

Gestión de la iconicidad en la representación de cuerpos geométricos

Cristian Camilo Fúneme Mateus ¹

RESUMEN

Este trabajo se desarrolla como parte de las actividades investigativas del Doctorado Interinstitucional en Educación. En él se exponen los resultados de una propuesta de actividades basadas en las cuatro entradas clásicas a la geometría, planteadas por Raymond Duval, que tienen como eje fundamental la gestión de los procesos cognitivos de visualización, representación y argumentación. Específicamente, se expone la incidencia de actividades sobre representaciones de algunos cuerpos geométricos realizadas por estudiantes de tercer grado de educación primaria. A partir de un análisis del enfoque mixto de investigación, se describe lo ocurrido en el proceso de aprendizaje de formas de representaciones de algunos cuerpos geométricos y se contrastan las representaciones cuantitativamente. El principal resultado es que los procesos cognitivos destacados por Duval permitieron un alto grado de variación en el nivel de iconicidad de las representaciones.

PALABRAS CLAVE

Geometría, Representación, Iconicidad.

¹ ccfunemem@udistrital.edu.co

Doctorado Interinstitucional en Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

<https://orcid.org/0000-0002-9158-427X>

Fúneme Mateus, C. C. (2024). Gestión de la iconicidad en la representación de cuerpos geométricos. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 53–61). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-05>

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de la geometría ha suscitado un gran desafío para los docentes, ya que los estudiantes suelen evidenciar múltiples dificultades en el aprendizaje de los objetos de dicha área; por ejemplo, es común encontrar que en el trabajo con cuerpos geométricos los estudiantes sienten que sus representaciones gráficas bidimensionales son complejas, tienen nombres difíciles y que sus propiedades son carentes de significado (Aftab et al., 2021).

En este sentido, Clements et al. (2022) proponen que, para atender a las dificultades que enfrentan los estudiantes al aprender la geometría, es importante reconocer que dicha área exige el reconocimiento del entorno, procesos de visualización y de construcción de representaciones y sus correspondientes transformaciones. Más aún, exponen que el estudiante necesita de la acción semiótica de representación y de actividades cognitivas de visualización, comunicación y construcción de conceptos, pero esto es poco habitual en los salones de clase.

En Colombia, las pruebas nacionales de matemáticas indican que muchos estudiantes de educación básica primaria tienen dificultades para aprender geometría. Específicamente, los resultados de las Pruebas Saber 3° muestran que algunos estudiantes no pueden estimar medidas con patrones arbitrarios al finalizar la primaria (67%), no saben cómo medir utilizando patrones e instrumentos estandarizados (44%), no pueden identificar atributos medibles de objetos (43%), no pueden ordenar objetos bidimensionales y tridimensionales por atributos medibles (36%), y no pueden diferenciar entre objetos bidimensionales y tridimensionales (30%) (Ministerio de Educación Nacional, 2021).

Atendiendo a este contexto problemático, es importante la exploración de estrategias de enseñanza y aprendizaje que atiendan tanto a la especificidad de la geometría como a las necesidades y exigencias de los estudiantes. Entre las propuestas existentes se encuentra el modelo de Van Hiele y Van Hiele-Geldof (1958) para la enseñanza y aprendizaje de la geometría, la propuesta para la constitución del pensamiento espacial de Piaget e Inhelder (1967), las fases de desarrollo del pensamiento espacial de Clements y Sarama (2004) y la teoría desarrollada por Duval (2004, 2016) bajo el nombre de las cuatro entradas clásicas a la geometría: el botánico, el agrimensor geómetra, el constructor y el inventor artesano. Esta teoría considera que el inicio del estudio de las formas geométricas se puede desarrollar a través del reconocimiento y gestión de diferentes formas de verlas y operarlas. En esta investigación se utiliza la propuesta de Duval, ya que se reconoce que en ella se considera un aspecto distintivo de las demás: la construcción de mecanismos cognitivos que preparan al estudiante para razonar geoméricamente antes de ingresar al estudio de la geometría. Es decir, los

demás modelos se centran en el desarrollo del pensamiento espacial, mientras que Duval lo hace en la preparación para ingresar a él, siendo este el interés de la investigación.

