al menos el 69% de los estudiantes dio paso al razonamiento analítico cuando resolvieron problemas con números racionales, toda vez que en promedio fue el 69% que resolvió correctamente las operaciones con números racionales, haciendo énfasis en la definición de suma y producto de racionales impartido en el nivel escolar de secundaria; es decir, justifican su respuesta escribiendo para el caso de la suma: “Multiplique cruzado (6)(7) y (10)(4) después lineal (10)(7) luego sume $42+40$ por consiguiente reduje $\frac{82}{70}$ y quedó $\frac{41}{35}$ ” y para el producto: “Multiplicar numerador $\times$ numerador y denominador $\times$ denominador”, tal y como se puede apreciar en las Figuras 2 y 3.

Figura 2

Respuesta de A10 al primer problema de suma de fracciones.

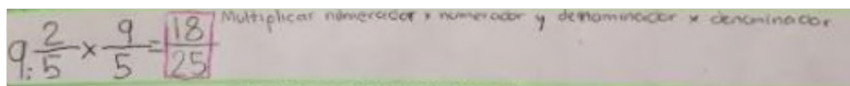
① $\frac{6}{20} + \frac{4}{7} = \frac{42+40}{70} = \frac{82}{70} = \frac{41}{35}$

mult. pique cruzado
(6)(7) y (20)(4)
después lineal (10)
(7) luego sume $42+40$
40 por consiguiente
reduje $\frac{82}{70}$ y
quedó $\frac{41}{35}$

Por un lado, conocer el sistema de creencias de los estudiantes aporta elementos al proceso de enseñanza para que, a través del actuar del docente frente a la matemática y la solución de problemas, se proporcione a los estudiantes experiencias que consoliden las creencias positivas y evite la generación de creencias que obstaculicen su aprendizaje. Es sabido que, conforme los estudiantes avanzan a través de los niveles escolares, las creencias de autoeficacia disminuyen significativamente. En los resultados obtenidos en la presente investigación destaca el hecho del alto sentido de autoeficacia que poseen aún los estudiantes de secundaria, de forma tal que se vuelve significativamente importante que las experiencias que se generen en el aula frente a la solución de problemas y el tipo de problemas que se proponga resolver, correspondan con características que los estudiantes asocien en un futuro al pensamiento matemático y a su desarrollo.

Figura 3

Respuesta de A9 uno de los problema de producto de fracciones.



Handwritten student work showing the multiplication of fractions $\frac{2}{5} \times \frac{9}{5} = \frac{18}{25}$. The student has written "9 2/5 x 9/5 = 18/25" and a note "Multiplicar numerador x numerador y denominador x denominador".

Por otro lado, resaltar en el salón de clase la importancia del pensamiento intuitivo y distinguirlo del pensamiento analítico haciendo énfasis en las ventajas de cada uno podría también contribuir a que los estudiantes generen procesos metacognitivos que mejoren su desempeño en la solución de problemas.

Dada la diversidad y riqueza de los instrumentos diseñados y aplicados a los estudiantes, los resultados ofrecen una amplia lista de aportaciones a la enseñanza de las matemáticas que en principio salen del alcance de la investigación que se presenta, basta un debido acercamiento teórico desde uno de los marcos empleados: teoría del doble proceso, sesgo del número natural o dominio afectivo para interpretar los resultados obtenidos; entre estos se pueden citar:

- Diferencias de género presentes en las creencias de autoeficacia de los estudiantes.
- Los estudiantes cometieron más errores en los problemas de comparación de fracciones. Sus respuestas a la pregunta *¿Cómo lo sabes?* cuando en la comparación se involucraron números racionales con el mismo denominador fueron: “por que $\frac{2}{3}$ esta mas acercado al entero solo le falta uno para el entero”, “porque la segunda fracción si la convertimos a enteros da $1\frac{2}{3}$ y la otra no alcanza el entero”, “ya que la segunda supera el entero y el otro no”; la respuesta “porque tienen el mismo denominador pero el numerador mas grande que el otro” abre la puerta para revisar el énfasis de la definición de “menor que” y “mayor que” en el conjunto de números racionales presente en la enseñanza a nivel

secundaria, ya que la tendencia indica que los estudiantes llevan el problema de comparación de fracciones al conjunto de los números enteros.

- Los estudiantes respondieron de forma correcta prácticamente todos los ítems que implicaban un producto de un número racional y un número entero, sin embargo, en sus respuestas a la pregunta ¿Cómo lo sabes? vuelven a estar presentes los números enteros: “Porque si 5 por 1 es 5 entonces 0.5 o 1 medio es menor que 5”, “como no es un entero no pasa de los cinco ya que cinco es el entero”, “porque multiplicamos y nos da 5 medios y luego lo convertimos y da 2 enteros”, “por que primero se multiplica el entero por la fracción y da $\frac{5}{2}$ y se divide y dan 2.5”; no parece estar claro que un número racional tienen una representación decimal y una representación como fracción, pero se trata del mismo número racional.
- En los problemas sobre operaciones con números racionales se hace evidente el énfasis a reducir la enseñanza de las operaciones con números racionales, a seguir reglas y a excluir quizá el razonamiento analítico: “Realizó una multiplicación cruzada de primer nominador por segundo denominador y del segundo nominador por primer denominador, para sumar el resultado y obtener el numerador. El denominador lo obtiene multiplicando ambos denominadores” fue casi la misma respuesta que dieron 10 de los 11 estudiantes, y solo uno respondió: “Busqué un número que al multiplicarlo diera el mismo denominador a ambas fracciones y después sumé”.

Este y otros aspectos presentes en los resultados podrían aportar elementos para la reflexión de cómo se trabajan los números racionales en la escuela secundaria.

CONCLUSIONES

De los resultados del análisis de la información recabada con cada uno de los instrumentos, podemos resumir las siguientes conclusiones:

El sistema de creencias presente en once estudiantes de nivel secundaria se caracterizó por integrar:

- a. Creencias favorables para con la matemática.
- b. No identifican la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con la memorización de conceptos y procedimientos, y prefieren que las tareas de casa les representen retos y nuevos aprendizajes.
- c. Creen que aprenden las matemáticas de clase rápidamente.
- d. Creen que recuerdan todo lo que aprendieron sobre números racionales.
- e. Un alto sentido de autoeficacia.

Con este sistema de creencias:

- a. Los estudiantes tuvieron más éxito en los ítems congruentes con su conocimiento sobre números naturales que con los ítems incongruentes.
- b. Se hizo evidente la ocurrencia de un razonamiento analítico en al menos el 69% de los estudiantes cuando resolvieron problemas con números racionales.
- c. Se hizo evidente que las respuestas que dieron los estudiantes se correspondieron con un razonamiento intuitivo solo en un 31%.

La única creencia que distinguió a los estudiantes que sobrepusieron el razonamiento intuitivo al analítico de los que dieron paso al razonamiento analítico, es la creencia de que “las matemáticas solo a veces o más o menos nos permiten entender el mundo en el que vivimos; frente a la que afirma que: siempre o casi siempre las matemáticas nos permiten entender el mundo en el que vivimos”.

La creencias que diferenciaron a un estudiante que obtuvo todas las respuestas correctas de los demás son las que se interpretaron como una evidencia de que los estudiantes con mayor éxito en la solución de problemas reconocen la importancia de la carga intuitiva de los conceptos matemáticos, y que ésta se gana con procesos de memorización, o trayendo a la memoria lo aprendido con anterioridad para lograr una fluidez productiva del razonamiento analítico, al tiempo que controla su impacto en el curso del propio razonamiento. Esto se hizo evidente en las creencias manifestadas respecto a que “las matemáticas siempre se tratan de conceptos y procedimientos que tenemos que memorizar, en conjunto con la creencia de que las matemáticas se tratan de entender los procedimientos para poder aplicarlos en la solución de problemas”.

Los instrumentos que se emplearon para el levantamiento de la información resultaron de fácil aplicación y aportaron elementos que favorecieron el análisis de la información, lo que atribuimos a la lectura de antecedentes en los que se documentaba la presencia del razonamiento intuitivo cuando se daba respuesta a problemas con números racionales empleando el conocimiento sobre números naturales. De este modo fue posible la identificación de la actuación de los dos sistemas propuestos por la teoría de los procesos duales S1 y S2 en correspondencia con el pensamiento intuitivo y analítico.

El presente reporte forma parte de un estudio mayor en el que se persiguió el mismo objetivo, pero en un grupo de 585 estudiantes de una escuela particular de San Luis Potosí. A ellos se les aplicaron los tres instrumentos, de los cuales recibimos 108 intersecciones en las respuestas. Dicha información está aún en proceso de análisis.

REFERENCIAS

- Attridge, N., & Inglis, M. (2014). Increasing cognitive inhibition with a difficult prior task. *ZDM*, 47(5), 723–734.
<https://doi.org/10.1007/s11858-014-0656-1>
- De Corte, E. (2004). Mainstreams and Perspectives in Research on Learning (Mathematics) From Instruction. *Applied Psychology: An International Review*, 53(2), 279–310. <https://doi.org/10.1111/j.1464-0597.2004.00172.x>
- De Corte, E. (2015). Aprendizaje Constructivo, Autorregulado, Situado Y Colaborativo: Un Acercamiento A La Adquisición De La Competencia Adaptativa (Matemática). *Páginas de Educación*, 8(2), 1–35.
<https://doi.org/10.22235/pe.v8i2>
- Gómez-Chacón, I.M. (2006). Procesos de intuición en matemáticas: una experiencia con estudiantes para profesores de Secundaria. *Matematicalia*, 2(4), 1–5.
<https://bit.ly/45ZYDqk>
- Gómez-Chacón, I. M., Eynde, P., & De Corte, E. (2006). Creencias de los estudiantes de matemáticas: la influencia del contexto de clase. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(3), 309–324. <https://bit.ly/3Zf6vm0>
- Gómez-Chacón, I. M^a., García-Madruga, J. A., Rodríguez, R., Vila, J. O., & Elosúa, M. R. (2011). Mathematical beliefs and cognitive reflection: Do they predict academic achievement? En B. Roesken, & M. Casper (Eds.), *XVII Proceedings of the MAVI-17 Conference* (pp. 64–73). Professional School of Education, Ruhr- Universität Bochum. <https://bit.ly/3RaVlfW>
- Gómez-Chacón, I. M., García-Madruga, J.A., Vila, J. O., Elosúa Ma. R., & Rodríguez, R. (2014). The dual processes hypothesis in mathematics performance: beliefs, cognitive reflection, working memory and reasoning. *Learning and Individual Differences*, 29(1), 67–73.
<https://doi.org/10.1016/j.lindif.2013.10.001>
- Gómez, D. M., & Dartnell, P. (2015). Sesgos y estrategias para la comparación de fracciones reveladas por análisis de grupos en segundo ciclo básico. En C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandía y M. Parraguez (Eds.), *Actas XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática: XIX JNEM 2015* (pp. 146–153). SOCHIEM. <https://bit.ly/46otb5F>
- González-Forte, J., Fernández, C., & Llinares, S. (2019). El fenómeno natural number bias: un estudio sobre los razonamientos de los estudiantes en la multiplicación de números racionales. *Quadrante*, 28(2), 32–52.
<https://doi.org/10.48489/quadrante.23026>
- González-Forte, J., Fernández, C., Van Hoof, J. & Van Dooren, W. (2019). Estudio cualitativo de los razonamientos de los estudiantes de primaria y secundaria sobre la magnitud de las fracciones. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & A. Alsina (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 363–372). SEIEM. <https://bit.ly/48b3aZe>

- Kahneman, D. (2003). Maps of bouden Rationality: psychology for behavioral economics. *The American economic review*, 93(5), 1449–1475.
<https://doi.org/10.1257/000282803322655392>
- Leron, U. & Hazzan, O. (2006). The rationality debate: Application of cognitive psychology to mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 62(2), 105–126. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-4833-1>
- Leron U. & Hazzan, O. (2009). Intuitive vs analytical thinking: Four perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 263–278.
<https://doi.org/10.1007/s10649-008-9175-8>
- López, C. (2006). La intuición y la matemática. *Revista de Ciencia y Tecnología*, 6, 29–36. <https://bit.ly/45MgbGL>
- López, V. O., Hederich-Martínez, C., & Camargo, U. A. (2012). Logro en matemáticas, autorregulación del aprendizaje y estilo cognitivo. *Suma Psicológica*, 19(2), 39–50. <https://bit.ly/3Pawnpup>
- McLeod, D.B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D.A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on mathematics Teaching and Learning* (pp. 575–598). Macmillan.
- Schoenfeld, H. A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Journal of education*, 196(2), 1–38. <https://doi.org/10.1177/002205741619600202>
- Stanovich, K. E., & West, R. F. (2000). Individual differences in reasoning: implications for rationality debate?. *Behavioral and sciences*, 23(5), 645–665.
<https://bit.ly/3qZSig1>
- Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(3), 344–355.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.02.001>
- Van Hoof, J., Lijnen, T., Verschaffel, L., & Van Dooren W. (2013). Are secondary school students still hampered by the natural number bias? A reaction time study on fraction comparison tasks. *Research in Mathematics Education*, 15(2), 154–164. <https://doi.org/10.1080/14794802.2013.797747>

Análisis del razonamiento estadístico en estudiantes de posgrado a partir de sus procesos transnumerativos

Daniel Eudave Muñoz¹, David Alfonso Páez² y
Lucía Magdalena Rodríguez Ponce³

RESUMEN

El razonamiento estadístico se compone de conceptos, procedimientos y disposiciones que permiten a los sujetos procesar, analizar e interpretar datos estadísticos, reconociendo sus posibles limitaciones. El presente estudio tiene como propósito describir los procedimientos de análisis de datos estadísticos de estudiantes de posgrado, los procesos transnumerativos utilizados y el sentido que se les da. Se seleccionaron 14 estudiantes de posgrado que se encontraban realizando sus investigaciones-tesis. Se realizaron entrevistas centradas en tareas mediante las cuales se recuperaron las formas de procesar y analizar los datos estadísticos de sus investigaciones. A partir de un análisis de protocolos se identificaron las expresiones y procesos de los estudiantes, las técnicas transnumerativas utilizadas y el sentido dado a las mismas. Como resultados relevantes se identifican las técnicas transnumerativas utilizadas para resignificar las variables involucradas y ajustar el plan de diseño de cada tesis, así como el papel que juega el contexto. Como conclusión, se señalan las ventajas de las técnicas transnumerativas como elemento central del análisis de datos y de la formación del razonamiento estadístico. Los resultados del estudio pueden ayudar a definir alternativas para propiciar un análisis estadístico contextualizado de los estudiantes de posgrado y para favorecer la integración de todos los elementos que componen una tesis.

PALABRAS CLAVE

Razonamiento estadístico, Análisis de datos, Transnumeración, Educación universitaria, Posgrados.

¹ daniel.eudave@edu.uaa.mx

Departamento de Educación, Universidad Autónoma de Aguascalientes
<https://orcid.org/0000-0003-4070-3109>

² david.paez@edu.uaa.mx

Departamento de Educación, Universidad Autónoma de Aguascalientes
<https://orcid.org/0000-0002-4499-4452>

³ lucia.rodriguez@edu.uaa.mx

Departamento de Educación, Universidad Autónoma de Aguascalientes
<https://orcid.org/0000-0003-4784-2611>

ANTECEDENTES

La formación estadística para todas y todos es una prioridad contemplada en el currículum de muchos países, desde el nivel básico hasta el superior. La meta es dotar de una cultura estadística desde la infancia, que al menos ofrezca una alfabetización estadística para la mayoría (Contreras & Molina-Portillo, 2019a), la cual pueda enriquecerse en los estudios superiores de quienes tengan la posibilidad de cursarlos. En el nivel superior se espera que los futuros profesionales logren el desarrollo de un razonamiento estadístico que les permita una comprensión científica de sus respectivos campos de desempeño y una oportuna intervención, ya sea que el saber estadístico sea utilizado para fines de diagnóstico, evaluación o investigación (Eudave, 2019). Hay un interés de los diseñadores del currículum por incluir la estadística y la probabilidad en planes y programas, sin embargo, su implementación y aprendizaje no están exentos de dificultades, debido principalmente a que cada campo de aplicación enfrenta exigencias metodológicas y técnicas particulares (Berndt et al., 2021).

Un espacio en el que invariablemente se enfrentan dificultades en el manejo de la estadística es en el proceso de investigación, sobre todo para quienes por primera vez tienen que involucrarse en una tarea de obtención, procesamiento y análisis de datos, como es el caso de los estudiantes de posgrado. Suele darse por hecho que ellos cuentan con las bases mínimas para procesar y entender grandes cantidades de datos, suponiendo que quien termina una licenciatura está estadísticamente alfabetizado y tiene al menos los rudimentos del razonamiento estadístico, y que en el posgrado se aprenderán modelos y técnicas avanzados. Sin embargo, diferentes estudios demuestran que los estudiantes del nivel superior tienen carencias en su comprensión estadística (Alvarado et al., 2018; Berndt et al., 2021; Hernández et al., 2023), lo que obliga a repensar la formación en esta área en el posgrado, pues este nivel enfrenta la necesidad de complementar la formación del razonamiento estadístico, o en algunos casos, iniciarlo.

Por ejemplo, Alvarado et al. (2018), en una experiencia formativa con estudiantes universitarios, encontraron que las principales dificultades radican en la definición de objetivos de análisis, en la elaboración de tablas para una y dos variables, así como en la interpretación de gráficas. De igual forma, resultó más complicado para los estudiantes identificar la relación entre variables y relacionar diferentes medidas estadísticas. Estos autores señalan que comprender algunos conceptos estadísticos descriptivos y aplicar procedimientos básicos no es una tarea complicada, pero lograr dar sentido a un conjunto de datos e identificar sus múltiples relaciones es algo que no todos los estudiantes consiguen tan fácilmente.

Por su parte, Hernández et al. (2023), en una investigación realizada con estudiantes de ingeniería a partir de un cuestionario para identificar sus con-

cepciones sobre el modelaje y los niveles de razonamiento estadístico, encontraron que todos los participantes mostraron una baja capacidad para identificar relaciones entre los datos y para interconectar conceptos estadísticos, así como dificultades para concluir las fases de un proceso de modelado estadístico. Los participantes también tuvieron dificultades para dar sentido a las representaciones de tablas de frecuencia, gráficos y medidas de tendencia central. Esto demuestra un bajo nivel de desarrollo en el razonamiento estadístico.

Berndt et al. (2021) señalan la importancia de que la alfabetización estadística vaya de la mano del razonamiento científico y de las habilidades argumentativas como elementos fundamentales de la práctica de profesionales de distintas áreas. Los autores reconocen que estas habilidades no se fomentan lo suficiente en la universidad, aunque señalan que el contexto de cada campo profesional sí puede tener un efecto favorable para el desarrollo de la alfabetización estadística. En esta línea, Del-Callejo-Canal et al. (2020) presentan una experiencia en la que se recurre a la implementación de proyectos de investigación como contexto para el desarrollo del razonamiento estadístico, obteniéndose resultados favorables, pero sólo en poco menos de la mitad de los estudiantes participantes. También el estudio de Nóbrega y Da Rocha Falcão (2019) resalta la necesidad de que los cursos de estadística contemplen los objetivos y la organización de las disciplinas en donde se espera hacer uso de la estadística, esto para propiciar el fomento del razonamiento estadístico en contexto.

En los posgrados orientados a la investigación, el fomento del razonamiento estadístico se encuentra en un campo apropiado por ser el espacio natural para el despliegue de todos los procesos y componentes de la estadística como disciplina. Un elemento central en la formación de investigadores es la comprensión y manejo de los datos que servirán para representar la realidad que pretenden estudiar, y para argumentar y fundamentar sus conclusiones. En el caso de los estudios cuantitativos, los estudiantes tienen que enfrentar y conocer la riqueza y complejidad de los datos estadísticos: su medición, procesamiento, análisis y comunicación, y todos los procesos técnicos y cognitivos que conllevan (Biehler et al., 2018).

En este proyecto nos centramos en los estudiantes de posgrado y la manera en cómo abordan el análisis estadístico al momento de realizar la investigación correspondiente a su trabajo recepcional o tesis; en especial, nos interesa identificar el sentido que le dan al proceso de análisis y las dificultades que enfrentan. Nos centramos en un proceso aparentemente sencillo, pero que entraña diversas complejidades, nos referimos al proceso de transnumeración, que es un elemento clave del análisis estadístico y consiste en “transformaciones numéricas hechas para facilitar la comprensión. La transnumeración ocurre cuando encontramos formas de obtener datos

(a través de la medición o clasificación) que capturan elementos significativos de un sistema real” (Wild & Pfannkuch, 1999, p. 227).

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS

En la educación superior, según la American Statistical Association [ASA] (2016), lo ideal es que los estudiantes desarrollen diferentes competencias que van desde ser usuarios inteligentes y críticos de los resultados de reportes e investigaciones estadísticas, hasta poder procesar y analizar datos estadísticos, usar variados modos de representación, identificar las ideas fundamentales como la variabilidad y el azar, conocer y utilizar diferentes modelos de análisis bivariado y multivariado, conocer y utilizar modelos inferenciales y de prueba de hipótesis, todo esto en una variedad de entornos. Una de estas competencias señala que: “los estudiantes deben poder reconocer preguntas para las cuales el proceso de investigación en estadística sería útil y deben poder responder preguntas utilizando el proceso de investigación” (ASA, 2016, p. 8). Esto implica que, en los profesionales universitarios debe darse una formación para la investigación, al menos como una iniciación que les permita comprender la lógica del conocimiento científico que sirve de fundamento a sus disciplinas particulares y que, en muchos campos, tiene como base el análisis estadístico; en este marco, es importante que se incorpore la formación estadística.

Aunque en el perfil profesional de diferentes carreras universitarias no se contemple como propósito la formación de investigadores, en la mayoría de ellas se entrena a los estudiantes en algunos procesos que tienen que ver con el ciclo de la investigación: planteamiento del problema, definición de un plan de investigación, obtención y procesamiento de datos, análisis de datos, sacar conclusiones de la información y comunicación de resultados a diferentes usuarios (Wild & Pfannkuch, 1999). Esto implica que la enseñanza de la estadística debe ir más allá del conocimiento de las definiciones y fórmulas de los conceptos básicos, y del entrenamiento en el uso de procedimientos aislados de los contextos y usos propios de los futuros profesionistas para que llegue a ser realmente relevante para ellos (Damilano & Rigo, 2019).

Un elemento clave que atraviesa el ciclo de la investigación y la formación del razonamiento estadístico es la transnumeración. Este término fue acuñado por Wild y Pfannkuch (1999), quienes los definen como:

Una transformación numérica para facilitar la comprensión. No es una mera traducción, en el sentido de sustituir una cosa por otra. Está informado por el conocimiento contextual y estadístico y es impulsado por el deseo de una mejor comprensión. Ocurre en tres fases: cuando hay una descripción cuantitativa del sistema real, cuando los datos se transforman en el sistema estadístico y cuando se forman representaciones de datos que ayudan a comunicar a los demás lo que dicen los datos sobre el sistema real. (Pfannkuch & Wild, 2000, p. 137, traducción propia)

Desde que se hace la planeación de los datos a obtener, se debe tener en cuenta qué es lo que se espera comunicar al usuario al que va dirigido un estudio estadístico. De igual forma, al estar trabajando en la construcción de argumentos para comunicar el sentido de los datos, se pueden detectar insuficiencias en el proceso de análisis e incluso de la etapa de recolección (como pudiera ser un procedimiento de medición inadecuado). La transnumeración circula, pues, a lo largo de todo el ciclo investigativo señalado por Wild y Pfannkuch (1999), siendo el conducto que permite una vinculación entre las diferentes etapas del proceso de investigación. Como señalan Cazorla et al. (2021, p. 109), la transnumeración permite la “transformación de datos brutos en estadísticas y de éstas en información”.

En el caso de los posgrados orientados a la formación de investigadores, se tienen las condiciones propicias para el uso de la transnumeración y, por ende, para la formación del razonamiento estadístico. Una de las principales actividades formativas en estos posgrados es la elaboración de una tesis, consistente por lo general en una investigación empírica. Se espera que esta sea desarrollada a lo largo de los semestres que conforman el posgrado, y que incluya, en los estudios de corte cuantitativo, un planteamiento del problema que considere la definición de variables y el o los procedimientos de medición, procesamiento, análisis y comunicación de resultados. La ejecución de este plan se debe realizar en un contexto particular que dé sentido a los datos, y que corresponde a la o las situaciones que se pretenden representar y modelar, que además pueden estar matizadas por las teorías que sirvan de referencia para explicar dichos fenómenos. Por la naturaleza del análisis estadístico y los procesos de transnumeración, la realización de una investigación empírica no es un proceso lineal, pues requiere de ajustes permanentes como la reelaboración de variables, la búsqueda y adecuación de modelos interpretativos más adecuados a la naturaleza de los datos y probar diferentes tipos de representación.

Además, como señala Monzón (2011), en la investigación científica y humanística no es suficiente demostrar, hay que argumentar. Se debe tomar en cuenta que un índice, un resumen estadístico o los resultados de una prueba de significancia o de una prueba de asociación, por sí solos no permiten dar sentido a un conjunto de datos. Por lo tanto, los estudiantes deben aprender a dar sentido a los datos desde los datos mismos (sentido estadístico), pero también como modelo de la realidad que refleja (la situación que se estudia), resaltando su robustez metodológica (su confiabilidad y validez) y su concordancia con la o las teorías que pretende explicar dicha realidad. Así, tenemos que la última etapa de la transnumeración, la comunicación de resultados, se convierte en sí en otra dimensión complementaria que tiene que ver con la argumentación y las competencias de escritura especializada de los estudiantes universitarios. Sin embargo, al momento de

redactar un informe de investigación, no es fácil para ellos encontrar las evidencias empíricas más pertinentes y confiables para justificar un argumento (Bañales et al., 2014).

Para poder llegar a la etapa final de integración de los resultados empíricos en un reporte de investigación, en el que además se espera la congruencia entre elementos teóricos y metodológicos, es necesario que los estudiantes no sólo tengan claridad de los análisis estadísticos que realizaron, sino de manera especial, que también lo tengan sobre su significado y relevancia. En este marco, partimos de las siguientes preguntas de investigación: ¿Cuáles son los procedimientos de análisis de datos estadísticos seguidos por los estudiantes de posgrado en la realización de sus investigaciones-tesis?, ¿Qué sentido dan a dicho proceso?, y ¿cuáles son los procedimientos de transnumeración y argumentación que utilizan los estudiantes de posgrado para dar sentido a sus datos y para lograr una mejor comunicación de sus resultados?

Los objetivos del estudio son: (a) describir los procedimientos de análisis de datos estadísticos de los estudiantes de posgrado en la realización de sus investigaciones-tesis, así como el sentido que dan a dicho proceso; (b) describir los procedimientos de transnumeración que utilizan los estudiantes de posgrado para dar sentido a sus datos y para lograr una mejor comunicación de sus resultados.

MARCO CONCEPTUAL

El razonamiento estadístico es una integración de conceptos estadísticos y probabilísticos, modelos, métodos y procedimientos, que interactúan en diferentes contextos y que implican, a su vez, diferentes métodos, procedimientos y teorías derivadas de otras disciplinas. Por lo tanto, el razonamiento estadístico no son sólo definiciones y fórmulas, ni métodos que puedan aplicarse en abstracto y para todas las situaciones; sino que también implica la capacidad de distinguir en qué momento y con qué elementos (teóricos, metodológicos y técnicos) abordar las diferentes etapas y procesos del análisis estadístico (Contreras & Molina-Portillo, 2019b; Wild & Pfannkuch, 1999).

Desde hace más de dos décadas hay un consenso en la comunidad del campo de la educación estadística en considerar que el razonamiento estadístico engloba un componente cognitivo y uno disposicional (Contreras & Molina-Portillo, 2019b; Gal, 2000; Wild & Pfannkuch, 1999). La forma de describir cada uno de estos componentes puede variar de un autor a otro, pero en general hay coincidencias sobre cuáles son sus características. En el componente cognitivo, Gal (2000) incluye la necesidad de un conocimiento estadístico de base (las nociones y procedimientos más elementales de la estadística), capacidad crítica y habilidades lectoras. Wild y Pfannkuch (1999) incluyen cinco tipos especiales de razonamiento estadístico: el reconocimiento de la necesidad de datos, la transnumeración, consideración de la variación, el

razonamiento con modelos estadísticos, y la integración de la estadística con un contexto. En el componente disposicional se incluyen aspectos como las creencias (Gal, 2000), la actitud crítica y el cuestionamiento (Contreras & Molina-Portillo, 2019b), el escepticismo, la imaginación, curiosidad, apertura mental, una propensión a buscar significados más profundos, pensamiento lógico, compromiso y perseverancia (Wild & Pfannkuch, 1999).

Estos autores también coinciden en la importancia de introducir las ideas estadísticas a partir de un proceso o ciclo investigativo, que parta de la definición de un problema, la obtención y procesamiento de datos, su análisis y comunicación. El trabajar las ideas y procesos estadísticos desde un ciclo investigativo permite a los estudiantes de todos los niveles educativos reconocer la naturaleza de los datos, su tratamiento y comportamiento, en un contexto muy similar de aquel en el que se generan y que construye la información estadística, ya sea como parte de un proyecto de investigación o por las agencias nacionales e internacionales especializadas; en México, es el caso del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI).

Hay diferentes maneras de explicar el ciclo investigativo, el modelo más extendido es el PPDAC de MacKay y Oldford (1994), citado por Wild y Pfannkuch (1999), que corresponde a las siglas de: problema, plan, datos, análisis y conclusiones. Este ciclo investigativo se puede adaptar de diferentes maneras y con alcances variados, según el nivel educativo y las necesidades formativas que se busquen. En la educación superior, en donde se privilegia la formación científica y técnica, muchos métodos especializados siguen muy de cerca este ciclo investigativo, por lo que resulta adecuada su inclusión en la formación estadística de los estudiantes. Este enfoque formativo parece por demás obvio en los posgrados orientados a la formación de investigadores, en donde los estudiantes deben desarrollar una investigación-tesis que abarca todo el ciclo investigativo, cubriendo, además, estándares propios de la investigación científica.

Otro elemento fundamental del razonamiento estadístico es el contexto. Wild y Pfannkuch (1999, p. 244) consideran que el “propósito final de la investigación estadística es aprender en el ámbito del contexto de un problema real”. Al hablar de un problema real, se refieren a un problema práctico, en el que “tanto la fuente como la solución se encuentran fuera de las estadísticas, pero donde las investigaciones estadísticas proporcionan algo de la comprensión necesaria para llegar a una solución” (Pfannkuch & Wild, 2000, p. 133). Para abordar un problema es necesario utilizar tanto el conocimiento del contexto como el estadístico, desde el planteamiento del problema hasta la recopilación de datos y el análisis de estos. Pfannkuch (2011) considera que:

Obtener nuevos conocimientos a partir de datos para comprender situaciones reales ayuda a orientar la toma de decisiones basada en evidencias y

las acciones en muchos sectores de la sociedad. La capacidad de reflexionar sobre los datos, discutir sobre los patrones percibidos y sugerir nuevas vías para explorar depende de sólidos fundamentos de conocimiento estadístico y contextual. Las estadísticas, por lo tanto, exigen habilidades de argumentación basadas en datos y en el conocimiento del contexto social. (Pfannkuch, 2011, p. 27, traducción propia).

Sin embargo, la noción de contexto es muy amplia. Pfannkuch (2011) recurre a dos conceptualizaciones: el *contexto de los datos* que se usan en la investigación y en la formación de conceptos estadísticos, y los *contextos de experiencia de aprendizaje*. El primero de ellos, el contexto de los datos, corresponde a la o las situaciones del mundo real de las que surge el interés o la necesidad de generar conocimiento. Los contextos de experiencia de aprendizaje, además de las situaciones didácticas, los materiales educativos utilizados por el profesor, y el entorno escolar en general, se consideran como los aprendizajes previos de los estudiantes. Contreras y Molina-Portillo (2019b, p. 7), exponen que “el conocimiento del contexto, combinado con algunas habilidades de la cultura estadística, son requisitos previos para permitir la reflexión crítica acerca de los mensajes estadísticos y para la comprensión de las implicaciones de los resultados percibidos”. En el caso de la educación superior, que establece particularidades teóricas, metodológicas y prácticas alrededor de cada programa educativo (y su campo profesional de referencia), también es relevante el contexto institucional conformado en comunidades disciplinares, que dan un sentido especial a las necesidades de formación estadística y a los usos de esta disciplina (Eudave, 2019).

Como se señaló anteriormente, la transnumeración es un elemento central del razonamiento estadístico, pero, ¿cuál es su papel en este análisis contextual de los datos estadísticos? Aparentemente, la transnumeración hace referencia a los posibles tipos de representación de la información estadística, y en todo caso, a los procesos de selección o transformación de dichas representaciones. Sin embargo, hay una interrelación entre el concepto de transnumeración con los conceptos de *dato* y *medición*, entre una evidencia y la forma de cómo se obtiene, transformada en un número con un significado que refleja un rasgo de la realidad de interés (Carzola et al., 2021). La transnumeración viene siendo el corazón del análisis de datos, una serie de procedimientos que permiten encontrar en ellos las propiedades más relevantes de la realidad que se intenta describir o explicar, en un contexto determinado, pero sin extralimitarse a la naturaleza misma de los datos.

La transnumeración ocurre en tres fases: (a) cuando hay una descripción cuantitativa del sistema real; (b) cuando los datos se transforman en el sistema estadístico; y (c) cuando se forman representaciones de datos que ayudan a comunicar a los demás lo que estos dicen sobre el sistema real (Pfannkuch & Wild, 2000). En esta última fase, las decisiones versan sobre la manera más adecuada de construir una argumentación, pero a su vez, el

tipo de argumentos que se considere relevante determina el tipo de transnumeraciones que habrán de realizarse (Chick et al., 2005).

La elaboración de un reporte de investigación, al igual que una tesis de posgrado, requiere de complejos procesos de redacción que implican la construcción de argumentos y evidencias, desde los primeros apartados y hasta los últimos. Desde que se redacta el planteamiento del problema es necesario hacer precisiones conceptuales y acotaciones metodológicas para definir qué es lo que se estudiará y, eventualmente, que será susceptible de mediciones de algún tipo, para el caso de los estudios de corte cuantitativo. Todos los apartados subsecuentes deben tener congruencia con el primer capítulo y tienen que precisar, en lo conceptual y metodológico, los aspectos sobre los que se tendrán que mostrar evidencias empíricas de algún tipo. El escritor debe, por tanto, convencer al lector de la importancia y pertinencia del o los conceptos involucrados, así como de las evidencias que habrán de servir de reflejo objetivo de dichos conceptos.

La transnumeración como proceso de transformación numérica va modelando las evidencias empíricas de acuerdo con el mismo proceso de análisis estadístico, pero también va atendiendo a los requerimientos argumentativos. A su vez, las argumentaciones que se van construyendo para describir, explicar y justificar los hallazgos, tienen que amoldarse a la naturaleza de las evidencias empíricas, lo mismo que a la dimensión teórica y conceptual. Así pues, la transnumeración y argumentación son una surte de bisagra que vincula las dimensiones teórica y conceptual con la empírica. Podemos identificar un tipo de bisagra de significados, orientada a comprender la evidencia, su sentido numérico y su sentido en el conjunto de conceptos implicados (sentido teórico) y, al mismo tiempo, explicar y tratar de convencer a un lector potencial del sentido de los datos, de la *historia que cuentan*, parafraseando a Chick et al. (2005). También podemos considerar una bisagra metodológica que corresponda a los procesos de construcción y validación empírica, teórica y metodológica, todo dentro del ciclo investigativo.

El ciclo investigativo, el contexto, la transnumeración y la argumentación, como aspectos centrales del razonamiento estadístico de los estudiantes de posgrado, se analizarán en el apartado de resultados.

METODOLOGÍA

El estudio es de tipo cualitativo y se realizó a partir de entrevistas centradas en tareas, que permiten identificar la comprensión de los estudiantes y los procesos que siguen al enfrentar una determinada tarea. Las respuestas de cada estudiante fueron analizadas como un caso, y se recurrió al método del estudio de casos múltiples para identificar patrones generales a partir del reconocimiento de semejanzas y diferencias en las concepciones de cada entrevistado (Simons, 2009).

Para el estudio, se invitó a estudiantes de maestría y doctorado que realizaban proyectos de tesis de corte cuantitativo en las áreas de ciencias sociales y administrativas, en una universidad pública mexicana. Se seleccionaron 14 estudiantes de 8 posgrados (cuatro maestrías y cuatro doctorados), procurando contar con al menos uno por posgrado y al menos tres por área disciplinar (psicología, educación, ciencias sociales y administración). Los estudiantes seleccionados cursaban semestres intermedios o avanzados, por lo que ya estaban realizando el procesamiento y análisis de datos de sus tesis. Para su selección se solicitó autorización a los coordinadores de los posgrados, a los respectivos tutores y, naturalmente, a los estudiantes, quienes firmaron un consentimiento informado.

Como ya se mencionó, la técnica utilizada fueron las entrevistas centradas en tareas. Este tipo de entrevistas, por su naturaleza, son semiestructuradas, pues tienen que dejar un margen de acción a los sujetos para que se puedan expresar las diferentes concepciones puestas en práctica y los procesos asociados a las mismas. En este caso, se consideró el análisis de datos de su investigación-tesis como la tarea a analizar, basándose en una guía de entrevista que incluía dos apartados: (a) Procedimientos de análisis de datos, y (b) Procedimientos de transnumeración. Cada entrevista se ajustó en contenido a la investigación de cada entrevistado. La guía fue diseñada por el responsable del proyecto y revisada por el resto del equipo de investigación; además, se le realizó un análisis de validez de contenido (Kerlinger & Lee, 2002) al comparar las preguntas de la guía con los planes de estudios, para identificar en qué asignaturas y semestres se consideraba alguna de las fases del ciclo investigativo y ajustar la guía según el semestre cursado por el estudiante entrevistado.

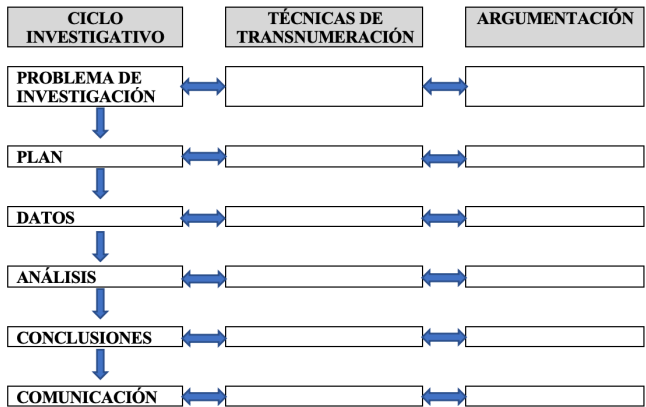
Las primeras entrevistas se realizaron a los estudiantes de la Maestría en Educación en los meses de junio y julio de 2021, pues, al estar cursando el 4° semestre, sería muy difícil contactarlos después. El resto de las entrevistas se realizaron entre marzo y septiembre de 2022. Esta amplia diferencia de tiempo se debió a que los estudiantes se encontraban en diferentes momentos de la realización de sus tesis, pues para la investigación era necesario que ya hubieran hecho un levantamiento de datos y un análisis preliminar, o al menos que tuvieran claramente definido su objeto de estudio, un plan de investigación y su respectivo plan de análisis. De las 14 entrevistas realizadas, solamente tres se hicieron de manera presencial, el resto se llevaron a cabo mediante la plataforma Microsoft Teams. Todas las entrevistas las realizó el responsable del proyecto. Las transcripciones de las entrevistas las realizaron colaboradores del proyecto en un documento Word, y estas fueron revisadas al menos dos veces por diferentes personas para garantizar que se hubieran recuperado de manera fiel las aportaciones de los entrevistados.

En cuanto a los procesos de análisis, se recurrió al análisis de protocolos verbales (Núñez & Santamarina, 2017), a partir del cual se identificaron los

principales patrones de respuesta. Para lograr esto, se solicitó a los estudiantes que durante las entrevistas mencionaran la forma en cómo realizaron sus análisis, cómo los entendían, cuáles eran sus metas, cómo justificaban los procedimientos seguidos, etc. La complejidad de las tareas de análisis reportadas por cada estudiante variaba según los objetivos de sus investigaciones, la naturaleza de sus datos, los métodos utilizados, y los niveles de dominio estadístico que poseían.

El eje central que guió el análisis de las entrevistas fue el ciclo investigativo y los procesos transnumerosos y argumentativos que los estudiantes implementaron en cada fase de dicho ciclo (ver Figura 1). De igual forma, para cada fase del ciclo investigativo se consideraron: las ideas estadísticas fundamentales que sirven de apoyo o guía a los estudiantes; el tipo y las características del contexto; las dificultades o limitaciones reportadas por los estudiantes en cada una de las fases de su proyecto; sus antecedentes académicos y laborales y cómo estos les ayudan o limitan a cierto tipos de análisis estadísticos y procedimientos de argumentación; las expresiones de tipo afectivo, como sentimientos de entusiasmo, gusto por el trabajo estadístico, o bien, de disgusto, angustia, frustración, etc. Hay que señalar que no todos estos aspectos se presentan en las y los 14 entrevistados ni a lo largo de todas las fases del ciclo investigativo, pues varían según el área disciplinar, los avances de la tesis, las experiencias formativas y profesionales previas, etc. Esto puede verse en el análisis de cada uno de los casos reportados en los resultados.

Figura 1
Ejes del análisis de las entrevistas.



Nota. Fuente: elaboración propia.

Con los elementos aportados por cada estudiante durante las entrevistas se elaboraron concentrados que dan cuenta de sus comprensiones y procedimientos, tomando como base y guía el esquema de la Figura 1. También

se identificaron las similitudes y diferencias entre los estudiantes de cada campo (educación, psicología, ciencias sociales y administración). De esta manera, se pudo considerar a cada estudiante como un caso, al igual que cada una de las áreas disciplinares (que incluye tanto un programa de maestría como de doctorado). En esto radica la utilidad de los estudios de casos múltiples: permiten reconocer las peculiaridades de las concepciones y procedimientos de cada entrevistado, pero a la vez identificar las coincidencias y diferencias por área y en general, así como los posibles factores asociados a las mismas.

RESULTADOS

A continuación, se muestran los resultados correspondientes a las entrevistas de los estudiantes de cada posgrado. Las posibilidades de análisis fueron más ricas en los estudiantes de semestres más avanzados que tenían un trabajo estadístico más completo.

De igual forma, los estudiantes de doctorado contaban con más herramientas estadísticas y de argumentación. Sin embargo, hubo diferencias importantes entre los estudiantes de las distintas áreas, lo que nos muestra los niveles de desarrollo del razonamiento estadísticos de los egresados de programas universitarios de pregrado, así como las diferentes culturas académicas que dan cuerpo a cada posgrado y que pueden estar más o menos alejadas del uso de los métodos estadísticos. Se identificaron varios procedimientos de análisis, que van desde los muy elementales (estadística descriptiva básica) hasta modelos inferenciales y multivariados. Cada uno de los casos correspondientes a los estudiantes se presentan bajo un pseudónimo. Posteriormente, se hace una valoración de los hallazgos relativos a cada uno de los posgrados.

Los posgrados en Psicología

Este grupo incluye dos estudiantes (mujeres) que cursaban el 3° semestre de la Maestría en Psicología y una en 6° semestre del Doctorado en Psicología. En cada tesis se desarrollaban temáticas diferentes, aunque coincidían en que eran propuestas de intervención; el propósito general era diseñar y probar la eficacia de cada intervención mediante métodos estadísticos.

En las tesis de las estudiantes entrevistadas, el contexto de las investigaciones, los criterios metodológicos y los modelos estadísticos utilizados, determinan el tipo de análisis y de técnicas transnumerativas. En cuanto al contexto, tenemos que las tesis de maestría tratan sobre propuestas de intervención para el cambio en el patrón de consumo de sustancias, mientras que la tesis de doctorado se enfoca al cambio de conductas agresivas en presidiarios. En lo metodológico, los tres proyectos siguen un modelo conformado por una secuencia de intervenciones (entre cinco y siete) con mediciones de pretest y posttest de cada sesión. Todas las propuestas cuentan con un respaldo

teórico que sustenta la definición de los parámetros (las variables y sus múltiples interacciones).

Con respecto a las condiciones institucionales, hay que señalar que, aunque en estos posgrados se aceptan estudios de corte cualitativo, predominan los estudios cuantitativos, que recurren al uso de instrumentos validados estadísticamente. En las Tabla 1, 2 y 3 se hace un concentrado de las principales técnicas de transnumeración utilizadas y los argumentos que dieron las estudiantes para justificar su uso.

Tabla 1
*Síntesis del análisis de la entrevista a **Katy** (Maestría en Psicología)*

CICLO INVESTIGATIVO	TÉCNICAS DE TRANSNUMERACIÓN	ARGUMENTOS
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	- Selección de subconjuntos de los datos.	Se centra en medir las variables de: pensamiento episódico futuro, escala de adherencia terapéutica, datos antropométricos, descuento por demora, descuento temporal.
PLAN	- Clasificación y ordenación de datos.	El proceso de recuperación de información se centra en los registros semanales de las sesiones (pre y post de las intervenciones).
DATOS	- Agrupamiento de datos en tablas. - Gráficas de hipérbole.	Se sustenta en la evaluación de los resultados y sus implicaciones para demostrar la eficiencia de la intervención.

Nota. En el momento de la entrevista la intervención psicológica no estaba concluida, por lo que no había elementos para valorar las fases de análisis, conclusiones y comunicación. Fuente: elaboración propia.

Tabla 2

*Síntesis del análisis de la entrevista a **Esther** (Maestría en Psicología)*

CICLO INVESTIGATIVO	TÉCNICAS DE TRANSNUMERACIÓN	ARGUMENTOS
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	- Definición y operacionalización de variables. - Análisis y asociación de variables.	Se busca estimar la prevalencia de factores de riesgo psicosociales asociados al comportamiento, comparar tamaños del efecto, analizar el papel de adquisición de las habilidades que se desarrollan y comparar y evaluar la adherencia a cada uno de los tratamientos.
PLAN	- Adaptación de instrumentos. - Tamizaje y detección de factores psicosociales y ensayo clínico. - Análisis de validez y confiabilidad (Alfa de Cronbach). - Análisis factorial exploratorio.	El centro de atención es la evaluación a través de un tamizaje para detectar factores psicosociales de riesgo, y a partir de esto, implementar las intervenciones y analizar los valores del efecto.
DATOS	- Medición de variables mediante los instrumentos. - Clasificación y ordenación de datos.	Se centra en los cálculos de cada una de las variables y los puntajes de cada instrumento del ensayo clínico.
ANÁLISIS	- Análisis de validez y confiabilidad. - Elaboración de tablas de eficacia.	Se recurre a medias y desviación estándar para la evaluación pretratamiento y postratamiento y posteriormente a nivel intragrupo, y cálculos de tamaños del efecto.
CONCLUSIONES	- Presentación de resultados con tres coeficientes. - Comparación de resultados.	El sustento final es estadístico, mediante tablas de resultados comparativos entre programas y por grupos.
COMUNICACIÓN	Adaptación del instrumento.	Una aportación final es la adaptación de los instrumentos, lo que se divulgó en un artículo.

Nota. Fuente: elaboración propia.

Tabla 3
Síntesis del análisis de la entrevista a Norma (Doctorado en Psicología)

CICLO INVESTIGATIVO	TÉCNICAS DE TRANSNUMERACIÓN	ARGUMENTOS
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	Se contempla la medición de las variables de interés mediante varios test de personalidad, lo que se complementa con entrevistas.	Para demostrar la existencia de los factores de interés, se recurre a mediciones mediante instrumentos confiables y válidos.
PLAN	Se tiene un diseño pretest-postest, con una intervención para la modificación de determinadas conductas.	Se reconoce de entrada las limitantes de este tipo de tratamientos, con expectativas de cambio modestas, pero estadísticamente significativas.
DATOS	Se consideran los datos tal y como son medidos por los test.	El énfasis está en los parámetros técnicos de los instrumentos.
ANÁLISIS	Para los análisis multivariados previstos, es necesario hacer reagrupaciones en los valores de las variables medidas.	Se fundamentan los análisis realizados en el modelo estadístico multivariado utilizado.
CONCLUSIONES	Se parte de los resultados finales.	La eficacia de la intervención se sostiene en las medidas (efectos de las sesiones de intervención) y el modelo multivariado.
COMUNICACIÓN	Se publicó un artículo con los principales resultados, mostrando la confiabilidad del modelo de intervención.	Prevalecen los elementos metodológicos y estadísticos.

Nota. Fuente: elaboración propia.

En general, en los tres casos (Tabla 1, Tabla 2 y Tabla 3) se encontraron diferentes niveles de dominio de los conceptos y modelos estadísticos. Una de las estudiantes de maestría demostró un nivel más limitado en sus conocimientos estadísticos, y aunque su investigación mostraba avances considerables en la descripción de sus variables, no tenía aún claridad sobre el procedimiento que le permitiera integrar y validar todos sus datos, y con ello validar las diferencias significativas entre los valores del pretest y postest de cada sesión y del total de ellas. En cambio, las otras dos estudiantes sí demostraron un mayor conocimiento de modelos estadísticos inferenciales y multivariados, y tenían contemplado realizar un análisis de ecuaciones estructurales.

Prácticamente, todas las técnicas transnumerativas implementadas por estas estudiantes se orientaban a la creación o modificación de variables por

medio de reclasificaciones y agrupamientos. También recurrieron al cálculo de medidas de resumen, como las medidas de frecuencia (absoluta y relativa) y de tendencia central. Era muy extenso el uso de tablas y gráficas para mostrar los resultados de los participantes de las intervenciones (registros por sesión, concentrados para resumir diferentes sesiones, etc.). Estos análisis iniciales les permitieron conocer las principales tendencias de los valores de las variables y calcular algunas correlaciones, aunque todo esto tenía como meta llegar a los análisis multivariados. Al cuestionarles sobre los diferentes procedimientos utilizados y su razón de ser, las entrevistadas tuvieron la oportunidad de reflexionar sobre el camino emprendido y sus fundamentos, por lo que finalmente la entrevista tuvo un efecto confirmador de los procedimientos desarrollados, aunque en algunos casos les ayudó a identificar aspectos poco claros.

Como se aprecia en los argumentos (tercera columna de las Tabla 1, 2 y 3), hay una considerable incidencia de elementos metodológicos asociados a los conceptos y procedimientos estadísticos. En los tres casos se cuenta con instrumentos de medición ya probados y validados, con procedimientos psicométricos y metodológicos bien establecidos, como la planeación de un *pretest* y *postest*, etc.

Los posgrados en Educación

En este grupo se incluyeron tres estudiantes (dos mujeres y un hombre) del 4° semestre de la Maestría en Educación y dos del 6° semestre del Doctorado en Educación (mujeres). Los análisis estadísticos de cada tesis mostraban desarrollos desiguales debido a la naturaleza y avances de cada proyecto, pero también a las diferentes comprensiones y dificultades de las y el estudiante. Cabe mencionar que los estudiantes en general no mostraron conocimientos estadísticos muy sólidos debido, en parte, a sus estudios de pregrado (los cinco provenían del área de la educación, pedagogía y humanidades).

El contexto de cada tesis es diferente (percepción sobre la transdisciplinariedad, actitudes hacia la inclusión escolar de personas con discapacidad, valoración sobre la educación normal, enseñanza de la escritura en estudiantes de pregrado, percepción sobre la integridad académica), pero coinciden en lo metodológico por ser en su mayoría estudios diagnóstico de carácter descriptivo (aun cuando algunos se aproximan al análisis inferencial y multivariado). Todas las tesis comienzan con un apartado teórico que ayuda a explicar el comportamiento de las variables incluidas. En estos posgrados se fomentan tanto los estudios cuantitativos como los cualitativos, aunque predominan los segundos. Las Tablas 4, 5, 6, 7 y 8 muestran los concentrados de cada estudiante.

Tabla 4
*Síntesis del análisis de la entrevista a **Aurora** (estudiante de la Maestría en Educación)*

CICLO INVESTIGATIVO	TÉCNICAS DE TRANSNUMERACIÓN	ARGUMENTOS
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	El plan es reducir los fenómenos de interés a datos numéricos medidos con un cuestionario y una escala de actitudes.	Son principalmente teóricos, con respaldo metodológico.
PLAN	Diseño de escalas de actitudes con dimensiones y subdimensiones.	Prevalecen los argumentos estadísticos y metodológicos.
DATOS	Hay una preocupación por el diseño de instrumentos y la medición de las variables.	Prevalecen los argumentos estadísticos.
ANÁLISIS	-Cálculo de las dimensiones y subdimensiones de la escala de actitudes. -Elaboración de tablas bivariadas. -Análisis de correlación entre la variable actitud y variables intervinientes (cálculo de coeficientes).	Se busca una relación entre los datos estadísticos y los elementos teóricos.
CONCLUSIONES	Resalta las tendencias de las variables medidas y la fuerza e intensidad de las correlaciones.	Estadísticos.
COMUNICACIÓN	Se recurre principalmente a las representaciones tabulares y a narraciones descriptivas respaldadas en los valores obtenidos.	Estadísticos, teóricos y contextuales

Nota. Fuente: elaboración propia.

Tabla 5

*Síntesis del análisis de la entrevista a **Susana** (estudiante de la Maestría en Educación)*

CICLO INVESTIGATIVO	TÉCNICAS DE TRANSNUMERACIÓN	ARGUMENTOS
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	Definición y operacionalización de variables.	Metodológicos, estadísticos y teóricos.
PLAN	- Agrupación y reagrupación de variables. - Medidas de resumen. - Uso de modelo factorial.	Estadísticos.
DATOS	- Clasificación y organización de datos. - Creación de nuevas variables, por reagrupación y sumatorias.	Estadísticos.
ANÁLISIS	- Descripción de cada ítem (frecuencias, tendencia central y dispersión). - Análisis de normalidad. - Análisis de confiabilidad (Alfa de Cronbach). - Análisis factorial. - Elaboración de tablas de frecuencias absolutas y relativas. - Medidas de resumen (tendencia central y dispersión). - Elaboración de Tablas bivariadas. - Cálculo de coeficientes de correlación.	Estadísticos y metodológicos.
CONCLUSIONES	Recuperar información relevante mediante medidas de resumen, de las variables más relevantes y de las correlaciones más significativas.	Teóricos, contextual y estadísticos.
COMUNICACIÓN	Reconstrucción de tablas, integrando información de diferentes tablas, en tablas más sintéticas. Eliminación de tablas con información redundante.	Estadísticos, pero con énfasis en lo contextual.

Nota. Fuente: elaboración propia.

Tabla 6
Síntesis del análisis de la entrevista a Miguel (estudiante de la Maestría en Educación)

CICLO INVESTIGATIVO	TÉCNICAS DE TRANSNUMERACIÓN	ARGUMENTOS
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	Se parte de una problemática y de variables específicas.	Contextuales.
PLAN	Definición constitutiva y operacional de las variables.	Metodológicos.
DATOS	-Medición de variables nominales y ordinales. -Reclasificación de algunas variables.	Estadísticos y metodológicos.
ANÁLISIS	-Elaboración de tablas de frecuencias absolutas y relativas. -Medidas de resumen (tendencia central y dispersión). -Tablas bivariadas. -Cálculo de coeficientes de correlación.	Estadísticos.
CONCLUSIONES	Se resalta lo más relevante con medidas de resumen, correlaciones y tablas.	Se apoya en datos teóricos y contextuales, para complementar los argumentos estadísticos.
COMUNICACIÓN	Construcción de tablas, gráficas y medidas de resumen.	Teóricos, contextuales y estadísticos.

Nota. Fuente: elaboración propia.

Tabla 7*Síntesis del análisis de la entrevista a Isabel (estudiante del Doctorado en Educación)*

CICLO INVESTIGATIVO	TÉCNICAS DE TRANSNUMERACIÓN	ARGUMENTOS
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	Se parte de una problemática definida conceptualmente.	Teóricos y contextuales.
PLAN	Se establecen varias rutas para obtener información cuantitativa y cualitativa.	Metodológicos.
DATOS	- Hay un rediseño de un cuestionarios y escalas para medir las variables de interés, con énfasis en la validación. - Con los datos originales se generan otras variables por agrupación y medidas de resumen.	Estadísticos y metodológicos.
ANÁLISIS	- Se privilegian los análisis descriptivos: frecuencias, porcentajes, medidas de tendencia central. - Se buscan relaciones entre variables con un análisis de correlación y de comparación de medias.	Estadísticos (análisis univariados y bivariados).
CONCLUSIONES	Se recuperan los datos más significativos, que son principalmente descriptivos.	Principalmente teóricos y contextuales, con respaldo estadísticos.
COMUNICACIÓN	Se resaltan las principales tendencias de las variables centrales.	Teóricos y contextuales.

Nota. Fuente: elaboración propia.

Las y el estudiante de los posgrados en educación se enfocan en los análisis descriptivos de sus variables, lo que se puede traducir en la descripción de la existencia y magnitud del fenómeno de interés en cada tesis. En algunos casos, el análisis descriptivo se complementa con análisis de correlación. Hay que señalar que estos análisis descriptivos son muy detallados, casi exhaustivos, en los diferentes valores de las variables incluidas en sus tesis. Un aspecto que sobresale en los estudiantes es su preocupación por la validez y confiabilidad de los instrumentos utilizados, lo que se refleja en la realización de los correspondientes análisis de validación (como por el ejemplo el Alfa de Cronbach y el análisis factorial). Tal preocupación coincide

con uno de los énfasis que tienen estos posgrados en la construcción y validación de instrumentos como cuestionarios, escalas y pruebas.

Tabla 8
*Síntesis del análisis de la entrevista a **Patricia** (estudiante del Doctorado en Educación)*

CICLO INVESTIGATIVO	TÉCNICAS DE TRANSNUMERACIÓN	ARGUMENTOS
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	Inicialmente se contempló la recopilación de datos en el contexto de un experimento de enseñanza, el que sufrió modificaciones a lo largo del estudio.	Metodológicos.
PLAN	Obtención de datos de pre-test y post-test en un grupo experimental y grupo control.	Metodológicos.
DATOS	Se obtuvo información cuantitativa de dos grupos, con varios instrumentos y en varios momentos a lo largo de un semestre.	Estadísticos y metodológicos.
ANÁLISIS	Se realizaron varios análisis al interior de cada grupo y para comparar los dos grupos. Para esto fue necesario obtener varios índices con base en los datos originales.	Estadísticos.
CONCLUSIONES	Comparaciones de medias e índices, intragrupo y entre grupos.	Estadísticos y teóricos.
COMUNICACIÓN	Tablas y gráficas que resumen las principales tendencias de los datos.	Estadísticos, teóricos y contextuales.

Nota. Fuente: elaboración propia.

Como se puede apreciar en las tablas anteriores (Tabla 5, Tabla 6, Tabla 7, Tabla 8) las principales técnicas transnumerativas utilizadas se refieren al cálculo de medidas de resumen (frecuencias, porcentajes y tendencia central) y a las diferentes posibilidades de representación de los datos, donde se intenta resaltar algún aspecto de interés con el apoyo de variados estilos de tablas y gráficas.

Entre los argumentos que ofrecen los estudiantes de los posgrados en educación para justificar sus procesos de análisis, prevalecen los de carácter

metodológico y estadísticos, seguidos de los argumentos de tipo teórico y contextuales. Esto quiere decir que las decisiones sobre las posibilidades analíticas tienen diferentes tipos de respaldos más allá de los procedimientos estadísticos. Es de resaltar que los argumentos teóricos y contextuales son utilizados principalmente en las primeras y últimas fases del ciclo investigativo.

Los posgrados en Ciencias Sociales

En este bloque se incluyó a un estudiante de Maestría (hombre) y dos de Doctorado (mujeres). Los tres estudiantes realizaban estudios de carácter mixto (modelo en paralelo, en los que tanto la información cuantitativa como la cualitativa, sin prevalecer uno de ellos, sirve para describir y explicar el fenómeno en estudio), ya que en estos posgrados predominan los estudios cualitativos. Los entrevistados mostraban una preferencia por los estudios cuantitativos por su formación académica previa (en economía dos de ellos, y en ciencias políticas la tercera).

Tabla 9

*Síntesis del análisis de la entrevista a **Alex** (estudiante de la Maestría en Ciencias Sociales)*

CICLO INVESTIGATIVO	TÉCNICAS DE TRANSNUMERACIÓN	ARGUMENTOS
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	Definición y operacionalización de variables.	Impacto de calidad de vida de las personas que conviven en contextos de violencia e inseguridad.
PLAN	Definición de variables, a partir de criterios teóricos y contextuales.	Medición de variables utilizando datos estadísticos gubernamentales y entrevistas.
DATOS	Medición de las variables, de manera directa e indirecta (a partir de bases de datos existentes): número de hechos violentos, calidad de vida.	Se consideran la elaboración de series de tiempo (según el año de levantamiento de las encuestas).
ANÁLISIS	Utilización del modelo econométrico en series de tiempo.	Utilización de un modelo econométrico de datos de panel y análisis de entrevistas.
CONCLUSIONES	Se esperaría mostrar correlaciones significativas.	Mostrar cuantitativamente una “radiografía” de la afectación de la calidad de vida de las personas y el crecimiento económico.
COMUNICACIÓN	Una meta es depurar los análisis para hacer evidentes las relaciones entre variables.	Hay un énfasis estadístico y teórico, pero también contextual.

Nota. Fuente: elaboración propia.

Los tres estudiantes hicieron uso de bases de datos institucionales (generadas por encuestas o estudios de organismos gubernamentales nacionales y estatales), aunque en dos casos también se consideraron datos obtenidos directamente por ellos.

El tema tratado por el estudiante de maestría tenía que ver con la violencia e inseguridad, mientras que en las tesis de doctorado, una abordaba la problemática de la pobreza y su impacto en la calidad de vida, y la otra la percepción de la corrupción. Las Tabla 9, 10 y 11 muestran los rasgos más sobresalientes.

Tabla 10
*Síntesis del análisis de la entrevista a **Julia** (estudiante del Doctorado en Ciencias Sociales)*

CICLO INVESTIGATIVO	TÉCNICAS DE TRANSNUMERACIÓN	ARGUMENTOS
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	Definición y operacionalización de variables.	Acercamiento a personas en situación de pobreza y su percepción.
PLAN	Integración de bases de datos.	Fuentes de información como INEGI, CONEVAL, DIF.
DATOS	Organización de la información estadística para la toma de decisiones.	Información del contexto y de estadísticas.

Nota. En el momento de la entrevista, aún no se realizaban los análisis. Fuente: elaboración propia.

Tabla 11
*Síntesis del análisis de la entrevista a **Selene** (estudiante del Doctorado en Ciencias Sociales)*

CICLO INVESTIGATIVO	TÉCNICAS DE TRANSNUMERACIÓN	ARGUMENTOS
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	Definición y operacionalización de variables.	Análisis del comportamiento de denunciantes potenciales de actos de corrupción en la administración pública.
PLAN	Clasificación.	Recategorización de variables de la base de datos.
DATOS	- Organización de los datos. - Elaboración de gráficas con preguntas de interés.	Base de datos de una dependencia del gobierno federal.
ANÁLISIS	- Variación. - Utilización de modelos de relación entre dos variables. - Modelos de regresión.	Análisis descriptivo e inferencial.

Nota. En el momento de la entrevista, la estudiante tenía los análisis preliminares, por lo que aún no tenía conclusiones. Fuente: elaboración propia.

El estudiante de maestría y las estudiantes de doctorado mostraron avances detallados de análisis descriptivos, y tenían previsto realizar análisis multivariados (modelos econométricos y modelos de regresión), por lo que el propósito de sus primeras observaciones fue identificar las tendencias y propiedades de las variables que les permitieran poner a prueba sus modelos multivariados, al igual que una primera descripción de sus variables. Aún estaban en fase de completar, limpiar y adecuar sus bases de datos para poder realizar los análisis multivariados, por lo que habían hecho uso de diferentes técnicas transnumerativas de modificación y de creación de variables. Parte de sus análisis descriptivos tenían la intención de validar sus variables modificadas o creadas. Cabe mencionar que, aunque sus asesores de tesis no contaban con conocimientos estadísticos, los estudiantes no tenían dificultades con el análisis estadístico, gracias a su formación previa.

En cuanto a los argumentos ofrecidos por los estudiantes, hay un equilibrio entre consideraciones de tipo metodológico, estadístico, teórico y contextual, con un énfasis en los dos últimos. Llama la atención el uso de modelos estadísticos y econométricos más avanzados para respaldar sus argumentos, en comparación con los estudiantes de los posgrados en educación.

Los posgrados en Administración

En esta área se consideró a un estudiante de sexo masculino en 3° semestre de la Maestría en Administración y a dos estudiantes del Doctorado en Administración, una mujer y un hombre que cursaban el 6° y último semestre. En estos posgrados prevalecen los estudios cuantitativos, de hecho, se espera que todos los estudiantes incluyan en sus análisis los modelos de ecuaciones estructurales, y que los resultados de las investigaciones de tesis tengan un uso práctico y cumplan con criterios metodológicos y estadísticos rigurosos. La temática tratada por el estudiante de maestría era el uso de redes sociales para las ventas en PYMES, mientras que una de las tesis de doctorado trataban sobre la responsabilidad social de los consumidores, y la otra el tema de la cultura organizacional y la sustentabilidad (ver Tabla 12, 13 y 14).

En estos posgrados hay un interés por que las tesis tengan un impacto en los procesos productivos o de mercadeo de las empresas objeto de sus estudios; esto va de la mano del objetivo académico de generación de conocimientos especializados, el cual se tiene que reflejar en la producción y publicación de artículos científicos. Como buena parte de los datos utilizados por estos estudiantes procedían de fuentes secundarias, se tuvieron que aplicar varios procedimientos de modificación y creación de variables (por agrupación, clasificación, cálculo de índices). En concordancia con las exigencias en estos posgrados, los tres estudiantes tenían previsto hacer análisis multivariados, ya fuera de regresión o modelos de ecuaciones estruc-

turales. Los análisis previos a estos tenían como propósito hacer una descripción de las variables y verificar la posibilidad de realizar dichos análisis multivariados (por ejemplo, las pruebas de normalidad).

Tabla 12
*Síntesis del análisis de la entrevista a **Agustín** (estudiante de la Maestría en Administración)*

CICLO INVESTIGATIVO	TÉCNICAS DE TRANSNUMERACIÓN	ARGUMENTOS
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	Definición de variables e indicadores.	Recorre al análisis de factibilidad de las redes sociales para las ventas y permanencia de las PYME.
PLAN	Clasificación.	Priorización de la información encontrada en fuentes secundarias y en la importancia de realizar encuestas.
DATOS	Análisis descriptivo de todas las variables para seleccionar luego algunos rasgos relevantes).	Datos de promedios y la media de consumo.
ANÁLISIS	Análisis descriptivo, considerando diferentes niveles de generalidad.	Datos del contexto y de las bases de datos.
CONCLUSIONES	Recuperación de información relevante mediante análisis de la información.	Resultados del análisis de mercado.
COMUNICACIÓN	Integración de datos relevantes para la toma de decisiones.	La investigación dará como resultados un Manual de procedimientos.

Nota. Fuente: elaboración propia.

Tabla 13

*Síntesis del análisis de la entrevista a **Eduardo** (estudiante del Doctorado en Administración)*

CICLO INVESTIGATIVO	TÉCNICAS DE TRANSNUMERACIÓN	ARGUMENTOS
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	Relación entre constructos y correlación entre variables.	Relación entre responsabilidad social y el comportamiento del consumidor.
PLAN	- Definición y operacionalización de variables. - Agrupación de variables.	Formación de constructo y dimensiones.
DATOS	- Clasificación y organización de datos. - Elaboración de mapas de interacción de variables.	Medición de variables mediante un cuestionario para la recolección de información.
ANÁLISIS	- Análisis de confiabilidad (Alfa de Cronbach). - Construcción de Ecuaciones estructurales. - Cálculo de medias por ítems y agrupamiento de variables.	- Cumplimiento de requerimientos para realizar los análisis (datos sin colinealidad). - Obtención de medias de ítems que generan nuevas variables.
CONCLUSIONES	Reafirmación de constructos.	Constructo con sustento teórico y con base de datos.
COMUNICACIÓN	- Elaboración de tablas con información de valor de la media de los ítems. - Elaboración de gráficas. - Análisis de regresión lineal múltiple.	-Presentación de información de calificación más alta y más baja. -Ecuaciones estructurales representadas en gráficas. -Presentación de resultados por medio de un artículo.

Nota. Fuente: elaboración propia.

En los argumentos ofrecidos por estos estudiantes para justificar y orientar sus análisis (Tabla 12, Tabla 13 y Tabla 14), encontramos una amalgama de criterios teóricos, contextuales, metodológicos y estadísticos. Se aprecia una preocupación metodológica que pretende lograr el mayor rigor posible de la mano de los criterios estadísticos, y cuidando no perder la relevancia de los datos para el contexto de interés.

Similitudes y diferencias entre los cuatro posgrados

Como se señaló en el apartado metodológico, cada estudiante puede ser considerado un caso, pero también la visión de cada posgrado nos aporta

información relevante. La comparación de todos los casos (ya sean individuales o por posgrado) es parte de la metodología de casos múltiples, por lo que a continuación señalamos lo más relevante de dicha comparación.

Tabla 14
Síntesis del análisis de la entrevista a Gloria (estudiante del Doctorado en Administración)

CICLO INVESTIGATIVO	TÉCNICAS DE TRANSNUMERACIÓN	ARGUMENTOS
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	Identificación de variables.	Impacto de Cultura Organizacional, calidad y rentabilidad en la sostenibilidad.
PLAN	- Definición y operacionalización de variables. - Estadística descriptiva.	Utilización de escalas Likert y análisis de laboratorio.
DATOS	- Gráficas. - Agrupamiento de variables.	Obtención de polígonos y agrupación de variables.
ANÁLISIS	- Análisis estadístico descriptivo. - Análisis factorial confirmatorio. - Uso del modelo de Ecuaciones estructurales.	Validación de información confiable.
CONCLUSIONES	Relación de variables.	- Cumplimiento de los objetivos. - Obtención de resultados esperados.
COMUNICACIÓN	Integración de información relevante.	Elaboración de propuesta plan de trabajo para ser aplicado en la empresa analizada.

Nota. Fuente: Elaboración propia.

En los posgrados en Administración hay una consigna puntual a los estudiantes para que realicen análisis multivariados de ecuaciones estructurales. Caso similar sucede en los posgrados en Psicología, aunque no es algo obligatorio para todos (también se aceptan estudios cualitativos). Es interesante el caso de los estudiantes de los posgrados en Ciencias Sociales que, aunque se encuentran en un contexto académico que privilegia la argumentación con base en la teoría, tienen una preocupación por demostrar la validez y fortaleza estadística de sus resultados y conclusiones, y esto se debe, sin duda, a los antecedentes académicos y laborales de los estudiantes. En los posgrados en Psicología y en Administración hay un interés por que los estudiantes, que hacen estudios cuantitativos, incluyan análisis multivariados de ecuaciones estructurales. En los posgrados en Educación, una tradición en estudios cuantitativos fue dando paso a los estudios cualitativos, pero aún

prevalece un interés por el diseño y validación de instrumentos de medición cuantitativos. Un caso especial son los posgrados en Ciencias Sociales, en donde a pesar de tener un enfoque eminentemente cualitativo, se da apertura a estudios cuantitativos que realizan estudiantes que tienen antecedentes sólidos en el análisis estadístico.

En todos los casos (ya sea considerados como individuos o por posgrado) vemos que los argumentos ofrecidos para fundamentar u orientar las decisiones tomadas a lo largo del proceso de investigación, no son exclusivamente estadísticos. Se aprecia una fuerte interacción entre los criterios estadísticos y los metodológicos. Los elementos contextuales y teóricos también juegan un papel clave, en especial en el momento inicial de la investigación (planeación), que es donde se definen (constitutiva y operacionalmente) las variables que habrán de ser medidas, y se esboza (en unos casos con mucha claridad) las eventuales relaciones esperadas. En la fase de análisis y de comunicación de resultados se aprecia la prevalencia de elementos contextuales y teóricos, dado que se espera empatar los datos obtenidos y analizados con la realidad inicial que da sentido a dicha información estadística y con los modelos teóricos que intentan explicarla.

DISCUSIÓN

El análisis de la transnumeración puede tener al menos tres vertientes no excluyentes entre sí (considerando los criterios de Cazorla et al. 2021, Chick, 2004, y Biehler et al., 2018): (a) reelaboración de la presentación de los datos como estrategia de procesamiento de las bases de datos (agrupación de los valores de las variables, creación de variables nuevas, reasignación de códigos, etc.); (b) buscar tendencias o patrones en los datos mediante técnicas de análisis descriptivo o inferencial; (c) diseñar recursos tabulares o gráficos para comunicar con claridad los resultados y lograr una mayor plausibilidad de sus pruebas (lo cual puede establecerse a partir de los datos mismos, el contexto o la teoría). En las y los estudiantes entrevistados hay un dominio básico de técnicas de modificación y creación de variables a partir de otras, esto como un requerimiento para poder limpiar y adecuar las bases de datos, ya sea que se obtengan directamente por las y los estudiantes mediante encuestas (en la mayoría de los casos) o bases de datos de fuentes indirectas, como las correspondientes a estudios realizados por organismos gubernamentales (gobierno federal, gobiernos estatales, dependencias de gobierno, etc.).

Además de las técnicas transnumerativas señaladas por Chick (2004) relativas a la modificación de variables (clasificar, agrupar), se identificaron en todos los entrevistados otras técnicas como la realización de cálculos (frecuencias, porcentajes, tendencia central, principalmente) y el uso de diferentes tipos de representación tabular y gráfica (Cazorla et al., 2021).

También se identificaron, con diferentes niveles de complejidad según el posgrado, procesos de transnumeración que requieren de modelos de análisis más complejos (de relación causal y multivariados), y que demuestran el uso de la modelación como otro tipo especial de razonamiento estadístico (Hernández et al., 2023; Wild & Pfannkuch, 1999).

En cuanto a la búsqueda de tendencias o patrones en los resultados, se tienen al menos dos procesos. El primero es eminentemente descriptivo y lo realizan la mayoría de las y los estudiantes entrevistados, consistente en el análisis de diferentes cálculos (frecuencias, tendencia central, dispersión) de una o más variables conjuntamente, y que permite identificar la magnitud y dirección de las variables medidas. El segundo de los procesos tiene que ver con el uso de modelos que explican la interacción entre variables, como los modelos de regresión o de ecuaciones estructurales, al que hicieron referencia los estudiantes de los posgrados en psicología, ciencias sociales y administración. Alvarado et al. (2018) señalan que la mayoría de los estudiantes participantes en su estudio mostraron la capacidad para hacer un análisis descriptivo detallado, aunque encontraron ciertas limitaciones para hacer análisis inferenciales y multivariados. En el caso de los estudiantes de posgrado que estaban realizando análisis más complejos, aunque sus niveles de comprensión eran diferentes, todos tenían claridad de la razón de ser de dichos análisis y de cómo proceder; en parte esto era gracias a su formación previa o al apoyo que sus profesores y tutores les brindaban, y al existir acuerdos colegiados para el uso de dichos modelos analíticos inferenciales y multivariados.

En los procesos de cambio de representación (usos de diferentes tipos de gráficas o tablas) no prevalecen los criterios estéticos, por el contrario, hay una orientación hacia lograr una mayor claridad y robustez en los argumentos. Es importante señalar que esta búsqueda de claridad se da primero hacia el mismo estudiante, como una estrategia dirigida a una comprensión personal de sus resultados, para poder comunicarlos después a otros, como un mecanismo de reflexión que se explicita con el apoyo de diferentes representaciones. Esta función de la transnumeración como una comunicación consigo mismo es parte de su función como razonamiento estadístico, según lo muestran Cazorla et al. (2021) y Chick et al. (2005).

En cuanto a las comprensiones sobre las ideas estadísticas fundamentales (Burrill & Biehler, 2011), hay un predominio de: datos, representaciones y asociaciones. Considerando que los entrevistados aún no concluían los análisis de datos de sus tesis, sus principales avances tenían que ver con los análisis univariados y de correlación. Se identificó en todas y todos los participantes el reconocimiento de la importancia de un muestreo adecuado, independientemente de las fuentes de sus bases de datos. Solamente la mitad de las y los entrevistados tenían contemplado como parte de sus análisis la

aplicación de algún modelo inferencial. Un aspecto que llama la atención es que al menos en la mitad de los estudiantes no señalaran de manera explícita las nociones de variación y distribución. Esto puede deberse a la dificultad de los estudiantes para hacer comparaciones entre conjuntos de datos a partir de los valores de variación, como lo reportan Rahmatina et al. (2020). Considerando la relevancia del reconocimiento de la variabilidad (como un rasgo de la realidad) y la variación (como medición estadística) para el razonamiento estadístico (Contreras & Molina-Portillo, 2019b), habría que reforzar el análisis de estos aspectos en los cursos de estadística y metodología para su aplicación en la investigación-tesis.

Otro aspecto a resaltar es que en los diferentes posgrado se cuenta con comunidades académicas con criterios y prácticas bien establecidas, que tienen definidas líneas de generación y aplicación del conocimiento, con encuadres epistemológicos y metodológico claros (que pueden ser afines a los acercamientos cuantitativos o a los cualitativos y sus múltiples variantes). En estas prevalecen diferentes criterios que deben cubrir las tesis de los estudiantes, ya sea que se dé un mayor peso a los elementos teóricos o a los metodológicos y técnicos, y, por lo tanto, a los análisis estadísticos. Esto concuerda con estudios que hablan de la importancia de considerar como parte del análisis estadístico el contexto disciplinar y profesional que sirve de marco explicativo a un conjunto de datos (Berndt et al., 2021; Nóbrega & Da Rocha, 2019).

CONCLUSIONES

Si la estadística es fundamental para el nivel de pregrado, lo es más para los programas de posgrado, sobre todo para aquellos orientados a la investigación. En este nivel, lo más común es que se complementen los cursos de estadística con materias de metodología cuantitativa que favorezcan la comprensión de los conceptos y modelos estadísticos y su aplicación, siempre y cuando se busquen las coincidencias en el momento de su implementación. Un correcto diseño curricular puede favorecer la sinergia entre los cursos de estadística y metodología, lo mismo que un adecuado plan de investigación que deba seguir cada estudiante al elaborar su tesis. Conocer y comprende la manera en que los estudiantes integran sus saberes estadísticos, metodológicos, de redacción académica e incluso teóricos (la o las teorías de referencia de sus tesis), lo mismo que los procesos, sus comprensiones, las dificultades y limitaciones, nos ayudarán a tener elementos que permitan ofrecer recomendaciones a futuro de tipo curricular y didáctico.

En cuanto a lo curricular, hay que cuidar el orden y la secuencia en que se presenten las asignaturas para que se favorezca la implementación del ciclo investigativo a través de los semestres de cada posgrado. También es importante que en las asignaturas se establezcan con claridad los nexos entre

ellas, en especial entre los cursos de estadística y metodología cuantitativa, para que puedan complementarse y enriquecerse.

En cuanto a lo didáctico, las propuestas se pueden enfocar a los cursos de estadística y metodología cuantitativa, así como al proceso de tutoría que acompaña a los estudiantes a lo largo de la elaboración de sus tesis. Una tesis implica en sí misma un proceso de enseñanza basado en proyectos. Los cursos de metodología y de estadística pueden partir de la elaboración de proyectos que sirvan de modelo para lo que posteriormente se hará en las tesis, o incluso se puede hacer uso de los datos obtenidos como parte de ellas. Las necesidades estadísticas y metodológicas particulares (como el conocimiento de algún procedimiento especializado) se pueden incluir mediante seminarios y talleres complementarios.

La formación disciplinar en los programas de posgrado tiene que fortalecerse con una sólida formación estadística y metodológica, que ofrezca a los futuros investigadores las herramientas de construcción de evidencias empíricas que les permitan enfrentar y desarrollarse plenamente en el mundo académico que cada vez exige más cantidad de productos y, a la vez, de mayor calidad.

REFERENCIAS

- Alvarado, H.A., Galindo, M.K., & Retamal, M.L. (2018). Evaluación del aprendizaje de la estadística orientada a proyectos en estudiantes de ingeniería. *Educación Matemática*, 30(3), 151–183. <https://doi.org/10.24844/EM3003.07>
- American Statistical Association. (2016). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE), College Report 2016*. American Statistical Association. <https://bit.ly/3Rm6l4V>
- Bañales, G., Vega, N.A., Reyna, A., Pérez, E.G., & Rodríguez, B. S. (2014). La argumentación escrita en las disciplinas: retos de alfabetización de los estudiantes universitarios. *Revista Internacional de Ciencias Sociales y Humanidades. SOCIOTAM*, XXIV(2), 29–52. <https://bit.ly/3sF8Km7>
- Berndt, M., Schmidt, F.M., Sailer, M., Fischer, F., Fischer, M.R., & Zottmann, J.M. (2021). Investigating statistical literacy and scientific reasoning & argumentation in medical, social sciences, and economics students. *Learning and Individual Differences*, 86(2), 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2020.101963>
- Biehler, R., Frischemeier, D., Reading, C., & Shaughnessy, M. (2018). Reasoning About Data. En D. Ben-Zvi, & J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 139–192). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_5
- Burrill, G., & Biehler, R. (2011). Fundamental Statistical Ideas in the School Curriculum and in Training Teachers. En C. Batanero, G. Burril, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics—Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 57–69). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_10

- Cazorla, I.M., Cardoso, M., & Ferreira Monteiro, C.E. (2021). Dos dados brutos à informação: o papel das técnicas transnumerativas no ensino de Estatística. *Educação Matemática Pesquisa*, 23(4), 109–139. <https://doi.org/10.23925/983-3156.2021v23i4p109-139>
- Chick, H.L. (2004). Tools for transnumeration: Early stages in the art of data representation, Mathematics education for the third millennium. En I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 167–174). MERGA. <https://bit.ly/467IKQa>
- Chick, H.L., Pfannkuch, M., & Watson, J.M. (2005). Transnumerative thinking: finding and telling stories within data. *Curriculum Matters*, 1, 86–108. <https://doi.org/10.18296/cm.0063>
- Contreras, J.M., & Molina-Portillo, E. (2019a). Alfabetización estadística. 25 años de la evolución de un término. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 100(1), 35–38. <https://bit.ly/3Eyim4T>
- Contreras, J. M., & Molina-Portillo, E. (2019b). Elementos clave de la cultura estadística en el análisis de la información basada en datos. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, & E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1–12). CIVEEST. <https://bit.ly/3Ze4kif>
- Damilano, G., & Rigo, D. (2019). Desafíos de la educación estadística en ciencias sociales. *Contextos de Educación*, 26(19), 151–161. <https://bit.ly/3RgAcAZ>
- Del-Callejo-Canal, D., Canal-Martínez, M., & Hákim-Krayem, M.R. (2020). Desarrollo del pensamiento estadístico en estudiantes de nivel superior a través de una Experiencia Educativa. *Educación Matemática*, 32(2), 194–216. <https://doi.org/10.24844/EM3202.08>
- Hernández, R.V., Ramos, E., & Mariño, L.F. (2023). Initial Conceptions in the Statistical Reasoning and Modeling Processes in Engineering Students. *Journal of Positive Psychology & Wellbeing*, 7(1), 1005–1018. <https://bit.ly/44M3t9K>
- Eudave, D. (2019). *Aprender la estadística en el contexto de carreras no matemáticas*. Universidad Autónoma de Aguascalientes.
- Gal, I. (2000). Statistical Literacy: Conceptual and Instructional issues. En D. Coben, (Ed.), *Perspectives on Adult Learning Mathematics* (pp. 135–150). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47221-X_8
- Kerlinger, F.N., & Lee, H.B. (2002). *Investigación del comportamiento*. McGraw-Hill.
- Monzón, L. A. (2011). Argumentación: objeto olvidado para la investigación en México. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 13(2), 41–54. <https://bit.ly/3PvJ2tp>
- Núñez, M., & Santamarina, M. (2017). Propuesta de análisis crítico del discurso en entrevistas clínicas en profundidad. *Cinta Moebio*, 59(2), 198–210. <https://doi.org/10.4067/S0717-554X2017000200198>

- Nóbrega, G.M.M., & Da Rocha Falcão, J.T. (2019). Abordagem das Dificuldades de Ensino e Aprendizagem do Domínio da Estatística na Graduação em Psicologia: um olhar através do contrato didático. *Bolema*, 33(65), 1155–1174. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a09>
- Pfannkuch, M. (2011). The Role of Context in Developing Informal Statistical Inferential Reasoning: A Classroom Study. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1–2), 27–46. <https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538302>
- Pfannkuch, M., & Wild, C.J. (2000). Statistical Thinking and Statistical Practice: Themes Gleaned from Professional Statisticians. *Statistical Science*, 15(2), 132–152. <https://doi.org/10.1214/ss/1009212754>
- Rahmatina, D., Nusantara, T., Parta, I.N., Susanto, H., & As'ari, A.R. (2020). Statistical Reasoning of Variability in the Narrative Perspective of Students. *Periódico Tchê Química*, 17(36), 140–158. <https://bit.ly/45Iptnt>
- Simons, H. (2009). *El estudio de caso: teoría y práctica*. Morata.
- Wild, C.J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistics Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223–265. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x>

Análisis de contenido y cognitivo para favorecer el diseño de tareas sobre fracciones

Rubén Omar González Balderas¹,
Judith Alejandra Hernández Sánchez² y Darly Alina Kú Euán³

RESUMEN

En este escrito se muestra el análisis de contenido y cognitivo realizados a los documentos curriculares mexicano del nivel primaria correspondientes al plan de estudios 2017 para el tema de fracciones. Se eligen las fracciones considerando las dificultades de enseñanza reportadas en diferentes estudios. Para la obtención de la información se utilizó la técnica del análisis de contenido. Los resultados son los significados de las fracciones que se favorecen en cada grado escolar; además de las expectativas y limitaciones de aprendizaje asociadas. Esta información servirá a los profesores de matemáticas para el diseño de tareas en el contexto de talleres de formación continua; considerando que ahí reside gran parte de la problemática en el aprendizaje de las fracciones en este nivel educativo.

PALABRAS CLAVE

Análisis didáctico, Educación primaria, Fracciones.

¹ maresillos@hotmail.com

Secretaría de Educación del Estado de Zacatecas- Escuela Primaria Manuel Ávila Camacho
<https://orcid.org/0009-0006-4857-3678>

² judith700@hotmail.com

Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas
<https://orcid.org/0000-0003-0569-2037>

³ ku.darly@gmail.com

Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas
<https://orcid.org/0009-0009-3259-2657>

ANTECEDENTES

El tratamiento de las fracciones en las propuestas curriculares de entre 1960 y 2011 en México presentan debilidades que han sido ampliamente estudiadas, estableciéndolas como un contenido difícil de enseñar en el nivel primaria (Ávila, 2019). Aunado a lo anterior, en el 2018 la prueba PLANEA (Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes) estableció que los conocimientos asociados a las fracciones se sitúan en el Nivel III y IV de los aprendizajes matemáticos para el nivel primaria. En ese año, la Secretaría de Educación Pública [SEP] (2018) mostró que sólo el 15% de los estudiantes de sexto grado de primaria se encuentran en el Nivel III y el 8% en el Nivel IV. De esta manera, la comprensión del tema de fracciones se asocia a un dominio satisfactorio (Nivel III) o sobresaliente (Nivel IV) para las matemáticas de este nivel educativo. Estas situaciones han puesto a las fracciones como un tema importante para la investigación del campo, y de preocupación para las instancias educativas mexicanas interesadas en alcanzar un dominio satisfactorio en las evaluaciones de los aprendizajes en matemáticas.

Existen investigaciones relacionadas con la enseñanza de las fracciones en el nivel primaria que dan evidencia del papel que juegan los significados potenciados y sus problemáticas asociadas. Estos son principalmente revisiones de documentos oficiales que sirven de referencia a la práctica de los profesores. Entre ellos están los significados potenciados en los libros de texto turcos y singapurenses (Önder, 2021), la relación entre los significados evidenciados en una práctica docente en Nueva Zelanda (Getenet & Callingham, 2017), o bien, la revisión documental de materiales didácticos para la enseñanza de las fracciones en el nivel primaria en Brasil (Novaes et al., 2020).

La mayoría de los estudios sobre fracciones se concentran en las debilidades que se han presentado en su tratamiento a través de diferentes propuestas curriculares para su enseñanza (Ávila, 2019). El presente trabajo propone que en las debilidades asociadas a la multiplicidad de significados de las fracciones se puede constituir conocimiento útil para el profesor de matemáticas al momento de diseñar tareas.

Elegimos dos investigaciones entre las muchas otras que han analizado la multiplicidad de significados de las fracciones, las cuales son de reciente publicación y abordan propuestas curriculares de cuatro países, incluyendo a México, que es donde situaremos la presente investigación. Ambos estudios analizan libros de texto, dado que sus actividades y lecciones pueden favorecer u obstaculizar la enseñanza. Además, estos materiales evidencian lo planteado en los programas y planes de estudio establecidos por las instituciones oficiales de cada país, los cuales se convierten en un referente para la práctica docente de los profesores.

En Ávila (2019) se presenta un análisis de los libros de matemáticas utilizados en México entre 1960 y 2011 en el nivel primaria. La autora define la propuesta curricular de 1960 como “didáctico-intuitiva”, donde la fracción se aborda como parte-todo y las nociones de razón y proporción carecen de intuición para apoyar su comprensión. El libro introducido en 1972 incluye a la estructura de las fracciones la concepción de número racional, conformado por las nociones de operador multiplicativo, razón, medida y cociente. Finalmente, la propuesta de 1993, a la que se le llamó “constructivista”, incrementó la definición del significado de fracciones al sumar elementos contextualizados mediante la resolución de problemas; además, mantiene las nociones asociadas a la fracción de la propuesta anterior. No obstante, este libro carece de la definición formal del concepto.

Ávila (2019) concluye que se priorizó el significado de la relación parte-todo al trabajar con menor frecuencia los demás significados, enseñanza que se sigue reflejando en los resultados de exámenes nacionales como PLANEA. Por tal motivo, las reformas curriculares no garantizaron cambios en la instrucción de las fracciones por parte de los profesores.

Alajmi (2012) describe cómo las fracciones son tratadas en libros de texto de países como Kuwait, Japón y Estados Unidos. En Japón, las fracciones se trabajan a través de la medición para ayudar a los estudiantes a entenderlas como cantidades; hacen uso de cintas métricas para mostrar unidades fraccionarias y sus contextos, en su mayoría, son matemáticos. En Estados Unidos se utilizan tres modelos para representar fracciones: los de área como parte de un todo, los discretos como parte de un conjunto de objetos, y el que hace uso de la recta numérica. A diferencia de los libros de Japón, desde el primer grado se presenta la resolución de problemas a través de contextos del mundo real.

En Kuwait se centran en la repetición de procedimientos al presentar ejemplos resueltos en contextos matemáticos. También se introducen reglas matemáticas en las definiciones, seguidas de ejercicios para la práctica. A partir de cuarto grado se adopta el modelo de área para ilustrar fracciones como parte de un todo, haciendo uso de un contexto que parte del mundo real. Finalmente, este autor evidencia que existe mayor rendimiento en este tema cuando los profesores se dedican a desarrollar sus significados y apoyar a los alumnos con diferentes métodos de cálculo (estimar, calcular mentalmente y usando calculadora), en lugar de centrarse solo en el procedimiento de papel y lápiz.

De los estudios antes descritos podemos rescatar los diferentes modelos adoptados para la enseñanza de las fracciones en el nivel primaria (dirigido a estudiantes de 6 a 11 años de edad) de cuatro países. Estos dejan en evidencia la multiplicidad de significados de las fracciones y algunas limitaciones en su planteamiento.

Desde los aspectos observables en planes y programas de estudio, libros de texto para el alumno y libros para el maestro propuestos por la Secretaría de Educación Pública, en el caso de México, el tratamiento de las fracciones ha tenido diversas modificaciones al devenir de los años, cambios que subyacen en las innovaciones que se hacen latentes en cada reforma educativa.

En México se han encontrado innovaciones educativas valiosas para el tema de fracciones, sin embargo, no se han obtenido avances notables en el rendimiento matemático de los estudiantes. Evidentemente, no basta con plasmarlo en documentos oficiales, sino que es necesario favorecer experiencias de aprendizaje profesional que brinden a los maestros oportunidades para mejorar su comprensión del conocimiento didáctico del contenido para la selección y diseño de tareas de enseñanza, y, en consecuencia, mejorar la organización sistemática de su práctica docente. Parafraseando a Ávila (2019), quizá sea mejor encontrar formas de perfeccionar lo que los profesores saben y hacen, que hacer esfuerzos por innovar.

En este sentido, esta propuesta busca promover el conocimiento y las habilidades de los profesores para diseñar prácticas de instrucción de forma fundamentada y sistemática, basadas en el análisis de contenido y cognitivo (organizadores del currículum propuestos por Rico, 2013). El primero está enfocado en la organización de los significados de un contenido matemático escolar, y el segundo en las expectativas, limitaciones y demandas de aprendizaje. De manera complementaria, los resultados de la presente investigación permitirán identificar si existen cambios con lo establecido en Ávila (2019) respecto a la propuesta curricular del 2011, además de ser preámbulo de la propuesta de la nueva escuela mexicana que se implementa a partir del ciclo escolar 2022-2023.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las fracciones se han caracterizado por presentar dificultades en su aprendizaje debidas a situaciones variadas. Aquí trabajaremos aquellas asociadas a la multiplicidad de significados, que según Rico (2013), se debe a los diferentes usos e interpretaciones que se le pueden dar a una noción matemática. Para el caso de fracciones, algunos de estos usos e interpretaciones aparecen en diferentes tareas (Figura 1).

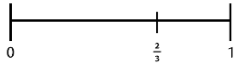
Esta multiplicidad de formas de entender las fracciones dificulta su enseñanza y aprendizaje, tal como lo muestran investigaciones como la de Quille (2019). En este estudio se identifica que el significado de la fracción que más se potencia es la relación parte-todo, donde existe una desconexión entre los términos de razón, cociente, operador y medida.

En este mismo tenor, Reyna (2020) realiza una investigación con alumnos y alumnas de quinto grado de primaria en México, y establece que algunas limitantes en el aprendizaje de las fracciones se debe al lenguaje inducido

por profesores, tales como: mitad, cuarta parte, entre otros; además de que en el manejo del contenido de fracciones se prioriza su escritura formal ($\frac{a}{b}$).

Figura 1

Ejemplos de diferentes usos e interpretaciones de las fracciones

En...	La fracción expresa:
«El espesor de una hoja es de $\frac{1}{10}$ de mm»	Una medida de longitud
« $\frac{3}{4}$ de la población vive en el campo» « $\frac{2}{5}$ de la mezcla debe ser de agua»	Una relación entre una parte y un todo (una razón)
El factor de escala del plano es de 0.0025	Un operador multiplicativo.
El número que multiplicado por 4 da 3, es $\frac{3}{4}$	Un cociente
	Un punto en la recta. Un número abstracto.

Nota. Tomado de Block (2022), p. 19–20.

También existen estudios realizados con profesores. Ríos (2019) presenta el diseño de un taller para profesores en ejercicio en Venezuela, acerca de seis significados de las fracciones (cociente, razón, parte-todo, operador, conteo y como medida). Este autor encontró que los participantes tienen dificultad para identificar el tipo de interpretación que se le da a las fracciones y las conexiones existentes entre sí para su trabajo con los alumnos, así como de qué representación utilizar para su enseñanza (oral, gráfica, aritmética, simbólica).

En este sentido, la problemática observa al profesor de matemáticas, la forma en que trabaja los significados del concepto matemático de fracciones, las representaciones, las conexiones entre sí, y cómo esta información puede ser usada para diseñar tareas de enseñanza que superen dichas dificultades.

Por tal motivo, es a través de la presente investigación que se espera brindar un referente para favorecer el diseño de tareas de enseñanza dirigidas a estudiantes de primaria para el tema de fracciones. Para ello se realizan los dos primeros análisis (Contenido y Cognitivo) del Análisis Didáctico (Rico, 2013) para el tema de fracciones basado en documentos oficiales. Lo que se espera es que estos análisis —que fueron realizados a los materiales que utiliza el profesor como referente para la planeación de sus clases— sirvan para potenciar el conocimiento didáctico mediante el diseño de tareas.

REFERENTE TEÓRICO

Para el desarrollo de la propuesta se utilizan como enfoque teórico y metodológico los dos primeros organizadores del currículo: el análisis de contenido y cognitivo, pertenecientes al Análisis Didáctico descrito en Rico (2013). Estos dos organizadores se proponen como una herramienta teórica y metodológica que puede favorecer el diseño de las tareas de enseñanza y,

por ende, ser considerada en la formación inicial y continua de profesores de matemáticas. Según Rojas et al., (2013) estos organizadores promueven un estudio profundo del contenido escolar, permitiendo que los profesores organicen la información desde una perspectiva didáctica. Estos autores distinguen que el análisis didáctico y sus organizadores pueden tener diferentes intenciones desde la mirada de quien los realice. En esta investigación nos guiamos por tres intencionalidades o fines:

- **El del formador de profesores**, al utilizar los resultados del análisis de contenido y cognitivo para el tema de fracciones, para el diseño de un taller de formación continua para promover que los profesores diseñen tareas utilizando los primeros organizadores del análisis didáctico.
- **El del profesor**, para tomar decisiones sustentadas en la matemática educativa y ligadas a los referentes curriculares oficiales al momento de diseñar tareas para la enseñanza del tema de fracciones en el nivel primaria.
- **El del investigador**, para analizar el conocimiento didáctico del contenido que ponen en juego los profesores al momento de diseñar tareas para el tema de fracciones.