Es así como surge el interés por abordar la pregunta de investigación: ¿De qué manera la implementación de las cuatro entradas clásicas a la geometría de Duval incide en la iconicidad de las representaciones de cuerpos geométricos por parte de estudiantes de tercer grado de educación básica primaria?

MARCO TEÓRICO

A partir de la consideración de la naturaleza semiótica específica de la geometría, Duval (2004) sostiene que el aprendizaje de esta rama de la matemática requiere de la gestión en el aula de procesos cognitivos muy específicos: (1) La representación, comprendida como un proceso mediante el cual el estudiante expresa, comunica, muestra o denota objetos matemáticos. Esto implica un grado de semejanza entre los objetos y sus representaciones, denominado iconicidad; (2) La visualización, que se puede orientar a través del reconocimiento de formas, la asociación y diferenciación de ellas con objetos reales y la deconstrucción de sus partes a través de la representación en diferentes dimensiones; y (3) La producción discursiva de argumentos, con la cual el estudiante hace explícitas sus interpretaciones de los objetos y posibilita clarificaciones y ampliaciones (Duval, 2011).

Estas demandas cognitivas son decantadas por Duval (2004, 2016) en su propuesta de carácter didáctico denominada las cuatro entradas clásicas a la geometría, la cual se presenta a continuación.

Las cuatro entradas clásicas a la geometría

Duval (2016) destaca la importancia de coordinar los diferentes funcionamiento cognitivos que intervienen en el proceso de aprendizaje de la geometría. Esto implica comprender que este no se basa únicamente en la memorización de fórmulas y propiedades, sino que también involucra habilidades perceptivas, visuales y espaciales, así como la capacidad de razonar y justificar. Por lo tanto, es necesario desarrollar una enseñanza que integre estas habilidades de manera coherente y efectiva, por lo cual sugiere que se puede abordar la introducción al aprendizaje de la geometría a través del estudio de las formas geométricas, para las cuales propone cuatro estatus epistemológicos, cada uno correspondiente a una forma diferente de percepción y representación.

El primer estatus, llamado constatación perceptiva, se refiere a la capacidad que tiene nuestro sistema perceptivo para identificar y comprender las propiedades de los objetos geométricos mediante la observación directa de los mismos. Esto implica la identificación de elementos como la forma, el

tamaño, la orientación y la posición de los objetos geométricos a través del reconocimiento de formas en materiales concretos y sin el uso de instrumentos de medición.

Por otra parte, el segundo estatus se denomina constatación mediante instrumentos de medición y se enfoca en la medición de bordes y superficies con el uso de instrumentos como la regla o el compás. Esto con la intención de identificar qué aspectos de los objetos son posibles de cuantificar y cómo emergen los instrumentos y unidades de medida como algo necesario en los procesos de medición.

En el tercer estatus, construcción de figuras, busca que el estudiante represente figuras utilizando instrumentos geométricos y tecnológicos, para que sea capaz de hacer conexiones entre los diferentes elementos de ellas. Más aún, hace alusión al desarrollo de la habilidad cognitiva de ver más allá de lo directamente perceptible, para así deducir y construir nuevos elementos en las representaciones.

Finalmente, el cuarto estatus recibe el nombre de descomposición dimensional y está relacionado con la gestión del movimiento de la visualización del estudiante a través de los objetos geométricos de diferentes dimensiones que están presentes en un objeto, por ejemplo, puntos (dimensión cero), segmentos (dimensión 1), cuadrados (dimensión 2) y cubos (dimensión 3). Esto para representar, transformar y proponer nuevas configuraciones de los objetos geométricos.

Figura 1

Cuatro entradas a la geometría y fuentes cognitivas de ellas

Tipo de operación sobre las formas visuales	Botánico Reconocer formas a partir de cualidades visuales	Agrimensor Medir objeto o representación con variación de escala de magnitud y procedimiento de medición	Constructor Descomponer una forma en trazos construibles con ayuda de un instrumento	Inventor Transformar unas formas en otras
Estatus epistemológico	Percepción	Medición	Construcción	Descomposición
Fuente cognitiva de certidumbre	Superposición y Uso de plantillas	Comparación de valores numéricos	Encadenamiento de operaciones	Invarianza de unidades figurales
Visualización	Iconica		No Iconica	

Nota. Adaptado de Duval (2016). En esta figura la visualización icónica hace alusión a la identificación de objetos reales y la no icónica a la percepción de figuras geométricas.