Sin embargo, por cuestiones de espacio, este reporte se centra en la intencionalidad del formador de profesores, conformada por la primera etapa de tres, tal como se presentan en la Figura 2.

Figura 2

Propuesta de fases para el diseño, desarrollo y análisis de un taller de formación continua para el diseño de tareas en el tema de fracciones



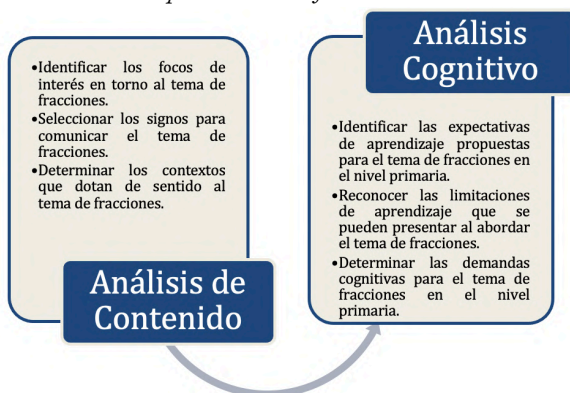
Se espera que los resultados de esta investigación sean de utilidad en el diseño, desarrollo y análisis de talleres de formación continua en el tema de fracciones, desde los dos primeros organizadores del análisis didáctico.

El objetivo de esta investigación es profundizar en el tema matemático de fracciones dentro de los que corresponden al plan de estudios 2017, que son usados como referencia por los profesores de matemáticas. Esta información fue utilizada para diseñar un taller de educación continua, donde se promueve que los profesores seleccionen los focos de interés, los signos que permiten comunicar las ideas y los contextos que dotan de sentido al contenido, brindando posibilidades de concretarlo en el diseño de tareas. Se espera que la información surgida en la primera fase y su discusión en los talleres de formación continua lleven a los profesores a la toma de decisiones previas y a la reflexión sobre cómo las aplicarán en clase, poniendo en juego su conocimiento didáctico del contenido en el diseño de tareas sobre fracciones, organizando la información que se presenta en este artículo.

De esta manera, el enfoque teórico se divide en cada uno de los organizadores del análisis didáctico aplicados en la primera fase (análisis de Contenido y Cognitivo), que tiene como objetivo contar con información que sirva de referencia para el diseño de un taller de formación continua para el tema de fracciones en el nivel primaria (Figura 3). Esta información funcionará como referente para el profesor al momento de planear o diseñar una clase para dicho contenido matemático escolar. A partir de los análisis mostrados y sus finalidades, los profesores y sus formadores tendrán los medios para diseñar y estructurar tareas de enseñanza de mejor forma. Estos análisis forman parte del trabajo previo que se propone como ideal para el diseño de tareas para un contenido matemático escolar y para la planeación de talleres de formación continua.

Figura 3

Organizadores preliminares para la planeación de un taller de formación continua centrado en el diseño de tareas para el tema de fracciones.



Así, se plantean algunas preguntas que servirán de referente a profesores y formadores para el diseño de tareas relacionadas con el tema de fracciones: ¿Qué significados del concepto matemático escolar de fracciones se pide potenciar desde el plan de estudios y desde los libros oficiales de educación primaria? ¿Qué dificultades afrontan los estudiantes de primaria al promover los aprendizajes de fracciones planteados en el plan de estudios y en los libros propuestos?

La primera pregunta se responde desde el análisis de contenido, enfocado en el conocimiento matemático que se desea enseñar, es decir, el tema de fracciones. La segunda cuestión corresponde al análisis cognitivo centrado en las expectativas y limitaciones del aprendizaje que se pueden presentar al enseñar el tema de fracciones; se tiene como foco al estudiante y, con ello, lo que podría esperar el profesor. A continuación se presenta una descripción de cada organizador y los constructos teóricos que lo conforman.

Análisis de Contenido

Se considera una herramienta para identificar y organizar los significados del contenido matemático, donde intervienen tres organizadores del currículo que utiliza Gómez (2007) para el estudio de estos significados:

- La *estructura conceptual*: conformado por conceptos, procedimientos y las relaciones entre el campo conceptual y procedimental que estructura al contenido matemáticamente.
- Los *sistemas de representación*: todas las representaciones que permiten comunicar el contenido y las operaciones entre estos signos.
- La *fenomenología*: considera los contextos, situaciones y problemas que dotan de sentido al contenido (Lupiáñez, 2009).

Estos tres organizadores curriculares enmarcan el análisis de contenido, mismo que ayudará a los profesores a organizar el contenido matemático de fracciones. A continuación se hace un desglose de los organizadores antes expuestos.

Estructura Conceptual

Se puede ver desde una perspectiva cognitiva, conformada por dos campos propuestos en Rico (1996, citado en Lupiáñez, 2009), que permite establecer conexiones entre conceptos y procedimientos; el autor propone la siguiente estructura para cada uno de ellos:

Conocimiento Conceptual. Está conformado por tres niveles:

1. *Hechos*: Pueden ser términos, notaciones, convenios y resultados.
2. *Conceptos*: Conjuntos de hechos conectados mediante relaciones.
3. *Estructuras conceptuales*: Son sistemas de conceptos.

Conocimiento Procedimental. Engloba los procedimientos y demandas al realizar tareas, se distinguen tres niveles de concreción:

1. *Destrezas*: Actúa sobre hechos.
2. *Razonamientos*: Exige un nivel mayor de conocimiento y actúa sobre conceptos.
3. *Estrategias*: Actúa sobre estructuras conceptuales.

Sistemas de Representación

Los signos y las operaciones previstas entre ellos es lo que permite comunicar el tema que se quiere enseñar. Se retoman desde la perspectiva de Kaput (1992), como se citó en Cañadas et al. (2018), p. 72, lo cual permite agrupar y clasificar en cuatro operaciones.

1. Creación y presentación de signos o expresiones. Como su nombre lo indica, es cuando se presentan por primera vez los signos relacionados con un tema, estableciendo formas válidas e inválidas de representar el objeto, tal como se explica a continuación.

Inválidas: los signos $\frac{a}{0}$ ($a \neq 0$) y $\frac{0}{0}$; el significado de estas expresiones se hace en términos de inexistencia, indefinición, imposibilidad y sin sentido. En afirmaciones justificativas en términos de división o de fracción se habla de (1) inexistencia porque la división por cero no está definida, (2) que dividir por cero no tiene sentido y (3) que es imposible realizar la operación cuando el denominador se anula.

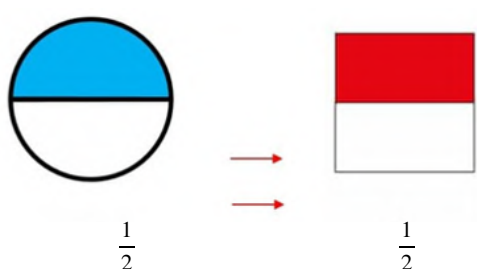
Válidas: ejemplos de expresiones válidas de las fracciones propias son: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{10}$, etc.

2. Transformación sintáctica invariante. son los cambios conceptuales o procedimentales dentro de un mismo sistema, donde el objeto matemático no cambia. Un ejemplo es cuando se trabajan fracciones equivalentes como: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} \dots$

3. Transformación sintáctica variante. A diferencia de la anterior, aquí el objeto matemático sí cambia. Un ejemplo en el contexto de las fracciones es:

Figura 4

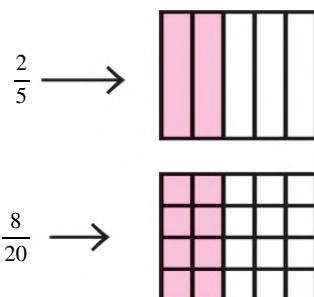
Variante Pictórica



4. Traducción entre sistemas de representación. Esta operación ocurre cuando el objeto no cambia, pero el objeto es trabajado en diferentes sistemas de representación. Un ejemplo para el caso de fracciones sería:

Figura 5

Representación numérico - geométrico



Fenomenología

La fenomenología es el componente funcional de las matemáticas, el cual permite dotar de sentido al contenido matemático escolar. Se puede categorizar en:

Contextos. Se pueden clasificar en matemáticos, no matemáticos, o como aquellos que incluyen situaciones cercanas al cotidiano del estudiante, o bien, en áreas del conocimiento extra-matemático.

Situaciones. Aquí se consideran las propuestas en PISA previas al 2012 (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos [OECD], 2013):

1. *Personales.* Relacionadas con las actividades cercanas a los estudiantes.
2. *Educativas.* Las que se manejan de manera común en el aula.
3. *Públicas.* Referentes a situaciones sociales de su entorno cercano.

Fenómenos. Conformada por un conjunto de tareas conectadas mediante la estructura conceptual del tema que se enseña.

Análisis cognitivo

Este análisis se estructura alrededor de las expectativas y competencias de aprendizaje que el profesor o las autoridades educativas esperan que se desarrollen en los estudiantes. Estos aprendizajes requieren un conjunto de conceptos y procedimientos revisados y organizados en el análisis de contenido. También se lleva a cabo una indagación de los errores y dificultades que se convierten en limitaciones del aprendizaje esperado y de los procesos de instrucción (Lupiáñez, 2009).

MÉTODOS Y MATERIALES

Para la realización del análisis de contenido y cognitivo para el tema de fracciones se revisaron documentos que conforman los principales referentes institucionales de los profesores de nivel básico en México correspondientes a la propuesta curricular del 2017. El tema de fracciones se ubicó en doce materiales para los grados de tercero a sexto de primaria, asignándoles un código para una mejor ubicación de los fragmentos analizados (Tabla 1).

Tabla 1
Documentos analizados de la SEP para el tema de fracciones y su codificación

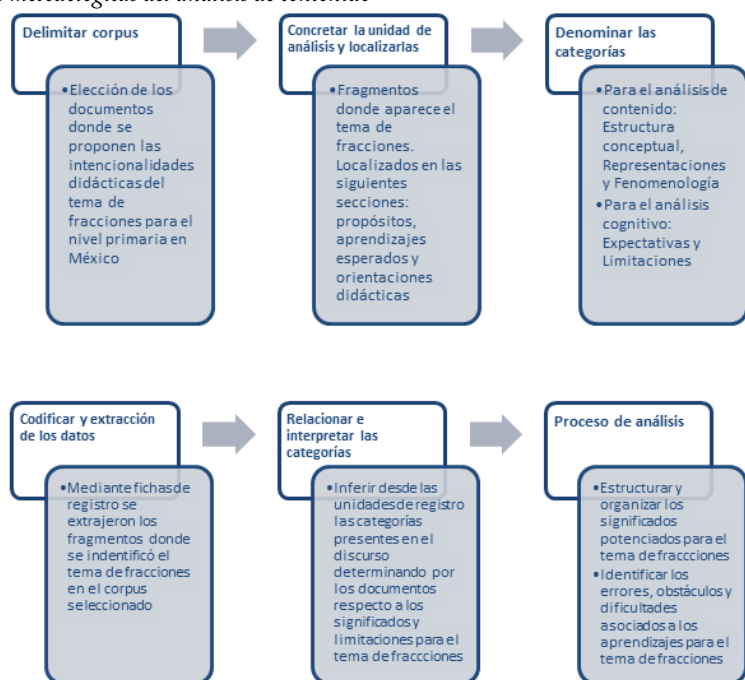
Código	Año	Título
SEP2014_DM3	2014	Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Tercer grado
SEP2014_DM4		Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Cuarto grado
SEP2014_DM5		Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado
SEP2014_DM6		Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Sexto grado
SEP2017_AC3	2017	Aprendizajes clave para la educación integral. Educación Primaria 3°. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación
SEP2017_AC4		Aprendizajes clave para la educación integral. Educación Primaria 4°. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación
SEP2017_AC5		Aprendizajes clave para la educación integral. Educación Primaria 5°. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación
SEP2017_AC6		Aprendizajes clave para la educación integral. Educación Primaria 6°. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación
SEP2019_DA3	2019	Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Tercer grado
SEP2019_DA4		Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto grado
SEP2019_DA5		Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado
SEP2019_DA6		Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Sexto grado

Además está la literatura especializada para el tema de las fracciones donde se reportan las principales limitaciones en su enseñanza aprendizaje. El método utilizado para la revisión de estos documentos fue el del análisis

de contenido con base en el esquema de la Figura 6, que sigue las fases propuestas por Rico y Fernández-Cano (2013).

Figura 6

Fases metodológicas del análisis de contenido



De manera complementaria, para la elección del corpus sobre los que se ejecutó el análisis de contenido y cognitivo se utilizaron tres de los cuatro niveles de concreción (*matemático escolar, prescrito, propuesto para una asignatura y de un tema en concreto*) del contenido matemático, con la intención de propiciar, como lo propone Lupiáñez (2009), una reflexión situada en el Análisis Didáctico. Aquí se analizaron los últimos tres, considerando que nos interesaba información contextualizada en el sistema educativo mexicano. De esta manera, para:

- El *contenido prescrito* se indaga, identifica y se toman las nociones básicas que los alumnos deben aprender según la propuesta curricular mexicana. Esta información se presenta en los documentos de Aprendizajes clave para la educación integral-Plan y programas de estudio y corresponden a los documentos con códigos: SEP2017_AC3, SEP2017_AC4, SEP2017_AC5 y SEP2017_AC6 (Ver Tabla 1).
- El *contenido propuesto para una asignatura*, se ubican y seleccionan los conceptos y procedimientos que se trabajan para el tema seleccionado. Lo anterior se propone en los libros de texto de Desafíos Matemáticos-

Libro para el maestro con códigos: SEP2014_DM3, SEP2014_DM4, SEP2014_DM5 y SEP2014_DM6 (Ver Tabla 1). Además de los Desafíos Matemáticos-Libro para el alumno a los que se les asigno los códigos de la Tabla 1: SEP2019_DA3, SEP2019_DA4, SEP2019_DA5 y SEP2019_DA6.

- El *contenido de un tema concreto*, se identifica y organizan los múltiples significados del tema de fracciones, seleccionando aquellos que se consideran relevantes en la enseñanza y aprendizaje del tema.

RESULTADOS

Análisis de Contenido del tema de fracciones en educación primaria

Según Rico y Fernández-Cano (2013), el análisis de contenido delimita y precisa la pluralidad y diversidad de significados de un contenido matemático escolar. Por lo tanto, para identificar dicha diversidad de significados se presentan los resultados para el tema de fracciones, consecuencia de la revisión del corpus descrito en la sección anterior.

Estructura conceptual del tema de fracciones para el nivel básico

Campo Conceptual. Está conformado por el conocimiento personal, con las estructuras matemáticas con las que se piensa. Se pueden distinguir tres niveles para el tema de fracciones:

a) Hechos:

- Términos
 - Fracciones
 - Denominador
 - Numerador
 - Relación
 - Parte-todo
 - Medida
 - Reparto
 - Equivalencia
 - Dividir en partes iguales
 - Mitad o medio
 - Proporción
- Notaciones
 - Fracciones de la forma:
 - ◆ n/m
 - ◆ $\frac{a}{b}$
 - ◆ $a/b = a \div b$
 - ◆ $\frac{m}{2^n}$

- Equivalencias básicas:
 - ♦ $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
 - ♦ $\frac{4}{4} = 1$
 - ♦ $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$
- Fracciones mixtas:
 - ♦ $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$
- Convenios
 - Numerador/denominador (a/b)
 - Razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m) y con una fracción (n/m).
- Resultados.
 - Suma de fracciones con mismo denominador o suma de fracciones homogéneas: el proceso consiste en sumar los numeradores, el denominador se mantiene igual: $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$
 - Suma de diferente denominador (Uso de mínimo común múltiplo)
 - Técnicas de Multiplicación y división de fracciones
- b) Conceptos:
 - Problemas de reparto
 - Aplicación en Proporcionalidad
 - Aplicación en Porcentajes
- c) Estructuras conceptuales:
 - a/b representa una división algebraica, por lo que el divisor debe ser distinto de cero ($b \neq 0$).
 - Dos fracciones a/b y c/d son equivalentes si se verifica que $a \cdot d = b \cdot c$.
 - Propiedades algebraicas de operaciones suma y producto.

Campo Procedimental. A través del análisis realizado se pueden distinguir los siguientes tres niveles de concreción:

- a) Destrezas:
- Usa fracciones con denominador dos, cuatro y ocho para expresar relaciones parte-todo, medidas y resultados de repartos.
 - Ordena fracciones con denominadores múltiplos.
 - Resuelve problemas de suma y resta con fracciones del mismo denominador (medios, cuartos, octavos, hasta doceavos).
 - Resuelve problemas de suma y resta con números naturales, decimales y fracciones con denominadores, uno múltiplo del otro.
 - Lee, escribe y ordena números fraccionarios de diferente denominador.
 - Reconoce y construye fracciones equivalentes.
 - Resuelve problemas de multiplicación con fracciones.

- Compara razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m) y con una fracción (n/m).
 - Calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con constante número natural.
- b) Razonamientos:
- Deductivo: Interpretar geoméricamente la expresión que plantea un problema.
 - Analógico: demostrar equivalencia entre la representación algebraica (simbólica) y geométrica.
 - Figurativo: uso de representaciones geométricas.
 - Comprobar en problemas de variación la aplicación de proporcionalidad y porcentajes.
- c) Estrategias:
- Utilizar de manera flexible la estimación, el cálculo mental y el cálculo escrito en las operaciones con números fraccionarios.
 - Resolver problemas en diversos contextos.
 - Uso de diferentes sistemas de representación.

Sistemas de representación

Representación numérica. La representación numérica de las fracciones está dada por símbolos, llamados números, y su representación es 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Sus expresiones $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{8}{10}, \frac{12}{7}, \frac{10}{8}, 3\frac{1}{2}$, entre otros (Cañadas et al., 2018, p.75).

Simbólico. Caracterizado por signos como letras y símbolos de las operaciones aritméticas que guardan una relación entre sí, ejemplo:

- Compara razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m) y con una fracción (n/m).
- Repartir 3 pasteles entre 4 niños, los alumnos han visto que $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- Si a cada invitado se le dan $\frac{2}{5}$ de pastel, ¿cuántos pasteles se necesitan para darle esa cantidad a 5 invitados? Esto implica la multiplicación $5 \times \frac{2}{5}$, que puede llevarse a cabo mediante sumas: $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$
- Si se reparte $\frac{1}{3}$ de pastel entre cinco personas:

$$\frac{1}{3} \div 5 = \frac{1}{15}$$

Tabular. Se presenta la información en las filas y columnas de una tabla de datos, ejemplo:

- En una fiesta, varios niños recibieron diferentes fracciones de pastelitos iguales. Indica para cada pareja de niños quién recibió más y cuánto más (Figura 7).

Figura 7

Representación tabular del tercer grado de educación primaria

		¿Quién recibió más?	¿Cuánto más?
Ana: $\frac{1}{2}$	Pablo: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$		
Laura: $\frac{3}{4}$	Margo: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$		
Luisa: $\frac{3}{4}$	Emilio: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$		
Inés: $\frac{4}{8}$	José: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$		

Nota. La imagen corresponde al código SEP2017_AC3_235. Para su localización puede utilizar la Tabla 1 y el último número (235) que es la página donde se ubica.

- Si a cada invitado se le dan $\frac{2}{5}$ de pastel, ¿cuántos pasteles se necesitan para darle esa cantidad a 5 invitados? Responde la tabla siguiente (Figura 8).

Figura 8

Representación tabular del quinto grado de educación primaria

Cantidad por cada invitado	Número de invitados	Número de pasteles que se debe comprar
$\frac{2}{5}$ de pastel	1	
$\frac{2}{5}$ de pastel	5	
$\frac{2}{5}$ de pastel	10	
$\frac{2}{5}$ de pastel	15	
$\frac{2}{5}$ de pastel		30

Nota. La imagen corresponde al código SEP2017_AC5_236. Para su localización puede utilizar la Tabla 1 y el último número (236) que es la página donde se ubica.

- Si al repartir un solo pastel entre cinco personas le corresponde $\frac{1}{5}$ a cada una, entonces, al repartir cuatro pasteles entre cinco personas le corresponderá cuatro veces más a cada una, es decir, 4 veces $\frac{1}{5}$, esto es $\frac{4}{5}$ (Figura 9)

Figura 9

Representación tabular del quinto grado de educación primaria, No. 2

Entre cinco personas	
Número de pasteles	A cada una le corresponde
1	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{2}{5}$
3	$\frac{3}{5}$
—	2

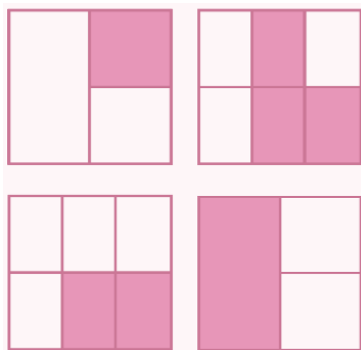
Nota. La imagen corresponde al código SEP2017_AC5_237. Para su localización puede utilizar la Tabla 1 y el último número (237) que es la página donde se ubica.

Geométrico. Representado por figuras geométricas:

- Uso de figuras con fondo blanco y con subdivisiones, pero en las que el número de subdivisiones no siempre coincida con el denominador, por ejemplo, pídale que indiquen en cuál de los siguientes cuadrados está coloreado $\frac{1}{2}$ (Figura 10).

Figura 10

Representación geométrica del tercer grado de educación primaria

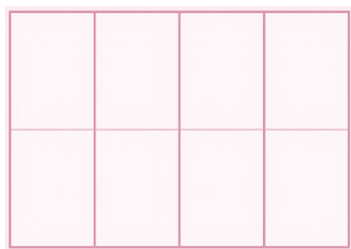


Nota. La imagen corresponde al código SEP2017_AC3_234. Para su localización puede utilizar la Tabla 1 y el último número (234) que es la página donde se ubica.

- A la inversa, pida a los alumnos que sombreen una fracción dada, por ejemplo, iluminar $\frac{1}{4}$ de la figura, o bien, sombrea de tres formas la mitad del rectángulo (Figura 11)

Figura 11

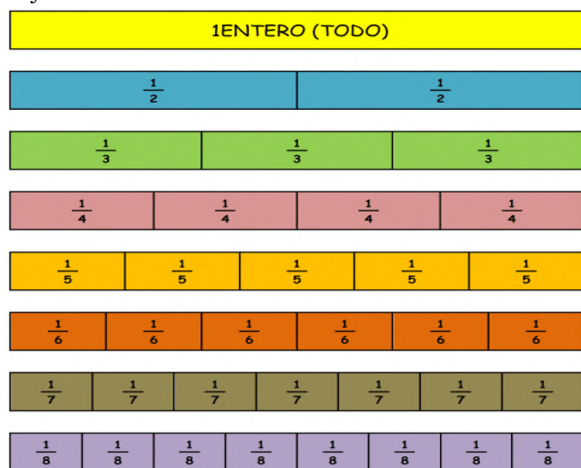
Imagen para ilustrar $\frac{1}{4}$ en tercer grado de educación primaria



Nota. La imagen corresponde al código SEP2017_AC3_234. Para su localización puede utilizar la Tabla 1 y el último número (234) que es la página donde se ubica.

Manipulativo. Representación palpable para la construcción del conocimiento, ejemplo:

- ¿Qué tira será más grande: la de $\frac{1}{3}$ de unidad o la de $\frac{3}{6}$ de unidad? Después de que los alumnos consideren el problema y propongan algunas soluciones, pídale que elaboren las tiras para verificar sus respuestas (Figura 12).

Figura 12*Uso de Tiras con fracciones*

Nota. Tomado de *tiras de fracciones* [Fotografía], por MathCenter Free Math for Everyone, Math-center (<https://bit.ly/3RhHF2L>)

Fenomenología. La fenomenología encontrada en el análisis realizado viene dada por:

Contextos: Situaciones matemáticas, no matemáticas y contextos que parten de la vida cotidiana.

Situaciones: Es una referencia del medio donde una estructura matemática tiene un uso regular, considerándose aquí las usadas en el estudio PISA previas al 2012 (OECD, 2013):

Personales. Relacionadas con las actividades diarias de los alumnos.

- Reparto de pasteles entre niños, por ejemplo, al repartir 3 pasteles entre 4 niños (fragmento con código SEP2014_DM3_235)
- Compré $1\frac{3}{4}$ kg de carne molida y $\frac{2}{4}$ kg de carne sin moler. ¿Cuánta carne compré en total?
- Se usaron $\frac{5}{8}$ partes de un listón para a hacer un moño. ¿Qué parte del listón sobró? (los dos fragmentos anteriores corresponden a SEP2014_DM4_235)

Educativas.

- Relación parte-todo. Se trata de una unidad o un todo que se divide en partes iguales, de las cuales se toman algunas. Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ se concibe como una unidad o un todo que se divide en cuatro partes iguales y de la cual se toman tres (este fragmento pertenece a SEP2017_A-C3_233).

- Medición, reparto y como cociente.
- Uso de equivalencias
- Uso de fracciones mixtas
- Comparación de fracciones menor que, mayor que.
- Sumas y restas de fracciones.

Públicas.

- Después de la fiesta quedaron $\frac{3}{5}$ de pastel. Ana se comió $\frac{1}{5}$ del pastel y Luis lo demás. ¿Qué fracción de pastel se comió Luis? (fragmento con código SEP2017_AC3_135)
- Cálculo de porcentajes (proporcionalidad)

Fenómenos

- Orden de fracciones
- Suma y resta de fracciones
- Uso de fracciones mixtas
- Problemas de multiplicación de fracciones
- Problemas de división de fracciones
- Ubicación de fracciones en la recta numérica
- Problemas de comparación
- Problemas de reparto
- Cálculo de problemas de valores faltantes
- Fracciones para expresar una división

Análisis cognitivo del tema de fracciones en educación primaria

Expectativas de aprendizaje

Las expectativas para la educación primaria en el tema de fracciones, según el Plan y programas de estudios son:

- *Utilizar de manera flexible la estimación, el cálculo mental y el cálculo escrito en las operaciones con números naturales, fraccionarios y decimales.*
- *Identificar y simbolizar conjuntos de cantidades que varían proporcionalmente, y saber calcular valores faltantes y porcentajes en diversos contextos.*
- *Calcular y estimar el perímetro y el área de triángulos y cuadriláteros, y estimar e interpretar medidas expresadas con distintos tipos de unidad.*
- *Buscar, organizar, analizar e interpretar datos con un propósito específico, y luego comunicar la información que resulte de este proceso.*

(Fragmentos SEP2017_AC3_216).

Específicamente, el tema de fracciones se encuentra en el eje temático *Número, Álgebra y Variación*, dentro de los temas: número; *adición y sustracción; multiplicación y división; y proporcionalidad.*

Los aprendizajes esperados con respecto a las fracciones para cada ciclo escolar son:

Para tercero y cuarto de primaria

- Usa fracciones con denominador hasta 12 para expresar relaciones parte-todo, medidas y resultados de repartos.
- Resuelve problemas de suma y resta de fracciones con el mismo denominador (hasta doceavos).

Para quinto y sexto de primaria

- Lee, escribe y ordena números naturales hasta de cualquier cantidad de cifras, fracciones y números decimales.
- Resuelve problemas de suma y resta con números naturales, decimales y fracciones con denominadores, uno múltiplo del otro. Usa el algoritmo convencional para sumar y restar decimales.
- Resuelve problemas de multiplicación con fracciones y decimales, con multiplicador natural y de división con cociente o divisor naturales.
- Compara razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m) y con una fracción (n/m de); calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con constante número natural.

Limitaciones de aprendizaje

El aprendizaje de un nuevo campo numérico en educación primaria representa retos para los alumnos; en este caso, las fracciones comienzan su enseñanza formalmente en tercer grado de educación primaria y aumentan sus usos en diferentes contextos a lo largo de cada ciclo escolar.

Simón et al., (2018) atribuye tres factores a las dificultades que presentan los alumnos en su aprendizaje: enfoque orientado a la enseñanza de los números naturales en primaria, las fracciones representadas como la relación entre dos números y las distintas formas que adoptan los profesores para enseñar el tema. Simón et al., (2018, p. 3-4), dentro de su investigación, identifica cuatro tipos de limitaciones sobre la comprensión de las fracciones: ausencia de la fracción como cantidad, fracción como dos números, concepto limitado de fracción parte-todo, y la dificultad de comprender la unidad de referencia.

Ejemplo de dificultades asociadas a los significados de las fracciones

La fracción como relación *parte-todo* describe cuando una unidad o totalidad se descompone en partes iguales, donde la fracción indica una o varias de esas partes. En este significado, los alumnos aprenden a ubicar en figuras geométricas una parte sombreada correspondiente a una fracción unitaria y, posteriormente, a reconocer y tomar varias de estas partes (Sánchez, et al., 2011, p. 43). El uso de este acercamiento suele originar ideas erróneas, como el manejo de la unidad. Mack (1990), como se citó en Sánchez et al. (2011) informa en su estudio que los alumnos conocían representaciones, procedimientos y símbolos sobre las fracciones, pero no identificaban la relación entre ellos; la dificultad persistente en identificar la unidad en situaciones

representadas de manera concreta y de forma simbólica, pues en los alumnos persistía la idea de que “como las fracciones son una parte del todo, siempre son menores [que el todo]” (p. 43).

Las fracciones como *cociente* son las relaciones entre una situación de división y una fracción como representación de su cociente: El cociente de la división $a \div b$ es igual a la fracción $\frac{a}{b}$ para toda a, b en los enteros y $b \neq 0$. Comúnmente se asocia a las situaciones de reparto equitativo, sin embargo, estas situaciones no son suficientes para construir ese significado (Sánchez, et al., 2011, p. 44). En este, los alumnos dan sentido al resultado menor que la unidad porque no conciben las situaciones de reparto equitativo como un caso de división, aun cuando los alumnos pueden encontrar el cociente en términos de fracciones dividiendo una unidad (Sánchez, et al., 2011, p. 44).

En el caso de la fracción como *medida*, que es cuando se representa el número de unidades y partes de la unidad de una clase (área, volumen, longitud, etc.) que cubren o aproximan una cantidad de la misma clase (Sánchez, et al., 2011, p. 46), la dificultad se muestra al integrar una noción para medir longitudes.

Las fracciones como *operador* actúan para transformar la fracción sobre una parte, un grupo o número, logrando cambiar de un determinado estado inicial. En este caso Behr et al., (1993) argumenta que los problemas que usan las fracciones como operador suelen requerir soluciones de varios pasos:

Muchas marcas de chicles venden su producto en paquetes de 5 piezas por paquete. Juana tiene 8 paquetes. María tiene $\frac{3}{4}$ partes de lo que tiene Juana. ¿Cuántos paquetes tiene María? ¿Cuántas piezas tiene María? (p. 29)

Lo que tiene María se puede ver como una transformación de lo que tiene Juana, indicada por el número $\frac{3}{4}$; éste opera sobre los ocho paquetes.

Por último, las fracciones como *razón* parten de la comparación de dos cantidades o conjunto de unidades de diferente o similar magnitud. La dificultad radica en lograr identificar dicha relación; en el caso de problemas de valor faltante (proporcionalidad directa), los alumnos identifican que existe una relación que afecta las tres cantidades. No obstante, no tienen un método para saber cómo organizar los tres números de manera conveniente y realizar las operaciones respectivas.

Demandas cognitivas

La demandas cognitivas son las acciones que se propone activar a través de tareas o actividades en la clase de matemáticas. La revisión se centró en las tareas dirigidas a la consecución de expectativas expresadas en las orientaciones didácticas del corpus con códigos: SEP2017_AC3, SEP2017_AC4, SEP2017_AC5 y SEP2017_AC6). Éstas tienen como objetivo favorecer el aprendizaje y superar dificultades y errores (Rico & Fernández-Cano,

2013). Es así que en el corpus analizado, conformado por las tareas relacionadas a las fracciones, se identificaron las demandas cognitivas para el nivel primaria y sus significados asociados.

De esta manera, en tercer grado de educación primaria se comienza con el trabajo formal de las fracciones y se brinda un acercamiento a los significados de medición y de reparto, no obstante, prevalece de forma implícita el significado de relación parte-todo. En cuarto grado de educación primaria se espera que los alumnos profundicen más en los significados de medición y reparto, además, se aumenta el grado de dificultad en el trabajo de los diferentes significados, incluyendo divisores de 3, 5, 6 y sus múltiplos, al mismo tiempo, se agrega el concepto de equivalencia.

Por último, en quinto y sexto grado de educación primaria se introducen los significados de operador, cociente y razón, en tanto son utilizados para resolver problemas multiplicativos de fracciones, divisiones y en la comparación de razones para la resolución de problemas de proporcionalidad, en este caso, tablas de variación. Las demandas cognitivas asociadas a los significados descritos en cada grado escolar se presentan en la Tabla 2.

Lo anterior permite nuevas oportunidades para complejizar el uso de las fracciones, hacer anticipaciones, argumentar y, de ser posible, verificar sus resultados. Los significados de operador, cociente y razón, si bien son un conocimiento complejo, se trabajan a lo largo de los últimos grados en educación primaria y de los primeros en educación secundaria.

APORTACIONES PARA LA DOCENCIA Y SU FORMACIÓN

Los resultados de la presente investigación permitirán articular el diseño de las tareas para el tema de fracciones con los contenidos matemáticos necesarios para resolverlas, así como con las dificultades asociadas a los aprendizajes establecidos en los referentes institucionales. De esta forma, el profesor podrá

profundizar más en el tipo de actuaciones que se promueve, en la diversidad de modos de solución o en su grado de dificultad. Una simple modificación del enunciado puede hacer que satisfaga los requerimientos o las finalidades que persigue el profesor en la programación (Lupiáñez, 2009, p. 69).

A propósito, el análisis de contenido y cognitivo brindan criterios para llevar a cabo tales modificaciones, potencializando el conocimiento didáctico del contenido de los profesores en el diseño de tareas de enseñanza y su consideración en talleres de desarrollo profesional.

Estas herramientas, surgidas desde la Matemática Educativa, les permiten a los profesores y formadores discernir la idoneidad de las tareas de enseñanza que diseñan y, a su vez, coadyuvar en el rendimiento escolar para el tema de fracciones.

Tabla 2
Demandas cognitivas asociados a los significados de las fracciones en educación primaria

Grado de primaria	Significados asociados	Demandas cognitivas
Tercero	Medición	Medir longitudes. Crear nociones sobre la fracción. Establecer lenguaje no formal relacionado: cachito, pedazo, partes, porción, etc.
	Reparto	Repartir de forma equitativa mediante material concreto. Repartir de forma equitativa mediante representaciones pictóricas y geométricas.
	Relación parte-todo	Uso de figuras con subdivisiones para identificar la fracción solicitada. Sombrear una fracción solicitada.
Cuarto	Medición	Hacer uso de signos menor que (<) y mayor que (>) en situaciones que impliquen medir y ordenar cantidades con números fraccionarios. Resolver situaciones en las que no se da la unidad de referencia, pero sí la fracción, de la que debe obtenerse la unidad. Resolver problemas de suma y resta de fracciones a partir de material concreto como tramos de listón.
	Reparto	Hacer particiones aumentando el grado de dificultad en la repartición (divisores 3, 5, 6 y sus múltiplos) e incluir oportunidades para estudiar las equivalencias de varias expresiones a partir del reparto. Hacer uso de fracciones mixtas en situaciones de reparto.
	Reparto	Resolver problemas de repartos equitativos y exhaustivos.
Quinto	Razón	Comparar razones dadas para identificar fracciones equivalentes. Realizar suma de fracciones con diferente denominador a través de fracciones equivalentes.
	Medición	Comparar diferentes medidas para ordenar fracciones de menor a mayor y viceversa. Elaborar mentalmente sucesiones ascendentes o descendentes con fracciones. Ubicar números fraccionarios en la recta numérica.
	Operador	Suma repetitiva para introducir nociones de multiplicación de fracciones.
	Cociente	Hacer repartos en los que el número de personas sea fijo y a través del uso de tablas, con la intención de introducir la fracción a/b como el cociente de la división $a \div b$
Sexto	Operador	Resolver multiplicación de fracciones con algoritmo convencional.
	Cociente	Uso del algoritmo convencional de la división con fracciones.
	Razón	Resolver problemas de proporcionalidad en tablas de variación (suma término a término, valor unitario, factor constante de proporcionalidad).
	Reparto	Partir una medida expresada con una fracción, entre un número de partes.

De igual importancia, los análisis realizados permiten a los profesores seleccionar estructuras matemáticas para el trabajo del tema de fracciones en educación primaria, conceptos, sistemas de representación y fenomenología, así como los significados que desea favorecen en cada grado escolar, evitando priorizar de manera inconsciente, o por falta de conocimientos, un solo significado al abordar con menor frecuencia los demás. Trabajar con menor asiduidad determinado concepto de las fracciones pone de manifiesto una desconexión en la gradualidad de sus diferentes usos e interpretaciones, en consecuencia, las estructuras de enseñanza carecen de profundidad en la comprensión de los procesos significativos en el contexto de la didáctica, que a su vez impactan en el rendimiento escolar en las matemáticas.

Por otra parte, considerar las expectativas de aprendizaje y limitaciones para el diseño de tareas de enseñanza ayuda a los profesores a llevar a cabo un proceso de deconstrucción y reflexión para poder reconstruir y redefinir el conocimiento matemático de fracciones para su enseñanza; se considera en primera instancia el análisis de contenido, mismo que dotará de la estructura necesaria para lograr los objetivos de aprendizaje en los alumnos.

En consecuencia, se busca que los profesores conozcan nuevas maneras de desarrollar los conceptos matemáticos con la intención de lograr los objetivos de aprendizaje en los alumnos. Se propone un ciclo de enseñanza que puede ser aplicado en las aulas y que plantea estrategias para obtener resultados precisos con los cuales actuar.

CONCLUSIONES

De los resultados mostrados en el análisis de contenido destacan el uso de fracciones para expresar relaciones parte-todo, medidas, problemas de reparto, fracciones como cociente y como operador, la comparación de razones y ejercicios de proporcionalidad y porcentajes para calcular valores faltantes. Se prioriza el razonamiento deductivo para realizar inferencias entre los sistemas de representaciones, tales como: la representación numérica, simbólica, tabular, geométrico y manipulativo. Además, se impulsan estrategias como la estimación, el cálculo mental y el cálculo escrito en las operaciones con números fraccionarios, favorecido por el uso de contextos matemáticos en situaciones personales y educativas.

Del análisis cognitivo resaltamos que se espera que el alumno, a lo largo de la educación primaria, haga uso de los diferentes significados de la fracción a través de diferentes medios, expresados en el Análisis de Contenido; y que sus principales limitaciones de aprendizaje se encuentran en las conexiones que permiten hacer uso de los diferentes significados, así como identificar qué tipo de representación lo favorece.

De esta forma, podemos concluir que las innovaciones en las reformas expresadas en esta investigación residen en enriquecer los significados de las fracciones y sus usos, apoyadas de orientaciones didácticas que ayuden al

profesor a comprender cómo impulsar el aprendizaje de las fracciones, esto basado en la comparación con el trabajo de Ávila (2019). No obstante, es importante describir de qué manera los profesores utilizan los análisis de contenido y cognitivo del tema de fracciones para mejorar el diseño de sus tareas; ratificamos que es importante que el profesor logre sistematizar, categorizar y organizar el concepto matemático de fracciones para su enseñanza.

REFERENCIAS

- Alajmi, A. H. (2012). How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. *Educational studies in mathematics*, 79(2), 239–261. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9342-1>
- Ávila, A. (2019). Significados, representaciones y lenguaje: las fracciones en tres generaciones de libros de texto para primaria. *Educación Matemática*, 31(2), 22–60. <https://doi.org/10.24844/EM3102.02>
- Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis emphasis on the operator construct. En T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research* (pp. 13–47). Routledge.
- Block, D. (2022). *Más de uno, pero menos de dos. La enseñanza de las fracciones y los decimales en la educación básica*. Taberna Librería Editores. <https://bit.ly/3ZaxXRK>
- Cañadas, M., Gómez, P., & Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. En P. Gómez (Ed.) *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53–112). Ediciones Uniandes. <https://bit.ly/45OO4iK>
- Getenet, S., & Callingham, R. (2017). Teaching fractions for understanding: addressing interrelated concepts. En A. Downton, S. Livy, & J. Hall (Eds.), *Proceedings of the 40th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 277–284). MERGA. <https://bit.ly/3PytZz5>
- Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. Dialnet. <https://bit.ly/3Lk86RL>
- Lupiáñez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. DIGIBUG. <https://bit.ly/3ZjU7Ba>
- Novaes, B., Berticelli, D., & Pinto, N. (2020). Guidelines on the use of teaching materials for teaching fractions in the brazilian primary course (1930–1970). *Pedagogica Research*, 5(3). <https://doi.org/10.29333/pr/8221>
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2013). *The PISA 2013 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. OECD. <https://bit.ly/44OwBxg>

- Önder, S. (2021). Content and problem analysis in Turkish and Singaporean mathematics textbooks: The case of multiplying fractions. *REDIMAT*, 10(2), 117–151. <https://doi.org/10.17583/redimat.2021.4379>
- Quille, M. Q. (2019). Análisis de una organización matemática sobre los significados asociados a las fracciones en una colección de cuadernos de trabajo de educación básica [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. ProQuest. <https://bit.ly/43eogls>
- Reyna, K. G. (2020). *Un Acercamiento al Conocimiento de la Fracción en Estudiantes de Quinto Grado de Educación Primaria, Bajo los Significados de parte todo, Medida y Cociente* [Tesis de Licenciatura, Benemérita y Centenaria Escuela Normal del Estado de San Luis Potosí]. Repositorio becenesp. <https://bit.ly/4639Ma3>
- Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *UNIÓN*, 33, 11–27. <https://bit.ly/486Virr>
- Rico, L., & Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J.L., Lupiáñez, & M. Molina (Eds.) *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Innovación Curricular y Formación de Profesores* (pp. 1–23). Comares.
- Ríos, Y. (2019). Diversas interpretaciones de las fracciones. En R. Flores, D. García, & I.E. Pérez-Vera (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 141–150). CLAME. <https://bit.ly/3Rh7RdZ>
- Rojas, N., Flores, P., y Ramos, E. (2013). El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza en la práctica. En L. Rico, J. L. Lupiáñez, & M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática: Metodología de investigación, Formación de profesores e Innovación curricular* (pp. 191–210). Comares.
- Sánchez, E., Hoyos, V., y López, G. (2011). Sentido numérico y pensamiento algebraico. En G. Galicia (Ed.), *Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas escolares. Casos y perspectivas* (pp. 37–48). SEP. <https://bit.ly/3Rh894z>
- Secretaría de Educación Pública. (2018). *Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes en Educación Básica*. SEP. <http://planea.sep.gob.mx/ba/>
- Simón, M. A., Placa, N., Avitzur, A., & Kara, M. (2018). Promoting a concept of fraction-as-measure: A study of the Learning Through Activity research program. *The Journal of Mathematical Behavior*, 52, 122–133. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.03.004>

La estadística en la formación de futuros investigadores educativos: una mirada desde la educación matemática realista

Rosa Isela González-Polo¹

RESUMEN

Este artículo presenta los resultados de la implementación de un diseño didáctico dirigido a pedagogos en formación. Este diseño busca fomentar una reflexión acerca de la importancia de los métodos estadísticos en la investigación educativa, utilizando la educación matemática realista como enfoque para la construcción del objeto de estudio. La intención es contextualizar la estadística mediante situaciones realistas, con el fin de establecer un modelo interpretativo basado en técnicas y procesos estadísticos pertinentes al contexto educativo. A partir del análisis, se identifican patrones, supuestos y percepciones estudiantiles sobre el uso de la estadística en la investigación educativa. Estos hallazgos subrayan la significancia de la matemática realista como enfoque pedagógico en la enseñanza de la estadística y sugieren su adopción en programas de formación para optimizar el aprendizaje de futuros investigadores, reforzando tanto su comprensión en estadística como su actitud y desempeño académico en investigaciones.

PALABRAS CLAVE

Estadística, Formación de investigadores, Educación matemática, Matemática realista.

¹ rgonzalezpo@uaemex.mx

Universidad Autónoma del Estado de México

<https://orcid.org/0000-0002-8252-5796>

González-Polo, R. I. (2023). La estadística en la formación de futuros investigadores educativos: una mirada desde la educación matemática realista. En A. Castañeda, (Ed.), *Aportes y recursos para la innovación en la educación matemática* (pp. 231–258). SOMIDEM Editorial.

<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S1/2023/01-09>

INTRODUCCIÓN

El razonamiento sobre datos y la alfabetización estadística han emergido como competencias esenciales en la sociedad contemporánea. Biehler et al. (2018) señalan que la capacidad de interpretar, analizar y comprender datos y estadísticas es esencial en campos tan diversos como lo político, económico y social. Esta relevancia es observable en múltiples profesiones, por lo que ha sido objeto de atención en la mayoría de los currículos escolares a nivel mundial. La alfabetización estadística, tal como lo definen Berndt et al. (2021), implica la habilidad de reflexionar críticamente información estadística, empleándola como evidencia en argumentos. Esta habilidad está intrínsecamente ligada a las competencias de razonamiento y argumentación científica, fundamentales para la toma de decisiones informadas. Al respecto, la ASA (American Statistical Association) – tal como señalan Biehler et al. (2018)— resalta la importancia de involucrar activamente a los estudiantes en este razonamiento, promoviendo no solo el aprendizaje de conceptos y técnicas, sino también su aplicación en contextos reales y prácticos.

Los pedagogos en formación, quienes enfrentan los desafíos de diseñar e implementar investigaciones educativas, no son ajenos a estos planteamientos. Según Berndt et al. (2021), entender y aplicar la información estadística para la toma de decisiones es vital en una sociedad que se inclina cada vez más hacia el conocimiento cuantitativo y basado en evidencia. Aunque estas habilidades podrían no desarrollarse uniformemente en todos los estudiantes, es posible fomentarlas mediante oportunidades de aprendizaje adecuadas y una pedagogía innovadora.

Por tanto, se evidencia la necesidad de formular diseños didácticos centrados en el fortalecimiento del razonamiento sobre datos y la alfabetización estadística en la formación de pedagogos. Al afrontar el desafío de diseñar e implementar investigaciones educativas, es esencial que se tengan las herramientas y habilidades requeridas para enfrentar el tratamiento de datos y transformar esa información en conocimientos profundos y aplicables.

En el ámbito de la investigación educativa, la estadística juega un papel esencial al orientar la recolección, organización, análisis e interpretación de datos. Estas capacidades estadísticas no solo permiten a los investigadores formular inferencias precisas, sino también tomar decisiones informadas basadas en evidencia empírica. Dada la relevancia de la investigación educativa como medio para el desarrollo y mejora de la educación, resulta fundamental que los futuros investigadores educativos construyan las habilidades necesarias para esta actividad. Sin embargo, la percepción de la estadística como un dominio abstracto y desafiante puede ser un obstáculo para muchos estudiantes. En este contexto, es crucial explorar y adoptar enfoques pedagógicos innovadores que hagan de la estadística una materia más accesible y comprensible para los futuros investigadores.

Este estudio se analizar los resultados de la implementación de un enfoque pedagógico fundamentado en la matemática realista para la enseñanza de la estadística, especialmente diseñado para la formación de futuros investigadores educativos. La matemática realista, como teoría educativa, promueve la integración de contextos reales y situaciones problemáticas en la instrucción matemática. Al adoptar este enfoque, se busca no solo mejorar el rendimiento académico de los estudiantes, sino también resaltar la aplicabilidad y pertinencia de la estadística en la investigación educativa. Además, se pretende transformar la percepción de la estadística, a menudo vista como abstracta, en una disciplina tangible y relevante, fomentando una actitud más positiva y comprometida hacia su aprendizaje.

MARCO TEÓRICO

Es indiscutible la relevancia de una comprensión profunda de la estadística en el ámbito de la investigación educativa. La estadística no solo brinda herramientas para descifrar patrones y tendencias en los datos, sino que permite evaluar la influencia e impacto de diversos factores en los resultados educativos. Como lo señala Berndt et al. (2021), la alfabetización estadística es esencial para interpretar y evaluar críticamente la información estadística en diversos contextos, subrayando su importancia en la formación de investigadores educativos (Creswell, 2014). Sin embargo, los enfoques tradicionales de enseñanza, que a menudo se centran en la memorización de fórmulas y procedimientos, no logran desarrollar una comprensión conceptual profunda de los conceptos estadísticos. Como se observa en el estudio de Del-Callejo-Canal, et al. (2020), la educación estadística no ha sido lo suficientemente accesible y actualizada, y muchos estudiantes tienen dificultades para generar razonamiento y pensamiento estadístico. Esta falta de comprensión puede limitar la capacidad de los investigadores para aplicar eficazmente las técnicas estadísticas en su trabajo (Pfannkuch, 2005).

Desde finales del siglo pasado, las tendencias en educación estadística han evolucionado hacia el desarrollo de la alfabetización, el razonamiento y el pensamiento estadístico (Ben Zvi & Garfield, 2004). Estos enfoques buscan promover procesos de enseñanza-aprendizaje activos, utilizando discusiones, tecnología y diseño de proyectos, en contraposición a los métodos tradicionales que se centran principalmente en habilidades y procedimientos. Estos últimos, a menudo, no llevan a los estudiantes a razonar o pensar estadísticamente. En esencia, la estadística no solo se trata de números y cálculos, sino de comprender e interpretar datos en un contexto específico, lo que puede potenciar las habilidades de razonamiento y toma de decisiones de los estudiantes (Cobb & Moore, 1997).

Siguiendo las directrices del GAISE (*Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education*), se destaca la importancia de cultivar el

pensamiento estadístico como una herramienta investigativa y no solo como un conjunto de fórmulas para memorizar. La clave está en fomentar una comprensión profunda y conceptual, enriquecida por el uso de datos auténticos que reflejen situaciones reales, facilitando así un aprendizaje activo y contextualizado. En esta perspectiva, la incorporación de tecnologías digitales no solo optimiza el análisis de datos, sino que también refuerza la comprensión de conceptos fundamentales. Además, la evaluación se reinventa, pasando de ser un simple medidor de conocimientos a una herramienta pedagógica que, al identificar aciertos y áreas de mejora, brinda una retroalimentación esencial para el crecimiento académico. Estas innovaciones en la pedagogía estadística buscan ofrecer una formación más integrada, pertinente y en sintonía con las demandas actuales (Del-Callejo-Canal, et al, 2020).

Sin embargo como lo señala Biehler, et al. (2018), el razonamiento sobre datos tiene un enfoque más específico, reconociendo aspectos o características particulares de los datos, tales como la variación, la distribución, la comparación de grupos y la asociación entre variables. Estos conceptos son esenciales para una comprensión profunda de la estadística, y son fundamentales para el desarrollo del razonamiento estadístico en los estudiantes. Al centrarse en estos aspectos específicos, se puede obtener una comprensión más detallada de cómo los estudiantes interpretan y razonan sobre datos en contextos.

El pensamiento estadístico se distingue notablemente del pensamiento matemático tradicional. Mientras que la matemática se centra en números y fórmulas abstractas, la estadística se adentra en el significado y contexto de esos números. Según Cobb y Moore (1997), la estadística demanda una perspectiva única, ya que "los datos no son simplemente números, son números en un contexto". Esta afirmación subraya la importancia de interpretar los datos dentro de su marco de referencia específico. Por ejemplo, un conjunto de datos sobre las tasas de empleo no es solo una serie de porcentajes; esos números representan historias, economías, políticas y vidas humanas. Por lo tanto, es esencial que la enseñanza de la estadística no se limite a la mera transmisión de técnicas y fórmulas, sino que también fomente un aprendizaje contextualizado. Este enfoque ayuda a los estudiantes a dar sentido a los datos, promoviendo interpretaciones que no solo sean correctas desde el punto de vista técnico, sino también relevantes, interesantes y variadas en función del escenario en el que se insertan esos datos (Damilano & Rigo, 2019).

La noción de variación es fundamental porque el análisis busca "explicar los efectos sistemáticos detrás de la variabilidad aleatoria de individuos y mediciones" (Pfannkuch & Wild, 2004, p. 38). En este sentido, es crucial distinguir entre "variabilidad", que es una característica observable de una entidad, y "variación", que está asociada con la medición de esa característica. La investigación ha identificado nueve facetas clave para entender la variación:

(1) desarrollar ideas intuitivas de variabilidad, (2) describir y representar la variabilidad, (3) usar la variabilidad para hacer comparaciones, (4) reconocer la variabilidad en tipos especiales de distribuciones, (5) identificar patrones de variabilidad al ajustar modelos, (6) usar la variabilidad para predecir muestras aleatorias o resultados, (7) considerar la variabilidad como parte del pensamiento estadístico, (8) reconocer fuentes de variación, y (9) resolver expectativas con la variación observada. Estas facetas proporcionan una perspectiva amplia y profunda sobre la variación, especialmente en relación con situaciones que involucran predicción, explicación y control.

En Pfannkuch y Wild (2004) se destaca el concepto de "problema práctico" o "problema del mundo real", en el que tanto la fuente como la solución se encuentran fuera del dominio estadístico, pero donde las investigaciones de este tipo aportan una parte esencial del entendimiento necesario para llegar a una solución. En este contexto, es crucial subrayar que la percepción de estos problemas no solo está moldeada por el conocimiento contextual, sino también por conceptos estadísticos intrínsecos. Como ilustran los autores, la distinción entre la variación atribuida a causas especiales y la variación debido a causas comunes desempeña un papel fundamental en la conceptualización y abordaje de estos problemas, ofreciendo una perspectiva profunda sobre cómo interpretar y enfrentar desafíos en escenarios reales.

Este trabajo postula la integración de la educación matemática realista como marco para la enseñanza de la estadística, pues este enfoque considera que el aprendizaje se produce de la participación activa del estudiante en la matemática y no solo de la simple retención de axiomas preestablecidos. El reto educativo radica en ofrecer contextos adecuados para que los alumnos vivencien las matemáticas como una acción intrínsecamente humana (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2020), hagan hallazgos por sí mismos (Scherer, 2020) y articulen sus pensamientos y entendimientos para redescubrir la esencia matemática (Wittmann, 2020).

Originada en los Países Bajos y desarrollada por Hans Freudenthal en 1973, seguido por teóricos como Koeno Gravemeijer en 1994, la matemática realista propone un enfoque educativo que subraya la importancia de los conceptos matemáticos en la vida diaria. Su objetivo principal es favorecer el desarrollo de conceptos mediante el abordaje de problemas situados en contextos reales o realistas.

En el contexto de la enseñanza de la estadística, el enfoque de la matemática realista tiene el potencial de brindar a los estudiantes una perspectiva pragmática sobre la aplicación de conceptos estadísticos a escenarios y problemáticas concretas. Por ejemplo, en lugar de limitarse a la asimilación de la distribución normal mediante fórmulas descontextualizadas, los estudiantes pueden indagar su manifestación en situaciones palpables, como la distribución de las calificaciones estudiantiles o la variabilidad en la estatura

de individuos. Esta aproximación proporciona una comprensión más enriquecida y contextualizada de los principios estadísticos, propiciando así la habilidad para implementar los conceptos en el campo de la investigación (Bakker, 2004).

La matemática realista no sólo promueve una comprensión de los conceptos, sino que también potencia el desarrollo del pensamiento crítico y el razonamiento lógico. Freudenthal (1973) sostenía que enfrentarse a problemáticas reales impulsa a los estudiantes a adoptar una postura analítica y lógica. Tal habilidad se revela esencial en el campo de la investigación educativa, donde los investigadores deben desplegar un rigor analítico para interpretar y valorar de forma crítica los datos y resultados obtenidos.

Si bien la matemática realista presenta un considerable potencial para enriquecer la didáctica de la estadística, las investigaciones en este ámbito aún son incipientes. Bakker (2004) ha aportado pruebas experimentales iniciales sobre las ventajas de este método en la instrucción estadística. Sin embargo, es imperativo profundizar mediante estudios adicionales para discernir su eficiencia y adaptabilidad en variados escenarios formativos de investigación.

De acuerdo con Selter y Walter (2020), la matematización es el aspecto fundamental en el aprendizaje. Este proceso no solo implica resolver problemas, sino también construir y reconstruir conceptos. Esta matematización se enmarca en un entorno sociocultural, donde valora la comunicación y el trabajo conjunto. Su objetivo es fomentar una comprensión matemática coherente, interconectando diversos conceptos para facilitar el aprendizaje. Es una ruta que se mueve de lo tangible a lo teórico, y la instrucción tiene como meta que los estudiantes perfeccionen sus métodos, desde enfoques contextuales hasta abordajes más formales.

Van Den Heuvel-Panhuizen (2020) enfatiza la necesidad de que los alumnos incorporen sus intuiciones y métodos iniciales al aprendizaje matemático. La educación matemática realista sugiere dos directrices esenciales para la planificación de actividades. La primera es crear contextos donde los estudiantes se sumerjan activamente, compartiendo sus reflexiones y suposiciones con sus pares, como señalan Sun y He (2020). La segunda, propuesta por Kaur, Wong y Govindani (2020), es promover la creación de variadas representaciones matemáticas, desde simples ilustraciones hasta conceptos abstractos. Estas primeras expresiones matemáticas sirven como cimientos para propiciar un pensamiento más estructurado y avanzar hacia una comprensión matemática enriquecida.

La matematización progresiva, según Bressan y Gallego (2011), se describe en cuatro etapas de entendimiento: situacional, referencial, general y formal. Estas etapas no siguen un orden jerárquico estricto. En la etapa situacional, los individuos aplican conocimientos básicos y estrategias

vinculadas al entorno, utilizando el sentido común y detectando patrones y conexiones. La etapa referencial introduce modelos iniciales, como gráficos y notaciones, que ayudan a estructurar el problema (modelo de). Al llegar a la etapa general, estos modelos se extrapolan, permitiendo la reflexión sobre las estrategias y su aplicación en distintos contextos (modelo para). Finalmente, en la etapa formal se manejan conceptos, técnicas y notaciones matemáticas para abordar y resolver variados problemas (conocimiento formal).

El presente estudio plantea que la matemática realista es un constructo teórico crucial para concebir y sustentar enfoques didácticos en la formación estadística de investigadores en el ámbito educativo. La matemática realista, al enfocarse en la aplicabilidad a situaciones tangibles y la resolución pragmática de problemáticas, se presenta como un referente esencial para moldear estos enfoques. Asimismo, al promover una lógica crítica y un razonamiento sistematizado, la matemática realista apoya al desarrollo de destrezas de análisis e interpretación de conjuntos de datos, habilidades que son fundamentales en la investigación.

METODOLOGÍA

Inicialmente se propone diseñar un enfoque que, basado en la educación matemática realista, permita a los estudiantes conectar la teoría estadística con situaciones prácticas y tangibles. Este diseño se complementa con un análisis cualitativo, cuyo objetivo es discernir y comprender los procesos y estrategias adoptados por los estudiantes durante su matematización progresiva. Es esencial examinar cómo el marco de la matemática realista potencia la comprensión conceptual de la estadística y, más importante aún, cómo facilita su aplicación en desafíos del mundo real.

Se realiza un análisis preliminar de los programas de formación de futuros investigadores en una universidad pública. Este análisis no solo se centra en los contenidos, sino también en las orientaciones curriculares y en cómo estos se alinean con las demandas actuales del campo educativo. Además, se llevan a cabo entrevistas con profesores expertos en estadística. Estas conversaciones buscan recopilar opiniones, expectativas y visiones sobre la relevancia de la estadística en la formación de pedagogos, proporcionando una referente para el diseño y enfoque didáctico propuesto.

La experimentación de la actividad didáctica diseñada se convierte en un espacio de aprendizaje enriquecedor, donde la estadística se observa desde una perspectiva aplicada a la investigación educativa. Finalmente, se analizan las experiencias y reflexiones de los estudiantes, utilizando herramientas como hojas de trabajo, observaciones y entrevistas, para obtener una comprensión profunda de sus percepciones, desafíos y logros en el proceso de aprendizaje.

Análisis de programas de formación

El análisis de los programas de formación en estadística para futuros investigadores educativos tiene como objetivo identificar qué temáticas, cómo se presenta y se enseña actualmente la estadística, así como de qué forma se puede integrar el enfoque de la matemática realista en estos programas.

Existen dos unidades de aprendizaje (asignaturas) que se centran en el estudio de la estadística. La primera, relativa a la estadística descriptiva donde se subraya la relevancia de la estadística y la probabilidad en el estudio del comportamiento humano. Estas herramientas son esenciales en campos como la psicología, la educación y el trabajo social. El objetivo principal de esta asignatura es proporcionar a los estudiantes las bases teóricas necesarias para aplicar la lógica matemática en la identificación cuantitativa y cualitativa de los fenómenos de la conducta humana.

En cuanto a los objetivos de formación, se busca que los estudiantes tomen conciencia de los problemas educativos actuales, que participen activamente en equipos pluridisciplinarios y adquieran un conocimiento sólido sobre las bases conceptuales y metodológicas de la disciplina. Además, se espera que puedan analizar críticamente la práctica educativa desde una perspectiva histórica y social.

El contenido del programa se divide en cinco unidades principales, que abarcan desde conceptos básicos de estadística, organización y representación de datos, principios de probabilidad, medidas de tendencia central y variabilidad, hasta elementos de muestreo en investigación.

La segunda unidad de aprendizaje es sobre estadística aplicada, y enfatiza que, en una era dominada por la tecnología, la estadística se ha convertido en el lenguaje esencial para manejar y coordinar material cuantitativo. Específicamente, la estadística aplicada se presenta como una herramienta crucial para tomar decisiones y hacer predicciones basadas en datos muestrales, siendo de particular importancia en campos como los estudios conductuales, sociales y educativos. Los estudiantes aprenderán a resolver dos tipos principales de problemas con técnicas estadísticas: la estimación de parámetros y el contraste de hipótesis. Además, se les introducirá a la distinción entre estadística paramétrica y no paramétrica, capacitándolos para elegir y aplicar la prueba más adecuada según la naturaleza del problema y la información disponible. En cuanto a los objetivos, se espera que los estudiantes adquieran una conciencia profunda de los problemas educativos a diferentes escalas, desde lo local hasta lo internacional. Además, se les anima a fundamentar sus intervenciones desde una perspectiva teórica y metodológica, a trabajar en equipos pluridisciplinarios y a desarrollar habilidades de investigación y comunicación efectiva a través del estudio de tres unidades principales.

En nuestro análisis curricular sobre la enseñanza de la estadística identificamos que la estadística se concibe como el estudio científico de la infor-

mación. Es esencial que los estudiantes comprendan que el núcleo de este campo radica en inferir, a partir de datos verificables, además de que el contexto en el que se generan estos datos es crucial para su interpretación adecuada. Sin embargo, observamos que en programas de estadística, la información y su contexto son abordados de manera teórica, priorizando los principios abstractos sobre la información real y su origen. Esta tendencia puede dejar a los estudiantes sin la experiencia necesaria para manejar datos de situaciones auténticas que exigen un nivel de análisis y deducción más profundo. Además, es fundamental que los currículos reconozcan que, a diferencia de otras áreas matemáticas, la estadística se enfrenta a situaciones con naturaleza impredecible, donde las conclusiones pueden variar, introduciendo un nivel de variabilidad en los datos que no se ve en otras disciplinas matemáticas.

El análisis curricular determinó que las visualizaciones estadísticas son cruciales en la formación pedagógica, especialmente por su relevancia en medios digitales y tradicionales. Estas herramientas no solo facilitan la comunicación y síntesis de datos, sino que también desempeñan un papel central en la organización y presentación de la información. Según Wild y Pfannkuch (1999), las tablas y gráficos son esenciales para el proceso de transnumeración, que implica obtener perspectivas renovadas al modificar la representación de los datos. Además, el análisis subraya que, en el ámbito científico, estas visualizaciones actúan como vehículos esenciales para la articulación y difusión de ideas abstractas. Otro aspecto que se observó en el análisis curricular es que, a pesar de que diversas áreas matemáticas emplean variables, es en la estadística donde se pone un énfasis particular en el análisis de la variación. Su propósito central es medir, gestionar y anticipar esta variación. A diferencia de otras disciplinas matemáticas en las que se presupone una alineación perfecta de la información con un modelo sin evaluar su precisión, en estadística esta evaluación es esencial. La noción de variación es omnipresente en la información y adopta múltiples interpretaciones, desde la variación de resultados en pruebas aleatorias hasta la variación en muestras.

Por otra parte, siguiendo los planteamientos de Bakker y Gravemeijer (2004), uno de los pilares del análisis estadístico es su capacidad para describir y prever características de conjuntos completos de datos, más que de datos individuales. Aunque pueden utilizar el conjunto total de datos para determinar aspectos como la media o el rango, no siempre asocian estos cálculos con las características intrínsecas de la distribución. Adicionalmente identificamos que la formación en estadística debe potenciar la habilidad de los estudiantes para interpretar, analizar e inferir a partir de un conjunto de datos. Es esencial reconocer la multifacética naturaleza del concepto de “distribución”, que puede abarcar desde el tratamiento de datos y probabilidad hasta las muestras.

En el análisis curricular se ha destacado que, mientras en una relación funcional cada dato de una variable X (independiente) se asocia directamente con un valor específico de Y (dependiente), en el contexto de correlación cada dato de X se relaciona con un rango de valores de Y , lo que amplía la comprensión tradicional de dependencia funcional. Esta correlación puede ser cuantificada, oscilando entre 0 (ausencia total de correlación) y 1 (correlación perfecta), utilizando coeficientes específicos para variables numéricas o descriptivas. El análisis también subraya la importancia de la correlación en la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.

Otro aspecto que se desataca en el análisis curricular es la identificación de que el núcleo de la estadística radica en vincular las características de las muestras con las de la población que simulan. Esta conexión es esencial para determinar qué información recolectar y para formular conclusiones con un nivel de confianza determinado. Este tipo de razonamiento es distintivo y no se observa comúnmente en otras disciplinas matemáticas.

Para el análisis de las concepciones de diseñadores de programas, profesores y coordinadores sobre la estadística y su enseñanza se entrevistaron a 6 académicos. La entrevista libre se desarrolló en torno a los objetivos del curso, los métodos de enseñanza utilizados, los materiales, las actividades de aprendizaje, los métodos de evaluación y cualquier mención de la enseñanza de la estadística.

Los resultados muestran que los docentes creen que la enseñanza de la estadística no puede depender únicamente de los textos y libros, sino que es esencial el papel del maestro para proporcionar claridad y comprensión a los estudiantes. Esta tendencia refleja el actual modelo educativo universitario en el que se valora en gran medida la guía directa del docente. Sin embargo, muchos estudiantes no ven otras formas efectivas de aprender, quizás porque la instrucción directa del docente es lo que principalmente han experimentado. Además, los docentes resaltan la importancia de que se les enseñe a interpretar adecuadamente los resultados de los análisis estadísticos. A su vez, hay un fuerte consenso entre ellos sobre el valor del aprendizaje colaborativo en la enseñanza de la estadística, ya que consideran que este enfoque promueve discusiones que pueden llevar a una comprensión más rica de los temas abordados.

La mayoría de los profesores, aproximadamente el 80%, cree que la estadística está estrechamente vinculada a la matemática y que se necesita un alto nivel de conocimiento matemático para entenderla. Esta percepción podría derivarse del hecho de que la estadística históricamente ha sido enseñada en paralelo a la matemática, enfocándose en aspectos determinísticos y dejando de lado la esencia de la variabilidad. No obstante, más de la mitad de los profesores piensa que es esencial adoptar un enfoque y mentalidad específicos de la estadística para abordarla adecuadamente.

Gran mayoría de los entrevistados siente la necesidad de buscar y analizar información actualizada de diversas fuentes. Probablemente esta búsqueda lleva a muchos a percibir que las actividades estadísticas requieren de una inversión significativa de tiempo y esfuerzo.

Se observa también que los profesores ven la estadística no solo como una herramienta crucial para el futuro desempeño profesional, sino también como un área de estudio con su propia complejidad inherente. Aunque están convencidos de su capacidad de dominio, también subrayan que la forma en que se presenta actualmente puede ser intimidante para muchos estudiantes.

Esta percepción destaca la necesidad de innovar en la pedagogía estadística. Varios de los entrevistados comentan que con la tecnología moderna a nuestra disposición, como programas de software especializados y recursos digitales, hay un amplio margen para hacer que la enseñanza de la estadística sea más comprensible y directamente aplicable. La simplificación de conceptos y la integración de herramientas tecnológicas pueden ser esenciales para transformar la enseñanza en una experiencia más enriquecedora y menos desafiante.

Todos los participantes enfatizaron la relevancia de la estadística en la investigación educativa. Un punto en común fue la preocupación sobre la habilidad de los estudiantes para trasladar los conceptos estadísticos a escenarios prácticos y reales. Una de las entrevistadas, por ejemplo, compartió su inquietud sobre cómo los estudiantes a menudo se sienten abrumados por la complejidad de la estadística y cómo esto afecta su capacidad para aplicarla de manera efectiva.

Sin embargo, lo más revelador fue que, a pesar de reconocer la importancia de la pedagogía en la enseñanza de la estadística, pocos de ellos podían describir escenarios pedagógicos específicos para esta disciplina. Esto resalta la urgente necesidad de renovación en la metodología de enseñanza de la estadística, con el fin de que esta disciplina sea entendida y aplicada de manera más efectiva en contextos prácticos.

Diseño de la actividad didáctica

Se diseñó la actividad didáctica “Pruebas de hipótesis de dos muestras: muestras dependientes” que integra el enfoque curricular de la carrera y los objetivos previstos en el plan de estudios respecto al dominio de técnicas matemáticas para el análisis estadístico. El problema fue tomado del propio desempeño de los estudiantes sin que ellos supieran el origen. Se plantea la variación de calificaciones ante un cambio de estrategia pedagógica, de trabajo individual a trabajo colaborativo. Los estudiantes realizaron el estudio y no se les informó que se trataba de su propio desempeño grupal sino hasta presentar las conclusiones.

Pruebas de hipótesis de dos muestras: muestras dependientes

En tu facultad se ha decidido implementar una nueva metodología de enseñanza de la estadística basada en el aprendizaje colaborativo. Después de un parcial (un periodo de evaluación) de implementación, algunos estudiantes sienten que los puntajes en las pruebas han bajado. Como miembro del consejo estudiantil, se te ha encomendado investigar si esta percepción es correcta.

Etapas Situacional:

1. Discute con tus compañeros de clase sobre sus experiencias con la metodología de aprendizaje colaborativo. ¿Crees que tus puntajes han bajado? ¿Por qué?
2. Observa los puntajes que obtuvieron 32 estudiantes, antes y después de la implementación de la nueva metodología basada en el aprendizaje colaborativo. ¿Qué notas a simple vista?

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Puntaje antes	75	86	74	83	62	67	75	59	79	63	87	90	98	84	62	79	86	100	63	93	100	86	83	89	67	91	68	78	87	62	86	99
Puntaje después	73	85	88	81	73	92	73	63	78	73	85	87	84	96	78	77	84	98	79	79	98	93	80	86	81	90	90	92	85	93	98	97

Etapas Referencial:

3. Calcula la diferencia entre los puntajes antes y después para cada estudiante.
4. ¿Qué tendencias observas? ¿Hay más puntajes que hayan bajado que los que hayan subido?

Etapas General:

5. Con la ayuda de tu profesor, aprende sobre las pruebas de hipótesis y cómo se pueden usar para investigar este tipo de problemas.
6. Formula hipótesis basadas en los datos y las discusiones anteriores.
7. Calcula el valor de t usando los datos y compáralo con el valor crítico, con un nivel de significancia $\alpha = 0.01$

Etapas Formal:

8. Interpreta los resultados de la prueba de hipótesis en el contexto del problema. ¿Qué puedes concluir sobre la nueva metodología basada en tus cálculos?
9. Presenta tus hallazgos al consejo estudiantil y discute las implicaciones para la escuela.

El punto de partida se sitúa en un enfoque práctico y contextualizado, permitiendo que el aprendizaje se vincule directamente con situaciones tangibles y cotidianas. La relevancia del aprendizaje colaborativo se manifiesta al fomentar la discusión y el intercambio de perspectivas entre compañeros. Estas interacciones no sólo enriquecen el proceso investigativo,

sino que también fortalecen el pensamiento crítico y la capacidad de sintetizar información diversa. A nivel metodológico, la actividad se centra en dotar a los estudiantes de herramientas estadísticas robustas, esenciales en cualquier investigación educativa. Al introducir conceptos como la prueba de hipótesis y desafiar a los estudiantes a emplearlos en un marco práctico, se facilita la transformación de datos brutos en decisiones informadas y fundamentadas.

Uno de los puntos destacados de esta propuesta es la integración de habilidades comunicativas. La capacidad de presentar hallazgos, articular argumentos basados en datos y comunicar ideas de manera efectiva son competencias esenciales en el ámbito investigativo. Al incluir una fase en la que se presenta información ante un consejo estudiantil, la actividad promueve el desarrollo de estas habilidades comunicativas, combinadas con un enfoque crítico y reflexivo.

La justificación matemática del diseño se centra en la aplicación y comprensión de pruebas estadísticas, específicamente pruebas de hipótesis de dos muestras dependientes, para extraer conclusiones objetivas basadas en datos sobre situaciones reales. Desglosaremos la justificación en función de los componentes matemáticos clave del diseño:

Muestras dependientes: La elección de muestras dependientes (puntajes antes y después de la implementación de una nueva metodología) es crucial. Dado que se comparan las puntuaciones de los mismos estudiantes antes y después de la intervención, es posible eliminar la variabilidad entre diferentes individuos, lo que permite una comparación más precisa.

Diferencia de puntajes: Al calcular la diferencia entre los puntajes antes y después para cada estudiante, se está realizando una transformación que simplifica el análisis subsiguiente. Esta diferencia es la base para determinar si hay un cambio significativo en las puntuaciones.

Hipótesis estadística: La formulación de hipótesis es fundamental en estadística. La hipótesis nula generalmente asume que no hay diferencia (en este caso, que la nueva metodología no tuvo efecto), mientras que la hipótesis alternativa sugiere lo contrario. Las decisiones tomadas a partir de los datos determinarán si rechazamos o no la hipótesis nula.

Prueba t student de muestras dependientes: Esta prueba es adecuada para comparar dos conjuntos de datos relacionados. Al calcular el valor de t y compararlo con un valor crítico (para un nivel de significancia $\alpha = 0.01$), se puede determinar si las diferencias observadas son estadísticamente significativas o si podrían haber ocurrido por casualidad.

Nivel de significancia (α): El nivel de significancia determina el umbral para decidir si una diferencia es significativa. Un α de 0.01 indica un alto nivel de rigor, ya que sólo hay un 1% de probabilidad de rechazar erróneamente la hipótesis nula si es verdadera.

Interpretación contextual: Aunque se centra en el cálculo, la actividad también destaca la importancia de interpretar los resultados en el contexto del problema. La matemática no es sólo sobre números; es crucial poder traducir estos datos en conclusiones significativas para un contexto real.

Recolección de Datos Cualitativos

Para obtener información se usó una combinación de técnicas de recolección de datos, incluyendo observaciones de clase, entrevistas y análisis de los trabajos de los estudiantes.

Observaciones de Clase

Las observaciones en el aula proporcionaron información sobre la dinámica de la clase, la interacción entre los estudiantes y el profesor, y la forma en que se llevó a cabo la implementación de la actividad. Se tomaron notas detalladas sobre aspectos como la participación activa de los estudiantes, el uso de recursos didácticos y las reacciones de los estudiantes ante las tareas y los desafíos propuestos.

A pesar de ser una clase universitaria, se notó una variedad de niveles de compromiso. Algunos equipos de estudiantes mostraron una colaboración estrecha, discutiendo activamente y compartiendo ideas, mientras que otros parecían más reacios, con uno o dos miembros dominando la conversación. El profesor desempeñó un papel activo al circular por el aula, responder preguntas y ofrecer orientación cuando era necesario. Se observó que los estudiantes no dudaban en acercarse al profesor para aclarar dudas, lo que indica un ambiente de aprendizaje abierto y de apoyo. La mayoría de los estudiantes parecían cómodos usando Excel para sus cálculos; sin embargo, algunos de ellos expresaron dificultades técnicas o falta de familiaridad con ciertas funciones, lo que llevó a momentos de enseñanza entre pares en los que los compañeros más experimentados ayudaban a los menos versados. Se observaron diversas reacciones, algunos estudiantes mostraron signos de frustración, mientras que otros se mostraron entusiasmados por el desafío. Hubo momentos de debate intenso, especialmente al discutir las hipótesis y al interpretar los resultados. Además de Excel, se observó el uso de pizarras para esbozar ideas y gráficos. Algunos estudiantes también recurrieron a libros de texto y recursos en línea para complementar su comprensión. Al final de la actividad, el profesor dedicó tiempo para una sesión de reflexión, donde los estudiantes compartieron sus experiencias, lo que aprendieron y

las áreas en las que sentían que necesitaban más apoyo. El ambiente en el aula era en su mayoría positivo y colaborativo. Aunque hubo momentos de tensión por desacuerdos o confusiones, estos se resolvieron a través del diálogo y la mediación del profesor cuando fue necesario.

Entrevistas

Tras la implementación de la actividad se llevaron a cabo entrevistas semi-estructuradas, dirigidas tanto a los estudiantes que formaron parte activa del experimento como a aquellos que participaron desde un rol más pasivo. Su objetivo principal era profundizar en sus vivencias y percepciones durante la intervención. Las preguntas abordaron diversos ámbitos de la experiencia educativa:

- Se preguntó a los estudiantes sobre su opinión respecto a la metodología basada en el aprendizaje colaborativo. ¿Les pareció efectiva? ¿Qué ventajas o desventajas identificaron en comparación con métodos tradicionales?
- Se exploró su nivel de entendimiento sobre los conceptos estadísticos presentados. ¿Cuáles les resultaron más claros? ¿Hubo alguno que les generara confusión o dudas?
- Se indagó sobre su confianza al aplicar estos conceptos en situaciones reales o hipotéticas. ¿Se sintieron preparados para usar estas herramientas en futuros escenarios académicos o profesionales?
- Se les preguntó sobre su experiencia trabajando en equipo. ¿Cómo fue la interacción con sus compañeros? ¿Consideran que la dinámica grupal influyó en su aprendizaje?
- Se exploró su experiencia con el uso de Excel y otros recursos didácticos. ¿Les facilitó el proceso? ¿Encontraron algún desafío técnico durante la actividad?
- Se les brindó un espacio para compartir sugerencias, críticas o recomendaciones para mejorar futuras implementaciones de la actividad.

Las entrevistas, que tuvieron una duración promedio de 20 minutos, fueron grabadas con el consentimiento de los estudiantes y posteriormente transcritas. Estas transcripciones se sometieron a un análisis cualitativo, buscando patrones, similitudes y diferencias en las respuestas de los estudiantes.

Diálogo sobre la metodología de aprendizaje colaborativo. La metodología de aprendizaje colaborativo ofrece perspectivas diversas al permitir a los estudiantes aprender de sus compañeros. Aunque puede haber resistencia inicial debido a la adaptación a un nuevo estilo de aprendizaje, los beneficios, como la claridad conceptual a través de la discusión, son evidentes. La interacción entre pares es esencial para consolidar conceptos matemáticos complejos.

Profesora: *Hablemos sobre la metodología basada en el aprendizaje colaborativo. ¿Qué opinas sobre ella? ¿Te pareció efectiva?*

Estudiante 1: *La verdad, al principio me costó un poco adaptarme porque siempre he sido de estudiar solo. Pero, después de un rato, me di cuenta de que podía aprender mucho de mis compañeros, sobre todo de aquellos que entendían cosas que a mí se me complicaban.*

Estudiante 2: *¡Me encantó! Siento que aprendo más cuando discuto las cosas con otros. Es como cuando estudias para un examen con amigos y todo se vuelve más claro.*

Diálogo sobre la comprensión de conceptos estadísticos: La estadística, siendo una rama matemática con múltiples conceptos y aplicaciones, puede presentar desafíos para varios estudiantes. La actividad brindó la oportunidad de abordar y clarificar estas dudas en un entorno colaborativo, resaltando la importancia de la discusión y el intercambio de ideas para una comprensión más profunda.

Profesora: *En cuanto a los conceptos estadísticos, ¿cuáles te resultaron más claros y cuáles te generaron dudas?*

Estudiante 3: *Las pruebas de hipótesis me quedaron claras, sobre todo con los ejemplos que usamos. Pero, no te voy a mentir, me costó un poco entender lo de los grados de libertad y el valor crítico.*

Estudiante 4: *A mí me pasó al revés, jaja. Los grados de libertad los entendí al tiro, pero las hipótesis me costaron un poco más. Tuve que repasar después de clase.*

Diálogo sobre la aplicación práctica de conceptos: La relevancia de la matemática radica en su aplicabilidad en situaciones reales. La actividad permitió a los estudiantes visualizar y experimentar la utilidad de los conceptos estadísticos en escenarios prácticos, reforzando la importancia de la estadística en la toma de decisiones basadas en datos.

Profesora: *¿Cómo te sentiste al aplicar estos conceptos en situaciones prácticas?*

Estudiante 5: *Al principio, estaba como "¿Y esto para qué me sirve?". Pero cuando empezamos a usarlo en ejemplos reales, todo tuvo más sentido. Me sentí más seguro al ver que podía aplicarlo en situaciones del día a día.*

Estudiante 6: *Me sentí bien, pero hubo momentos en que dudé un poco. A veces me preguntaba si lo estaba haciendo bien o si estaba interpretando los datos correctamente.*

Diálogo sobre la dinámica grupal. Las interacciones grupales en el aprendizaje matemático pueden ser un arma de doble filo. Mientras que la diversidad de perspectivas enriquece la comprensión, las distracciones y desafíos de la dinámica grupal pueden presentar obstáculos. Sin embargo, la actividad resaltó la importancia de la colaboración y la comunicación efectiva en la resolución de problemas matemáticos.

Profesora: *Hablemos de la dinámica grupal. ¿Cómo fue trabajar en equipo?*

Estudiante 7: *Fue una experiencia mixta. Por un lado, fue genial tener diferentes perspectivas, pero también hubo momentos en que nos desvíamos del tema y terminamos hablando de otras cosas, jaja.*

Estudiante 8: *¡Uf! Trabajar en grupo siempre es un desafío. Pero creo que esta vez nos complementamos bien. Aunque, claro, siempre hay ese compañero que deja todo para el final.*

Diálogo sobre el uso de Excel y recursos didácticos. Las herramientas tecnológicas como Excel son fundamentales en la estadística moderna. La actividad no solo reforzó conceptos matemáticos, sino que también brindó a los estudiantes habilidades técnicas esenciales. La familiaridad con estas herramientas es crucial para la eficiencia y precisión en el análisis estadístico.

Profesora: *¿Qué opinas sobre el uso de Excel y otros recursos didácticos durante la actividad?*

Estudiante 9: *Excel me salvó la vida. Si hubiera tenido que hacer esos cálculos a mano, hubiera sido un desastre. Aunque hubo un momento en que olvidé cómo formar la instrucción y tuve que googlearla.*

Estudiante 10: *Me pareció útil, pero también creo que sería bueno tener una clase solo de Excel. Hay tantas cosas que no sé y que podrían facilitar el trabajo.*

Diálogo sobre sugerencias y comentarios. La retroalimentación de los estudiantes es vital para la evolución y mejora de las metodologías de enseñanza. La actividad, al brindar un espacio para la reflexión y la retroalimentación, subraya la importancia de adaptar y ajustar las estrategias educativas para satisfacer las necesidades y preferencias de los estudiantes en su viaje matemático.

Profesora: *Por último, ¿tienes alguna sugerencia o comentario para mejorar futuras implementaciones de la actividad?*

Estudiante 11: *Sería genial si pudiéramos tener más tiempo para discutir en grupo. A veces sentí que estábamos contra el reloj y eso me estresó un poco.*

Estudiante 12: *Me gustaría que tuviéramos más ejemplos prácticos. Esos me ayudan a entender mejor. Y, ya que estamos, ¿podemos tener una clase en la cafetería de vez en cuando? Jaja, solo digo.*

Análisis de los trabajos de los estudiantes: Se recolectaron y analizaron muestras de los trabajos de los estudiantes; este análisis proporcionó una visión directa de la forma en que aplicaron los conocimientos de estadística.

Desde una perspectiva matemática, los estudiantes enfrentaron desafíos que requerían una comprensión sólida de los fundamentos. La necesidad de calcular diferencias entre puntajes, interpretar valores y aplicar pruebas de hipótesis puso a prueba su dominio de las matemáticas. Aunque algunos estudiantes mostraron un dominio excepcional de estos conceptos, otros lucharon, lo que indica áreas en las que podríamos necesitar reforzar la instrucción en el futuro.

En cuanto a las habilidades de análisis de datos, la actividad les brindó a los estudiantes la oportunidad de trabajar con datos reales, lo que siempre es

más desafiante que los ejemplos de libros de texto. Usar Excel para ordenar y analizar sus cálculos les permitió ver la aplicación práctica de estas habilidades en un escenario del mundo real.

Fue alentador ver a muchos estudiantes abordar estos desafíos con entusiasmo, aunque algunos encontraron obstáculos en la interpretación de los datos. La capacidad de alfabetización estadística fue, sin duda, uno de los aspectos más destacados de esta actividad. Los estudiantes aprendieron a aplicar pruebas de hipótesis, además de tener que interpretar los resultados en un contexto específico. Esta habilidad es esencial en el mundo actual, en donde estamos rodeados de datos y estadísticas en todo momento. Los aspectos más relevantes planteados en la actividad incluyeron la capacidad de los estudiantes para trabajar en equipo y combinar sus habilidades individuales para abordar problemas complejos.

La actividad también destacó la importancia de la retroalimentación y la reflexión en el proceso de aprendizaje. Sin embargo, hubo desafíos. Los aspectos más complicados estuvieron relacionados con la interpretación de los resultados estadísticos. Algunos estudiantes lucharon con la idea de significancia estadística versus significancia práctica, lo que llevó a debates enriquecedores en clase.

Análisis de datos

El problema planteado a los estudiantes describe la implementación de una nueva metodología de enseñanza basada en el aprendizaje colaborativo y cómo esta podría haber afectado los puntajes. Se pide a los estudiantes que observen, discutan y apliquen pruebas de hipótesis para determinar si hay una diferencia significativa en los puntajes antes y después de la implementación.

Etapas Situacional. Las respuestas van desde que sienten que los puntajes han bajado debido a distracciones o el enfoque en el trabajo en grupo, hasta aquellos que aprecian la nueva metodología y sienten que sus puntajes han mejorado. Al observar los puntajes, algunos estudiantes notaron que la mayoría tuvo una disminución en sus calificaciones después de la implementación.

Etapas Referencial. Las respuestas indican que 18 de 32 estudiantes vieron una disminución en sus puntajes, mientras que 14 vieron un aumento. Se discute sobre cómo calcular la diferencia entre los puntajes.

Etapas General. Los estudiantes aprendieron sobre pruebas de hipótesis y cómo se pueden aplicar a este tipo de problemas. Se formula una hipótesis nula y alternativa basada en los datos y discusiones.

Etapla Formal. Se interpreta el resultado de la prueba de hipótesis en el contexto del problema. Se discuten las implicaciones para la escuela basadas en los hallazgos.

Observación de Puntajes. Algunos estudiantes observaron que la mayoría de los puntajes disminuyeron después de la implementación. Matemáticamente, esto se puede representar como una media de las diferencias de puntajes. Si la media es negativa, indica una tendencia general a la baja.

Para cada estudiante i . Si $d_i > 0$, el puntaje del estudiante i aumentó; si $d_i < 0$, disminuyó.

$$d_i = P_{despues,i} - P_{antes,i}$$

Donde:

d_i = diferencia de puntajes del estudiante i

$P_{despues,i}$ = Puntaje del estudiante i , después de la implementación

$P_{antes,i}$ = Puntaje del estudiante i , antes de la implementación

Prueba de Hipótesis. La hipótesis nula $H_0 : \mu_d \geq 0$ sugiere que los puntajes no disminuyeron significativamente después de la implementación de la nueva metodología. La hipótesis alternativa $H_a : \mu_d < 0$ sugiere que los puntajes disminuyeron significativamente después de la implementación de la nueva metodología.

El valor t calculado estadísticamente se compara con el valor crítico para formular la regla de decisión y determinar si se rechaza o no la hipótesis nula. Al respecto se presentan los siguientes tres casos:

Estudiante A: Cree que su puntaje ha disminuido porque la nueva metodología requiere más trabajo en equipo y menos estudio individual. Matemáticamente, esto podría reflejarse en una disminución significativa en su puntaje después de la implementación.

Estudiante B: Siente que su puntaje ha aumentado porque la nueva metodología le permite discutir y entender mejor los conceptos con sus compañeros. Matemáticamente, esto podría reflejarse en un aumento significativo en su puntaje después de la implementación.

Estudiante Hipotético C: No nota ninguna diferencia en su puntaje. Matemáticamente, esto se traduciría en una diferencia de puntaje cercana a cero.

Observación de puntajes

Media de las diferencias. Una forma de cuantificar las observaciones iniciales de los estudiantes es calcular la media de las diferencias de puntajes.

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i = P_{despues,i} - P_{antes,i})$$

Si $\bar{d} < 0$, indica una tendencia general a la baja en los puntajes después de la implementación.

Distribución de las diferencias

Para cada estudiante i , la diferencia de puntajes se calcula como:

$$d_i = P_{despues,i} - P_{antes,i}$$

Podemos visualizar estas diferencias usando una gráfica para identificar tendencias y valores atípicos.

Prueba de Hipótesis

Hipótesis Nula y Alternativa

$$H_0 : \mu_d \geq 0$$

$$H_a : \mu_d < 0$$

Donde μ_d es la media poblacional de las diferencias.

Estadístico de Prueba: Para muestras relacionadas, el estadístico t se calcula como:

$$t = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

Donde S_d es la desviación estándar de las diferencias y n es el número de estudiantes.

Regla de decisión: Si el valor de t estadístico es menor que el valor crítico (por ejemplo, 2.064 para $\alpha = 0.05$ y $n - 1$ grados de libertad), se rechaza la hipótesis nula.

Interpretación

Si se rechaza H_0 , se sugiere que hay una disminución estadísticamente significativa en los puntajes antes y después de la implementación.

Si no se rechaza H_0 , no hay evidencia suficiente para sugerir que la nueva metodología ha afectado los puntajes.

Etapa Situacional

Discute con tus compañeros de clase sobre sus experiencias con la metodología de aprendizaje colaborativo. ¿Crees que tus puntajes han bajado? ¿Por qué?

Siento que cuando trabajamos colaborativamente me distraigo más fácilmente y no puedo concentrarme en las pruebas y mi puntaje baja.

Creo que mi puntaje baja porque la metodología de aprendizaje colaborativo se centra más en el trabajo en grupo y menos en la preparación individual para las pruebas.

A mí me gusta trabajar colaborativamente, pero no estoy seguro de cómo ha afectado mis puntajes.

Me gusta trabajar en equipo, entiendo lo que hago en equipo y lo hago bien, pero como las pruebas son individuales, dudo de lo que estoy haciendo, ya no están mis compañeros para confirmar si lo que estoy haciendo está bien, y mi puntaje bajó.

Desde que trabajamos en equipo y buscamos la respuesta a un problema real, le entiendo más a cada tema, mi puntaje subió mucho.

Me gusta trabajar colaborativamente por que entiendo más cuando mis compañeros me explican resolviendo un problema y mi puntaje subió muchooo.

Observa los puntajes que obtuvieron 32 estudiantes antes y después de la implementación de la nueva metodología basada en el aprendizaje colaborativo. ¿Qué notas a simple vista?

Al observar los puntajes, parece que la mayoría de los estudiantes tuvieron una disminución en sus calificaciones después de la implementación de la nueva metodología.

No hay estudiantes cuyos puntajes se mantuvieran constantes.

Si sacas el promedio del puntaje antes y del puntaje después, no disminuyó.

Hay unos que disminuyeron, pero... también hay unos que aumentaron.

Si contamos cuantos aumentaron y cuantos disminuyeron, ganan los que disminuyeron.

Hay que ver si, los que disminuyeron mucho o los que aumentaron mucho, porque no todos son iguales, solo dos.

Etapas Referencial

Calcula la diferencia entre los puntajes antes y después para cada estudiante.

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Puntaje antes	75	86	74	83	62	67	75	59	79	63	87	90	98	84	62	79	86	100	63	93	100	86	83	89	67	91	68	78	87	62	86	99
Puntaje después	73	85	88	81	73	92	73	63	78	73	85	87	84	96	78	77	84	98	79	79	98	93	80	86	81	90	90	92	85	93	98	97
Diferencia	-2	-1	14	-2	11	25	-2	4	-1	10	-2	-3	-14	12	16	-2	-2	-2	16	-14	-2	7	-3	-3	14	-1	22	14	-2	31	12	-2

¿Qué tendencias observas? ¿Hay más puntajes que hayan bajado que los que subieron?

18 de 32 estudiantes disminuyeron su puntaje y 14 de 32 aumentaron su puntaje.

Tengo una duda, para sacar la diferencia ¿se resta puntaje antes de puntaje después, o al revés?

Dos diferencias son iguales.

Hay más que bajaron.

Son más las diferencias de los que bajaron.

Tres bajaron uno, dos bajaron catorce, podríamos sumar los que bajaron y aparte sumar los que subieron.

Etapas General

Con la ayuda de tu profesor, aprende sobre las pruebas de hipótesis y cómo se pueden usar para investigar este tipo de problemas.

Aprendimos diferentes pruebas de hipótesis de acuerdo a los datos que tenemos.

Depende del tipo de muestra la prueba que aplicaremos.

Aprendimos que una prueba de hipótesis nos permite determinar si un cambio observado en los datos es estadísticamente significativo o si podría deberse simplemente al azar.

Cada fórmula nos dice qué necesitamos, si lo tenemos lo aplicamos, si no, pues ... buscamos otra.

Hay muchas pruebas de hipótesis y se usan de acuerdo a los datos.

Sirven para analizar e interpretar los datos.

Formula hipótesis basadas en los datos y las discusiones anteriores.

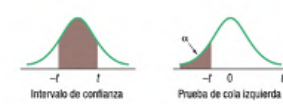
- Hipótesis nula (H_0): Los puntajes no disminuyeron significativamente después de la implementación de la nueva metodología $\mu_d \geq 0$ (donde es la media de las diferencias).
- Hipótesis alternativa (H_a): Los puntajes disminuyeron significativamente después de la implementación de la nueva metodología $\mu_d < 0$

Calcula el valor de t usando los datos y compáralo con el valor crítico con un nivel de significancia (Figura 1 y Figura 2).

Figura 1

Obtención del valor crítico t

Distribución t de Student



Grados de libertad (gl) = $n-1$
 $gl = 32$ (estudiantes) - 1
 $gl = 31$

Rechace H_0 si $\mu_d < 0$

Por lo tanto, es una **prueba de una cola**, con un nivel de significancia de $\alpha = 0.01$ y $gl = 31$

Localizando los valores en la tabla de la izquierda, se obtiene:

valor crítico de $t < 2.453$

Regla de decisión:

Rechace H_0 si $t < 2.453$

		Intervalo de confianza, c					
		80%	90%	95%	98%	99%	99.9%
gl	Nivel de significancia para una prueba de una cola, α						
	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005	
		Nivel de significancia para una prueba de dos colas, α					
	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001	
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619	
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599	
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924	
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610	
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.860	
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959	
7	1.415	1.895	2.365	2.990	3.499	5.408	
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041	
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781	
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587	
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437	
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318	
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221	
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140	
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073	
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015	
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.896	3.965	
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.879	3.922	
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.863	3.883	
20	1.325	1.725	2.086	2.529	2.845	3.850	
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819	
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792	
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768	
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745	
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725	
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707	
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690	
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674	
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659	
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646	
31	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744	3.633	
32	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.622	
33	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	3.611	
34	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.601	
35	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.591	

Figura 2
Obtención de valor t estadístico

Estadístico	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Antes	75	86	74	81	62	67	75	59	79	83	87	90	96	84	62	79	86	100	63	83	100	86	83	89	67	91	64	78	57	62	66	59
Después	73	85	88	81	73	92	78	63	78	79	85	87	84	95	78	77	84	98	79	79	98	93	80	86	81	90	90	92	85	98	97	
Diferencia	-2	-1	14	-2	11	25	-2	4	-1	10	-2	-3	-14	17	16	-2	-2	-2	16	-14	-2	7	-3	-3	14	-1	22	18	-2	31	12	-2
Desviación estándar	4.625	4.585	4.195	4.185	4.585	5.275	4.035	4.085	4.265	4.585	4.275	4.215	4.085	4.615	4.275	4.195	4.585	4.585	4.275	4.155	4.585	4.275	4.585	4.275	4.035	4.715	5.275	4.435	4.585	5.185	4.515	
Grados de libertad	31	30	31	30	31	30	31	30	31	30	31	30	31	30	31	30	31	30	31	30	31	30	31	30	31	30	31	30	31	30	31	30
Valor crítico	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
Valor t	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	

Prueba de hipótesis

Valor crítico

4.625

Grados de libertad

31

Valor t

2.45472998

$$t = \frac{\bar{d}}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} = \frac{4.625}{\frac{10.65817875}{\sqrt{32}}} = \frac{4.625}{5.656854249} = \frac{4.625}{1.884117617} \approx 2.455$$

Etapas Formales
Interpreta los resultados de la prueba de hipótesis en el contexto del problema. ¿Qué puedes concluir sobre la nueva metodología basada en tus cálculos?