Cada uno de estos estatus epistemológicos corresponde a una de las entradas al aprendizaje de la geometría. El estatus uno se denomina Botánico, el dos recibe el nombre de Agrimensor geómetra, mientras que el tercero es el Constructor y el cuarto corresponde al Inventor artesano. Estas entradas a la geometría requieren del desarrollo de habilidades y procesos cognitivos

específicos, y se pueden utilizar para guiar el aprendizaje de las formas geométricas de manera gradual y progresiva. Además, cada entrada se basa en fuentes cognitivas específicas, es decir, en procesos de pensamiento matemático que permiten al estudiante avanzar a la siguiente entrada y profundizar su comprensión de la geometría. La forma en que comprende Duval (2016) estos elementos se presenta en la Figura 1, en donde se relacionan además los tipos de visualización que se hacen presentes en cada entrada.

MÉTODO

Se adopta el enfoque de investigación mixto con alcance descriptivo, el cual emplea la narración interpretativa y contextualizada de los hechos observados para obtener una comprensión detallada de ellos, esto acompañado del contraste numérico (Ortiz, 2003). El grupo de 30 estudiantes participantes pertenece a una institución educativa pública de la ciudad de Bogotá, Colombia. Este grupo se eligió, de manera intencional y no probabilística, bajo el único criterio de pertenecer al grado tercero de educación básica primaria (entre 8 y 9 años), nivel en que inicia el estudio de los cuerpos geométricos en dicho país.

Secuencia de actividades

Se diseñaron cuatro actividades relacionadas de forma directa con las cuatro entradas a la geometría (una actividad por cada entrada), las cuales fueron sometidas a revisión por dos investigadores expertos en didáctica de la matemática para luego ser implementadas en cuatro sesiones de clase de 80 min cada una. Se implementó una actividad por sesión. En la primera sesión, los estudiantes exploraron los objetos presentes en el salón de clase y luego los representaron en sus cuadernos, de manera que se dio prioridad a la percepción del entorno. Luego representaron tres objetos seleccionados por el docente: un pupitre, una silla y un librero. Posteriormente, se entregaron guías de trazo para representaciones de cuerpos geométricos, con lo que se buscaba la conexión entre lo percibido directamente y la manera de representarlo.

La segunda actividad consistió en la medición de objetos para constatar propiedades geométricas básicas de los cuerpos. Para esto se entregó a cada estudiante construcciones en cartulina de representaciones tridimensionales de pirámides, cubos y prismas; además, se entregaron hojas con representaciones bidimensionales de ellos. Con estos recursos se dio la indicación de señalar el número de caras, aristas y vértices, así como la medida de las aristas. Esta actividad corresponde a la segunda entrada a la geometría al proponerle al estudiante la medición de objetos representados en diferentes dimensiones para luego compararlas y relacionarlas.

Para la tercera sesión se entregaron plantillas con las que los estudiantes construyeron cuerpos geométricos: tetraedro, cubo, cono y prisma rectangular. Esto con la intención de incluir la fuente de desarrollo cognitivo de construcción y deconstrucción mediante el encadenamiento de operaciones, fuentes cognitivas propias de la tercera entrada a la geometría.

En la última sesión se llevó a la clase robots elaborados en cartulina con representaciones de pirámides, cubos, prismas, esferas, conos y cilindros. Se pidió identificar qué cuerpos estaban presentes en el robot, luego representarlos en el cuaderno y finalmente crear uno nuevo empleando los cuerpos ya identificados. Es decir, se desarrollaron transformaciones de la configuración inicial de las representaciones para establecer una nueva organización de ellas. Este tipo de acciones corresponden al trabajo de los estudiantes en la cuarta entrada a la geometría.