Rechace H_0 si $t < 2.453$
 $t \approx 2.455$
 $2.455 > 2.453$ por lo tanto, H_0 no se rechaza

Esto significa que la diferencia observada en los puntajes antes y después, aunque pueda existir, no es estadísticamente significativa al nivel de significancia de 0.01. En otras palabras, no hay evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula y no podemos afirmar que haya una diferencia real en los puntajes antes y después.

Esto puede interpretarse como que el tratamiento, intervención o evento que supuestamente debería haber causado un cambio, no tuvo un efecto estadísticamente significativo en los puntajes de los estudiantes.

Presenta tus hallazgos al consejo estudiantil y discute las implicaciones para la escuela.

Introducción. Hemos llevado a cabo un análisis estadístico para evaluar si hay una diferencia significativa en los puntajes de los estudiantes antes y después de una intervención o evento particular (nueva metodología de enseñanza de la estadística basada en el aprendizaje colaborativo a través de problemas en contexto).

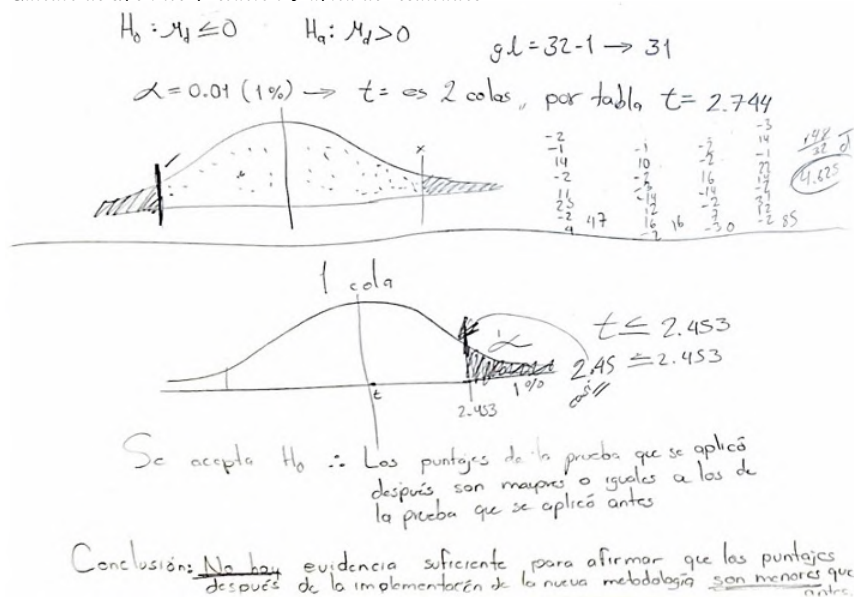
Resultados Principales

- a. La diferencia promedio entre los puntajes antes y después fue de aproximadamente 4.625 puntos (Figura 3)
- b. Sin embargo, al aplicar una prueba estadística (la prueba t students para muestras relacionadas o dependientes), encontramos un valor t de 2.455.
- c. Comparando este valor t calculado con el valor crítico para un nivel de significancia del 1% (2.453), nuestro valor t es apenas 0.002 mayor en magnitud.

Interpretación. Esto significa que, aunque puede haber una diferencia en los puntajes antes y después, esta no es estadísticamente significativa al nivel de significancia del 1%. En términos prácticos, no hay evidencia suficiente para decir que la intervención o evento tuvo un efecto real en los puntajes de los estudiantes.

Figura 3

Cálculo de $\bar{d}$, e interpretación gráfica de resultados



Implicaciones para la Escuela

- Evaluación del programa o intervención:** Si la diferencia en puntajes se esperaba por la intervención o programa específico, es esencial revisar y evaluar la eficacia de dicho programa. Puede ser que no esté teniendo el impacto deseado o que se necesite más tiempo para observar cambios significativos.
- Recursos y financiamiento:** Si se invirtieron recursos significativos en esta intervención, es fundamental reconsiderar si esos recursos podrían ser mejor empleados en otras áreas o si se necesita modificar la intervención actual.
- Perspectiva a largo plazo:** Es posible que los efectos de ciertas intervenciones se manifiesten a largo plazo. Podría ser oportuno revisar estos resultados después de un período más prolongado para ver si surgen tendencias diferentes.
- Retroalimentación estudiantil:** Sería valioso obtener retroalimentación directa de los estudiantes para comprender mejor sus experiencias y percepciones relacionadas con la intervención o evento. Esta infor-

mación cualitativa podría proporcionar perspectivas adicionales que los datos cuantitativos no pueden ofrecer.

Conclusión. Mientras continuamos buscando formas de mejorar la experiencia educativa y el rendimiento de los estudiantes, es esencial basarnos en datos y evidencia. Este estudio sugiere que no hemos visto cambios significativos con la intervención reciente. No obstante, esto nos brinda la oportunidad de aprender, adaptarnos y seguir adelante con estrategias mejor informadas.

CONCLUSIONES

La investigación educativa se ha convertido en una base fundamental para el desarrollo y mejora de los sistemas educativos. En este contexto, la estadística emerge como una herramienta esencial, no solo por su capacidad para analizar y sintetizar datos, sino también por su potencial para ofrecer perspectivas renovadas sobre fenómenos educativos complejos. Sin embargo, la enseñanza tradicional de la estadística ha enfrentado desafíos significativos, principalmente relacionados con la percepción de la materia como abstracta y desvinculada de la realidad. Es aquí donde la propuesta de una educación matemática realista cobra relevancia.

Durante años, la enseñanza de la estadística se ha centrado en la transmisión de fórmulas, técnicas y procedimientos, a menudo desprovistos de contexto. Esta aproximación ha llevado a que muchos estudiantes perciban la estadística como un conjunto de reglas rígidas, sin relación directa con su entorno o con los desafíos que enfrentarán en su vida profesional. Esta desconexión no solo afecta la motivación y el interés de los estudiantes, sino que también limita su capacidad para aplicar de manera efectiva sus conocimientos en situaciones reales.

Frente a este panorama, la educación matemática realista se presenta como una alternativa prometedora. Esta propuesta pedagógica busca contextualizar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y, por extensión, de la estadística en situaciones y problemas reales. Al hacerlo, se pretende que los estudiantes no solo adquieran habilidades técnicas, sino que también desarrollen una comprensión profunda de los conceptos y su aplicabilidad.

En el ámbito de la formación de investigadores educativos, este enfoque tiene un potencial particularmente significativo. Al exponer a los estudiantes a situaciones realistas, se les permite construir un modelo interpretativo de la estadística que es directamente relevante para su campo de estudio. Esta contextualización facilita la identificación de patrones, tendencias y relaciones que serían difíciles de discernir en un enfoque más abstracto.

Uno de los principales beneficios de adoptar un enfoque realista en la enseñanza de la estadística es la mejora en la actitud y percepción de los

estudiantes hacia la materia. Al ver la estadística como una herramienta aplicable y relevante, los estudiantes tienden a mostrar una mayor motivación y compromiso con su aprendizaje. Además, al trabajar con datos y situaciones reales, los estudiantes tienen la oportunidad de desarrollar habilidades críticas y analíticas que serán esenciales en su futuro profesional.

Otro beneficio significativo es la posibilidad de integrar la tecnología de manera más efectiva en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En un mundo cada vez más digitalizado, la habilidad para manejar y analizar grandes volúmenes de datos es esencial. Al adoptar un enfoque realista, se pueden incorporar herramientas tecnológicas que faciliten el análisis y la interpretación de datos, permitiendo a los estudiantes familiarizarse con las técnicas y plataformas que utilizarán en su vida profesional.

A pesar de sus potencialidades, la implementación de una educación matemática realista en la enseñanza de la estadística no está exenta de desafíos. Uno de los principales retos es la necesidad de formar a los docentes en este enfoque. La transición de una enseñanza tradicional a una contextualizada requiere una reconfiguración de las prácticas pedagógicas y una actualización constante para mantenerse al día con las tendencias y avances en el campo.

Además, es esencial garantizar que la contextualización no desplace o minimice la importancia de los conceptos fundamentales. Si bien es crucial relacionar la estadística con situaciones reales, también es vital asegurarse de que los estudiantes adquieran una base sólida que les permita enfrentar una variedad de desafíos y situaciones.

La estadística, como disciplina, tiene un papel fundamental en la formación de futuros investigadores educativos. Sin embargo, para maximizar su impacto y relevancia, es esencial reconsiderar cómo se enseña. Adoptar este enfoque no solo puede mejorar la percepción y actitud de los estudiantes hacia la estadística, sino que también puede equiparlos con las habilidades y competencias necesarias para navegar en un mundo cada vez más basado en datos.

REFERENCIAS

- Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools*. CD-R Press / Freudenthal Institute. <https://bit.ly/3QxIJzG>
- Bakker, A. & Gravemeijer, K. P. E. (2004). Learning to Reason About Distribution. En D. Ben-Zvi, K. Makar, & J. Garfield, (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 147-168). Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6_7

- Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-15). Springer. <https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6>
- Berndt, M., Schmidt, F., M. Sailer, M., Fischer, F., Fischer, M. R., & Zottmann, J. M. (2021). Investigating statistical literacy and scientific reasoning & argumentation in medical-, social sciences-, and economics students. *Learning and Individual Differences*, 86(1). <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2020.101963>
- Biehler, R., Frischemeier, D., Reading, C., & Shaughnessy, J. M. (2018). Reasoning About Data. En D. Ben-Zvi, K. Makar, & J. Garfield, (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 139-192). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_5
- Bressan, A., y Gallego, M. (2011). *La Educación Matemática Realista. Bases teóricas*. [manuscrito no publicado]. <https://bit.ly/46H5TZ9>
- Cobb, G. & Moore, D. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *American Mathematical Monthly*, 104(9), 801-823. <https://doi.org/10.2307/2975286>
- Creswell, J. W. (2014). *Research design Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. SAGE.
- Damilano G. & Rigo D. (2019). *Desafíos de la educación estadística en ciencias sociales. Contextos de Educación*, 26(19). 151-161. <https://bit.ly/3QykMHH>
- Del-Callejo-Canal, D., Canal-Martínez, M., & Hákim-Krayem, M. R. (2020). Desarrollo del pensamiento estadístico en estudiantes de nivel superior a través de una Experiencia Educativa. *Educación Matemática*, 32(2). 194-216. <https://doi.org/10.24844/EM3202.08>
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2>
- Kaur, B., Wong, L. F., & Govindani, S. N. (2020). Graphing Linear Equations—A Comparison of the Opportunity-to-Learn in Textbooks Using the Singapore and the Dutch Approaches to Teaching Equations. In M. Van Den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 97-111). https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_7
- Pfannkuch, M. (2005). Probability and statistical inference: How can teachers enable learners to make the connection? En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 267-294). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_12
- Pfannkuch, M., & Wild, C. (2004). Towards an Understanding of Statistical Thinking. En D. Ben-Zvi, K. Makar, & J. Garfield, (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 17-46). Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6_2

- Scherer, P. (2020). Low Achievers in Mathematics—Ideas from the Netherlands for Developing a Competence-Oriented View. In M. Van Den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 113–132). https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_8
- Selter, C., & Walter, D. (2020). Supporting Mathematical Learning Processes by Means of Mathematics Conferences and Mathematics Language Tools. In M. Van Den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 229–254). https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_13
- Sun, X., & He, W. (2020). Realistic Mathematics Education in the Chinese Context—Some Personal Reflection. In M. Van Den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 167–188). https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_10
- Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2020). Seen Through Other Eyes—Opening Up New Vistas in Realistic Mathematics Education Through Visions and Experiences from Other Countries. In M. Van Den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 1–20). https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_1
- Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, 67(3). 223–265. <https://bit.ly/40a7BQ9>
- Wittmann, E. C. (2020). The Impact of Hans Freudenthal and the Freudenthal Institute on the Project Mathe 2000. In M. Van Den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 63–69). https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_4

Tareas que realizan profesores en formación inicial para desarrollar pensamiento algebraico en la escuela primaria

Yolanda Chávez Ruiz¹ y Silvia Eduvigis Hinojosa Rizo²

RESUMEN

En este capítulo se describen y analizan algunas de las tareas que realizan los profesores en formación inicial, en el contexto del curso de álgebra de la Licenciatura de Educación Primaria, que se lleva a cabo en las escuelas Normales de México. El estudio de casos que aquí se reporta está dirigido principalmente a los formadores de docentes, con la finalidad de que identifiquen el potencial didáctico y matemático de algunas tareas para desarrollar el pensamiento algebraico. Los resultados de esta intervención muestran que seleccionar tareas con un potencial matemático y didáctico puede tener implicaciones importantes que ayudan a los estudiantes normalistas a reflexionar sobre su práctica, diversificar tareas y cuestionar prácticas tradicionales, además de identificar las ventajas didácticas al desarrollar pensamiento algebraico al enseñar matemáticas.

PALABRAS CLAVE

Tareas matemáticas, Pensamiento algebraico, Enseñanza, Aprendizaje, Formación docente.

¹ yolachavezruiz@gmail.com

Escuela Normal de Rincón de Romos

<https://orcid.org/0000-0003-0955-4803>

² silvia.hinojosa@bycenj.edu.mx

Benemérita y Centenaria Escuela Normal de Jalisco

<https://orcid.org/0009-0007-7193-2154>

ANTECEDENTES

Los programas de estudio que se proponen en las escuelas Normales en México se conforman de diferentes trayectos, uno de ellos se enfoca en la enseñanza y el aprendizaje de diversos campos disciplinares; dentro de éste se encuentra los cursos correspondientes al campo de las matemáticas, los cuales han estado orientados desde diversas perspectivas. Uno de los cursos que se incorporó en el Plan de Estudios de la Licenciatura en Educación Primaria en México en la reforma curricular de 2012 fue el de Álgebra, su aprendizaje y enseñanza (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2013), con el propósito de que los docentes en formación adquirieran conocimientos más amplios en el campo de las matemáticas desde un pensamiento algebraico, y que este conocimiento les proporcionara herramientas para el diseño de secuencias didácticas, concibiendo el álgebra como soporte de la aritmética para fortalecer el desarrollo de las competencias matemáticas. La incorporación de este curso coincide con el movimiento en favor del álgebra, centrada en procesos de razonamiento matemático y representaciones (Kieran, et al., 2016).

En los cursos correspondientes al pensamiento matemático del plan de estudio 1997 no se incorporaba ningún curso relacionado con álgebra o pensamiento algebraico. Este programa comprendía dos semestres en los que se veían los temas de resolución de problemas, aritmética, geometría, medición, procesos de cambio, tratamiento de la información, predicción y azar (cfr. SEP, 2002). Al entrar en vigor, el nuevo plan de estudios para la Licenciatura de Educación Primaria 2012 genera varios cambios en el campo de las matemáticas, uno de ellos es el incremento de semestres dedicados a este campo, pues de dos semestres se pasa a tener cuatro; así mismo, uno de los cursos que se incrementó es el de Álgebra, su aprendizaje y enseñanza (segundo semestre).

En este plan de estudios (SEP, 2013), el propósito de incorporar este curso fue para que los docentes en formación adquirieran conocimientos más amplios en el campo de las matemáticas desde un pensamiento algebraico, y que este conocimiento les posibilitara de herramientas para el diseño de secuencias didácticas, concibiendo el álgebra como soporte de la aritmética para fortalecer el desarrollo de las competencias matemáticas. Las competencias que pretendía desarrollar en el curso eran las siguientes:

- Utiliza con sentido y significado el lenguaje algebraico para expresar generalizaciones al resolver problemas empleando diversos procedimientos.
- Diseña y aplica estrategias didácticas para abordar problemas que integren diferentes áreas de conocimiento que involucren contenidos algebraicos.
- Guía y orienta el aprendizaje de cada uno de los alumnos en la resolución de problemas relacionados con el contenido algebraico, considerando los aprendizajes esperados establecidos en los planes y programas de estudio de educación primaria.

- Diseña e implementa ambientes de aprendizaje que se apoyan en el uso de sistemas algebraicos computarizados y diversas fuentes de información (SEP, 2013, p. 7).

En las competencias se establece una estrecha relación con el plan y programa de estudios de educación primaria. La finalidad era clara: que los docentes en formación, además de adquirir saberes en el campo del álgebra, pudieran diseñar y aplicar estrategias didácticas en las que se incluyeran contenidos algebraicos, pero no como una asignatura separada, sino como parte de cada uno de los ejes temáticos que se trabajan en la educación primaria.

En el año 2018 se llevó a cabo una nueva reforma a los planes de estudio de la Licenciatura en Educación Primaria, y el curso de álgebra se replantea como uno de sus propósitos el profundizar en el desarrollo de competencias algebraicas, así como el análisis y la comprensión de situaciones particulares que prevalecen en el entorno de los libros y de los programas de educación primaria. “El énfasis de este curso está en fortalecer los fundamentos matemáticos de los estudiantes, para transitar al desarrollo de sus habilidades algebraicas que permitan incidir, de manera más asertiva, en su intervención pedagógica y didáctica con las y los alumnos de primaria” (SEP, 2019, p. 5).

Al integrarse como parte del programa el pensamiento algebraico o álgebra, la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos dentro de las prácticas educativas se enfrentan al reto de ser abordados no solo aritméticamente, sino algebraicamente. Esto implica ver el álgebra desde otra perspectiva, y aunque se ha incrementado el curso de álgebra como parte del plan de estudios, no han tenido el impacto esperado (Chávez Ruiz & Martínez Rizo, 2018; Moscoso, 2020).

En el programa de 2022 (cfr. SEP, 2022), que entró en vigor en los cursos a partir de 2023, se considera de manera explícita la orientación y enfoque del curso desde los planteamientos del álgebra temprana, proponiendo para tal fin desarrollar el pensamiento algebraico, poniendo énfasis en tres aspectos:

1. Pensamiento estructural.
2. Pensamiento funcional.
3. Pensamiento variacional, procesos de cambio.

Este énfasis tiene como finalidad que los estudiantes normalistas descubran las ventajas, en términos de aprendizaje, que tiene transformar la enseñanza de las matemáticas, orientándola desde los planteamientos del álgebra temprana.

Es claro que a partir del plan de estudios 2012, una de las finalidades es adentrar al estudiante normalista en una perspectiva de las matemáticas que anteriormente no era considerada, ya que se centraba en la parte aritmética sin considerar de manera explícita el razonamiento algebraico. En la tabla 1

se observa la organización de estos cursos en tres décadas de cambios curriculares.

Tabla 1
Cursos de matemáticas en los programas de estudio para Licenciatura en Educación Primaria en México

Año de plan curricular	Semestre 1	Semestre 2	Semestre 3	Semestre 4	Semestre 5
1997	Matemáticas y su enseñanza I	Matemáticas y su enseñanza II			
2012	Aritmética: su aprendizaje y enseñanza	Álgebra: su aprendizaje y enseñanza	Geometría: su aprendizaje y enseñanza	Procesamiento de información estadística.	
2018	Aritmética. Números naturales	Aritmética. Números decimales y fracciones.	Álgebra	Geometría	Probabilidad y estadística
2022	Aritmética. Su aprendizaje y enseñanza	Algebra. Su aprendizaje y enseñanza	Geometría. Su aprendizaje y enseñanza		

Estos programas proponen una serie de tareas didácticas con el fin de que los profesores en formación inicial adquieran conocimiento matemático y didáctico, y que reflexionen sobre su práctica. En los cursos de álgebra se proponen actividades muy específicas enfocadas, por ejemplo, en la resolución de patrones geométricos, además de lecturas y artículos de investigación que orientan a la reflexión; esto con la finalidad de que los futuros profesores adquieran conocimientos de las estructuras del álgebra que les sirvan de base para desarrollar prácticas docentes más idóneas en las que se favorezca un pensamiento algebraico.

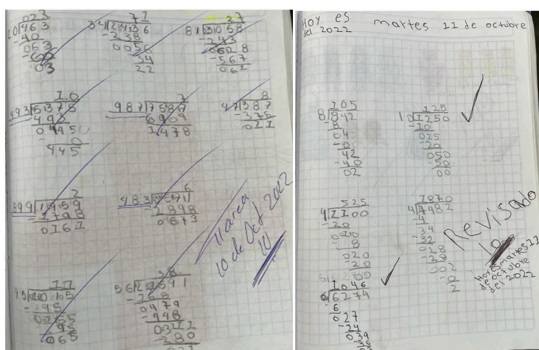
En el currículo de educación primaria en México no se presentan contenidos algebraicos de manera explícita, pero sí hay una amplia gama de posibilidades para desarrollar pensamiento algebraico con los estudiantes de este nivel (Schliemann, et al., 2011). Hay diferentes propuestas sobre cómo abordar álgebra en la escuela primaria: a través de un acercamiento tradicional que empieza por enseñar sintaxis algebraica utilizando métodos manipulativos con una relación entre la aritmética y el álgebra basadas en un trabajo individual (Schliemann, et al., 2011); con una generalización de la aritmética; que los estudiantes aborden contenidos prealgebraicos (Schliemann et al., 2011); entre otras. Lo que estos planteamientos expresan es la importancia de que los estudiantes de educación primaria se involucren de maneras distintas con ideas matemáticas al diversificar las tareas, lo que los llevará a una mejor comprensión del álgebra en niveles superiores.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La formación inicial para profesores es un tema que requiere especial atención en muchos sentidos, uno de ellos es la forma en cómo estos estudiantes aprendieron matemáticas, ya que posiblemente sigan reproduciendo en las aulas prácticas orientadas a lo procedimental y ejercicios de repetición y memorización centrados en el cálculo, generando una matemática carente de sentido. Desde los primeros semestres, los estudiantes normalistas acuden a las aulas para observar prácticas de enseñanza, y, posteriormente, realizan sus prácticas profesionales; lo que encuentran frecuentemente en estos acercamientos es que se sigue priorizando este tipo de ejercicios y tareas matemáticas (ver figura1), a lo que se dedica mucho tiempo y esfuerzo y que han perdurando por décadas, y tanto para maestros como para los alumnos pueden significar una matemática descontextualizada.

Figura 1

Imágenes de algunas de las tareas que predominan en la clase de matemáticas en la actualidad



A pesar de los énfasis en los programas de formación inicial y de los constantes esfuerzos en los cursos de formación continua para la evolución de las prácticas de enseñanza que favorezcan el aprendizaje de las matemáticas, no se ha tenido el impacto esperado. Sabemos que en la formación inicial y continua de profesores intervienen factores de tipo social, cultural, económico, entre otros; la investigación desde las prácticas de los profesores necesita dar elementos para tener un panorama más amplio de estos diferentes factores. Esta línea puede ir en el sentido que Kaput (2000) señalaba cuando proponía que el álgebra (*“algebra for all”*) podría ayudar a tener una mejor comprensión de las matemáticas al eliminar barreras como las anteriormente expuestas.

Como lo mencionan Castro, et al. (2011), “Los maestros ciertamente pueden abordar la tarea de la enseñanza, reconocimiento y promoción del razonamiento algebraico elemental, en tanto que les sean ofrecidas oportunidades para aprender a reconocer y a promover el razonamiento algebraico manifestado por los niños...” (p. 98). ¿Cuáles serían estas oportunidades

para reconocer y promover el pensamiento algebraico? Las investigaciones en álgebra temprana (*Early Algebra*) han abordado diversas perspectivas, lo que puede orientar la toma de decisiones en la formación inicial de los profesores de educación primaria.

Esta investigación se enfoca en la siguiente cuestión: *¿Qué tipo de tareas ayudan a los profesores en formación inicial a la comprensión del desarrollo del pensamiento algebraico en la educación primaria?* Si el fin último de la formación inicial docente es mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje a partir de prácticas idóneas en el campo de la educación matemática, enfocarse en tareas que desarrollen el pensamiento algebraico puede contribuir con este fin.

El propósito de este trabajo es proponer a los profesores en formación inicial tareas matemáticas que promuevan el desarrollo de habilidades y conocimientos de un pensamiento algebraico, con la finalidad de realizar prácticas idóneas en el campo de la educación matemática con alumnos de educación primaria, que les permita generar una relación más significativa, constructiva y afectiva entre las matemáticas y los usuarios en este nivel educativo.

REFERENTES TEÓRICOS

Para finales de los años noventa se reconoció que a pesar de los cambios y propuestas presentadas en las reformas educativas, el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a nivel internacional seguía implicando desafíos en el nivel de educación básica; estos se acentuaban en secundaria, nivel en el cual se ha identificado que los estudiantes muestran dificultad para tener un buen desempeño en álgebra.

Esta situación impulsó el desarrollo de investigaciones en torno a las dificultades asociadas con los procesos de aprendizaje del álgebra escolar. Los resultados de las investigaciones desde la didáctica de las matemáticas plantearon un giro a la idea de que el álgebra se tiene que abordar hasta la secundaria, y proponen considerar la introducción temprana de la materia a través de conceptos y notaciones que favorezcan el pensamiento algebraico en los primeros años de escolaridad, considerando la generalización y la formalización de patrones como una de las maneras de introducir el álgebra en la escuela primaria, con el fin de “fortalecer y profundizar el currículo de la aritmética[...] representar y reflexionar sobre relaciones entre conjuntos de números, en lugar de enfocarse meramente en el cálculo” (Schliemann, et. al, 2011, p. 16), esto para favorecer la construcción de estructuras asociadas al pensamiento algebraico.

Lograr que los profesores en formación adquieran un conocimiento sólido para que desarrollen la práctica de enseñanza significativa y que alcancen los propósitos educativos requiere de esfuerzos de los formadores

de formadores y de una buena propuesta curricular, pero también es importante involucrar a los estudiantes en tareas que permitan un cambio de perspectiva y la reflexión sobre prácticas matemáticas más profundas.

En el curso se pueden revisar propuestas teóricas enfocadas en el álgebra temprana que orientan las tareas a una nueva álgebra con entendimiento, tareas propuestas desde diversos ámbitos del currículo que tienen que ver con álgebra; es decir reflexionar y resolver diversas tareas desde una algebrización del currículo (Kaput, 2000). Esta propuesta teórica está enfocada en que los niños desarrollen una serie de habilidades algebraicas en distintas áreas del currículo de matemáticas (Molina, 2009); actividades como identificar patrones, observar regularidades y llegar a generalizaciones son algunos de los propósitos de esta perspectiva. Lo anterior lleva a preguntarse ¿Cómo romper con las tareas que en muchas ocasiones son generadoras de obstáculos cognitivos al promover la concepción de una matemática monótona, abrumadora y descontextualizada? ¿Qué conocimientos es necesario que adquieran los estudiantes normalistas y qué habilidades requieren desarrollar en el campo de las matemáticas para favorecer un pensamiento algebraico que impacte en prácticas matemáticas más idóneas?

¿Cómo trabajar el álgebra en primaria?

De acuerdo con Vergel (2015), a nivel internacional en educación primaria, la aritmética tiende a centrarse en calcular para dar una respuesta y no en la representación de las relaciones. El acento está en una resolución numérica para operaciones que involucran casos particulares, esto da como resultados posibles conflictos que enfrentan los estudiantes al trabajar con álgebra, por lo que se introduce al niño en un álgebra sin tener un significado y comprensión (Butto & Rivera, 2011).

Lo anterior llevó a considerar que lo que se requería era un cambio en el pensamiento del estudiante en la forma de trabajar “situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre número y operaciones” (Kieran & Filloy, 1989, p. 229), “relaciones entre conjuntos de números y medidas, de cálculo de respuestas numéricas a la descripción de relaciones entre variables” (Schliemann, et al., 2011, p. 138), de un enfoque en las relaciones y no solo en el cálculo de una respuesta numérica.

Los resultados obtenidos en las investigaciones dieron un giro. De centrarse en la resolución de ecuaciones como objetivo del álgebra, se pasó a priorizar el trabajo que involucra la generalización, los patrones, las variables y las funciones, proponiendo con ello el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros años de la educación básica. Lo anterior llevó a la necesidad de “reconceptualizar la naturaleza del álgebra y el pensamiento algebraico y reexaminar cuándo los niños son capaces de pensar algebraicamente” (Carpenter & Levi, 2000, p. 4). No se trata de trasladar lo que se enseña en

la secundaria a la escuela primaria o de enseñar métodos para resolver ecuaciones, sino de desarrollar un pensamiento algebraico en los niños desde los primeros años de escolaridad (Vergel, 2015).

Schliemann, et al. (2011) consideran que “la aritmética es parte del álgebra” y, por lo tanto, “la aritmética tiene un carácter inherentemente algebraico” (p. 19) porque los sistemas de numeración y las operaciones aritméticas se pueden ver como funciones, y brindan elementos para construir y expresar generalizaciones, así como para trabajar con cantidades indeterminadas. A su vez, proponen la introducción de conceptos y notaciones algebraicos (p. 43):

- Las operaciones aritméticas pensadas como funciones.
- Generalizar como la base del razonamiento algebraico.
- Brindar a los alumnos oportunidades para que utilicen letras para representar cantidades, incógnitas y variables.

Hablar de un razonamiento algebraico es aludir a elementos que permitan algebrizar el currículo de la escuela primaria como: la identificación de patrones, pasar de lo particular a lo general, la generalización de regularidades, trabajar con cantidades indeterminadas, el reconocimiento de las propiedades de las operaciones, considerando como base las relaciones y estructuras de dichos elementos, para hacer explícito el carácter algebraico de la matemática requiere, como lo afirman Radford y André (2009, p. 238), “profundizar en la comprensión de la naturaleza del pensamiento algebraico y la manera en que se relaciona con la generalización”, esto abriría la puerta para trabajar actividades y tareas matemáticas que favorezcan el desarrollo de un pensamiento algebraico.

El álgebra temprana y su didáctica

Las actividades y tareas que tienen presente el pensamiento algebraico como parte de los contenidos de matemáticas que marca el programa de la educación primaria llevaron a investigar características de la naturaleza de dicho pensamiento. De acuerdo con Aké, et al., (2015), al investigar el desarrollo del pensamiento algebraico se identifican diferentes características de la naturaleza del álgebra en la escuela elemental, por ejemplo, se reconoce cómo una aritmética generalizada implica un tratamiento de las operaciones y las funciones (Schliemann, et al., 2011); el álgebra incluye una aritmética que requiere de la generalización y formalización de patrones, así como del estudio de estructuras, funciones, relaciones y la covariación.

Schliemann, et al. (2011), según los resultados de los estudios que realizaron, consideran que los alumnos de educación primaria son capaces de pensar sobre operaciones aritméticas como funciones y relaciones funcionales, por lo que sostienen que es posible incorporar el pensamiento algebraico en contenidos ya existentes dentro del programa de matemáticas de la escuela

primaria, pero esto requiere “una reconceptualización del álgebra para poder entender su desarrollo en estos primeros niveles educativos” (Aké, et al., 2015, p. 144).

Al proponer el estudio del álgebra en educación primaria no se considera introducirla como una asignatura, sino favorecer estructuras de un razonamiento algebraico que lleven a desarrollar habilidades de generalización y capacidades de expresar dicha generalidad. Además, se busca desarrollar formas de pensar y actuar sobre objetos, relaciones y estructuras matemáticas con énfasis en los patrones y funciones, y en las relaciones y propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas, impulsando con ello un pensamiento relacional. También se reconoce como parte fundamental para el aprendizaje del álgebra concebir el signo igual como una relación.

Molina (2009) considera que al centrar las actividades aritméticas desde un pensamiento relacional se promueve el pasar de un eje aritmético enfocado en una acción procedimental para obtener el cálculo de una respuesta, a un eje algebraico que se centra en las estructuras y examina relaciones que permitan a los estudiantes pensar en las propiedades aritméticas. Esto requiere hacer presente en la resolución de situaciones problemas la comprensión de las estructuras de las operaciones y la generalización de patrones.

Trabajar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación primaria desde esta perspectiva implica promover un modo diferente de pensamiento aritmético que propicie las nociones básicas del álgebra. Es, como lo menciona Vergel (2015), ver el carácter algebraico de la aritmética, dando la posibilidad de establecer una conexión entre ambas, al aprender con significado lo que se está operando; esto favorecería una mejor comprensión del álgebra en el nivel secundaria.

MÉTODO Y MATERIALES

Muchas de las investigaciones que generamos los profesores normalistas, los formadores de formadores, se realizan en el contexto del aula, en la práctica misma, ya que a la vez que los profesores en formación inicial aprenden contenidos matemáticos y didácticos para la enseñanza de las matemáticas, acuden a las escuelas primarias a realizar prácticas profesionales para implementar los saberes aprendidos y observar su impacto. Este reporte es parte de una investigación-acción más amplia, que tiene como propósito difundir los conocimientos didácticos que favorecen la transformación de las prácticas de enseñanza en el aula. La investigación-acción, considerada dentro de los estudios de intervención, busca producir un cambio en la realidad (Martínez Rizo, 2020).

La presente investigación tiene como objeto de estudio tareas matemáticas que se llevan a cabo en el curso de álgebra; para este propósito se presenta un estudio de caso que se centra en identificar los aportes que dan determi-

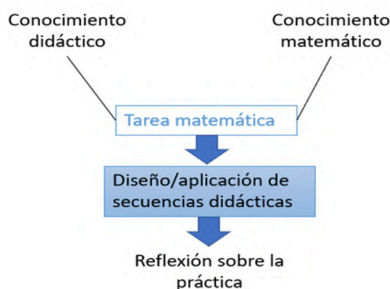
nadas tareas para conocer los procesos cognitivos y las acciones que los estudiantes normalistas realizan al resolver situaciones que implican procesos de generalización, con base en el reconocimiento de un patrón geométrico a partir de sus estrategias empleadas y sus procesos de resolución. También se identifican las ventajas didácticas y el potencial de dichas tareas para desarrollar el pensamiento algebraico en las aulas de educación primaria. De acuerdo con Martínez Rizo (2020), los estudios de caso tratan de indagar el mayor número posible de aspectos, sin que necesariamente sea exhaustivo, en un número reducido de sujetos que pueden ser personas, grupos o instituciones.

El estudio se llevó a cabo con dos grupos de estudiantes normalistas de tercer semestre, uno de un municipio de Aguascalientes y otro de un municipio de Jalisco; ambos en el curso de álgebra. A estos dos grupos los designaremos como grupo A y grupo B, respectivamente. La selección y diseño de las actividades que fueron propuestas a los estudiantes están basadas en el propósito del programa del curso de álgebra (SEP, 2019). El estudio parte de implementar diversas tareas que son "...el conjunto de actividades organizadas y orientadas, con una o múltiples estrategias de solución, donde es posible utilizar diversas representaciones, lo cual permite a los estudiantes involucrarse con la actividad matemática" (Chávez-Ruiz y Martínez-Rizo, 2018, p. 215).

Las tareas se enfocan en desarrollar conocimiento didáctico y matemático que ayude a los estudiantes normalistas a diseñar secuencias didácticas para su implementación en el aula y posterior reflexión sobre la práctica. El diseño de la intervención presenta la siguiente estructura:

Figura 2

Diseño del método de intervención



Según el diseño, en esta intervención se destacan tres momentos importantes: un cuestionario diagnóstico al inicio del curso, las diversas tareas matemáticas que involucran tanto conocimientos didácticos como de contenido matemático, y una encuesta final con preguntas relacionadas con la reflexión sobre su práctica.

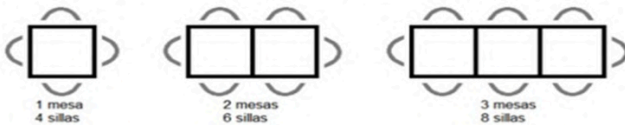
Diagnóstico

En un primer momento de la intervención se aplicó un cuestionario con ocho reactivos –cuatro con preguntas abiertas y cuatro con preguntas cerradas– que tenía como propósito identificar los conocimientos algebraicos de los estudiantes normalistas participantes. Los reactivos se tomaron de algunas de las investigaciones revisadas (Bautista-Pérez et al., 2021; Castro et al., 2011; Zapatera-Llinares, 2017), relacionadas con diversas propuestas de álgebra temprana para educación primaria. En la figura 3 se ejemplifica el reactivo 1:

Figura 3

Reactivo 1 del cuestionario diagnóstico.

A. Observa las siguientes figuras que representan mesas y sillas:



Como puedes ver, alrededor de una mesa, hay cuatro sillas, alrededor de 2 mesas hay 6 sillas y alrededor de 3 mesas hay 8 sillas.

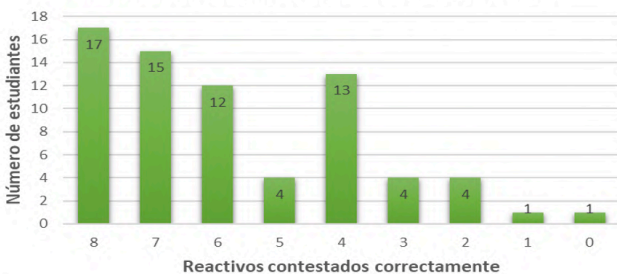
1. En un cumpleaños se han colocado 8 mesas ¿Cuántos niños pueden sentarse?
2. En otra fiesta se han colocado 100 mesas ¿Cuántos niños pueden sentarse?
3. Explica una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas

Nota. Tomado de Zapatera-Llinares, 2017 p. 95)

A partir de la información obtenida en esta evaluación diagnóstica, se tomaron decisiones que orientaron el desarrollo de los cursos. Se esperaba que la mayoría de los estudiantes tuvieran un desempeño sobresaliente, ya que resolvieron ejercicios y problemas diseñados para niños de educación primaria. Los resultados del cuestionario diagnóstico se revisaron y discutieron con los estudiantes, y, a partir de esta información, se diseñaron y seleccionaron las tareas matemáticas a proponer. Los resultados generales de este diagnóstico se muestran en este apartado.

Figura 4

Resultados del cuestionario diagnóstico



Como se observa en la Figura 4, sólo 17 de 71 estudiantes resolvieron correctamente los 8 reactivos, mientras que un estudiante resolvió de manera incorrecta todos ellos. La revisión de este cuestionario diagnóstico se hizo con los estudiantes, observándose diversos procedimientos. Para este reporte solo se consideraron los resultados finales que presentan información general del dominio de contenido matemático que poseen. Aunque la mayoría de los estudiantes respondieron más de 4 reactivos correctamente, un porcentaje considerable obtuvo resultados desfavorables. A partir de esta información se seleccionaron las tareas relevantes del currículo de primaria, y se decidió trabajar en aquellas con potencial matemático y didáctico que pudieran favorecer el pensamiento algebraico. A medida que se avanzó en el curso, se fueron proponiendo tareas con demanda cognitiva más compleja.

Tareas matemáticas

Tanto en el grupo A como en el grupo B se trabajaron tareas para desarrollar conocimientos matemáticos y didácticos en los estudiantes. Para este reporte se recuperan algunas de las intervenciones exitosas en ambos grupos.

El grupo A se integró por 36 profesores en formación inicial. El propósito de esta intervención era que los estudiantes reflexionaran sobre sus prácticas de enseñanza y propusieran tareas a sus alumnos que estuvieran orientadas hacia el álgebra temprana. Para las tareas que se realizaron con el grupo A se destacan los **conocimientos didácticos** a partir de acciones específicas:

- Actividades recurrentes, para desarrollar habilidades intelectuales básicas.
- Tarea con potencial didáctico y matemático, a partir de la reflexión sobre las ventajas didácticas de las mismas.
- Análisis de vídeos o situaciones escolares para reflexionar sobre la práctica.

El grupo B se integró por 35 profesores en formación inicial. Se trabajó con una actividad que consistía en la resolución de una secuencia de patrones geométricos, que se presenta como parte de una secuencia de actividades para favorecer el pensamiento algebraico en el programa del plan de estudios 2012 (SEP, 2013). Esta secuencia en especial ha sido utilizada en diversas investigaciones y con estudiantes de diferentes niveles para reconocer características del pensamiento algebraico, como las de Zapatera-Llinares (2018), Vergel (2015), Butto y Rivera (2011). Con las tareas llevadas a cabo con este grupo se destaca **el conocimiento matemático**.

Se seleccionó una secuencia de patrones geométricos porque el trabajo con ellos es una herramienta que, de acuerdo con la Comunidad Internacional de Didáctica del Álgebra, permite adentrarse al pensamiento algebraico desde los procesos de generalización (patrones numéricos y geométricos) (Butto & Rivera, 2011). La generalización de patrones es considerada como una de las vías más preponderantes para introducir el pensamiento

algebraico (Zapatera-Llinares, 2018), ya que permite a los estudiantes trabajar con variables como cantidades indeterminadas, elemento importante para el desarrollo de dicho tipo de pensamiento (Vergel, 2015). La formalización de patrones, funciones y generalizaciones se considera una forma de desarrollar el pensamiento algebraico, lo que permite trabajar desde el conocimiento matemático.

Al generar estos espacios de reflexión y considerar a los estudiantes normalistas participantes como coparticipes en la construcción de un conocimiento, se pretende hacer un aporte a la didáctica de las matemáticas que impacte en la enseñanza y aprendizaje del campo del pensamiento algebraico elemental. El análisis y reflexión de estas tareas se presentan en el apartado de resultados.

Encuesta final

Para finalizar el curso se aplicó una encuesta centrada en la reflexión sobre la práctica, la cual tenía como propósito identificar los aspectos relevantes que los estudiantes observaron durante su participación en el curso. Esta encuesta solo recupera apreciaciones generales de los participantes en dicho curso, ya que durante el mismo se aplicaron diversos instrumentos para valorar cada una de las actividades específicas, tales como cuestionarios, rúbricas, listas de cotejo, fichas de lectura, debates, paneles, entre otros. Los resultados de la encuesta final se describen en el apartado siguiente.

Figura 5

Encuesta final sobre la opinión de los participantes, en el curso.

Escribe 3 aprendizajes relevantes que hayas adquirido en el curso: *

Texto de respuesta larga

¿Hubo algún tema que no se abordó en el curso y que te habría gustado aprender? *

Texto de respuesta larga

¿Para qué desarrollar pensamiento algebraico en los niños de primaria? *

Texto de respuesta larga

¿De qué manera las actividades del curso te ayudaron a comprender cómo trabajar álgebra temprana con los niños? *

Texto de respuesta larga

¿Qué conocimientos matemáticos te brindaron las actividades que se llevaron a cabo en el curso? *

Texto de respuesta larga

¿Qué conocimientos didácticos te brindaron las actividades que se llevaron a cabo durante el curso? *

RESULTADOS

Esta investigación se llevó a cabo en el contexto del curso de álgebra de la Licenciatura en Educación Primaria. Se presentan dos casos; en el primero de ellos se destacan los conocimientos didácticos puestos en juego durante el desarrollo de las actividades, y en el segundo caso se destaca el conocimiento matemático.

Primer caso. Grupo A

Las tareas propuestas que hacen énfasis en el conocimiento didáctico fueron diversas y atendieron a necesidades de formación que tienen que ver con las siguientes preguntas: ¿Cuáles son las actividades que los profesores de educación primaria valoran y realizan cotidianamente en el aula? ¿Qué tipo de tareas favorecen el desarrollo del pensamiento algebraico? ¿Cómo podríamos hacer evolucionar las tareas matemáticas que los profesores proponen, con la finalidad de desarrollar pensamiento algebraico en los alumnos?

Actividades recurrentes

A partir de la evaluación diagnóstica y de algunas de las actividades iniciales que sugiere el programa para iniciar el curso, como la lectura de diversos textos académicos, se identifica que los estudiantes tienen limitadas habilidades básicas que son indispensables para el desarrollo de diversos aprendizajes, por lo que se decidió que una de las actividades recurrentes fuera la lectura de textos infantiles con contenido matemático, esto con la finalidad de ampliar el marco de referencias de los estudiantes (Chávez-Ruiz et al., 2021). Las actividades recurrentes son actividades que se proponen al inicio de cada sesión (cuya duración no va más allá de 10 minutos) y que tienen como propósito contribuir al desarrollo de habilidades y conocimientos básicos.

Una de estas actividades recurrentes fue la lectura diaria del texto “El hombre que calculaba” (Malba, 2008), que incluye 34 capítulos y en cada uno plantea una historia junto con un problema, generalmente algebraico. Cada capítulo tiene extensión de una página en promedio, por lo que cada día se leía y comentaba un capítulo diferente. Algunos de los comentarios de los estudiantes recuperados de las fichas de lectura fueron los siguientes:

Este libro me ha sorprendido muchísimo, pues, a pesar de saber que las matemáticas se usan en la vida cotidiana uno siempre se cierra a pensar que te ayuda para problemas específicos y la realidad es que no es así, las matemáticas de (sic) pueden aplicar realmente en todo, desde la necesidad de contar o hacer operaciones aritméticas, hasta realizar un movimiento, pues usamos distintas ramas de las matemáticas para resolver cada situación que se nos presenta día a día.

La temática del texto es impresionante, al escuchar el título (sic) nunca me imagine (sic) que el ambiente fuera en Irak, y que todas las situaciones se dieran entorno a una cultura muy diferente a la nuestra, aparte considero que el libro cumple muchísimas funciones en cuanto su objetivo, pues nos enseña la aplicación

de las matemáticas, pero también nos enseña una cultura totalmente diferente y nos da grandes lecciones de vida.

Como dato curioso me impresionó que el autor fue un brasileño, pues al ver la trama, te das cuenta de que existió una amplia investigación de las normas y formas de vivir en Irak.

Otra de las cosas que me gustó mucho del texto es que dentro de él vienen muchísimas narraciones contadas por Beremiz, y que como docentes podemos usar para implementar la literatura dentro de las matemáticas (Quiero compartir que mi historia favorita fue la de la historia del ajedrez)” ALS. (Se utilizará esta nomenclatura para distinguir las producciones de los alumnos -iniciales de nombre y apellidos-)

“Hay problemas muy buenos que, a primera vista, son muy difíciles, pero Beremiz nos da una respuesta sencilla. Una de las cosas más bonitas que tiene el libro son sus frases y lecciones morales, que nos hacen reflexionar y tal vez ayudarnos a crecer como personas.

Otra cosa muy buena es que nos culturiza (sic) mucho sobre distintos matemáticos, astrónomos y filósofos, y eso se me hizo muy interesante. Hoy en día para muchos las matemáticas resultan aburridas, y complicadas de entender, pero este libro no solo nos ayuda en este aprendizaje si no también en ser generosos y ayudarnos a ser mejores personas. Por otra parte, todos los planteamientos de la resolución de los problemas son interesantes, por ejemplo el de la raíz cuadrada de un número (sic) de cuatro cifras, o bien el problema de los cuatro cuatros, y el problema del juego de ajedrez que sin duda fue muy interesante conocer, me causo (sic) una gran admiración de cómo se pueden resolver problemas tradicionales de las matemáticas en un sentido lógico, con sencillez, y de manera precisa, cabe destacar que cada uno de los planteamientos de los problemas descritos si eran un poco confusos pero lo hacía interesante la manera en cómo en el hombre que calculaba los planteaba y ayudaba a las personas a solucionar aquello que era muy difícil de entender” (VMZG)

La lectura de textos infantiles ayudó a crear puentes entre este tipo de literatura y los textos académicos. En los comentarios que realizan los estudiantes reconocen una arista diferente de las matemáticas que va más allá del aula al ampliar su marco de referencias, lo que les permite no solo reflexionar sobre algunos contenidos matemáticos presentes en el texto, sino también la posibilidad de ampliar su capital cultural.

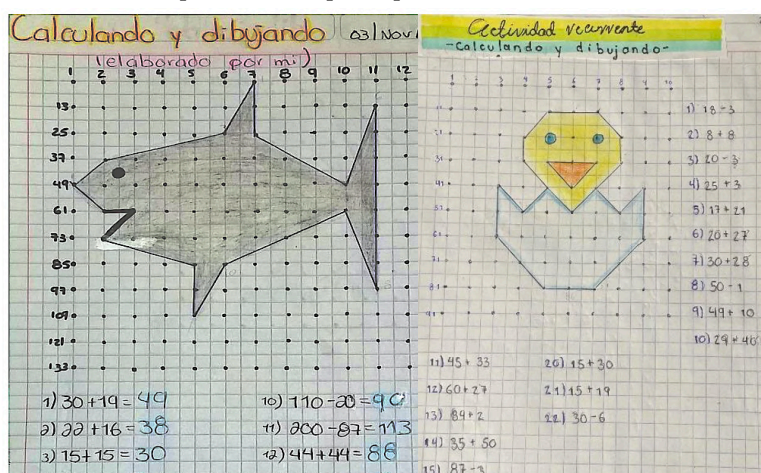
Otra de las actividades que los profesores en formación inicial de primaria valoran es el cálculo, por lo que se sugiere su diversificación al proponer actividades recurrentes de cálculo escrito, donde además, los alumnos desarrollan otras habilidades. En la Figura 6 se muestran otras actividades que implicaron el diseño de material didáctico para construir un repositorio colectivo de actividades que se pudieran llevar al aula de práctica.

Estas tareas tienen un potencial matemático importante, ya que se manejan coordenadas que tienen una relación directa con las funciones lineales a partir de realizar cálculos simples y relacionarlos con coordenadas en un plano cartesiano; además, tienen un potencial didáctico porque los estudiantes construyeron los diseños que requieren de encontrar una rela-

ción entre el cálculo escrito y la ubicación espacial para construir la figura. Estas habilidades, principalmente la de diseño, son indispensables para que los profesores en formación inicial favorezcan el desarrollo de habilidades para interpretar y representar expresiones algebraicas en el plano cartesiano, acciones que más adelante les permitirán comprender comportamientos de la recta que los lleva a situaciones de generalización, y como conocimiento didáctico al diseñar tareas de cálculo, diversificar su presentación y adecuarlas al grado escolar con el que trabajarán.

Figura 6

Diseños de actividades por estudiantes para repositorio colectivo



Tareas con potencial didáctico y matemático

Los estudiantes normalistas llegan al aula con ideas muy arraigadas sobre la enseñanza de las matemáticas, por lo que para generar la reflexión y el análisis de tareas se requiere implementar actividades desafiantes y de interés para los estudiantes, así como con un potencial matemático importante. Una de las tareas propuestas fue “Carrera a 20” (Figura 7), que es un juego por parejas donde uno de los estudiantes inicia escribiendo en una tabla de dos columnas el número uno o el dos, el segundo participante debe sumar uno o dos al número que anotó su contrincante. Gana el primero que llega a 20.

El propósito de la tarea era que los estudiantes identificaran una estrategia que les permitiera generar una regla con la cual aseguran ganar el juego. Se llevó a cabo intercambiando parejas para posteriormente participar en un torneo. Una vez que se definió la ganadora del torneo, se llevó a cabo el análisis de la tarea. Se presentaron preguntas detonantes como: ¿Qué habilidades intelectuales favorece? ¿Cuáles son las ventajas didácticas de este tipo de actividades?

En este ejemplo se observa cómo las estudiantes recurren a varios ejemplos para confirmar la regularidad encontrada, reconocer reglas de comportamiento y establecer un patrón que les permita generalizar situaciones como cuando se expresa: “*si la suma es impar los pares van en una de las esquinas del cuadrado*”. Este tipo de tareas, al involucrar diferentes operaciones de manera flexible, favorecen que el estudiante identifique una estructura y establezca relaciones entre las operaciones que lo lleven a reconocer patrones y generalizar.

Una de las premisas de la investigación sobre el álgebra temprana es que la aritmética, y en general las matemáticas de los primeros grados, se ha desarrollado de tal forma que resta importancia a la generalidad, por lo que en las tareas propuestas en esta intervención se hace énfasis en llegar a generalizar.

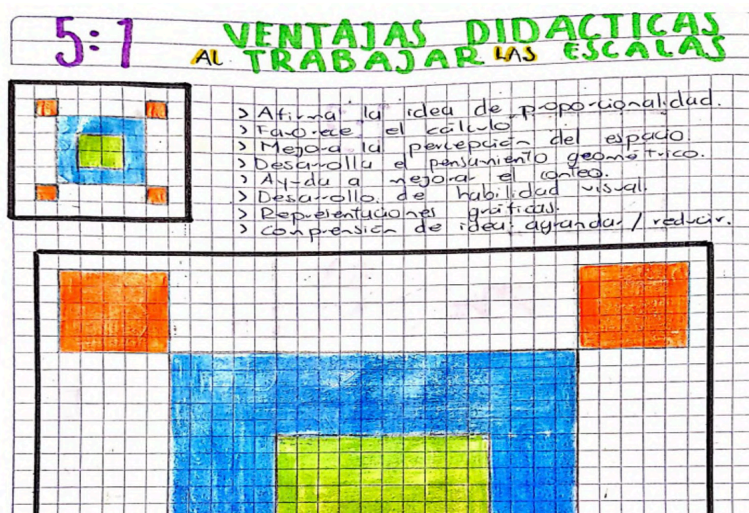
El desarrollo de conocimiento didáctico no se podría lograr con una sola actividad. Como formadores es importante que los estudiantes normalistas identifiquen en las actividades algunos criterios que ayuden a construir este tipo de conocimiento con cuestionamientos como:

- ¿Cuáles son las ventajas didácticas de la tarea matemática que propongo?
- ¿Qué habilidades intelectuales pueden desarrollar en los alumnos?

Plantear estas preguntas en cada una de las tareas matemáticas propuestas ayudó a que los estudiantes identificaran qué tareas podrían llevarse al aula para generar experiencias más significativas en los alumnos, como se observa en la Figura 9.

Figura 9

Registro de estudiante sobre las ventajas didácticas de una tarea matemática



Durante las tareas matemáticas propuestas se hizo énfasis en la importancia del material didáctico que podría ayudar a una comprensión más clara de los contenidos a enseñar. Partiendo de la idea de Kieran, et al. (2016), se cree que si se proporciona a los niños un medio para visualizar un problema, llegarán a ver sus fundamentos estructurales.

En la escuela primaria, los maestros dedican mucho tiempo y esfuerzo para que los alumnos aprendan las operaciones básicas, como la división entera; los estudiantes en formación inicial también muestran interés en suscitara actividades significativas que ayuden a un mejor dominio de este contenido matemático. En las tareas propuestas no solo se promovieron las múltiples representaciones de las operaciones, sino también el diseño de material didáctico que pudiera favorecer el aprendizaje de estos temas.

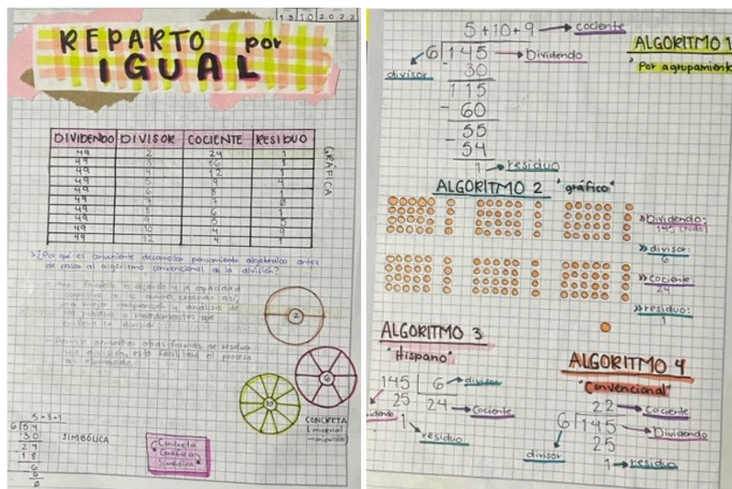
Figura 10

Material didáctico elaborado por los estudiantes para hacer repartos de diversas colecciones.



Figura 11

Registro de diversas representaciones de repartos

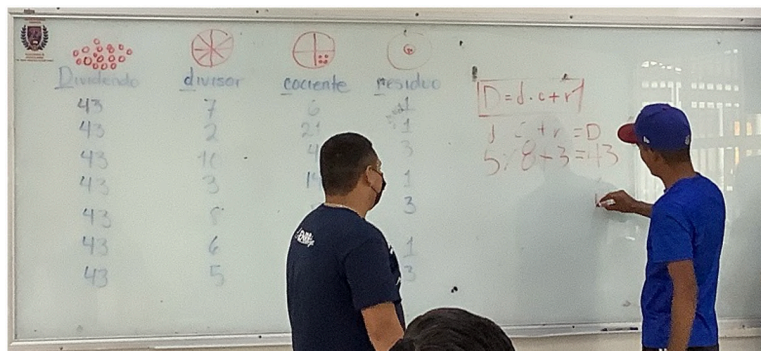


Como se observa en estos registros, los estudiantes normalistas valoran las distintas formas de representar un contenido matemático (gráfica,

concreta y simbólica), que ayuda a una mejor comprensión de la estructura de las operaciones, tal como se observa en la figura 12.

Figura 12

Imagen de estudiantes normalistas encontrando regularidades para llegar a generalizar



Con este tipo de tareas se pretende que los estudiantes comprendan la aritmética a partir de explicar y justificar las propiedades que utilizan mientras realizan los cálculos. Los estudiantes descubren poco a poco las regularidades y estructuras de patrones que pueden llegar a generalizar.

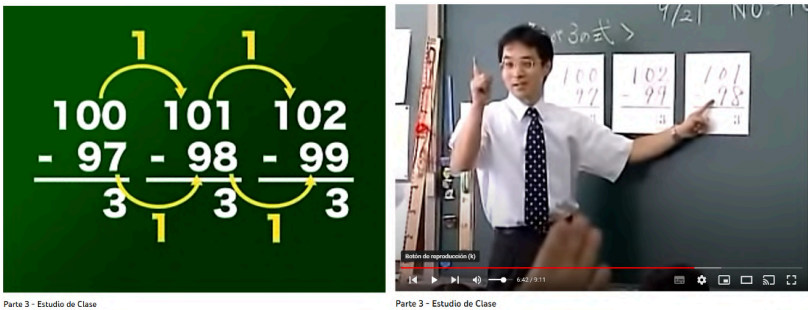
Análisis de clases a partir de videos

Una de las actividades con mayor potencial didáctico en los procesos formativos es el análisis de situaciones escolares a partir de una sesión clase reproducida en un video (figura 13). Los estudiantes normalistas tienen la oportunidad de ver el video cuantas veces sea necesario para identificar los procesos de enseñanza y aprendizaje que se están desarrollando en la sesión, con ello pueden analizar cómo se presentan objetos matemáticos y cómo interactúan con ellos los alumnos. En este caso es una clase que se desarrolla operando con la resta; el propósito de la clase mostrada en el video es que los alumnos de segundo de educación primaria encuentren regularidades que se dan con dicha operación. Los estudiantes normalistas, al analizar este video, tienen que observar cómo los alumnos establecen relaciones, identifican patrones y las mediaciones que hace el docente. En las escuelas Normales se valoran los videos que muestran prácticas exitosas; sin embargo, son escasos los videos públicos, con algún tratamiento didáctico, que pueden circular en las aulas para ser analizados por los profesores.

En uno de los videos observados (Universidad de Tsukuba, 2023, agosto, 14) se lleva a cabo una clase de matemáticas que se enfoca en el desarrollo del pensamiento algebraico, los alumnos que se presentan en el video identifican algunas estructuras y regularidades en las operaciones. Molina (2009) considera que al centrar las actividades aritméticas desde un pensa-

miento relacional se promueve pasar de un eje aritmético centrado en una acción procedimental para obtener el cálculo de una respuesta, a un eje algebraico que se centra en las estructuras y examina relaciones que permitan a los estudiantes pensar en las propiedades aritméticas.

Figura 13.



Nota. Fuente: video de una clase de matemáticas (Universidad de Tsukuba, 2023, agosto, 14)

En la imagen que se presenta en la figura 14 se muestra la forma en cómo los estudiantes normalistas realizan parte del análisis de la sesión de matemáticas que se desarrolla en el video mencionado.

Figura 14

Registro de comentarios de estudiante sobre el análisis de la clase

Pensamiento algebraico

- Identificar un patrón
- Descubrir algunas reglas
- Generalizar ideas

ENSEÑAR FELIZ

menos dos dígitos

3.- ¿Qué asigna los dígitos que el profesor que trabajaron?

En cada columna hay un dígito pero solo algunos

En realidad, los números...

4.- ¿Qué esperaba lograr el profesor?

- Lograr enseñar polígonos
- Descubrir reglas
- Generalizar ideas

5.- ¿Por qué crees que se trate de un contenido relacionado con cuestiones algebraicas?

5.- porque el propósito es desarrollar el pensamiento algebraico

Estudio de clase japonés

1.- ¿De qué grado creen que sea el grupo? Sea el grupo? De segundo o tercero

2.- ¿Cuál creen que sea el contenido que están trabajando?

La resta (sustracción) de tres dígitos

Algunas de las preguntas que se plantearon a los estudiantes fueron las siguientes:

- 1.- ¿De qué grado creen que sea el grupo con el que está trabajando el maestro?
- 2.- ¿Qué contenido matemático está trabajando el profesor en clase?
- 3.- ¿Qué consigna dio el profesor para hacer la tarea matemática?
- 4.- ¿Qué creen que esperaba lograr el profesor con esa secuencia didáctica?
- 5.- ¿Cómo relacionas esta tarea matemática con el pensamiento algebraico?
- 6.- ¿Qué habilidades intelectuales creen que desarrollaron los alumnos a partir de esta tarea?
- 7.- Diseñen en el equipo una secuencia didáctica similar a la de la clase observada.

Los estudiantes normalistas no sólo reflexionan sobre el contenido matemático puesto en juego, sino que observan el desarrollo de una clase idónea para favorecer el desarrollo de pensamiento algebraico. Además, identifican las acciones que se pueden realizar durante una clase de mate-

máticas para llegar a establecer regularidades que induzcan a reconocer patrones, generalizar una regla, expresarla y aplicarla a otros casos.

Segundo caso. Grupo B

La tarea que se propone en el grupo B es una secuencia de patrones. Inicialmente se presentaron las cuatro primeras figuras de un patrón geométrico que corresponde al primer momento; para Zapatera-Llinares (2018) esto se puede considerar recurrente, ya que el número de elementos aumenta de forma progresiva a lo largo de los términos siguientes. La actividad se les entregó a los estudiantes normalistas en una hoja impresa y se les solicitó resolver cada una de las tareas de forma individual. Para el análisis se consideraron los objetos matemáticos que intervienen en las tareas que conforman la actividad que se presenta en la hoja de trabajo, y las estrategias empleadas en la resolución de cada una ellas y en general de las cinco tareas, es decir, cómo las estrategias empleadas en las primeras tareas impactaron para la resolución de las siguientes.

En esta secuencia, las tareas van aumentando su complejidad. La resolución implica procesos de generalización para reconocer la recurrencia de la sucesión e identificar una regla general para “ n ” número de casos, rasgos característicos del pensamiento algebraico elemental (Figura 15). Es importante mencionar que el trabajar con una secuencia que va incrementando su nivel de dificultad les da la oportunidad a los estudiantes de iniciar con estrategias básicas, como puede ser una suma iterada, lo que les brinda confianza para seguir contestando las siguientes tareas y cambiar su estrategia para buscar un patrón o expresión que les permita dar respuesta y así poder establecer una expresión matemática, ya sea con un lenguaje común o alfanumérico.

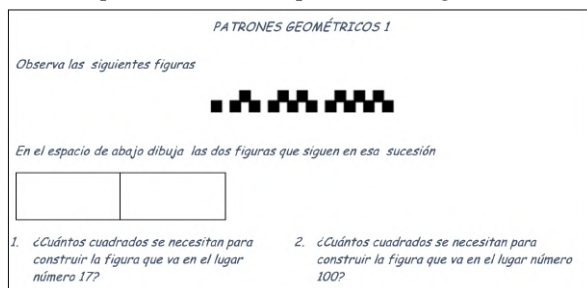
La secuencia se inicia presentando las figuras correspondientes a los primeros términos de la progresión aritmética: $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$; cognitivamente demanda establecer, por medio de la observación, una relación entre estos cuatro primeros términos, acción que permite establecer un patrón de comportamiento. Enseguida se solicita calcular el valor $f(n)$ para “ n ” pequeño, como es el lugar 17, lo que es posible responder con diferentes estrategias: con un recuento iterativo, con una tabla o con una expresión matemática. Para la tarea tres se trabaja con la posición 100, lo que demanda a los estudiantes cambiar de estrategia para identificar la regla general y con ello la función correspondiente. En la tarea 4 se les solicita explicar a través de una narrativa el razonamiento que usaron para responder la tarea 2 y 3, esta tarea demanda reflexionar cognitivamente sobre lo que observaron, de qué se dieron cuenta, qué relación establecieron; acción que les permite reconocer el proceso y las estrategias que emplearon para identificar el patrón, y a su vez la manera de expresarlo. Es importante aclarar que la actividad comprende cinco momentos llevados a cabo con cinco tareas:

Momento 1. Se muestran las imágenes de los cuatro primeros términos de la sucesión (Figura 15).

Demanda cognitiva. Visualizar e identificar los elementos comunes y las variantes.

Figura 15

Hoja de trabajo 47, Bloque 6. Desarrollo del pensamiento algebraico



Nota. Fuente: Cedillo y Cruz, citados en SEP, 2013, s.p.

Momento 2. Se presenta la tarea uno y la tarea dos (Figura 15).

Demanda cognitiva. Visualizar una doble estructura: posición/forma y numérica. Identificar una relación de incremento. Reconocer elementos comunes y variantes a partir de una percepción visual de cómo se modifica una figura en relación con la anterior de acuerdo con la comunalidad identificada.

Tarea 1. Como primera tarea se solicita dibujar las dos figuras siguientes de la sucesión, es decir, la figura 5 y 6, apoyándose en la visualización de las figuras que se les presentan en la sucesión. Es una tarea que requiere de una generalización cercana. Para dibujar dichas figuras, el patrón puede reconocerse a partir de realizar un conteo o dibujando la secuencia por tratarse de términos pequeños, sin embargo, permite identificar cómo visualizaron la secuencia de la figura y el incremento.

Tarea 2. Se pide determinar el número de elementos correspondientes a la figura 17. Es posible trabajar operando con una generalización cercana a partir de un recuento iterativo. Puede trabajarse con una función lineal.

Momento 3. Se presenta la tarea 3

Demanda cognitiva. Identificar un patrón y determinar una regla recursiva. Generalizar una regla, (Figura 15).

Tarea 3. Se les pide encontrar el total de cuadrados que se necesitan para construir la figura que se ubica en el lugar número 100. Al determinar el total de elementos para dicho lugar, se requiere pasar de una generalización cercana a una generalización lejana que demanda calcular términos grandes, esta acción requiere primeramente identificar un patrón para después generalizar una regla que se puede expresar con una función lineal.

Momento 4. Se les solicita argumentar sus procedimientos con los que operaron la tarea 2 y 3.

Demanda cognitiva. Reconocer el proceso que se realizó. Expresar de forma escrita las acciones y procedimientos empleados para resolver dichas tareas.

Tarea 4. Debe explicar cómo razonó para responder a las tareas 2 y 3.

Momento 5. Se presenta la tarea 5 en una tabla de entrada-salida, la cual consta de dos partes. En las tres primeras situaciones se solicita encontrar los cuadrados correspondientes al lugar que se les determina; en las tres situaciones siguientes se invierte la pregunta al presentarles el total de cuadrados y preguntar el lugar que ocuparía dicha figura.

Demanda cognitiva. Establecer una relación funcional y tratamiento analítico de las cantidades indeterminadas, formulación simbólica y descontextualizada. En la primera parte se da el valor de entrada y se solicita encontrar el valor de salida; se requiere operar a partir de una generalización con cantidades indeterminadas, y hacer uso de la regla que generalizaron en la tarea tres. Para la segunda parte, en donde se les da el valor de salida y deben determinar el valor de entrada, se requiere reconocer la igualdad como equivalencia y trabajar aplicando las propiedades de las operaciones para trabajar con los inversos. Operar con cantidades indeterminadas y con objetos intensivos como se muestra en la figura 16.

Figura 16.

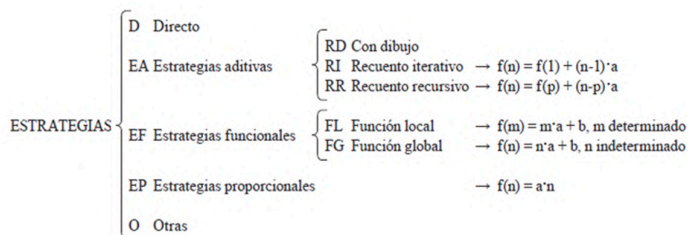
Tarea 5 de la Hoja de trabajo 47. Bloque 6. Desarrollo del pensamiento algebraico.

5. ¿Puedes programar tu calculadora para completar la siguiente tabla?	
Lugar que ocupa la figura en la sucesión	Número de cuadrados que se necesitan
48	
75	
123	
	351
	411
	507

Tomado de Cedillo y Cruz, (citados en SEP, 2013. s.p.)

Tarea 5. Establecer una expresión matemática: una regla o función que les permita generalizar para determinar los elementos de n figura de la sucesión. Requiere de una función lineal y de una función inversa. Es una tarea que necesita una generalización lejana.

Las respuestas de los estudiantes se analizaron con base en las estrategias que emplearon para responder cada una de las tareas; además, se construyeron 5 categorías, para lo que se tomó en cuenta la clasificación que presenta Zapatera-Llinares (2018), la cual se muestra en la figura 17.

Figura 17*Estrategias de resolución de Problemas de generalización de patrones.**Nota.* Tomado de Zapatera-Llinares (2018, p.96)

Estas estrategias fueron una base para analizar los procedimientos y respuestas que dieron los estudiantes normalistas en cada una de las tareas. También se tomaron en cuenta otro tipo de estrategias, como fue el empleo de tablas.

Categoría 1. Estrategia aditiva

Los estudiantes normalistas, al responder la tarea dos, reconocen que se da un incremento, como es el siguiente caso: “*fui sumando 2 a cada figura*”. Sin embargo, en la tarea tres su respuesta es 201, y la tabla que corresponde a la tarea cinco la deja sin responder. Su acción se centra en realizar una suma, esta acción muestra la forma en cómo está percibiendo la figura desde una percepción espacial, proceso que requiere de una abstracción, se estaría hablando de una primera fase que es la visualización de la regularidad. Si bien sus resultados son incorrectos, es importante reconocer que para llegar a una generalización algebraica se da una fase inicial correspondiente a la visión de una regularidad; en este caso se reconoce como elemento común un incremento constante entre cada una de las figuras que conforman la secuencia, por lo que se considera que, en la tarea uno, al solicitarles dibujar las dos figuras siguientes (Figura 5 y 6) llegan a visualizar y reconocer elementos comunes. Esta acción les va a favorecer para responder la tarea dos, en la que se va adentrando al estudiante a identificar una regularidad, elemento importante para el desarrollo del pensamiento algebraico. Generalmente se inicia de manera abstracta, y con esta tarea quedan en evidencia los aportes que dan a la generalización de un patrón al realizar acciones que los induzcan a visualizar una regularidad.

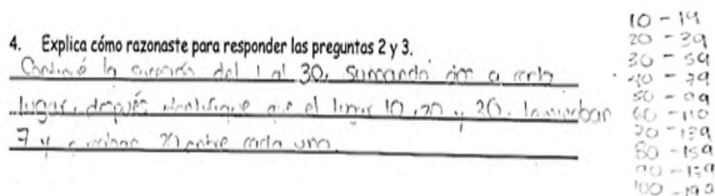
Categoría 2. Estrategia aditiva sin establecer una relación funcional.

Para dar respuesta a la tarea tres en la que se les solicita encontrar el número de cuadrados correspondientes a la figura 100, los estudiantes recurren a utilizar como estrategia una tabla (Figura 18), sin embargo, esta es utilizada solo como una serie de números que responden a una sucesión al aplicar una adición sin identificar una regla recursiva.

del lugar uno en uno, realizan agrupaciones como se muestra en la figura 19. Reconocen un patrón y establecen una regla sin llegar a una generalización algebraica:

Figura 19

Tarea 4. Estrategia funcional global y su explicación. Extracto de la hoja de actividades



Como se puede observar en la Figura 19, el estudiante expresa que modificó su estrategia, y observa que el lugar 10, 20 y 30 terminaba en 7 (en la tabla terminan en 9) y sumaban 20 entre cada uno, lo que confirma que se opera con una estrategia funcional local para responder la tarea tres, y, aunque opera con cantidades determinadas, muestra identificar un patrón. Se considera que, al construir dichas abstracciones, estos estudiantes se encuentran a un paso de llegar a una generalización funcional global, ya que reconocen y establecen una regla y hacen uso de ella en la construcción de la tabla; sin embargo, no llegan a una generalización que les permita construir una regla general con la que puedan operar de manera correcta para cualquier caso, motivo que les limita para responder la tarea 5.

Es importante ir identificando cada una de estas estrategias como procesos que se van dando para llegar a un pensamiento algebraico. Al reconocer estos procesos se pueden favorecer tareas que les permitan ir desarrollando la habilidad para identificar elementos comunes y generalizar una regla.

Categoría 4. Relación espacial y numérica

Para responder la tarea tres y cinco, los estudiantes relacionan dos variables, la posición de la figura y el número de elementos de ésta; pasan de un primer nivel básico de percepción a un nivel en donde establecen una relación analítica que los lleva a reconocer un patrón y a determinar una regla recursiva, la cual expresan con un lenguaje natural y aritmético. Operan desde casos particulares a partir de representaciones concretas y sin llegar a trabajar con objetos intensivos. Por ejemplo:

E1: En la 2 lo hice por medio de sucesión, la 3ra me percaté que los cuadros de abajo serían 100 y arriba 1 menos 99 y los sumé y da 199.

E2: Porque en la secuencia el número de cuadrados de abajo va aumentando de uno en uno y arriba es uno menos.

E3: Me di cuenta de que en la parte de arriba había un cuadrado menos que en la parte de abajo, entonces multipliqué $17 \times 2 = 34$, que son los cuadrados de la parte de abajo y resté 1, $34 - 1 = 33$ que es el cuadrado menos de ahí arriba.

E4: Multipliqué el lugar que ocupa la figura por dos y le resté 1.

Inicialmente establecen una relación apoyándose de una estrategia aditiva a partir de un recuento iterativo; más adelante esta relación pasa a otro nivel de abstracción al vincular dos estructuras diferentes, la “estructura espacial y numérica” (Zapatera-Llinares, 2018, p. 92).

E₁ al principio no reconoce esta doble estructura, ya que expresa que la tarea dos la realiza por medio de una sucesión, y luego en la tarea tres reconoce una relación que se da entre el número de cuadrados del primer nivel con los del segundo nivel; se manifiesta la percepción que está realizando, a su vez logra abstraer las diferencias entre cada una de las figuras, modifica la estrategia, y de estar en una estrategia de conteo y cálculo aritmético, pasa a un recuento iterativo. Más adelante visualiza y reconoce esta doble estructura.

Al realizar sus acciones, los estudiantes ubicados en esta categoría utilizan inicialmente conteo aritmético, pero lo hacen como recurso para reconocer un patrón, y con ello establecer una regla general; tienen claro que deben encontrar una regla que les permita operar para cualquier caso. La visualización que realizan los lleva a establecer una relación en la que interviene una estructura espacial y numérica, lo que, a su vez, los lleva a establecer una relación funcional, como se muestra en la Figura 20.

En la Figura 20 se presenta un caso como ejemplo de la forma en cómo los estudiantes ubicados en esta categoría, aunque no operan con cantidades indeterminadas, sí llegan a una generalización algebraica, es decir, resuelven a partir de una operación aritmética (suma). Sin embargo, se logra establecer una regla al reconocer que, en la secuencia, los cuadrados de arriba siempre son uno menos que los de abajo, y que los de abajo aumentan de uno en uno; además, se relaciona el número de cuadrados de abajo con el lugar solicitado, estableciendo así una relación espacial y numérica.

Figura 20.

Transfiere la regla a cualquiera caso, pero la operan aritméticamente. Extracto de hoja de actividades.

2. ¿Cuántos cuadrados se necesitan para construir la figura que va en el lugar número 177? 33

3. ¿Cuántos cuadrados se necesitan para construir la figura que va en el lugar número 1007? 199

Nota que la figura 1 tiene un cuadrado, que la figura 2 tiene tres cuadrados, que la figura 3 tiene cinco cuadrados, etc. Con esos datos puedes hacer una tabla que te ayudaría a contestar esta pregunta.

4. Explica cómo razonaste para responder las preguntas 2 y 3.
Por que en la sucesión el número de
cuadrados de abajo va aumentando de
uno en uno y arriba es uno menos.

5. ¿Puedes programar tu calculadora para completar la siguiente tabla?

Lugar que ocupa la figura en la sucesión	Número de cuadrados que se necesitan
48	95
75	129
123	245

Handwritten calculations on the right side of the page:

$$\begin{array}{r} 177 \\ 16 \\ \hline 33 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1007 \\ 99 \\ \hline 199 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 + 47 = 95 \\ 75 + 74 = 149 \end{array}$$

Se puede afirmar que llegan a una generalización algebraica porque esta regla la aplican de manera correcta a los siguientes casos. Por lo tanto, en esta categoría se ubicó a los estudiantes que siguen operando desde casos particulares y con expresiones aritméticas, y, aunque no trabajan con objetos intensivos, sí llegan a expresar la regla general con un lenguaje natural y la transfieren para otros casos, pero siempre partiendo desde elementos particulares, por lo que a esta generalización se le determina como generalización local.

En la percepción visual, como lo afirma Radford (2010), realizan la vinculación entre dos estructuras: espacial y numérica, estableciendo una relación del primer nivel con el segundo nivel. Esto los lleva a establecer una relación funcional para construir la regla general expresada por una operación aritmética.

Categoría 5. Estrategia funcional global

En esta categoría se ubicaron a los estudiantes que al responder tareas que requieren de una generalización lejana, como lo es la tarea tres y cinco, identifican un patrón, llegan a una generalización y expresan dicha regla de comportamiento mediante una expresión matemática $Ax+B=C$. Estos estudiantes reconocen las variables, las trabajan como objetos indeterminados y expresan la regla con un lenguaje simbólico-litera.

E5: Primero conté cuál era la diferencia entre la figura uno y dos, después con las demás vi que la diferencia era 2, así que multipliqué $2n$, pero se pasaba en la primera figura y le resté uno ahora comprobé y sí resultó, $2n+1$.

E6: Primero analicé la sucesión que existe entre las figuras y su relación que tienen, esta relación se coloca en la ecuación con la variable de x , se realiza la operación y colocamos el valor que ocupa para llegar al resultado. $2x-1$.

Los estudiantes que se ubican en esta categoría son capaces de presentar una expresión algebraica que les permite responder de forma general para encontrar el número de cuadrados que se necesitan para “ n ” figura al trabajar con variables indeterminadas, además logran argumentar verbalmente.

Al trabajar una secuencia de patrones geométricos que comprende tareas que van incrementando su grado de complejidad, se reconoce que se favorece el desarrollo del pensamiento algebraico, y además se pueden identificar estrategias que utilizan los estudiantes y su proceso de resolución para dar respuesta a cada una de las tareas que se les presenta en la hoja de trabajo. También permite identificar con mayor claridad el tipo de estrategias y cómo son empleadas, por ejemplo, aunque varios recurrían a la elaboración de una tabla, no todos la utilizaron para establecer una relación funcional y reconocer una regularidad.

Como resultado de trabajar con una secuencia de patrones geométricos se identificó que se pueden presentar casos en los que se resuelve de manera semejante, pero cognitivamente se da una diferencia, por ejemplo, el uso de las tablas o los que operaban con una suma reconociendo que uno de los

sumando siempre sería uno menos ($100+99$); para este último caso, algunos estudiantes, al resolver las tareas, establecían una relación entre el total de cuadrados de la hilera inferior con el total de cuadrados de la hilera superior, incluso expresaban “*la hilera de arriba es uno menos*”. Otros, además de expresarla con un lenguaje común, la representaban con una operación aritmética $100-1=99$, $100+99=199$, sin embargo, esto no significaba que siempre se identificará una regla o que se llegará a una generalización, algunos estudiantes realizaban la suma pero no lograban aplicarla a los casos que se les presentaban en la tarea 5, en la que se hizo uso de una tabla de valores, por lo que se confirma que no llegan a una generalizar algebraica. A esta forma de operar se le determina como una relación estática, ya que aplican dicha relación solo a casos particulares y representaciones concretas sin llegar a identificar objetos intensivos. En cambio, los estudiantes ubicados en la categoría 4 también realizaban dicha suma, pero sí lograban identificar las variables y la comunalidad, lo que les permitía generalizar la regla para aplicarla a cualquier caso, estableciendo una relación dinámica.

Realizar estas categorías a partir de los significados personales e institucionales que operan los estudiantes al resolver las tareas que se presentan en la hoja de actividades, permite identificar las relaciones y dinámicas que caracterizan los procesos cognitivos del pensamiento algebraico. En la forma de resolver y las estrategias empleadas se reconoce que hay diferencias en los procedimientos y niveles de algebrización entre los estudiantes ubicados en las distintas categorías presentadas.

Se identificó que a los estudiantes se les facilita más llegar a reconocer el patrón y generalizar la regla cuando se les muestra la imagen de las primeras figuras que conforman la secuencia, para luego establecer relaciones que los lleven a identificar un patrón y con ello generalizar una regla, que en ocasiones será expresada con un lenguaje natural, y en algunos casos con un lenguaje alfanumérico.

Presentar estas tareas que comprenden diferentes representaciones y en las que se incrementa la dificultad, iniciando con la representación de las cuatro primeras figuras de la secuencia geométrica para luego trabajar con una tarea que requiere de una generalización cercana, enseguida pasar a una generalización lejana y terminar con una tabla de doble entrada, permite a los estudiantes adentrarse en el pensamiento algebraico.

Encuesta final

Al finalizar el curso se decidió aplicar una encuesta en línea a ambos grupos, pero, al ser periodo de receso por el fin de semestre, solo la respondieron aproximadamente el 50% de los estudiantes participantes. Esta encuesta está organizada en dos preguntas cerradas que refieren a datos personales (edad y género), y seis preguntas abiertas relacionadas con aspectos generales

del curso, ya que para la obtención de información de cada una de las tareas se diseñaron instrumentos específicos.

En cuanto a la primera pregunta abierta, respecto a que identificaran aprendizajes relevantes durante el curso, el 22% de los encuestados reconocen aprendizajes centrados en los conocimientos didácticos, por ejemplo:

Los 5 momentos de la clase de matemáticas. El gran uso del material didáctico. Y el cómo realizar diferentes actividades de pensamiento algebraico con los alumnos.

El 26% de los encuestados refieren a conocimientos centrados en el dominio de contenidos matemáticos, por ejemplo:

La generalización de patrones, el uso de las tablas en la asignatura de matemáticas y la descomposición del número.

Mientras que el 52% hacen referencia a conocimientos tanto didácticos como matemáticos, por ejemplo:

Aprendí la importancia del álgebra en la escuela primaria, los procesos de abstracción y los niveles de acuerdo a diversos autores. 2. El uso de patrones para lograr la generalización y el pensamiento algebraico. 3. Aprendí a través de una propuesta didáctica a trabajar las necesidades que muestren los alumnos, mismas que fueron identificadas a través de un diagnóstico previo, el cual a su vez fue creado con base en bibliografía específica.

En cuanto a la pregunta ¿Para qué desarrollar pensamiento algebraico en los niños?, las respuestas se centraron en el desarrollo de habilidades intelectuales y la capacidad para resolver problemas:

Es importante crear un pensamiento analítico y deductivo, uno de los aprendizajes esperados es que el alumno sea capaz de resolver problemas a través de las matemáticas. Y el álgebra abona demasiado (sic) para la resolución de problemas. Ya qué da al alumno la capacidad de observar y analizar desde una perspectiva más profunda.

Con respecto a las maneras en que el curso contribuyó a la idea de desarrollar pensamiento algebraico con los niños, los estudiantes mencionan:

Entendimos que el desarrollo del pensamiento algebraico es un proceso, no es algo que los niños puedan memorizar, sino que a través de actividades como las que trabajamos en el aula, se va desarrollando. Se orienta a los alumnos a través de preguntas a que razonen sobre sus respuestas y expresen las maneras en las que resuelven las actividades y ejercicios.

Aunque las actividades fueron muy sencillas, a veces parecían ser difíciles. Más sin embargo de lo simple a lo complejo pude rescatar conocimientos que puedo transmitir con los niños de primaria o por otro lado seguir desarrollando junto con ellos, comprendí el porqué y para qué es importante ver y trabajar con diversas actividades la álgebra impuesta de manera implícita en los contenidos de matemáticas primaria.

Con la información obtenida en esta encuesta se identifica que los estudiantes reconocen conocimientos didácticos y matemáticos importantes para desarrollar pensamiento algebraico en sus alumnos, y que éste ayuda a construir otros conocimientos matemáticos de manera más significativa.

CONCLUSIONES

Los estudiantes que forman parte de un proceso de formación inicial para ser profesores de primaria participan en 6 diferentes cursos, aproximadamente, en un semestre. Los formadores de formadores deben considerar que las tareas que se proponen en el curso de álgebra atiendan a diversas necesidades formativas de los normalistas, principalmente en lo que refiere a un mayor dominio del conocimiento matemático y didáctico. En este sentido, es conveniente diseñar tareas que sean significativas para los normalistas y aporten elementos para su formación.

En este estudio se presentaron tareas que pueden contribuir con este propósito. Tanto en el grupo A como en el B se llevaron a cabo tareas que tuvieran algún potencial para profundizar en el conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza de las matemáticas. En el primer caso donde se presentan los resultados del grupo A se describen algunas de las tareas más significativas y se muestran evidencias de las propuestas, a partir de la socialización y del análisis que realizamos durante un semestre en el aula.

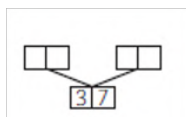
En los registros presentados hay evidencias amplias del tipo de trabajo y habilidades que los normalistas desarrollaron durante el curso. En esta intervención se identificaron aspectos de las tareas que pueden favorecer el conocimiento didáctico de los profesores en formación inicial:

- **La diversificación de tareas.** - Incluir diversas actividades recurrentes, análisis de tareas matemáticas propuestas en el currículo, análisis y observación de videos de clases, diseño de situaciones didácticas a partir de tareas con potencial matemático.
- **Diseñar diversas representaciones de objetos matemáticos.** - Con la finalidad de hacer evolucionar el tipo de tareas o ejercicios que los profesores proponen en clase:

Pasar de este tipo de representación:

$$\begin{array}{r} 24 \\ + 13 \\ \hline 37 \end{array}$$

A este otro tipo:



- **El diseño y construcción de material concreto.** - Tiene como propósito que los estudiantes normalistas descubran y pongan a prueba opciones que ayuden a los alumnos a construir conocimiento más significativo.
- **Identificar las ventajas didácticas de las tareas matemáticas.** - Tanto de las que se proponen a los estudiantes normalistas como las que ellos diseñan para sus alumnos.
- **Identificar las habilidades.** - Tanto intelectuales como de otro tipo que los estudiantes desarrollaron al llevar a cabo alguna tarea matemática.

- **Propiciar la reflexión sobre la práctica a partir de preguntas.** – Las preguntas sobre situaciones de enseñanza pueden contribuir a reflexionar sobre la práctica a partir de la socialización y materiales de análisis que tengan algún potencial específico.

En cuanto al grupo B, para desarrollar el conocimiento matemático en los estudiantes en formación inicial es importante considerar:

- El potencial de la tarea matemática.
- El nivel de complejidad de las tareas, que sea progresivo, aumentando la complejidad en cada tarea propuesta.
- El tipo de habilidades intelectuales que pueden favorecer el trabajo con las tareas matemáticas.

La identificación y sistematización de las estrategias y procedimientos en la resolución de secuencias da las posibilidades de saber en dónde se ubican los estudiantes, y, a partir de esta base, buscar mediaciones que favorezcan la transición a niveles superiores. Además, permite identificar situaciones que pueden ser un obstáculo para el desarrollo de las competencias matemáticas propias de su perfil docente y, por consiguiente, una práctica matemática idónea que favorezca la educación matemática.

Trabajar con tareas que comprenden una secuencia geométrica desde un contexto particular, como es el mostrar las primeras figuras de las secuencias, les favorece para identificar patrones, a diferencia de presentar una tabla de valores porque eso requiere de un nivel de abstracción con mayor dificultad.

Cuando los estudiantes se encuentran en la categoría definida como estrategia aditiva, en donde la percepción se puede considerar como un primer acercamiento cognitivo para llegar a una generalización algebraica, es importante reconocer cómo son sus percepciones, qué perciben y cómo lo perciben. Al conocer el tipo de percepciones se podrán propiciar acciones que los lleven a un segundo nivel en donde establezcan relaciones, y no solo se queden en un conteo aritmético.

El conocimiento matemático común en el campo del pensamiento algebraico se manifiesta en los procedimientos empleados al resolver cada una de las tareas de la hoja de trabajo, las cuales proporcionan información que permite reconocer especificaciones de los objetos y procesos que se activan en cada una de las categorías y, con esta base, identificar formas cómo emerge el pensamiento algebraico en los estudiantes.

Que los profesores en formación inicial entiendan y lleven al aula estas ideas no parece ser algo sencillo, posiblemente sea una tarea formativa que inicie en las Normales, pero necesariamente tendría que seguir como un proceso de formación continua para lograr transformar y hacer evolucionar las prácticas de enseñanza de las matemáticas.

REFERENCIAS

- Aké, L., Mojica, J., & Ramos, B. (2015). Introducción del pensamiento algebraico en educación primaria: un reto para la educación básica en México. En P. Scott, & Á. Ruiz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas* (Vol. 1, págs. 143–150). Comité Interamericano de Educación Matemática.
<https://bit.ly/3RCbcnX>
- Bautista-Pérez, J. L., Bustamante-Rosario, M. H., & Amaya De Armas, T. (2021). Desarrollo de razonamiento algebraico elemental a través de patrones y secuencias numéricas y geométricas. *Educación Matemática*, 33(1), 125–152.
<https://doi.org/10.24844/EM3301.05>
- Butto, C., & Rivera, T. (2011). La Generalidad una vía para acceder al pensamiento algebraico: un estudio sobre la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo. En Consejo Mexicano de Investigación Educativa (Ed.), *Memoria Electrónica del XI Congreso Nacional de Investigación Educativa. Educación y Conocimientos Disciplinarios* (pp. 1–12). Consejo Mexicano de Investigación Educativa. <https://bit.ly/45aGB4b>
- Carpenter, T., & Levi, L. (2000). *Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades. Research Report* (Report No. NCISLA-RR-00-2). National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. <https://bit.ly/45YCR6V>
- Castro, W., Godino, J., & Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: un desafío para la formación de maestros. En G. Gloria (Ed.), *Memorias del 12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 92–99) Gaia Ediciones.
- Chávez-Ruiz, Y., De Loera, V., & Flores, F. (2021). La importancia de la lectura para la enseñanza de las matemáticas: Una experiencia desde la Investigación-acción. En S. Reyes-Carillo (Ed.), *Experiencias de investigación educativa desde las escuelas Normales* (pp. 57–83). Pie rojo Ediciones-Centro Regional de Educación Normal de Aguascalientes. <https://bit.ly/46dCTYU>
- Chávez-Ruiz, Y., & Martínez-Rizo, F. (2018). Evaluar para aprender: Hacer más compleja la tarea a los alumnos. *Educación Matemática*, 30(3), 211–246.
<https://doi.org/10.24844/EM3003.09>
- Kaput, J. (2000). *Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power by "Algebrafying" the K-12 Curriculum*. 1–21. National Science Foundation - Office of Educational Research and Improvement.
<https://bit.ly/48JIXv1>
- Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Fong Ng., S. (2016). *Early Algebra: Research into its Nature, its Learning, its Teaching*. Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2>
- Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229–240.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5038>

- Malba, T. (2008). *El hombre que calculaba*. Limusa.
- Martínez Rizo, F. (2020). *El nuevo oficio del investigador educativo: Una introducción metodológica*. Universidad Autónoma de Aguascalientes.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: Integración del pensamiento algebraico en Educación Primaria. *PNA*, 3(3), 135–156. <https://doi.org/10.30827/pna.v3i3.6186>
- Moscoso, J. A. (2020). *Guía para diseñar secuencias didácticas de pensamiento matemático en educación básica* (1a ed.). SEP.
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37–62. <https://doi.org/10.30827/pna.v4i2.6169>
- Radford, L., & André, M. (2009). Cerebro, cognición y matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(2), 215–250. <https://bit.ly/48zbxhp>
- Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética. De las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Paidós.
- Secretaría de Educación Pública. (2002). *Programas y materiales de apoyo para el estudio. 2° y 3° semestre. Matemáticas y su Enseñanza I y II. Licenciatura en Educación Primaria (México)*. SEP.
- Secretaría de Educación Pública. (2013). *Plan de estudios 2012. Licenciatura en Educación Primaria*. SEP.
- Secretaría de Educación Pública. (2019). *Plan de estudios 2018. Programa del curso de álgebra. Licenciatura en Educación Primaria*. SEP. <https://bit.ly/3PC8rjI>
- Secretaría de Educación Pública. (2022). *Álgebra. Su aprendizaje y su enseñanza*. SEP.
- Universidad de Tsukuba (2023, agosto, 14). Maestros aprendiendo juntos. Implementación del estudio de clase japonés. [Video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=qOx0PFLT0nc>
- Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, 9(3), 193–215. <https://doi.org/10.30827/pna.v9i3.6220>
- Zapatera-Llinares, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números*, 97, 51–67. <https://bit.ly/3PV3iVC>
- Zapatera-Llinares, A. (2017). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de Generalización de Patrones. Una trayectoria de Aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(1), 87–114. <https://dx.doi.org/10.12802/relime.18.2114>

Conocimiento de los futuros profesores de matemáticas en el diseño y análisis de propuestas de enseñanza en educación secundaria

Carolina Rubí Real Ortega¹, Maricela Bonilla González² y
Saúl Elizarrarás Baena³

RESUMEN

Esta investigación versa sobre la manera en la que los futuros docentes diseñan e implementan propuestas didácticas como parte de su trabajo de titulación para mostrar lo que han aprendido a lo largo de su formación inicial. El marco teórico se sustenta en las dimensiones del cuarteto del conocimiento: 1) Fundamentación, 2) Transformación, 3) Conexión y 4) Contingencia. El análisis de los datos permitió concluir que los profesores en formación tienen una necesidad de fundamentar su trabajo en teorías que provienen de la pedagogía, psicología y educación matemática, pero el diseño y análisis de la experimentación no se fundamenta en estas. Los futuros docentes son capaces de transformar el conocimiento matemático de distintas maneras, pero en ocasiones no eligen las transformaciones más adecuadas para acercar ese conocimiento a los alumnos de secundaria; son coherentes al diseñar una lección, pero no entre lecciones; y tienen carencias para responder adecuadamente ante una situación de contingencia.

PALABRAS CLAVE

Conocimiento, Docentes en formación, Matemáticas, Propuestas didácticas, Secundaria.

¹ carolina.realo@aeefcm.gob.mx
Escuela Normal Superior de México
<https://orcid.org/0000-0003-2340-5628>

² maricela.bonillag@aeefcm.gob.mx
Escuela Normal Superior de México
<https://orcid.org/0009-0008-4059-9114>

³ saul.elizarraras@aeefcm.gob.mx
Escuela Normal Superior de México
<https://orcid.org/0000-0002-9623-3452>

ANTECEDENTES

El conocimiento profesional ha sido del interés de varios investigadores en educación matemática, quienes han propuesto perspectivas como las matemáticas para su enseñanza (Shulman, 1987; Davis & Simmt, 2006), el conocimiento matemático para la enseñanza (Ball et al., 2008), el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo et al., 2013) y el cuarteto del conocimiento (Rowland, 2014).

Shulman (1987) señaló que el conocimiento matemático para su enseñanza está conformado por siete elementos: 1) conocimiento del contenido, 2) conocimiento del currículo, 3) conocimiento pedagógico sobre el contenido, 4) conocimiento pedagógico en general, 5) conocimiento del alumnado, 6) conocimiento del contexto educativo y 7) conocimiento de valores, propósitos y fines educativos.

De acuerdo con este investigador, el conocimiento del contenido está subdividido en: 1) conocimiento común, 2) conocimiento especializado y 3) horizonte matemático; mientras que el conocimiento didáctico se subdivide en: 1) conocimiento del contenido y sus estudiantes, 2) conocimiento del contenido y cómo es que se enseña y 3) conocimiento curricular.

Por un lado, el conocimiento de contenido se refiere al conocimiento matemático y a las habilidades que se necesitan para resolver las tareas que se pueden realizar con los estudiantes. Y por el otro, el conocimiento especializado se constituye por el conocimiento matemático y las habilidades de los profesores. La trayectoria de un contenido, así como las conexiones intra y extra-matemáticas, se relacionan con el horizonte matemático.

El conocimiento didáctico del contenido y sus estudiantes está vinculado con lo que el profesor sabe sobre lo que estos pueden hacer o pensar mediante el uso de las matemáticas. El conocimiento del contenido y cómo es que este se enseña tiene que ver con las habilidades que puede desarrollar un docente para predecir lo que pasará con los alumnos al proponerles un problema, una tarea o actividad matemática.

Finalmente, el conocimiento curricular se relaciona con el conjunto de programas diseñados para la enseñanza de diversos contenidos matemáticos de un determinado nivel educativo, la variedad de materiales didácticos que puede utilizar el docente y los elementos que sirven para el uso del programa de estudios o los materiales que en este se sugieren.

Al considerar el trabajo de Shulman (1987), muchos investigadores propusieron que el conocimiento pedagógico sobre un contenido matemático es el más importante en la formación de futuros profesores ya que puede favorecer el aprendizaje de los estudiantes. La propuesta de Davis y Simmt (2006) está relacionada con un marco para interpretar las ciencias de la complejidad, de manera que los docentes son considerados como sistemas y el foco de interés está en saber cómo aprenden. Las matemáticas para la

enseñanza son como una rama dentro de esta disciplina, las investigaciones en las que se ha utilizado este marco giran en torno al estudio de conceptos, o bien, una estructura del aprendizaje a través de la cual los docentes reconocen, analizan, cuestionan, crean imágenes, metáforas y analogías, y son capaces de proponer ejemplos y ejercicios con aplicaciones. Todo esto con la finalidad de favorecer tanto el aprendizaje, como la comprensión de los estudiantes.