Procedimiento de recolección y análisis de datos

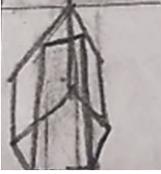
La recolección de datos se llevó a cabo en dos momentos. En el primero se tomaron las representaciones realizadas por los estudiantes en la primera sesión de clase (primera entrada a la geometría), y en el segundo se recolectaron las representaciones realizadas por los estudiantes en la última actividad desarrollada (cuarta entrada a la geometría). Para ambas representaciones recolectadas se identificó el nivel de iconicidad en el que se encontraban. Para ello, se realizó un análisis mediante categorías preestablecidas, en este caso las cuatro entradas a la geometría y los niveles de iconicidad en la representación. Los niveles de iconicidad contemplados fueron: bajo, cuando el estudiante no representa las partes que componen los cuerpos ni el contorno global; medio, cuando se representa la globalidad más no las partes; y alta, cuando existe una articulación adecuada tanto de las partes como de la globalidad del objeto en la representación.

RESULTADOS

En la primera sesión de clase, y de acuerdo con las características de la primera entrada a la geometría (reconocimiento de formas en objetos reales), se encontró que el 80% de las representaciones de los estudiantes manejaban un nivel bajo de iconicidad, y el 20% un nivel intermedio. En la Tabla 1 se presentan ejemplos de estas representaciones.

Un aspecto que resalta en las representaciones es la dificultad para percibir la articulación de los elementos de los objetos en la tridimensionalidad. Esto es relevante porque, como Vicens (2004) señala, si un estudiante solo visualiza objetos de esta manera no podrá considerar las posibles variaciones, transformaciones, deconstrucciones y construcciones que pueden surgir de ellos, lo que puede resultar en múltiples dificultades para el aprendizaje de la geometría (Al-Khateeb, 2016).

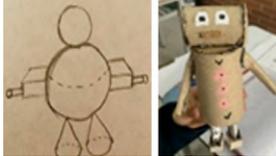
Tabla 1*Ejemplos de representaciones en primera entrada a la geometría*

Representación de nivel bajo	Representación de nivel intermedio
	
<p>En esta representación se identifican algunas partes del prisma mediante formas rectangulares y a través de ellas se encuentra una forma global. Sin embargo, no existe una relación que permita visualizar las características tridimensionales del cuerpo.</p>	<p>En esta representación se identifican algunas partes del prisma que se conectan con una forma global que permite un acercamiento a la visualización correcta del cuerpo. No obstante, las partes del cuerpo no se articulan de manera adecuada.</p>

Ahora bien, este estado inicial motivó a la estructuración de actividades que se mencionó previamente, a través de situaciones que permitieran al estudiante representar sus percepciones y, posteriormente, analizarlas, transformarlas y deconstruirlas. Se condujo a los estudiantes al análisis de los cuerpos geométricos sin conceptualizarlos, solo guiándolos a través de un proceso de razonamiento geométrico de los componentes unidimensionales o bidimensionales.

Como resultado de las actividades, en la última sesión de clase, y de acuerdo con las características de la cuarta entrada a la geometría (reconfiguración de formas que priorizaron la creación de nuevas articulaciones con las partes de una representación), se encontró que el 10% de las representaciones de los estudiantes manejaban un nivel bajo de iconicidad, el 30% un nivel intermedio y el 60% un nivel alto. En la Tabla 2 se presentan ejemplos de estas representaciones.

Tabla 2*Ejemplos de representaciones en última entrada a la geometría*

Nivel de iconicidad bajo	Nivel de iconicidad intermedio	Nivel de iconicidad alto
		
<p>El estudiante logra un manejo adecuado de los cuerpos geométricos en la representación bidimensional, pero no existe una correspondencia entre el objeto y su representación.</p>	<p>El estudiante alcanza una representación adecuada de los cuerpos geométricos, pero no existe correspondencia entre algunas partes del objeto y su representación.</p>	<p>En esta representación se llega a una relación entre las partes del objeto y su globalidad que dan muestra de un manejo adecuado de las transformaciones de las representaciones.</p>

Se encontró un alto porcentaje de cambio en los niveles de iconicidad de las representaciones. Especialmente, se pasó de un estado en el que ningún estudiante alcanzaba un nivel alto de iconicidad a que un 60% de ellos lo lograran luego de las actividades, y únicamente un 10% se mantuvo en el nivel más bajo. La razón detrás de los cambios en los niveles de iconicidad alcanzados por los estudiantes radica en que las actividades les permitieron establecer una conexión cognitiva entre sus representaciones internas y externas a través de procesos de percepción, visualización, construcción y deconstrucción de los cuerpos geométricos. Se comprende que este tipo de actividades posibilitan relacionar la realidad perceptiva del estudiante y la conceptualización e interpretación que él realiza de lo que encuentra en las clases (Clements et al., 2022; Vygotsky, 1986).