Por su parte, Ball et al. (2008) centraron la atención en el conocimiento matemático para enseñar a partir de la práctica del profesor. En este modelo multidimensional se refinan las características del conocimiento sobre el contenido matemático y el didáctico.

Para Davis (2010), el estudio de conceptos tiene que ver con entornos en los que los docentes pueden combinar lo que saben y cuestionarse sobre cómo construir ese tipo de conocimiento matemático para enseñar. Este término puede favorecer la manera en que las matemáticas se entienden y usan dentro del aula, lo que en cierto sentido proviene del estudio de una clase (en términos del diseño, la articulación y el desarrollo de estrategias didácticas) y del análisis del concepto que puede definirse como un saber individual y colectivo que no se puede dicotomizar.

De manera general, los dos grandes constructos de esta perspectiva se vinculan con el estudio de conceptos matemáticos como una especie de aplicación de varios tipos de conocimientos.

Ahora bien, el conocimiento especializado del profesor se asocia con un modelo analítico sugerido por Carrillo et al. (2013), el cual está constituido por dominios y subdominios y es adecuado para interpretar dicho conocimiento desde un punto de vista integral. El dominio matemático consta de tres subdominios: 1) conocimiento de los contenidos, 2) conocimiento de la estructura matemática y 3) conocimiento de la práctica matemática.

El primer subdominio se refiere al conocimiento de las matemáticas como disciplina, la matemática escolar y su fundamentación teórica, es decir, los conocimientos que tienen sentido para un docente, por ejemplo, algoritmos estándares y alternativos, y, la fenomenología de conceptos matemáticos. Todo esto conforma un bagaje de aspectos epistemológicos que favorecen la comprensión y permiten hacer asociaciones con conocimientos sobre definiciones, propiedades y diferentes representaciones de una idea, concepto u objeto matemático.

El objeto de enseñanza está relacionado con el segundo subdominio, que tiene que ver con los conocimientos de las relaciones entre contenidos avanzados y elementales, desde su complejidad hasta su simplificación. Además, en este subdominio se incluyen grandes ideas matemáticas como elementos que estructuran esta disciplina.

El tercer subdominio se refiere al conocimiento de la práctica, el cual se centra en las formas de hacer y proceder en matemáticas, tales como las

distintas formas de demostrar o definir, o bien, de conocer el significado de algún axioma o teorema. Asimismo, en este se considera el conocimiento de otros elementos como la sintaxis matemática, una de las herramientas fundamentales para el profesor.

En cuanto al conocimiento didáctico, este se sustenta en el trabajo de Shulman (1987) y se difumina con otras propuestas que lo caracterizan. Es preciso señalar que los criterios de validez del conocimiento didáctico son distintos a los del conocimiento matemático, y que los procesos de construcción de conocimiento asociados a estos dominios tienen diferencias, lo que implica diversas aproximaciones para estudiarlos.

Dentro de los subdominios del dominio matemático no se toman en cuenta los conocimientos pedagógicos como parte de las actividades matemáticas, sino solo aquellos en los que el contenido matemático está condicionado para su enseñanza y aprendizaje.

Con respecto al conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, se identifican tres subdominios: 1) conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas, 2) conocimiento de la variedad de representaciones que conoce el profesor para la instrucción y 3) las posibles estrategias que pueden implementarse para enseñar un contenido.

El primer subdominio se refiere a los conocimientos sobre las características inherentes al contenido matemático, ya sean particulares o generales, haciendo énfasis en aquellas que se derivan de la interacción de los estudiantes con el contenido y en las que subyacen de la consideración de este como un objeto de aprendizaje en sí mismo. También se refiere a las características del proceso de comprensión de los estudiantes sobre distintos contenidos, el lenguaje asociado a estos, las dificultades, los errores y los obstáculos que pueden presentarse en clase.

Con relación al segundo subdominio, este se relaciona con el conocimiento sobre las distintas representaciones y estrategias que pueden llevarse a cabo en un salón de clases al estudiar un contenido matemático. Dentro de este subdominio se incluye el conocimiento formal o informal de diversas teorías del aprendizaje de la matemática, y el de las características y potencialidades que se usan en diferentes recursos y materiales para la enseñanza del contenido matemático.

El tercer subdominio tiene que ver con el conocimiento de los estándares de aprendizaje matemático, el cual no se limita a conocer el currículo sino que también abarca el conocimiento que le permite al profesor asumir una postura reflexiva y crítica sobre lo que el alumno debe y puede aprender en determinado nivel educativo, lo que implica considerar su experiencia profesional y algunos referentes teóricos en educación matemática.

El cuarteto del conocimiento propuesto por Rowland (2014) es un marco para el análisis y el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas, en el que

se considera que tanto el conocimiento, como las creencias al enseñar matemáticas se evidencian por medio de cuatro dimensiones diferentes: 1) Fundamentación, 2) Transformación, 3) Conexión y 4) Contingencia. En el apartado sobre el marco teórico se incluye más información al respecto.

Las perspectivas propuestas de Shulman (1987), Davis y Simmt (2006), Ball et al. (2008), Carrillo et al. (2013), y Rowland (2014) surgieron ante la necesidad de caracterizar el conocimiento que debería tener un docente de matemáticas, lo que permitió que una parte de la comunidad de didáctica de esta ciencia investigara más sobre cómo es que los profesores ponen en práctica lo que saben para favorecer la construcción del conocimiento en sus alumnos.

INVESTIGACIÓN SOBRE PROFESORES EN FORMACIÓN

En las últimas décadas se ha incrementado el interés por indagar sobre los futuros docentes de matemáticas alrededor del mundo.

García (2005) afirmó que la formación de profesores de matemáticas ha sido el objeto de estudio de diferentes investigadores que buscan favorecer una formación adecuada y completa de los futuros profesionales de la enseñanza de esa disciplina. Por esa razón, a partir del análisis de la práctica docente como referente (Goffree & Oonk, 1999) y los ciclos recursivos (Simon, 1994), esta investigadora hizo una propuesta de formación de profesores de matemáticas.

Llinares (2017) caracterizó la formación del docente de matemáticas como una actividad multifacética y contextualizada que define diferentes ámbitos de reflexión: el contexto sociopolítico, las aproximaciones teóricas relativas al conocimiento necesario para enseñar matemáticas y el aprendizaje. Estas reflexiones se agrupan en tres bloques: 1) realidades como condiciones institucionales, 2) perspectivas sobre la relación entre el conocimiento y su uso en situaciones de enseñanza, y 3) expectativas y posibilidades relacionadas con el papel de las tecnologías y el desarrollo de las agendas de investigación.

Si bien, la problemática sobre la que más se ha indagado en torno a la formación de los futuros profesores de matemáticas se relaciona con el conocimiento didáctico-matemático en la enseñanza, existen investigaciones en las que se centra la atención en otros aspectos más específicos.

Para identificar las concepciones de los maestros en formación sobre la finalidad y naturaleza de las matemáticas, la enseñanza-aprendizaje, la metodología didáctica, la evaluación y el papel del alumno y el docente, Zapata y Blanco (2007) llevaron a cabo un estudio con el que pudieron concluir que: sus percepciones están conformadas por ideas de distintas disciplinas, carecen de fundamentos epistemológicos de las matemáticas y la evaluación, y están orientadas hacia el descubrimiento de la matemática y el empirismo o positivismo lógico.

Gómez y Cañadas (2016) indagaron sobre el aprendizaje del análisis fenomenológico de profesores de matemáticas en formación con base en el modelo del análisis didáctico. Estos investigadores concluyeron que los sujetos no tuvieron dificultades con la idea de situación, pero sí con las ideas de fenómeno y contexto (específicamente relacionadas con la característica estructural), y la de subestructura y su relación con la noción de contexto.

La enseñanza de las matemáticas mediante la resolución de problemas y las concepciones de los profesores en formación se investigaron por parte de Parra y Breda (2017). A través de su estudio, estas autoras identificaron que los futuros docentes tienen una conceptualización tradicional de la resolución de problemas así como algunas imprecisiones, lo que se alejaba de perspectivas más actuales. Asimismo, determinaron que había una influencia del currículo ya que en este se favorece una acepción caracterizada por una resolución de problemas posterior a la enseñanza de nociones matemáticas.

Moreno et al. (2021) llevaron a cabo un estudio para identificar y describir los errores de profesores de matemáticas en formación al resolver una tarea de modelización. Los autores concluyeron que los futuros docentes estaban poco familiarizados con el proceso de modelización, en particular, con las fases de simplificación y validación asociadas al mundo no matemático.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Font et al. (2012), señalan que las competencias en análisis didáctico implican diseñar, aplicar y valorar propuestas de aprendizaje. Dichas competencias requieren de técnicas de análisis y criterios de calidad para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y planteamiento de propuestas de mejora.

En un estudio con docentes de matemáticas en formación, Elizarrarás (2018) analizó sus propuestas de enseñanza y concluyó que aunque se observa un dominio de los contenidos y su didáctica específica, éstas no se fundamentan en algún referente teórico. Aunque se hacía referencia al uso de la teoría de las situaciones didácticas, no se incluyeron distintos tipos de situaciones (acción, formulación, validación e institucionalización), el medio o una situación a-didáctica. También se observó que los futuros profesores no consideraron que las matemáticas se desarrollan a partir de aplicaciones a nuevos problemas y de la búsqueda de las relaciones entre estas.

Huaman (2019) reportó que durante la formación del profesor de matemáticas e informática se puso en evidencia la implementación del método tradicional basado en un plan de estudios conservador, en el que inclusive se excluye el uso de recursos tecnológicos.

Asimismo, se identificó que los futuros docentes de matemáticas no aplican los pilares educativos en su práctica profesional, sino que, por el contrario, desarrollan una educación bancaria tal y como lo plantean Figueroa

y Figueredo (2022). Por esta razón se debe favorecer la implementación de estrategias de acción que promuevan la construcción de un conocimiento significativo y el desarrollo de varias habilidades. Todo esto con la participación de diferentes integrantes de la comunidad educativa.

Si bien, existen investigaciones sobre la formación de profesores de matemáticas (Llinares, 2017), se han hecho propuestas (García, 2005; Font et al., 2012) y estudios acerca de sus concepciones (Zapata & Blanco, 2007), su aprendizaje del análisis fenomenológico (Gómez & Cañadas, 2016), su conceptualización e implementación del enfoque de la resolución de problemas (Parra & Breda, 2017) y los errores que cometen al realizar una tarea de modelización (Moreno et al., 2021). Hace falta indagar más sobre cómo es que el proceso de formación de profesores de matemáticas impacta en el diseño, experimentación y análisis de secuencias didácticas, para favorecer el aprendizaje de diversos contenidos en alumnos de educación primaria, secundaria y media superior.

La investigación con futuros docentes de matemáticas en educación secundaria es fundamental, ya que en ese nivel educativo se consolida lo que aprendieron los alumnos en primaria y se favorece la construcción de conocimientos matemáticos que se continuarán estudiando en niveles posteriores.

Cabe señalar que los egresados de las escuelas normales tienen un impacto significativo en la construcción del conocimiento matemático de miles de estudiantes, de ahí su importancia en didáctica de las matemáticas. Por esta razón, el presente estudio tiene como objetivo analizar cómo es que los futuros docentes de matemáticas utilizan su conocimiento para diseñar, experimentar y analizar una propuesta de enseñanza con alumnos de secundaria, como parte de su trabajo de titulación.

MARCO TEÓRICO

El cuarteto del conocimiento (Rowland, 2014) es un marco teórico para el análisis y el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas, por lo que se consideró como el referente teórico en este estudio. Como ya se mencionó antes, en este marco tanto el conocimiento matemático, como las creencias en torno a su enseñanza se pueden evidenciar a través de cuatro dimensiones distintas: 1) Fundamentación, 2) Transformación, 3) Conexión y 4) Contingencia. En los siguientes párrafos se describe cada una de éstas.

Fundamentación

Esta primera dimensión se asocia con el conocimiento, las creencias y la comprensión adquirida en academia en términos de la preparación del trabajo en clase, vinculado con la toma de decisiones pedagógicas. Los componentes clave de esta base teórica son: el conocimiento y la comprensión de las matemáticas *per se*, el conocimiento de extensiones significativas de la

literatura y el pensamiento como resultado de la investigación sistemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Las convicciones están relacionadas con las creencias que tienen los futuros docentes y los valores que defienden, es decir, con las distintas posiciones filosóficas que asumen acerca de la naturaleza del conocimiento matemático, los propósitos de la educación matemática y las condiciones bajo las cuales se considera que los alumnos aprenderán mejor.

Transformación

El conocimiento en acción como una demostración de la planificación de la enseñanza y su implementación en clase se relaciona con la segunda dimensión del cuarteto del conocimiento. Shulman (1987) afirmó que la base de los conocimientos para la enseñanza está sustentada en la capacidad de un profesor para transformar su conocimiento sobre un contenido en formas pedagógicas potenciales, lo que caracteriza a esta categoría. Tal y como lo señala este investigador, para presentar las ideas, conceptos u objetos matemáticos se requiere del uso de analogías, imágenes, ejemplos, explicaciones y demostraciones por parte del profesor. En esta dimensión se incluye la elección del comportamiento con el que un profesor se va a dirigir hacia un estudiante o grupo de alumnos, como resultado de la deliberación y el juicio. Además la manera en la que un docente selecciona y usa ejemplos para presentar un contenido matemático a sus pupilos con el propósito de favorecer la construcción de conceptos, la adquisición del lenguaje y la demostración de procedimientos que son de suma importancia.

Conexión

Esta dimensión conjunta ciertas elecciones que se hacen y decisiones que se toman en términos de las partes más o menos discretas del contenido matemático. También se refiere a la coherencia de la planificación de la enseñanza o la instrucción mostrada a lo largo de una lección o secuencia didáctica. Dicha coherencia implica una organización de contenidos matemáticos dentro de una lección así como entre lecciones. El orden en el que se proponen los ejercicios y las tareas, refleja deliberaciones y selecciones del docente vinculadas con el conocimiento de conexiones estructurales dentro de la matemática, la conciencia de las demandas cognitivas de distintos contenidos matemáticos y la contingencia de tareas.

Contingencia

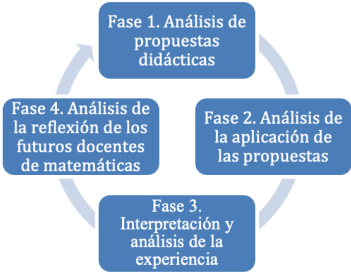
La cuarta dimensión se relaciona con aquellos eventos que se pueden suscitar en el aula que son casi imposibles de planear, y por lo tanto, con la capacidad de pensar y reaccionar en clase; específicamente, hay una relación con la disposición de responder a lo que dicen los alumnos, y por consiguiente, la preparación para desviarse de lo que ya se estableció cuando sea apropiado.

MÉTODO

En este estudio participaron quince futuros docentes de matemáticas que estaban cursando el último año de su formación como licenciados en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria, es decir, de séptimo y octavo semestres. Los datos comprenden las propuestas didácticas que diseñaron, las evidencias de aprendizaje que recabaron en su implementación, el análisis e interpretación de estas y la experimentación de su propuesta de enseñanza con alumnos de la escuela secundaria. Para analizar los datos se llevaron a cabo cuatro fases (véase Figura 1), en la primera se analizaron las propuestas didácticas y el sustento teórico, en la segunda se analizó su experimentación en el salón de clases, y en la tercera se realizó la interpretación y el análisis del trabajo de los alumnos. Finalmente, en la cuarta fase se analizaron las interpretaciones y reflexiones de los profesores en formación.

Figura 1

Método analítico del objeto de estudio



En la Tabla 1 se puede observar que dicho análisis se realizó mediante el uso de las cuatro dimensiones del cuarteto del conocimiento propuesto por Rowland (2014), ya que este marco contiene los elementos necesarios para estudiar cómo es que los futuros docentes de matemáticas diseñan, aplican y analizan propuestas de enseñanza.

Tabla 1

Método analítico del objeto de estudio

Fundamentación	Transformación	Conexión	Contingencia
- Concientización del propósito de la secuencia didáctica - Conocimiento matemático - Sustento teórico - Uso de terminología - Empleo del libro de texto - Errores identificados	- Demostraciones - Uso de material didáctico así como del tipo de representaciones y ejemplos elegidos	- Conexiones entre procedimientos y conceptos - Anticipación de la complejidad - Decisiones sobre la secuencia y la identificación de una adecuación conceptual	- Respuestas ante lo que decían los alumnos - Uso de oportunidades - Cambio de agenda de trabajo - Percepción sobre su trabajo en clase

Nota. Elaboración propia. Fuente: Los criterios de análisis se retomaron del trabajo de Rowland (2014).

RESULTADOS

Los hallazgos de la investigación que se consideraron como los más relevantes, con base en el marco teórico que se sustentó en el cuarteto del conocimiento (Rowland, 2014) se describen enseguida.

Una de las profesoras en formación (Baeza, 2022) eligió hacer una propuesta didáctica sobre el estudio de los ángulos internos de triángulos y cuadriláteros mediante el doblado de papel con alumnos de primer grado de secundaria. A continuación se hace referencia a lo que se observó en cada una de las cuatro dimensiones.

Fundamentación. Este trabajo fue realizado metodológicamente desde la perspectiva de la investigación acción, la intervención educativa y la docencia reflexiva; mientras que teóricamente se fundamentó en las teorías cognitivista, constructivista (aprendizaje significativo) y el modelo de Van Hiele.

Transformación: Esta docente de matemáticas en formación transformó el contenido matemático en una representación concreta de los ángulos interiores de triángulos y cuadriláteros mediante el doblado de papel. Después de la experimentación de su propuesta didáctica concluyó que hacía falta una guía para la construcción de ese tipo de figuras, doblando papel en forma de cuadrado o rectángulo.

Conexión. No se observó una conexión entre lo observado por los alumnos de primer grado al estudiar los ángulos interiores de triángulos y lo que observaron cuando estudiaron una propiedad similar de los cuadriláteros.

Contingencia. Debido a que los alumnos tenían una total dependencia de la profesora en formación para seguir los dobleces que se debían realizar, se identificó una situación de contingencia cuando un estudiante no logró obtener el resultado esperado (un cuadrado de papel con ciertos dobleces con la finalidad de estudiar sus ángulos internos). En el siguiente diálogo se muestra dicha situación:

Alumno: *Maestra ¿por qué a mí no me salió?*

Profesora: *¿En qué paso te quedaste?*

Alumno: *Pues ya era el último.*

Profesora: *¿Por qué te quedo ese doblez tan grande?, ¿seguro que hiciste todos los pasos?*

Alumno: *Sí maestra, yo la estaba viendo.*

Profesora: *Entonces desdóblalo para que chequeemos en qué te equivocaste. Les di la indicación que íbamos a doblar el cuadrado de papel, no el rectángulo.*

Alumno: *Pues por eso.*

Profesora: *Tú tomaste un rectángulo de papel no un cuadrado, ¿ya viste? a ver, ¿cuál es el cuadrado de papel?*

Alumno: (observa ambas figuras de papel) *No sé, no me acuerdo.*

Como se puede ver, la reacción de la profesora en formación se asocia con una serie de cuestionamientos que dan lugar a una reflexión en términos de una falta de consideración de conocimientos previos de los estudiantes.

Lo anterior, le permitió reflexionar no sólo sobre la importancia de tomar en cuenta ese tipo de información, sino también acerca de un razonamiento diferente de los alumnos de acuerdo con el nivel en el que se encuentran.

Otra docente en formación diseñó una propuesta de enseñanza sobre la resolución de problemas mediante ecuaciones cuadráticas con alumnos de tercero de secundaria (Toledano, 2022). En los siguientes párrafos se hace referencia a lo que se observó en cada una de las cuatro dimensiones.

Fundamentación. Teóricamente consideró la perspectiva constructivista de Vygotsky y la cognitivista de Piaget en referencia al desarrollo intelectual del individuo, mientras que metodológicamente lo encuadró en la investigación-acción, la intervención educativa y la docencia reflexiva.

Transformación. Se observó una falta de uso de diferentes representaciones al resolver problemas por medio de ecuaciones de segundo grado con la finalidad de hacer énfasis en la aplicación de este conocimiento matemático en el mundo real.

Conexión. En la primera sesión se estudió el cálculo de áreas y perímetros de figuras compuestas a partir de su representación algebraica; es decir, se pretendió introducir a los alumnos al uso de expresiones algebraicas para representar medidas.

Contingencia. Durante las sesiones, la profesora en formación organizó a los estudiantes en parejas para que se apoyaran y comunicaran con la finalidad de favorecer una mejor comprensión de lo que se les solicitaba; todo ello bajo el supuesto de la zona entendida como la distancia existente entre el desarrollo actual y el potencial de un sujeto propuesta por Vygotsky, es decir, la zona de desarrollo próximo. Ante la carencia de resultados esperados, la docente en formación tuvo que intervenir para explicar el desarrollo de las actividades.

Por último, otro de los docentes en formación elaboró su propuesta didáctica sobre el estudio de la variación lineal con alumnos de primer grado de secundaria. Lo observado en cada una de las distintas dimensiones se describe enseguida.

Fundamentación. Esta propuesta se sustentó en referentes teóricos tales como la investigación acción, la docencia reflexiva y la teoría del aprendizaje de Piaget. Aunque se hace referencia a éstos, no se consideraron para el diseño de la propuesta de enseñanza, su puesta en marcha y el análisis de las evidencias del trabajo de los alumnos, tal es el caso de la perspectiva de Piaget. También se identificó que el futuro docente tiene conocimientos suficientes sobre situaciones o fenómenos que se vinculan con una variación lineal a partir de sus diferentes representaciones, tales como tabular, gráfica y algebraica.

Transformación. Aunque el profesor en formación consideró el enfoque de la resolución de problemas que pueden modelarse con una función lineal,

se identificó que hicieron falta cuestionamientos que propiciaran el análisis y la reflexión de sus estudiantes. En la primera sesión se propuso una situación sobre la edad biológica de un perro, pero no se incluyeron preguntas que permitieran identificar las variables asociadas con la relación de correspondencia. Asimismo, no se cuestionó a los alumnos para que enunciaran las características de una variación lineal, por ejemplo, “la edad del perro aumenta de manera proporcional a su edad biológica”, o “la edad biológica del perro aumenta de cuatro en cuatro por año transcurrido”. Adicionalmente, no se plantearon preguntas como ¿cuál es la relación entre la edad del perro y la biológica?, o ¿cómo se puede obtener la edad del perro a partir de su edad biológica?

Conexión. En esta dimensión se observó un uso de diferentes representaciones para el estudio de las funciones lineales, a saber, tabular, gráfica y algebraica. En el desarrollo de las secuencias didácticas y su implementación se reconoció un análisis limitado de cada una de las diferentes representaciones. No obstante, en la obtención de la expresión algebraica de rectas del tipo $y = ax + b$ y la interpretación de los parámetros a y b en la expresión, se pudo observar que no se cuestionó a los alumnos con preguntas como ¿qué sucede con la posición de la recta si aumenta o disminuye el valor de a ?, si toma los valores: -3 , 0 y 5 , ¿qué se observa en la gráfica?, ¿qué pasa si el valor de b aumenta o disminuye?

Sólo se hizo referencia de manera teórica a que para determinar el signo de la pendiente se necesita identificar si los valores de y aumentan o disminuyen, lo que no se asoció al aumento o disminución en la representación gráfica.

En cuanto al uso de tablas, aunque se requirió obtener la edad biológica a partir de la edad del perro y viceversa para completar este tipo de representación, no se favoreció una descripción de los procedimientos que permitieran completar la tabla.

Contingencia. En el tema de la variación lineal a partir de un problema que permitiera a los alumnos identificar las variables implicadas para poder representarlas en tablas y gráficas, los alumnos no lograron entender bien lo que se les explicaba. Este docente en formación tuvo que recurrir al estudio de temas que ya se habían trabajado anteriormente, inclusive, el uso de la recta numérica como herramienta. El hecho de que los estudiantes tuvieran dificultades para iniciarse en el estudio de la variación lineal puede deberse a que en el momento de apertura de la primera sesión no se contempló la recuperación de conocimientos previos relacionados con situaciones en las que los elementos de dos conjuntos se relacionan por medio de una constante de proporcionalidad, o bien, el uso de esquemas aditivos o multiplicativos que se sugieren en las orientaciones didácticas del programa de estudios vigente.

CONCLUSIONES

De manera general, los futuros docentes de matemáticas, en su última etapa de formación, no cuentan con los conocimientos que se requieren para diseñar e implementar una propuesta didáctica que esté sustentada en referentes teóricos, y en consecuencia, el análisis que hacen de la experimentación de su propuesta es limitado, es decir, descriptivo.

Aunque los profesores en formación hacen referencia a que sus propuestas de enseñanza están sustentadas en teorías derivadas de la psicología y pedagogía (como las de Piaget, Vygotsky, Ausubel, entre otras) e incluyen ciertas contribuciones de la didáctica de la matemática como la teoría de las situaciones didácticas, el modelo Van Hiele, etc., en términos de la fundamentación; no diseñaron su propuesta ni analizaron las evidencias de su implementación con base en dichos referentes.

En relación a la transformación, la mayoría de los docentes en formación son capaces de transformar el contenido matemático mediante el uso de material didáctico, así como de otras representaciones. No obstante, tienen dificultades para tomar decisiones acertadas y presentar dichas representaciones de manera secuencial. Por ejemplo, el profesor en formación que trabajó sobre variación proporcional directa no favoreció la comprensión de los alumnos de la representación gráfica ya que no hizo énfasis en que todas las gráficas vinculadas con una situación de proporcionalidad directa pasan por el origen del plano cartesiano.

Una de las dimensiones en las que se observaron más dificultades de los futuros profesores fue la de conexión. A pesar de que las actividades de una misma lección estaban conectadas entre sí, se observó que no había coherencia entre las lecciones que conformaban una misma propuesta didáctica no sólo en cuanto a la secuencia y organización de contenidos matemáticos, sino también de niveles de complejidad asociados a estos.

Con respecto a las situaciones de contingencia, se identificó que los futuros docentes de matemáticas no están capacitados para enfrentar situaciones imprevistas. Aunque se puede considerar que ningún docente es capaz de hacerle frente a cualquier situación que no se puede prevenir, los sujetos del estudio tuvieron situaciones de contingencia por la falta de consideración de conocimientos previos para el diseño de su propuesta de enseñanza.

En particular, la reflexión sobre la implementación de sus propuestas de enseñanza, así como de las situaciones de contingencia que enfrentaron, permitió que los profesores en formación identificaran una necesidad de mejora a partir de la búsqueda y experimentación de otras formas de llevar a cabo el trabajo en clase. Se espera que el contenido de este capítulo favorezca un cambio en las prácticas educativas de los formadores de los futuros docentes de matemáticas y los investigadores en educación matemática, con la finalidad de mejorar la formación inicial de docentes y la manera en la

que impacta en la construcción de los conocimientos matemáticos de millones de estudiantes mexicanos de secundaria. Asimismo, se espera que este estudio les sirva a otros profesores en formación como muestra de lo que pueden aprender de la investigación en didáctica de las matemáticas.

REFERENCIAS

- Baeza, L. M. (2022). *El uso de doblado de papel como estrategia didáctica para la enseñanza de los ángulos internos de triángulos y cuadriláteros. Una experiencia docente*. [Informe de prácticas profesionales no publicada]. Escuela Normal Superior de México.
- Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Carrillo, J., Contreras, L. C., & Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina., & I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática* (pp. 193–200). Comares.
- Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics -for- Teaching: an Ongoing Investigation of the Mathematics that Teachers (Need to) Know. *Educational Studies in Mathematics*, 61(3), 293–319. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-2372-4>
- Davis, B. (2010). Concept studies: Designing settings for teachers' disciplinary knowledge. En M. M. F., Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 1, pp. 63–82). PME. <https://bit.ly/3PMYA1c>
- Elizarrarás, S. (2018). La reflexión docente de estudiantes normalistas de Matemáticas y su interacción en la escuela secundaria. En C. Ortega, A. Hernández & J. L. Canto (Coord.), *La práctica reflexiva para la Innovación Educativa* (pp. 189–212). Red Durango de Investigadores Educativos A. C. <https://bit.ly/46akn3s>
- Figueroa, J. C., & Figueredo, M. (2022). Formación Docente del Área de Matemática en la Implementación del Nuevo Currículo en la Unidad Educativa Doctor Adolfo Blonval López. *Revista Científica CIENCLAEUDUC*, 9(1), 1–7. <https://bit.ly/455VioY>
- Font, V., Giménez, J., Zorrilla, J., Larios, V., Dehesa, N., Aubanell, A., & Benseny, A. (2012). Competencias del profesor y competencias del profesor de matemáticas: Una propuesta. En V. Font, J. Giménez, V. Larios & J. Zorrilla (Eds.), *Competencias del profesor de matemáticas de secundaria y bachillerato* (pp. 61–70). Universitat de Barcelona.
- García, M. M. (2005). La formación de profesores de matemáticas. Un campo de estudio y preocupación. *Educación Matemática*, 17(2), 153–166. <https://bit.ly/3PXwgEa>

- Goffree, F., & Oonk, W. (1999). Educating Primary School Mathematics Teachers in the Netherlands: Back to the Classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2, 207–214. <https://doi.org/10.1023/A:1009903205316>
- Gómez, P., & Cañadas, M. C. (2016). Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 19(3), 311–334. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1933>
- Huaman, R. A. (2019). *Formación del profesor de Matemática e Informática. Lineamientos de formación: Aportes a la formación integral profesional del profesor de Matemática e Informática*. [Monografía de Licenciatura en Educación Especialidad: Matemática e Informática]. Universidad Nacional de Educación. <https://bit.ly/48F28os>
- Llinares, S. (2017). La formación del docente de matemáticas. Realidades y desafíos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 13(17), 55–61. <https://bit.ly/46puO2E>
- Moreno, A., Marín, M., & Ramírez-Uclés, (2021). Errores de profesores de matemáticas en formación inicial al resolver una tarea de modelización. *PNA*, 15(2), 109–136. <https://doi.org/10.30827/pna.v15i2.20746>
- Parra, U. Y., & Breda, A. (2017). La enseñanza de o desde la resolución de problemas matemáticos: concepciones de profesores de Matemática en formación. *Acta Scientiae*, 19(2), 277–295. <https://bit.ly/46sV4JM>
- Rowland, T. (2014). The Knowledge Quartet: the genesis and application of a framework for analysing mathematics teaching and deepening teachers' mathematics knowledge. *SISYPHUS Journal of Education*, 1(3), 15–43. <https://doi.org/10.25749/sis.3705>
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–23. <https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>
- Simon, M. A. (1994). Learning Mathematics and Learning to Teach: Learning Cycles in Mathematics Teacher Education. *Educational Studies in Mathematics*, 26(1), 71–94. <https://doi.org/10.1007/BF01273301>
- Toledano, L. Y. (2022). *Resolución de problemas que impliquen la formulación y resolución de ecuaciones cuadráticas con alumnos de tercero de secundaria*. [Informe de prácticas profesionales no publicada]. Escuela Normal Superior de México.
- Zapata, M., & Blanco, L. J. (2007). Las concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje de los profesores de matemáticas en formación. *Campo Abierto*, 26(2), 83–108. <https://bit.ly/45dNzW3>

Harry Potter y la enseñanza de las matemáticas; una experiencia de gamificación en secundaria

Apolo Castañeda¹ y Ariene Lucero Hernández Huerta²

RESUMEN

Teniendo en cuenta que la enseñanza de los números con signo constituye un desafío en el estudio de las matemáticas, el propósito de este capítulo es examinar las oportunidades pedagógicas que la gamificación brinda para la comprensión de los números enteros, todo ello enmarcado en el universo de Harry Potter. Bajo el paradigma del constructivismo social y desde una perspectiva emergente, se elaboró un ambiente gamificado que integra cuatro categorías de situaciones; estas engloban el lenguaje, representación y contextualización de los números con signo. Los hallazgos indican que los estudiantes fueron capaces de asociar conceptos abstractos con escenarios concretos, evidenciando su habilidad en la interpretación lingüística, representación numérica y ejecución de operaciones aritméticas. Como conclusión, se observa que las actividades gamificadas brindan contexto y enriquecen la comprensión de conceptos matemáticos abstractos, fomentando simultáneamente el pensamiento crítico, el debate y la resolución de problemas, resaltando así la aplicabilidad de las matemáticas en escenarios cotidianos.

PALABRAS CLAVE

Gamificación, Números con signo, Secundaria, Resolución de problemas.

¹ acastane@ipn.mx

Instituto Politécnico Nacional

<https://orcid.org/0000-0002-7284-8081>

² hernandezariene_a@ensem.edu.mx

Escuela Normal Superior del Estado de México

<https://orcid.org/0009-0004-2009-7986>

ANTECEDENTES

El estudio de los números negativos en los primeros años de secundaria plantea desafíos educativos, marcados por la peculiaridad y la *percepción negativa* inherente a estos números. A menudo, los números negativos son presentados en un lenguaje que sugiere que son algo a evitar o que desafían el sentido común. Esta caracterización desafortunada puede distorsionar la comprensión que los estudiantes tienen de estos números. Esta percepción no es un fenómeno reciente; hay evidencia histórica que afirma que en los siglos XVI y XVII, matemáticos como Stifel y Cardano los catalogaban como “absurdos” o “ficticios”. De hecho, tal como lo señala Ruíz (2002), Cardano llegó a obtener números negativos en algunas ecuaciones, pero se negaba a considerarlos como números en sí mismos. De manera similar, Vieta los descartó completamente, mientras que Pascal expresaba que no tenía sentido restar 4 a 0, haciendo eco de la visión dominante de la época.

La enseñanza de los números negativos representa un reto particular en la educación, ya que estos números trascienden la experiencia cotidiana de los estudiantes, y los métodos comunes para introducirlos pueden resultar forzados o difíciles de entender. En estudios fundadores como el de Peled et al. (1989) se señala que, a diferencia de los enteros positivos, la comprensión de los números negativos no puede ser directamente derivada de la experiencia física, esto plantea la cuestión de si los niños pueden aprender números negativos sólo como un sistema formal. Aunque el uso de situaciones reales, como ganar y perder dinero, podrían parecer una forma intuitiva y relevante de enseñar los números negativos, no siempre es efectiva. Whitacre et al. (2014) argumentan que algunos problemas planteados en estos contextos pueden resolverse sin utilizar números negativos en absoluto. Este hallazgo cuestiona la eficacia de los enfoques didácticos convencionales para enseñar los números negativos, ya que las investigaciones muestran que los estudiantes a menudo enfrentan dificultades al tratar de conectar estos conceptos con los contextos propuestos y no siempre logran comprender la idea de los números negativos de una manera natural y coherente.

Por otra parte, la comprensión de los números negativos se encuentra en una tensión notable con el conocimiento previo de los números enteros, lo que genera dificultades en su entendimiento. Bofferding (2018) destaca que estas dificultades a menudo emergen como aparentes contradicciones al realizar operaciones aritméticas. Por ejemplo, en el contexto de los números naturales, los estudiantes tienden a interpretar la suma como “tener más” y la sustracción como “tener menos”. Sin embargo, en el contexto de los números enteros, estos significados pueden cambiar dependiendo del signo del entero que se suma o resta. Se pueden encontrar interpretaciones como “tener más positivo” o “tener más negativo”, y la sustracción se puede entender como “tener menos positivo” o “tener menos negativo” (Bofferding, 2014).

El desafío de comprender los números negativos va más allá de las interpretaciones de las operaciones básicas como suma y sustracción. De acuerdo con Whitacre et al. (2017), las dificultades son particularmente notables cuando los estudiantes se encuentran con comparaciones entre números negativos, contrastando con situaciones que involucran números positivos o una combinación de positivos y negativos. Bofferding y Farmer (2019) profundizan en esta idea argumentando que incluso la estructura de una pregunta puede influir profundamente en el razonamiento y las respuestas de los estudiantes. En su estudio observaron que, mientras los estudiantes podían fácilmente identificar la temperatura más alta entre tres números enteros positivos, enfrentaban obstáculos considerables al tratar de seleccionar la temperatura más fría de una mezcla de números enteros positivos y negativos.

Las dificultades y problemáticas en la enseñanza y el aprendizaje de los números negativos han llamado la atención de diversos investigadores. Estos han documentado errores característicos que los estudiantes cometen, tales como ignorar signos o tratar los números negativos como si fueran equivalentes a cero. Uno de los problemas más notables, como señala el trabajo de Peled et al. (1989), reside en la notación de los números con signo y en cómo se manejan situaciones donde se encuentran juntos los signos más y menos. En estudios más recientes, como el de Jiang et al. (2014), se ha analizado la problemática desde el punto de vista de la disposición espacial del signo negativo y el efecto que tiene en la interpretación conceptual de las operaciones.

Esto pone de relieve que una de las dificultades recurrentes en el estudio de los números negativos es la inadecuada interpretación del signo menos. A pesar de su aparente simplicidad, el signo menos puede dar lugar a múltiples errores que se prolongan en todas las áreas de las matemáticas. Un problema muy común se observa cuando los estudiantes mueven, eliminan o agregan de manera incorrecta un signo negativo, o realizan una resta cuando se indica una suma, y viceversa. Este problema puede originarse en la dualidad del signo menos, que puede denotar tanto una sustracción como un número negativo. Esta complejidad que subyace en el manejo de los números con signo refleja la necesidad de abordar con cuidado estas cuestiones en la enseñanza de las matemáticas. En las clases de secundaria es común encontrar la problemática de tener que aceptar que los números negativos son menores que cero, especialmente cuando el cero se asocia con *nada* y, por ende, los negativos son interpretados como *menos que nada*. Esta problemática ha sido documentada en trabajos como los de Bofferding y Farmer (2018), y Bofferding (2014), donde se describe el desafío que enfrentan los estudiantes al comparar números enteros a través de los conceptos *mayor que* y *menor que*. Estos conceptos, enseñados en los primeros años de

primaria, pueden verse trastocados con la introducción de los números negativos.

Los estudiantes a menudo enfrentan problemas al representar valores negativos. Por ejemplo, al resolver operaciones como $3 - 5$, pueden optar por responder “cero” o intercambiar los números y responder *dos* (Bofferding, 2010; Murray, 1985; Peled, et al., 1989). También se ha observado que los niños suelen inventar secuencias no estándares pero estables, para los números negativos, como agregar una palabra distintiva antes de pronunciar el número negativo, como *cero* (Bofferding, 2019), o incluso establecer un *cero negativo* en su secuencia de números negativos (Bofferding, 2014; Bofferding et al., 2018). Esta inclusión de elementos que no existen en el sistema numérico estándar refleja la lucha de los estudiantes por comprender la naturaleza de los números negativos y su ubicación en relación con el cero en la recta numérica.

Bofferding (2019) identifica tres aspectos cruciales que pueden guiar la enseñanza de los números enteros. Primero, es importante examinar cómo la instrucción en la interpretación de las operaciones con enteros afecta las concepciones de los estudiantes acerca del orden, el valor y los símbolos de estos números. Esto significa someter a reflexión cómo nuestra metodología de enseñanza puede transformar la forma en que los estudiantes comprenden y emplean los números enteros. Segundo, la introducción temprana de la idea de la resta, entendida especialmente como una diferencia o distancia dirigida, podría moldear favorablemente el modo en que los estudiantes se aproximan a los números enteros. Este enfoque podría no solo mejorar la comprensión, sino también conectar la resta con conceptos más avanzados. Tercero, se destaca la importancia del lenguaje utilizado en la enseñanza de las matemáticas. Una sutil alteración en la terminología, como referirse a la suma como “obtener más positivo” en lugar de simplemente “obtener más”, puede tener repercusiones profundas en la manera en que los estudiantes asimilan y aplican conceptos matemáticos. Este cuidado en el uso del lenguaje puede fortalecer su habilidad para adaptarse a formas de razonamiento más complejas a medida que progresan en su educación matemática.

Los tres aspectos previamente destacados constituyen la base conceptual para el diseño de una actividad didáctica enfocada en el estudio de los números con signo. Esta propuesta se alinea con la perspectiva didáctica sugerida por Bofferding et al. (2018), que subraya la implementación del juego como una estrategia capaz de revolucionar la enseñanza de los números negativos. A modo de ejemplo, Bofferding y Hoffman (2014) desarrollaron una reveladora investigación con estudiantes de primer grado. En ella evidenciaron que los alumnos, tras una actividad en la que debían enunciar números mientras avanzaban en un juego de mesa con casillas etiquetadas de -10 a 10 , mostraron avances notables en el conteo regresivo desde el

número 10. Este descubrimiento resalta el potencial del aprendizaje basado en juegos como instrumento eficaz para favorecer la comprensión de los números negativos en los estudiantes.

Este enfoque lúdico podría ser la clave para ayudar a los estudiantes a superar los obstáculos conceptuales que presentan los números negativos, permitiéndoles experimentar y explorar dichos conceptos en un entorno más intuitivo y menos abstracto. La combinación de estas estrategias lúdicas y un enfoque didáctico que atienda la naturaleza de los números con signo podría allanar el camino hacia una comprensión más sólida de los números enteros en los primeros años de la educación secundaria.

PLANTEAMIENTO

Este estudio propone una intervención educativa mediante la gamificación, una técnica que va más allá del uso simple de juegos, pues aprovecha las estructuras y componentes fundamentales de los juegos para enriquecer y abordar actividades didácticas (Kim, et al., 2018). Siguiendo la definición propuesta por Deterding, et al. (2011), la gamificación se define como la aplicación de elementos de juegos en contextos no lúdicos, subrayando que no es una actividad aislada, sino una estrategia integradora. La gamificación comprende una variedad de procesos sistemáticos y actividades que pueden ser adaptadas a las necesidades educativas. Este enfoque brinda una perspectiva innovadora en el estudio de los números enteros, mediante actividades que hacen la matemática más accesible y atractiva para los estudiantes.

Si bien, textos como el de Bofferding, et al. (2018) señalan que el juego permite a los estudiantes explorar y experimentar con los números, la gamificación ofrece una integración de actividades y tareas que permiten articular secuencias flexibles; esto permite que los participantes puedan elegir y personalizar sus propias rutas de acuerdo con los estilos y experiencias. Por otra parte, la retroalimentación inmediata y la autogestión en su proceso de estudio contribuyen a asumir la responsabilidad sobre sus acciones.

Kim et al. (2018) destacan que la gamificación, debido a su carácter lúdico y atractivo, incrementa la participación y el compromiso de los estudiantes en el aula. A pesar de que persiste un debate sobre la eficacia de la gamificación en la educación, diversos investigadores, incluyendo a Smith y Baker (2011), Sitzmann (2011) y Su y Cheng (2015), han evidenciado que esta estrategia puede fortalecer el rendimiento en el aprendizaje. Los beneficios no se limitan a la mejora en las habilidades de pensamiento de orden superior, conocimiento declarativo y procedimental, y rendimiento en pruebas, la gamificación también ha demostrado ser una herramienta poderosa para inducir cambios positivos en los aspectos psicológicos y de comportamiento de los estudiantes, aumentando así su motivación y compromiso, lo cual se refuerza su desempeño académico.

El objetivo de este trabajo es diseñar e implementar un conjunto de actividades en un entorno de gamificación, con el fin de apoyar la comprensión y conceptualización del signo negativo, tanto en su uso para denotar una sustracción. La estrategia se centra en fomentar una representación visual de los números negativos en la recta numérica, destacando su relación con el cero y con los números positivos. Se pretende desafiar la idea convencional de que la suma y resta siempre representan “tener más” o “tener menos”. En su lugar, el enfoque está dirigido a motivar una interpretación más rica y matizada, como “tener más positivo”, “tener más negativo”, “tener menos positivo”, y “tener menos negativo”. Adicionalmente, se busca fomentar la comparación de los números negativos entre sí y con los números positivos. Esto incluye la introducción de un lenguaje más preciso y apropiado para describir las operaciones con números negativos. De esta forma, el trabajo aspira a brindar una perspectiva más diversificada de la matemática, enriqueciendo la comprensión de los estudiantes respecto a las operaciones con números negativos.

El enfoque didáctico que se propone busca incrementar el compromiso activo de los estudiantes, sumergiéndolos en una experiencia educativa inmersiva e interactiva. Esta se basa en alcanzar objetivos específicos, tanto individualmente como en grupo (Kim, et al., 2018). Un componente clave en las estrategias de gamificación, como señalan diversos estudios, es el factor de diversión. Esto se entiende no sólo como la consecución de metas y recompensas, sino también como un estado emocional positivo que el estudiante puede experimentar durante o después de una actividad. De hecho, esta emoción placentera puede surgir de la propia experiencia, independientemente de las recompensas externas que puedan obtenerse. Lo que hace especial a la gamificación es que no se limita a ofrecer diversión, pues es ante todo, una metodología de enseñanza que potencia la motivación y que puede mejorar significativamente el rendimiento académico.

PERSPECTIVA TEÓRICA

Para el desarrollo de esta investigación se ha adoptado la teoría basada en el constructivismo social, llamada “perspectiva emergente”, la cual considera el aprendizaje como un proceso tanto individual como social, es decir, integra una base constructivista y otra interaccionista (Cobb & Yackel, 1996). El fundamento constructivista asume que el aprendizaje es un proceso en el que los estudiantes construyen activamente su conocimiento a través de la interacción con su entorno. De acuerdo con esta perspectiva, el aprendizaje no es simplemente una transmisión pasiva de información, sino que implica una serie de reorganizaciones cognitivas en la mente del estudiante. Estas reorganizaciones son autorreguladas, lo que significa que el propio estudiante está involucrado en el proceso de construcción y reconstrucción de su cono-

cimiento a medida que interactúa con nuevas ideas y experiencias. Por otra parte, el fundamento interaccionista destaca la importancia de las interacciones sociales en el proceso de aprendizaje. De acuerdo con esta perspectiva, el aprendizaje se logra en la interacción social a través de la comunicación y la colaboración con otras personas. Las interacciones sociales proporcionan oportunidades para el intercambio de ideas, la resolución conjunta de problemas y la construcción compartida de conceptos.

Sin embargo, la perspectiva emergente del constructivismo social busca ir más allá de la dicotomía del aprendizaje como un proceso puramente individual o de interacción con otras personas y el entorno. Esta perspectiva reconoce que el aprendizaje es un proceso interconectado que involucra tanto aspectos individuales como sociales, lo que significa que los estudiantes no solo adquieren conocimientos a través de su propia reflexión y construcción interna, sino que también se ven influenciados por las interacciones con otros y el contexto social en el que se encuentran. Desde este enfoque, los estudiantes son considerados como agentes activos que reorganizan su aprendizaje a medida que participan en interacciones sociales y contribuyen al contexto de aprendizaje compartido. La perspectiva emergente examina y analiza el proceso de aprendizaje de una comunidad de aula y de los individuos que la conforman. En otras palabras, este enfoque teórico proporciona una herramienta analítica que permite estudiar cómo se desarrolla el conocimiento matemático en el contexto educativo del aula. Este marco interpretativo (Cobb & Yackel, 1996) permite observar cómo los estudiantes reorganizan su conocimiento matemático a medida que participan en las interacciones sociales dentro del aula. También permite comprender cómo las normas sociales y las prácticas matemáticas en el aula influyen en el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes.

De acuerdo con Stephan y Akyuz (2012), en el marco interpretativo se identifican tres aspectos principales para analizar el aula, que integra tanto la perspectiva social referida a los procesos colectivos en el aula como la perspectiva individual, enfocada en la actividad de los estudiantes. El primer aspecto denominado *normas sociales del aula* se refiere a las creencias y expectativas compartidas sobre el papel y la naturaleza de la actividad matemática en el contexto escolar. Estas normas, producto de la interacción entre los estudiantes y con el docente, establecen ciertas condiciones y reglas implícitas o explícitas sobre cómo se debe comportar un estudiante durante las actividades matemáticas, cómo se deben abordar los problemas, cómo se deben plantear las preguntas y cómo deben interactuar entre ellos. Estas normas pueden variar y están influenciadas por factores como la cultura del aula, la dinámica del grupo y el estilo de enseñanza del maestro.

Las normas sociales del aula también pueden influir en la percepción de los estudiantes respecto a su capacidad matemática y su participación en

las actividades. Si un estudiante percibe que el aula valora la participación activa y el esfuerzo en lugar de solo el resultado final, es más probable que se sienta cómodo tomando riesgos y expresando sus ideas, incluso si comete errores. El análisis de las normas sociales del aula es importante para comprender cómo estas influyen en el aprendizaje matemático de los estudiantes. Cuando se tiene en cuenta la dimensión social del aula se pueden identificar patrones y dinámicas que afectan la forma en que los estudiantes interactúan con el contenido matemático y entre sí. Además, considerar las normas sociales puede proporcionar información valiosa para el diseño de estrategias de enseñanza y apoyo para promover un ambiente de aprendizaje más inclusivo y efectivo para todos los estudiantes.

El segundo aspecto se refiere a las *normas sociomatemáticas*, que se refiere a las creencias y valores que los estudiantes tienen sobre las matemáticas, así como las formas aceptadas de razonar y argumentar en el contexto matemático. En el aula, los estudiantes desarrollan estas normas sociomatemáticas a medida que participan en discusiones matemáticas, resuelven problemas y colaboran con sus compañeros. Estas normas pueden incluir creencias sobre la importancia de comprender los conceptos matemáticos en lugar de memorizar fórmulas, la relevancia de la precisión en los cálculos, o la valoración del pensamiento crítico y la creatividad en la resolución de problemas. Además, éstas pueden variar culturalmente y estar influenciadas por el contexto educativo y social en el que se encuentre el aula. Por ejemplo, en ciertas culturas puede haber una mayor valoración del esfuerzo y la perseverancia en el aprendizaje de las matemáticas, mientras que en otras el énfasis puede estar en la rapidez y la eficiencia en la resolución de problemas. El análisis de las normas sociomatemáticas en el aula es relevante porque puede ayudar a los educadores a entender cómo las creencias y valores de los estudiantes sobre las matemáticas afectan su aprendizaje y rendimiento académico. Al tener en cuenta estas normas, los maestros pueden adaptar sus estrategias de enseñanza para abordar las percepciones erróneas o fomentar una cultura matemática más positiva y motivadora.

El tercer aspecto corresponde a las *prácticas matemáticas del aula*, que se refiere a las formas comunes de razonar y argumentar matemáticamente, desarrolladas y compartidas en el contexto del aula. Representan las estrategias y enfoques que los estudiantes y el profesor utilizan para abordar situaciones y problemas matemáticos. Las prácticas matemáticas del aula son el resultado de las interacciones entre el maestro y los estudiantes, así como de las discusiones y actividades matemáticas que ocurren en el entorno educativo. Estas prácticas pueden evolucionar y cambiar a medida que los estudiantes adquieren nuevos conocimientos y experiencias, que también pueden estar influenciadas por las creencias y valores sobre las matemáticas que prevalecen en el aula. El análisis de las prácticas matemáticas del aula es relevante porque

permite comprender cómo los estudiantes interactúan con los conceptos matemáticos y cómo aplican sus conocimientos en diferentes situaciones. Además, puede ayudar a identificar patrones y tendencias en el razonamiento matemático de los estudiantes, lo que puede proporcionar información valiosa para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

MÉTODOS Y MATERIALES

La gamificación

El diseño instruccional que se presenta en este trabajo adopta el enfoque de gamificación. Se trata de un modelo de actividad que propone el desarrollo y articulación de experiencias basadas en juegos para su implementación en diversos contextos. En el ámbito educativo, el diseño busca propiciar el desarrollo de ideas y conceptos a través de un modelo de actividad e interacción, tanto individual como colectivamente, a partir de la resolución de problemas, tareas, desafíos, entre otros. Una de las características principales de la gamificación es su diseño estructurado entre las actividades, los procesos, las recompensas, la retroalimentación y las metas. Por esta razón, la gamificación es vista como un sistema o ambiente en el que se establecen las condiciones, reglas y beneficios a la vez que los estudiantes verifican su progreso a cada paso.

A pesar de que existen desacuerdos acerca de la efectividad general de la gamificación en el aprendizaje y la educación (Kim et al., 2018), hay también evidencia creciente que respalda sus aportes. Investigaciones llevadas a cabo por Su y Cheng (2015), y otros, encontraron una correlación positiva entre la gamificación y la mejora en diversos aspectos del aprendizaje. Esto incluye el fortalecimiento de habilidades de pensamiento de orden superior, el aumento en el conocimiento declarativo y procedimental, y una mejora en el rendimiento en las pruebas. Cuando se compara con los métodos de enseñanza tradicionales, la gamificación ha demostrado promover un mejor desempeño entre los estudiantes, tal como se evidencia en el estudio de Morris et al. (2013).

Diversos expertos han propuesto marcos y enfoques para entender y aplicar la gamificación. Zichermann y Cunningham (2011) introdujeron el marco MDA (Mecánica, Dinámica, Estética) para describir la estructura y experiencia de juego. En este marco, la mecánica se refiere a los componentes y reglas implementados en un juego, a menudo definidos por datos y algoritmos. La dinámica, por otro lado, aborda cómo los jugadores interactúan con estas mecánicas y cuáles son los comportamientos observables durante el juego. Finalmente, la estética engloba las emociones y sentimientos que los participantes experimentan al jugar, con elementos como la narrativa, el desafío y el descubrimiento los cuales tienen un papel fundamental en esta experiencia. Werbach y Hunter (2012) presentaron un enfoque ligera-

mente diferente, aunque relacionado; estos autores dividieron la gamificación en dinámica, mecánica y componentes. Vieron la dinámica como un concepto más abstracto que podría compararse con las metas y objetivos de una organización. La mecánica, similar a la definición anterior, trata sobre cómo involucrar a los jugadores y guiar sus comportamientos. Los componentes son elementos tangibles, como logros, avatares e insignias, que son fundamentales para la implementación de la dinámica y la mecánica. Bunchball (2016) simplificó aún más el panorama al centrarse solo en dinámica y mecánica. Su interpretación de la dinámica se centró en la experiencia general del jugador, mientras que la mecánica se refería a los elementos de gamificación esenciales para proporcionar esa experiencia. Schell (2014) aportó una visión más amplia al identificar cuatro elementos esenciales del juego: historia, mecanismo, tecnología y estética. En este contexto, el mecanismo y la estética tienen connotaciones similares a las mencionadas anteriormente. Sin embargo, Schell añadió la “tecnología” como el conjunto de herramientas y materiales necesarios para crear un juego, y la “historia” como el hilo narrativo, presente en muchos juegos.

Aunque cada perspectiva tiene su enfoque y terminología, todas estas visiones convergen en que la gamificación se caracteriza por la mecánica, dinámica y estética, junto con componentes adicionales como la historia y la tecnología. Esta amalgama de aspectos proporciona un marco para describir los componentes fundamentales de la gamificación, que se integran para formular una experiencia de juego envolvente, que guía las acciones de los jugadores, los involucra en las tareas y promueve en ellos una respuesta emocional en una variedad de contextos y situaciones.

Diseño del entorno de gamificación

Para el diseño del contexto de gamificación se emplearon las dimensiones previamente detalladas. Para la dimensión estética, la cual abarca la apariencia, la ambientación, y la experiencia emocional, se seleccionó el mundo ficticio de Harry Potter como base; fue una elección guiada por la afinidad que los estudiantes participantes habían demostrado hacia la historia de esta famosa serie. La historia de Harry Potter, creada por J.K. Rowling, sigue las aventuras del joven mago Harry Potter y sus amigos Hermione Granger y Ron Weasley, todos estudiantes en el Colegio Hogwarts de Magia y Hechicería. La trama principal se centra en la lucha de Harry contra Lord Voldemort, un mago tenebroso que busca conquistar el mundo mágico. A lo largo de la serie, Harry descubre su destino, enfrenta numerosos desafíos y aprende sobre amistad, coraje y el poder del amor.

Mediante el uso de su rica iconografía y simbolismo se buscó sumergir a los jugadores en una atmósfera gótica llena de magia y misterio, con el objetivo de crear una experiencia visual y sensorialmente atractiva. La narrativa de

Harry Potter, repleta de aventuras, misterios y personajes complejos, fue utilizada como fuente de inspiración, con el propósito de motivar a los participantes a explorar e involucrarse activamente en el estudio de los números con signo. Asimismo, los temas centrales de Harry Potter, como la lucha entre el bien y el mal, la amistad y el coraje, fueron integrados para fomentar una conexión emocional con el juego, lo que podría potenciar la motivación y el compromiso de los jugadores.

Para incorporar la historia de Harry Potter en un ambiente de gamificación, se diseñó un mapa donde se representan los principales lugares del mundo mágico de Harry Potter, cada uno identificado con una letra y un color distintivo (amarillo, verde, rojo, azul). Estos sitios están interconectados mediante líneas, indicando diferentes trayectorias que los jugadores pueden seguir. Cada ubicación en el mundo mágico tiene una correspondencia directa con un espacio físico en la escuela donde se llevó a cabo la experiencia. Por ejemplo, la estación “El árbol boxeador” en el mapa del mundo de Harry Potter está vinculado al “Árbol ubicado junto a los bebederos” en la escuela secundaria. Se establecieron un total de 24 sitios, a los que se denominaron “estaciones”, cada uno fue señalado físicamente en la escuela con un letrero que indicaba el nombre correspondiente en el mundo mágico de Harry Potter. El elemento de “la historia”, que se refiere a la narrativa y la trama del juego, tienen un papel crucial en esta experiencia de gamificación. Los estudiantes deben avanzar por diversas rutas trazadas en el mapa, enfrentando tareas específicas en cada estación. Las rutas son variadas y ofrecen diferentes recorridos, pero los estudiantes deben seguir una regla esencial: no pueden repetir una estación ni regresar en el mapa (Figura 1). La mayoría de estas tareas están vinculadas a desafíos matemáticos, mientras que otras introducen elementos del mundo mágico, creando así un entorno enriquecido y atractivo que combina el estudio de las matemáticas con la fantasía.

Figura 1

Diseño del mapa



Los estudiantes debían abordar todos los retos de forma colectiva y cumplir con las tareas especificadas reportando sus resultados en un papel impreso diseñado para ese propósito. Una vez completada la actividad, los estudiantes debían presentar su trabajo en el *Potions Classroom*, a cargo del profesor *Snape*, representado por el profesor que dirigió la experiencia y autor de este artículo. Allí, los estudiantes recibían dinero ficticio, denominado “Radianes”, como pago por su actividad. La cantidad otorgada variaba según la complejidad de la actividad, el tipo (ya sea matemática o no) y la calidad del trabajo entregado. Para llevar a cabo esta parte del juego, se diseñaron e imprimieron billetes ficticios del “Banco de historia de las matemáticas”, con denominaciones de 10, 20, 50, 100 y 500 radianes.

Estos billetes ficticios (Figura 2), además de que funcionaban como incentivo y recompensa dentro del juego, podían ser utilizados por los estudiantes para adquirir el papel necesario para realizar sus tareas, pues no estaba permitido usar papel *muggle* (papel ordinario), así como otros insumos reales requeridos en las diversas estaciones, tales como pegamento, lápices de color, cinta adhesiva, plumas y marcadores. Estos artículos estaban disponibles para su compra en el aula *Potions Classroom*. El dinero ficticio también podía ser utilizado para adquirir un mapa opcional al final del recorrido con cinco estaciones. Aquellos estudiantes que optaban por comprarlo obtenían acceso a estaciones especiales donde enfrentaban desafíos más complejos y recibían recompensas físicas más valiosas, como botones conmemorativos y objetos diversos.

Figura 2

Diseño de billetes ficticios



La mecánica, que aborda las reglas y procedimientos específicos que orientan al jugador y al juego, se definieron de la siguiente manera. Como

mencionamos anteriormente, los sitios en el mapa se distinguieron por colores que son representativos de las cuatro casas de estudiantes de Hogwarts. Estos colores, a su vez, se relacionaron con distintos tipos de tareas basadas en estudios sobre la enseñanza de los números con signo. El color amarillo se vinculó con tareas que involucran comparaciones entre números negativos o una mezcla de positivos y negativos (Bofferding & Farmer, 2018). El azul se enfocó en actividades de operaciones con números negativos, como “tener más o menos negativo” (Bofferding, 2014). El verde se asoció a situaciones que presentan signos positivos y negativos juntos, considerando también su distribución espacial (Jiang et al., 2014). Por último, el rojo se relacionó con el estudio de las diferencias y la resta en el contexto de los números enteros, así como en el uso de metáforas y modelos para explicar estos conceptos (Kilhamn, 2018).

En el aula *Potions Classroom* se colocaron cinco ficheros con tarjetas. Los primeros cuatro, de colores amarillo, verde, rojo y azul, contenían tarjetas con problemas matemáticos vinculados a su respectivo color. Por ejemplo, las tarjetas azules planteaban cuestiones como: “Los estudiantes de Gryffindor ganaron y perdieron puntos por sus logros académicos y deportivos. ¿Quiénes acumularon más puntos positivos o negativos?”. El quinto fichero, de color blanco, contenía tarjetas con un código formado por una letra del alfabeto y un número del 1 al 5. Este código correspondía a una tarea o problema específico en una matriz de 5x5 ubicada en la estación del mapa-escuela. Así, cada tarjeta de color presentaba un contexto o situación que se combinaba con una de las 25 tareas posibles. Relacionado con el problema de la tarjeta azul, algunas de estas 25 tareas eran: a) comparar puntuaciones de diferentes días usando tablas, b) seguir el progreso semanal de puntos en una línea numérica, y c) resolver problemas vinculados a las puntuaciones. Los estudiantes tenían la opción de cambiar la tarea asignada por otra en la matriz, pero esto tenía un costo adicional que variaba según la actividad.

En ciertas estaciones (Figura 3) se presentaron desafíos específicos vinculados al tema de los números con signo. Estas actividades, aunque opcionales, brindaban la oportunidad de ganar dinero adicional o recibir una insignia especial. La insignia se materializaba en una medalla de chocolate, adornada con iconografía que reflejaba el contexto y los elementos característicos de la gamificación. Finalmente, respecto a la dimensión tecnológica, referida a las herramientas y recursos, en esta experiencia de gamificación únicamente se emplearon recursos impresos e insumos de papelería.

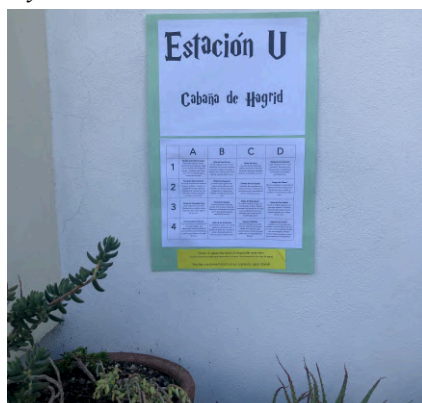
Integración de las actividades matemáticas

En la experiencia de gamificación se definieron cuatro situaciones para abordar el estudio de los números con signo, asociándolos con los colores de

los emblemas de las casas de estudiantes del mundo mágico de Harry Potter. La primera situación se planteó teniendo en cuenta los aportes de Bofferding y Farmer (2018), quienes enfatizan la influencia determinante del lenguaje en el significado de los números con signo; por ejemplo, términos como “más caliente” o “más frío” pueden afectar su interpretación. Estos autores sugieren utilizar contextos reales y familiares, como las temperaturas o deudas, para ayudar a los estudiantes a relacionar conceptos abstractos con experiencias prácticas. Recomiendan un enfoque en comparaciones graduales, comenzando con comparaciones dentro de un ámbito específico y luego transitando a comparaciones mixtas. Además, subrayan la importancia de una terminología clara, con una cuidadosa elección de palabras, y proponen actividades de clasificación en las que los estudiantes agrupen números en categorías como “positivo” o “negativo”, empleando términos contextualmente relevantes.

Figura 3

Disposición de estaciones y actividades



El uso de rectas numéricas y diagramas para visualizar los números, especialmente en combinación con el lenguaje pertinente y la exploración de comparaciones compuestas —como trabajar con expresiones como “más frío” y “menos caliente” en diversos contextos—, se sugieren como medios eficaces. Finalmente, el diseño de preguntas reflexivas que pidan a los estudiantes explicar su razonamiento es una estrategia valiosa para fomentar una comprensión más profunda.

La segunda situación se planteó teniendo en cuenta los aportes de Bofferding (2014), quien destaca que la introducción de los números negativos a menudo entra en conflicto con la comprensión de los números no negativos, creando dificultades al resolver operaciones como $-5 + (-3)$. Este conflicto surge, en parte, debido a la ambigüedad del símbolo “-”, que puede interpretarse de tres maneras diferentes: como un signo negativo (unario),

una resta (binario) o un opuesto (simétrico). Bofferding aborda en su investigación dos modelos clave para enseñar números negativos: el modelo de cancelación y el modelo de línea numérica; y destaca sus fortalezas y debilidades particulares en términos de cómo enfatizan el orden, la magnitud dirigida, y la notación. Además, propone diversas actividades diseñadas para fortalecer la comprensión de los números con signo, entre las que se encuentra el conteo regresivo, que guía a los estudiantes a través de una secuencia verbal decreciente, fundamental para entender los números negativos. El relleno de la recta numérica, que ayuda a determinar cómo los estudiantes ordenan los enteros; el ordenamiento de enteros y la comparación de valores para identificar el número mayor o menor; y, finalmente, la exploración de la dirección y magnitud para entender cómo los estudiantes interpretan movimientos ascendentes o descendentes en el contexto de los números enteros.

Para la tercera situación se consideraron los aportes de Jiang et al. (2014). En este trabajo destaca la presentación y distribución espacial de los signos positivos y negativos en operaciones aritméticas, especialmente en operaciones que combinan suma y resta de números con signo, los cuales juegan un papel crucial en la comprensión y resolución de los problemas. Este estudio señaló que el espaciado y la posición de los signos pueden influir en cómo se agrupan los términos en el proceso mental del individuo. Por ejemplo, un espaciado cercano podría proteger contra errores comunes, como resolver simplemente de izquierda a derecha, olvidando la precedencia de las operaciones. Adicionalmente, una manipulación espacial incorrecta podría activar erróneamente el concepto de números negativos en ciertos contextos, especialmente cuando se presenta un signo negativo cerca de otro número, sugiriendo que podría tratarse de un número con signo en lugar de una operación de resta. Estos hallazgos subrayan la importancia de cómo se presentan y se enseñan las operaciones aritméticas, reforzando la idea de que la claridad en la presentación es esencial para una interpretación y resolución correcta de problemas matemáticos que involucren números con signo.

La cuarta situación se basó en los aportes de Kilhamn (2018). En esta investigación se destaca la importancia de la idea de diferencia en el contexto de las operaciones con números con signo, particularmente, la enseñanza y comprensión de la diferencia en la resta de números enteros se presentan como un desafío por las múltiples interpretaciones y metáforas que pueden surgir. La investigación subraya la necesidad de distinguir entre la magnitud y la dirección de los números negativos y de utilizar un lenguaje apropiado que permita una comprensión clara de estos conceptos. Además, se enfatiza el uso y control de las metáforas en la enseñanza. Si bien las metáforas como “tomar una deuda” pueden ser útiles, también pueden ser confusas si no se comparten y entienden plenamente. La investigación también aborda

la conexión entre sustracción y adición y cómo se pueden representar estas operaciones mediante diferentes metáforas, como movimientos a lo largo de un camino o colecciones de objetos. Se resalta la necesidad de una comprensión de la suma de enteros, incluyendo el número cero, para entender la sustracción como diferencia. La reflexión que aporta esta investigación propone clarificar las metáforas y la terminología, especialmente cuando se trata de la idea de diferencia. El uso de modelos concretos, como la recta numérica o representaciones con objetos, puede ser útil para conectar la sustracción y la adición. También se pueden utilizar modelos imaginativos, como comparaciones económicas (deudas y ganancias), así como explorar diferentes metáforas para explicar la sustracción y adición, como movimientos a lo largo de un camino.

Participantes

La actividad de gamificación se implementó con estudiantes de primer grado de secundaria en un entorno urbano, a lo largo de cinco sesiones de una hora cada una. Previo al inicio de esta actividad se ofreció una sesión introductoria de los números con signo a través del modelo de temperaturas. En esta sesión, los estudiantes se enfrentaron a situaciones prácticas que involucraban variaciones de temperatura, permitiéndoles aplicar y contextualizar sus ideas. Con el objetivo de familiarizar aún más a los estudiantes con el mágico mundo de Harry Potter y preparar el terreno para la actividad, se organizó una sesión de cine semanas antes de la gamificación. Durante esta proyección se hicieron pausas estratégicas para discutir ciertos fragmentos de las películas que tenían una relación implícita o explícita con conceptos matemáticos, generando así un puente entre el entretenimiento y el aprendizaje.

Categorías de análisis

Esta investigación se centra en el análisis de cuatro aspectos cruciales de la gamificación, organizados en distintas categorías, con un enfoque particular en la educación matemática.

Normas sociales. Esta primera categoría examina cómo se desarrollan y establecen nuevas normas sociales dentro del aula bajo la influencia de la gamificación. Esto incluye las expectativas sobre la colaboración entre estudiantes, como en un juego cooperativo, y cómo deben enfrentarse los desafíos y misiones. Comprender cómo la gamificación puede alterar o crear normas sociales ayuda a los docentes a estructurar y ajustar las dinámicas de juego para optimizar la experiencia de aprendizaje.

Normas sociomatemáticas. Esta categoría se enfoca en analizar cómo la gamificación puede afectar las creencias y valores de los estudiantes respecto a las matemáticas. Las normas sociomatemáticas se refieren a las expectativas y normas específicas que se relacionan con la discusión y el aprendizaje de

las matemáticas en un contexto social. En otras palabras, estas normas dictan cómo se espera que los estudiantes se comporten, interactúen y comprendan el contenido matemático en el aula.

Prácticas matemáticas. La tercera categoría explora cómo la gamificación puede transformar la forma en que estudiantes y docentes abordan y resuelven problemas matemáticos al introducir métodos, estrategias y herramientas lúdicas innovadoras. Este análisis va más allá de la simple implementación, observando cómo estas prácticas se desarrollan y evolucionan con la integración de la gamificación. Además, ofrece una perspectiva única sobre cómo los juegos pueden enriquecer el aprendizaje matemático, fomentando habilidades como el pensamiento crítico, la creatividad y la colaboración.

Actividades matemáticas. La cuarta categoría se centra en el diseño e implementación de actividades matemáticas dentro del marco de la gamificación, utilizando cuatro situaciones específicas como referencia para el estudio de los números con signo.

Procedimiento para la obtención de datos

La información fue recopilada a partir de las hojas de trabajo que los estudiantes entregaron en cada estación. Cinco profesores en formación (alumnos de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, de sexto semestre) participaron como colaboradores y desempeñaron un papel activo en este proceso, registrando observaciones detalladas en diversas estaciones; sus registros incluyeron descripciones libres y reflexivas sobre la organización de los estudiantes, proporcionando una visión más amplia sobre la dinámica observada en el aula. Las notas recogidas por los profesores colaboradores fueron variadas y exhaustivas, abarcando desde la disposición de los estudiantes en sus grupos hasta las interacciones y comportamientos individuales. Además, se prestó especial atención a las estrategias de trabajo en equipo, la colaboración y la comunicación entre los estudiantes, así como la forma en que los diferentes grupos abordaron y resolvieron los desafíos presentados en cada estación. Al finalizar la actividad, se llevó a cabo una serie de entrevistas en formato libre con varios equipos de trabajo. Estas entrevistas se implementaron para obtener una comprensión más profunda de las opiniones de los estudiantes sobre la actividad, su percepción de la dinámica y el flujo de esta, así como su satisfacción con la experiencia de aprendizaje en general. Los cuestionamientos estuvieron orientados a descubrir cómo los estudiantes integraron los conceptos aprendidos y cómo se sintieron respecto a las metodologías empleadas.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

La gamificación en la enseñanza destaca por permitir trayectorias flexibles para los estudiantes. En esta dinámica, los equipos tuvieron autonomía para

elegir sus rutas y tareas, generando progresos diversificados. No se exigió que completaran todas las estaciones del mapa, lo que enriqueció la variedad de experiencias y desenlaces. En este marco, cada equipo aportó evidencias particulares, adaptadas al itinerario y tarea seleccionados. A continuación, analizamos episodios específicos de estos trayectos.

Construcción y reorganización de normas sociales. Las normas sociales dentro del aula configuran las dinámicas de interacción y comportamiento entre los estudiantes. Sin embargo, con la inclusión de la gamificación en el proceso educativo estas normas experimentan una transformación significativa, adaptándose a las mecánicas y dinámicas propias de los juegos. Al trasladar el estudio de números con signo a un entorno gamificado, los estudiantes dejaron de ser meros receptores pasivos del conocimiento para convertirse en jugadores activos, colaborando, compitiendo y trabajando juntos hacia un objetivo común.

Consideremos como ejemplo la actividad titulada “La Batalla de los Horrocruxes Numéricos”. En ella, los estudiantes debían encontrar al menos dos objetos que contenían un valor numérico, ya fuese positivo o negativo. Estos objetos, ocultos cerca de la estación, se encontraban dentro de cajas de papel. Para descubrir su valor, los estudiantes tenían que romper la caja y obtener así el objeto. El desafío consistía en combinar los Horrocruxes de manera que la suma de sus valores resultara en cero, neutralizando su poder y, con ello, derrotando a Voldemort. La tarea de los estudiantes implicaba buscar rápidamente las piezas (representadas por cartones impresos al estilo rompecabezas), sumarlas y asegurarse de que el resultado fuese cero. En esta actividad se observaron las siguientes características en el comportamiento de los estudiantes. Colaboración. Lo que empezó como una competencia se convirtió en una actividad colaborativa, redefiniendo la norma de “cada uno por sí mismo” a “todos trabajamos juntos”. Los integrantes mostraron interés por lograr un resultado correcto para poder avanzar en el mapa, se ayudaron mutuamente a revisar el resultado, compartieron sus conocimientos sobre los números y eligieron entre todos, el orden conveniente para pegar los objetos en su hoja de reporte. Retroalimentación. Los estudiantes mostraron interés por la retroalimentación de sus resultados y en algunos casos solicitaron al docente una explicación de sus errores. Colaboración. Se observó que algunos estudiantes compartían sus experiencias con otros equipos señalando el sentido de las actividades matemáticas a fin de agilizar sus tareas. Búsqueda de regularidades. Los estudiantes debían enfrentar entre cinco y diez actividades muy similares a lo largo del mapa, todas ellas con el mismo principio o actividad matemática. Esto generó un interés por identificar “el tipo de reto matemático a resolver” o “la idea matemática que se plantea”, así fue posible escuchar expresiones como ... *esta actividad es igual... ...sumar positivos y negativos para obtener cero...*

Las normas sociomatemáticas son esenciales para guiar la interpretación, discusión y validación de conceptos matemáticos entre los estudiantes dentro del aula. En el contexto de la gamificación, estas normas adquieren un enfoque particular, influenciado por las dinámicas, recompensas y desafíos específicos de las actividades lúdicas. Un claro ejemplo de esto es la actividad “La Competencia de las Branquialgas”. Al llegar a la estación, los estudiantes reciben un cómic que relata una competencia en la que los participantes se sumergen en el Lago Negro utilizando Branquialgas. A medida que avanzan las escenas, los estudiantes descubren que un participante falta, y se les pide completar esa parte de la historia. Se les entrega un dado con números positivos y otro con números negativos que usarán para determinar los movimientos del participante que añadirán. El cómic relata diversas situaciones: Harry se sumerge 10 metros pero luego asciende 5 metros; Hermione desciende 15 metros y luego se eleva hasta una posición de -5 m; Ron baja 18 metros y luego sube 8, y Draco se sumerge 20 metros y luego baja 5 metros más. El desafío para los estudiantes es lanzar los dados y, basándose en los resultados, describir los movimientos del último participante. La conceptualización de números con signo es a menudo desafiante, ya que la noción de números “negativos” puede no ser inmediatamente intuitiva. Sin embargo, al situar estos conceptos en el contexto de una competencia de buceo en el mundo de Harry Potter, se logra que los estudiantes visualicen y contextualicen los movimientos ascendentes y descendentes en el cómic. Por ejemplo, si un personaje se sumerge 5 metros y luego asciende 3 metros, los estudiantes pueden visualizar que termina a 2 metros bajo el agua, es decir, a “ -2 ” en la notación matemática. Durante la actividad se observó que los estudiantes no tuvieron dificultades en relacionar el sentido de los números con las profundidades en el lago. En la resolución de problemas de manera cooperativa, los estudiantes se involucraron en la justificación y comunicación de sus razonamientos a partir de las situaciones analizadas. Cuando las prácticas matemáticas se integran en el ámbito de la gamificación, se transforman y se adecuan a las dinámicas y particularidades de los juegos educativos. En este contexto trascienden su papel de meras técnicas resolutivas para convertirse en mecánicas esenciales del aprendizaje lúdico. Un claro ejemplo de ello es “El duelo mágico de los números”. En esta actividad, los estudiantes llegan a una estación y se les proporcionan dos mazos de cartas mágicas. El primer mazo contiene encantamientos y pociones, cada uno con un valor numérico, ya sea positivo (para encantamientos) o negativo (para pociones). El segundo mazo presenta cartas del mago Dumbledore, donde cada carta propone una operación matemática. La misión de los estudiantes es combinar adecuadamente las cartas para que la suma total de los poderes mágicos sea cero, identificado como el punto de equilibrio mágico. Sin embargo, no basta con alcanzar este equilibrio; los estudiantes también

deben justificar sus combinaciones usando razonamiento matemático, pero enmarcado en el universo mágico. Por ejemplo, una de las cartas de Dumbledore que los estudiantes podrían extraer es el encantamiento "Expelliarmus", que lleva asociado un valor de +5. Esto indica que han aumentado su poder mágico en 5 unidades. Del mazo de pociones, podrían seleccionar la "Poción del Sueño Profundo" con un valor de -4, reduciendo el poder mágico de su oponente. No obstante, para lograr neutralizar completamente el poder, necesitarían incorporar la "Poción Crece-huesos" de valor -1. Esta actividad generó, entre los estudiantes, preguntas como: ¿por qué ciertos encantamientos o pociones tienen valores más altos que otros? Estas discusiones sirvieron para consolidar la idea de qué significa ser más potente, ya sea en términos positivos o negativos. Además, se incentivó a los estudiantes a comparar distintos encantamientos y pociones basándose en su "poder mágico", introduciendo así preguntas reflexivas como: ¿Qué combinación de encantamientos y pociones resultaría en un duelo equilibrado? o ¿Qué encantamiento o poción actuaría como el contrapeso perfecto para otro? Con actividades como esta, las prácticas matemáticas del aula se vuelven experiencias vivenciales, incentivando a los estudiantes a razonar y aplicar conceptos matemáticos a partir del contexto.

En la siguiente parte se analizarán los resultados de la experiencia de gamificación desde el dominio matemático. Respecto al aporte de Bofferding y Farmer (2018), quienes destacan la relevancia del lenguaje en la comprensión de los negativos, y recomiendan utilizar contextos tangibles, un lenguaje preciso para vincular conceptos matemáticos abstractos con escenarios reales. Una actividad representativa en este dominio fue "La Temperatura en el Callejón Diagon". *En este icónico callejón, las temperaturas son notablemente cambiantes debido a tiendas que venden productos mágicos con capacidad para influir en el clima. En Gringotts, el banco de magos, se tiene una pizarra mágica donde se registran diariamente estas variaciones.* En la estación se proporcionó a los estudiantes un registro de las temperaturas del día anterior, acompañado de expresiones descriptivas del día en curso, tales como "más caliente que ayer" o "más frío que el día anterior". Los estudiantes debían clasificar estas temperaturas utilizando una recta numérica y posteriormente debatir y justificar la interpretación de las expresiones y la elección de números para representarlas. Las respuestas evidenciaron que los estudiantes vinculaban conceptos abstractos, como los números con signo, a situaciones cotidianas, como las variaciones de temperatura. Asimismo, tradujeron términos cotidianos tales como "más caliente" o "más frío" y los representaron en distintos formatos. Finalmente, de manera intuitiva, categorizaron las temperaturas como "positivas" o "negativas".

La segunda situación, basada en Bofferding (2014), subraya las dificultades que surgen al introducir números negativos, especialmente por la

confusión que el símbolo “-” puede generar entre los estudiantes debido a su ambigüedad. Bofferding propone distintos modelos y actividades pedagógicas, tales como el modelo de cancelación y la línea numérica. Estas estrategias buscan potenciar la comprensión de los números con signo, centrándose en conceptos clave como el orden, la magnitud y la notación. Una actividad que ilustra este tipo de actividades fue “Las Deudas de Las Tres Escobas”. Se situada en el contexto del bar “Las Tres Escobas”, donde los estudiantes de Hogwarts tenían deudas pendientes o pagos efectuados por adelantado. En la estación se les presentó a los estudiantes diversas situaciones que detallaban las deudas y pagos de diversos clientes; se empleó una línea numérica para representar estos montos, identificando así los números como positivos o negativos. Esta representación les permitió explorar el concepto de cancelación de deudas, comprendiendo cómo avanzar o retroceder en la línea refleja el acto de pagar o acumular una deuda. Los estudiantes supieron usar la línea numérica para reflejar números tanto positivos como negativos, reconociendo que, independientemente del signo, la distancia al cero determina la magnitud del número. Además, discernieron el orden inherente de los números enteros y utilizaron la línea para realizar operaciones aritméticas, asociando la suma con un movimiento hacia la derecha y la resta hacia la izquierda. A través de esta actividad emergió una comprensión más profunda sobre la magnitud y dirección de un número, y los estudiantes pudieron distinguir el uso del símbolo “-”, diferenciando entre su rol en números negativos y en operaciones de resta.

La tercera situación se basa en el estudio de Jiang et al. (2014), el cual examina la influencia de la presentación y distribución espacial de los signos positivos y negativos en la comprensión y solución de operaciones aritméticas. El estudio subraya cómo la ubicación y el espaciado de estos signos moldean nuestra interpretación mental. Asimismo, enfatiza la importancia de una presentación diversificada del signo en diferentes contexto o situaciones, distinguiendo sus significados. Una actividad representativa de esta tercera situación es “La Lista de Pociones de Snape”. El profesor Snape entregó a los estudiantes una lista de ingredientes para elaborar una poción. Algunos ingredientes debían ser añadidos, mientras que otros debían ser retirados. A los estudiantes se les presentó una serie de operaciones matemáticas que detallaban la suma y resta de estos ingredientes. La disposición adecuada de los signos y su espaciado resultaron esenciales para determinar correctamente qué cantidad de cada ingrediente se debía incorporar o sustraer. Posteriormente, se les solicitó reflexionar y dialogar sobre cómo la configuración de los signos influenciaba su comprensión, y a resolver problemas relacionados con la preparación de las pociones.

La cuarta situación se fundamenta en el estudio de Kilhamn (2018). Esta investigación destaca la importancia de entender la noción de “diferencia”

cuando se trabaja con operaciones que involucran números con signo. Kilhamn enfatiza la necesidad de un lenguaje claro y el uso adecuado de metáforas en el proceso de enseñanza; además de que es crucial diferenciar entre la magnitud y la dirección de los números negativos. Es recomendable emplear herramientas didácticas, como la recta numérica, para potenciar la comprensión de operaciones como la suma y resta de números enteros. Una actividad representativa de esta cuarta situación es “La Balanza de Gringotts”. *En el Banco de Gringotts, ubicado en el Callejón Diagon, los duendes manejan con meticulosidad las transacciones y saldos de cada cuenta; estas tienen un saldo inicial, y en ocasiones se efectúan transacciones especiales que implican valores negativos, resultado de deudas o compras.* A los estudiantes se les entregó un registro detallado de tres estados de cuenta pertenecientes a Fred, uno inicial y dos subsecuentes de cada mes. Cada uno refleja diversos depósitos (valores positivos) y adeudos (valores negativos). Utilizando la recta numérica mágica, los alumnos determinaron el saldo total tras cada operación, representando visualmente cada transacción. Se introdujo el término “deuda mágica”, referida a que, si adquieren una poción de alto costo sin tener suficientes Galeones, la diferencia se traduce en una deuda con Gringotts, manifestada como un número negativo en el estado de cuenta. El reto era identificar la cantidad necesaria para liquidar las deudas y restaurar un balance positivo. Como ejemplo, uno de los estados de cuenta mostraba:

Saldo inicial: 10 galeones

Compra de ingredientes para pociones: -15 galeones

Recompensa por hallar una rana de chocolate extraviada: +5 galeones

Multa por volar en escoba en zonas restringidas: -7 galeones

¿Cuál es el saldo tras todas las operaciones?

Tras diversas transacciones, los estudiantes reflexionaron sobre la administración financiera y el impacto de los números negativos (deudas) en el saldo total. Se discutieron estrategias para mantener a Fred en números negros y se evaluaron las implicaciones emocionales y prácticas de tener deudas, además de cómo planificar sus finanzas.

CONCLUSIONES

La gamificación en el contexto educativo ha ganado notoriedad por su capacidad para involucrar y motivar a los estudiantes en su aprendizaje. En este estudio abordamos la potencialidad de dicho enfoque al estudiar conceptos matemáticos, particularmente los números con signo, a través de actividades enmarcadas en el universo de Harry Potter. Históricamente, el aprendizaje de conceptos matemáticos ha presentado desafíos para muchos estudiantes, especialmente en áreas abstractas como los números con signo. Sin embargo, autores como Bofferding y Farmer (2018) han destacado cómo la influencia del contexto y del lenguaje puede mejorar significativa-

mente la interpretación y comprensión de estos números. Las metodologías modernas, como la gamificación, emergen como una respuesta antes estos desafíos. La gamificación no es simplemente una distracción o una herramienta lúdica; es una metodología robusta que aporta una serie de beneficios pedagógicos. Al introducir elementos de juego en el proceso de aprendizaje, los estudiantes se encuentran más motivados, comprometidos y dispuestos a enfrentar desafíos. Además, el sumergir a los estudiantes en un contexto familiar, como el universo de Harry Potter, propició el interés por enfrentar el estudio de los conocimientos abstractos a situaciones del mundo real.

En lo que respecta al aspecto de construcción y reorganización de normas sociales, la gamificación ofreció un contexto familiar y valorado por los estudiantes, facilitando la contextualización de ideas matemáticas en problemas concretos y fortaleciendo el vínculo entre el conocimiento teórico y las experiencias directas de la gamificación. Una dimensión significativa fue el fomento del dialogismo y la interacción, que no solo impulsaron la reflexión matemática, sino que también consolidaron normas de interacción, comunicación y razonamiento colectivo. Es relevante mencionar que las actividades potenciaron la habilidad matemática y las competencias de trabajo colaborativo y co-construcción del saber. Mediante las tareas propuestas, los estudiantes abordaron los números con signo desde un enfoque matemático a través del análisis de los diversos escenarios y, en algunos casos, redefinieron sus propias normas sobre representación e interpretación de datos. Un ejemplo ilustrativo es que ciertos grupos optaron por situar los números negativos a la derecha en la recta numérica, evidenciando que las convenciones pueden ser desafiadas y adaptadas según el contexto y la comprensión colectiva. Ejercicios como “La Balanza de Gringotts” pusieron a prueba las destrezas aritméticas de los alumnos y los incitaron a reflexionar sobre normas sociales más generales en torno a deudas, responsabilidades y gestión financiera. Al incorporar escenarios donde los estudiantes son protagonistas se transforma la dinámica convencional del aula. Los alumnos emergen como figuras centrales en su trayectoria de aprendizaje, y las convenciones sobre la posesión, compartición y validación del saber son reconfiguradas. Las tareas basadas en la gamificación y en marcos narrativos evidencian que las normas sociales influyen no solo en la edificación del conocimiento, sino también en cómo este es transferido y aplicado en distintos contextos. Esta versatilidad y capacidad adaptativa son fundamentales en la educación contemporánea.

Con relación a las normas sociomatemáticas, el enfoque de gamificación estableció un marco donde los conceptos matemáticos se introducían mediante relatos y contextos narrativos. Por ejemplo, en “La Balanza de Gringotts”, la interpretación de los números con signo se entrelaza estrechamente con las transacciones financieras del mundo mágico. Durante

esta actividad se destacó el nivel de colaboración y diálogo en la solución de problemas, donde los estudiantes negociaron significados, cuestionaron interpretaciones y afinaron su entendimiento. Curiosamente, el razonamiento matemático no se valoró únicamente por obtener respuestas acertadas, sino también por experiencias y soluciones congruentes con la trama y dinámicas del juego. Otro punto a resaltar fue el aprecio hacia las diversas representaciones de conceptos matemáticos. Herramientas como rectas numéricas, tablas y narrativas se reconocieron durante la actividad como medios legítimos para representar y entender los números con signo. En este escenario gamificado, los estudiantes ejecutaron operaciones matemáticas y reflexionaron acerca de sus metodologías y estrategias, ponderando su alineación con el marco de juego.

A pesar de que las tareas se desarrollaron en un contexto mágico, se enfatizó la trascendencia de vincular los conceptos a situaciones palpables y cotidianas. Aspectos como la gestión financiera, las variaciones de temperatura y las obligaciones de deuda son relevantes más allá del contexto escolar, y se espera que los estudiantes identifiquen y aprecien estas conexiones. Así mismo, en esta experiencia se destacó la percepción del error no como fallo, sino como una ventana de aprendizaje y adaptación. En este entorno, las normas sociomatemáticas promovieron valores como la resiliencia, la perseverancia y la adaptabilidad.

Al incorporar escenarios gamificados, particularmente aquellos inspirados en el universo de Harry Potter, las matemáticas adquieren un carácter más tangible y contextualizado. Los estudiantes dejan de percibir a los números y operaciones como entidades abstractas y las comienzan a ver como herramientas aplicables a situaciones que les resultan cautivadoras y pertinentes. La gamificación impulsa intrínsecamente la colaboración; los estudiantes no solo trabajan con números y operaciones, sino que también cooperan, debaten y concilian interpretaciones con sus pares. Así, las matemáticas se transforman en una experiencia social donde el conocimiento es una construcción compartida. Las dinámicas gamificadas, como “La Balanza de Gringotts”, motivaron a los estudiantes a reflexionar sus propios procesos cognitivos y decisiones. En este marco, el acto matemático trasciende la mera búsqueda de la respuesta correcta y se enfoca en comprender el camino que lleva a dicha respuesta, y cómo este puede ser afinado o modificado según el contexto. En un ambiente gamificado, los estudiantes son incentivados a experimentar, adoptar múltiples estrategias y aprender de sus desaciertos, lo que infunde a las matemáticas un carácter más exploratorio y menos dogmático.

Al integrar narrativas como “La Temperatura en el Callejón Diagon”, la experiencia matemática se enriquece considerablemente. Los estudiantes ejecutan operaciones, pero además interpretan, anticipan y entienden a profundidad las repercusiones de sus cálculos dentro de un marco narrativo.

Aunque hallar la respuesta adecuada sigue siendo esencial, en un contexto gamificado lo que predomina es el razonamiento subyacente.

Desde la perspectiva matemática, resulta evidente que la capacidad de los estudiantes para traducir y adaptar el lenguaje diario a un marco matemático manifiesta el potencial de la gamificación para hacer los conceptos abstractos tanto comprensibles como pertinentes. La utilidad de instrumentos visuales, como la recta numérica, resaltó de manera significativa al ofrecer a los estudiantes un marco visual para entender, ilustrar y trabajar con números signados. Las dinámicas también fomentaron una introspección rigurosa en torno al uso del símbolo “-”. Esta introspección reveló que los estudiantes, dependiendo del contexto, pueden dotar de significado tanto a las operaciones como a los signos, consolidando así su entendimiento y su empleo adecuado. A lo largo de esta experiencia gamificada, los estudiantes demostraron un alto compromiso con la resolución de problemas. En dinámicas como “La Temperatura en el Callejón Diagon” y “La Balanza de Gringotts”, se percibió un marcado nivel de participación estudiantil, propiciando así un ambiente de colaboración y sinergia grupal. Durante estas actividades se incentivó a los estudiantes a articular sus procesos de razonamiento, debatir sobre interpretaciones y compartir métodos; no solo se limitaron a solucionar la tarea propuesta, sino que se sumergieron activamente en el contexto y en los desafíos presentados. Esta inmersión propició la formación de un ambiente donde los estudiantes se sintieron respaldados y confiados para experimentar, errar y, crucialmente, aprender de esos errores.

Este estudio subraya que la gamificación trasciende una simple tendencia en el ámbito educativo; es una herramienta robusta con un alcance considerable para revolucionar la enseñanza y el aprendizaje matemático. La gamificación apoya al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes para un mundo dinámico y en evolución, al poner énfasis en competencias que van más allá de la mera memorización, como el pensamiento crítico y el trabajo colaborativo. Por lo tanto, es importante que los educadores continúen investigando, adaptando y refinando tales estrategias, asegurándose que sean pertinentes y relevantes para el desarrollo integral del estudiante.

REFERENCIAS

- Bofferding, L. (2010). Addition and subtraction with negatives: Acknowledging the multiple meanings of the minus sign. En P. Brosnan, D. B. Erchick, & L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 703–710). The Ohio State University. <https://bit.ly/3EVGRta>
- Bofferding, L. (2014). Negative Integer Understanding: Characterizing First Graders' Mental Models. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(2), 194–245. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.45.2.0194>

- Bofferding, L. (2019). Understanding Negative Numbers. En A. Norton, & Alibali, M.W. (Eds.), *Constructing Number* (pp. 251–278). Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-00491-0>
- Bofferding, L., & Hoffman, A. (2014). Learning negative integer concepts: Benefits of playing linear board games. En C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 2, pp. 169–176). PME. <https://bit.ly/3rkbLZ2>
- Bofferding, L., & Farmer, S. (2018). Most and least: Differences in integer comparisons based on temperature comparison language. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(3), 545–563.
<https://doi.org/10.1007/s10763-018-9880-4>
- Bofferding, L., Aqazade, M., & Farmer, S. (2018). Playing with integer concepts: A quest for structure. En L. Bofferding, & N. M. Wessman-Enzinger (Eds.), *Exploring the integer addition and subtraction landscape: Perspectives on integer thinking* (pp. 3–23). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-90692-8_1
- Bunchball. (2016). *Gamification 101: An introduction to game dynamics* [White paper]. Bunchball Inc. <https://bit.ly/3PwTmn>
- Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, 31, 175–190. <https://doi.org/10.1080/00461520.1996.9653265>
- Deterding, S., Dixon, D., Khaled, R., & Nacke, L. (2011). From game design elements to game-fulness: Defining gamification. En A. Lugmayr, H. Franssila, C. Safran, & I. Hammouda (Eds.), *Proceedings of the 15th international academic MindTrek conference: Envisioning future media environments* (pp. 9–15). ACM. <https://doi.org/10.1145/2181037.2181040>
- Jiang, M. J., Cooper, J. L., & Alibali, M. W. (2014). Spatial factors influence arithmetic performance: The case of the minus sign. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 67(8), 1626–1642.
<https://doi.org/10.1080/17470218.2014.898669>
- Kilhamn, C. (2018). Difference differences: Metaphorical interpretations of “difference” in integer addition and subtraction. En L. Bofferding & N. M. Wessman-Enzinger (Eds.), *Exploring the integer addition and subtraction landscape: Perspectives on integer thinking* (pp. 143–166). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-90692-8_6
- Kim, S., Song, K., Locke, B., & Burton, J. (2018). *Gamification in Learning and Education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-47283-6>
- Morris1, B.J., Croker, S., Zimmerman, C., Gill, D., & Romig, C. (2013). Gaming science: the “Gamification” of scientific thinking. *Frontiers in Psychology*, 4(607), 1–16. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00607>

- Murray, J. C. (1985). Children's informal conceptions of integer arithmetic. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 147–153). State University of Utrecht. <https://bit.ly/3ESeonQ>
- Peled, I., Mukhopadhyay, S., & Resnick, L. (1989). Formal and informal sources of mental models for negative numbers. En G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artique (Eds.), *Proceedings of the thirteenth international conference for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 106–110). PME. <https://bit.ly/3tgj58h>
- Ruiz, A. (2002). *Historia y filosofía de las matemáticas*. EUNED. <https://bit.ly/458QL55>
- Schell, J. (2014). *The art of game design: A book of lenses* (2nd ed.). CRC Press.
- Sitzmann, T. (2011). A meta-analytic examination of the instructional effectiveness of computer- based simulation games. *Personnel Psychology*, 64(2), 489–528. <https://doi.org/10.1111/j.1744-6570.2011.01190.x>
- Smith, A. L., & Baker, L. (2011). Getting a clue: Creating student detectives and dragon slayers in your library. *Reference Services Review*, 39(4), 628–642. <https://doi.org/10.1108/00907321111186659>
- Stephan, M., & Akyuz, D. (2012). A proposed instructional theory for integer addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(4), 428–464. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.43.4.0428>
- Su, C., & Cheng, C. (2015). A mobile gamification learning system for improving the learning motivation and achievements. *Journal of Computer Assisted Learning*, 31(3), 268–286. <https://doi.org/10.1111/jcal.12088>
- Werbach, K., & Hunter, D. (2012). *For the win: How game thinking can revolutionize your business*. Wharton Digital Press.
- Whitacre, I., Bishop, J. P., Philipp, R. A., Lamb, L. L., & Schappelle, B. P. (2014). Dollars and sense: Students' integer perspectives. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 20(2), 84–89. <https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.20.2.0084>
- Whitacre, I., Azuz, B., Lamb, L. L. C., Bishop, J. P., Schappelle, B. P., & Philipp, R. A. (2017). Integer comparisons across the grades: Students' justifications and ways of reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 45, 47–62. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.11.001>
- Zichermann, G., & Cunningham, C. (2011). *Gamification by design: Implementing game mechanics in web and mobile apps*. O'Reilly Media.