CONCLUSIONES

Los cambios en los niveles de iconicidad alcanzados por los estudiantes se asocian a la naturaleza de las actividades, entendiendo que estas les permitieron establecer como mecanismo cognitivo de conexión entre sus representaciones internas y externas a los procesos de percepción, visualización, construcción y deconstrucción de los cuerpos geométricos. Es decir, el resultado de esta investigación no son las actividades aplicadas, pues con la variación del contexto, necesidades de los estudiantes, recursos con los que se cuentan, entre muchos otros factores, las actividades pueden o no tener un impacto positivo. Lo que se quiere destacar es que, el tener en cuenta la naturaleza del acceso a los objetos geométricos a través de las cuatro entradas a la geometría para proponer actividades de trabajo en el aula, puede llevar a un proceso de enseñanza y aprendizaje rico en procesos cognitivos y, por tanto, en caminos para que el estudiante estudie la geometría.

Finalmente, si bien se encontró un alto porcentaje de estudiantes que mostraron evidencias de mejoría en su forma de visualizar y representar los cuerpos geométricos, es importante considerar también lo que ocurrió con aquellos que no lo lograron, en quienes los factores afectivos marcaron su distanciamiento y poca participación en las clases. Teniendo en cuenta los aspectos afectivos que incidieron en el proceso de visualización y representación de los estudiantes, se considera importante resaltar que este trabajo muestra elementos del ámbito cognitivo que son inherentes al aprendizaje de la geometría, pero queda abierta la invitación al análisis de cómo se articulan los aportes de Duval con teorías que profundizan en otras dimensiones del aprendizaje de la matemática.

AGRADECIMIENTOS

Se otorga un especial agradecimiento al Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Colombia),

programa que orientó los principales aspectos teóricos y metodológicos de esta investigación.

REFERENCIAS

- Aftab, M., Zia, M., & Rehman, N. (2021). Prevalence of students with learning difficulties in geometry at primary level in Punjab. *Journal of Research in Education, Allied Disciplines and Humanities*, 1(1), 1–9.
<https://pjer.org/index.php/pjer/article/download/342/124/501>
- Al-Khateeb, M. (2016). The extent of mathematics teacher's awareness of their students' misconceptions in learning geometrical concepts in the intermediate education stage. *European Scientific Journal*, 12(31), 357–372.
<https://doi.org/10.19044/esj.2016.v12n31p357>
- Clements, D., & Sarama, J. (2004). *Hypothetical learning trajectories. Mathematical Thinking and Learning*. Routledge.
- Clements, D., Sarama, J., & Joswick, C. (2022). Learning and teaching geometry in early childhood. En A. Sharif y D. Hassidov (Eds.), *Special issues in early childhood mathematics education research* (pp. 95–131). Brill.
- Duval, R. (2004). Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y... Una quinta. En M. C. Chamorro (Ed.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 159–188). Ministerio de Educación y Ciencia de España.
- Duval, R. (2011). *Du mot au concept. Preuve*. Presses Universitaires.
- Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En R. Duval, R., & Sáenz-Ludlow, A. (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 13–60). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Ministerio de Educación Nacional (2021). *Informes de resultados históricos pruebas Saber*. Gobierno de Colombia. <https://bit.ly/3W5wywo>
- Ortiz, F. (2003). *Diccionario de metodología de la investigación científica*. Limusa.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space*. W. W. Norton & Company.
- Van Hiele, P., & Van Hiele-Geldof, D. (1958). A method of initiation into geometry at secondary schools. En H. Freudenthal (Ed.), *Report on methods of initiation into geometry* (pp. 67–80). J. B. Wolters.
- Vicens, P. (2004). *Sentir y crecer: el crecimiento emocional en la Infancia*. Graó.
- Vygotsky, S. (1986). *La imaginación y el arte en la infancia*. Akal.