La resolución de problemas matemáticos, tecnologías digitales, y razonamiento en el estudio de las matemáticas del bachillerato

Daniel Ortiz-May [1]
Manuel Santos-Trigo [2]

Resumen

En el desarrollo del conocimiento matemático se destacan dos actividades relacionadas: la formulación o el planteamiento de problemas y la búsqueda de distintas maneras de cómo resolverlos. Las situaciones problemáticas involucran diversos contextos, incluyendo matemáticos o realistas, y en los procesos de resolución, la construcción de representaciones y modelos matemáticos de los fenómenos en estudio resulta importante para la búsqueda y exploración de relaciones que contribuyen a la solución de los problemas. El uso de herramientas concretas, como regla y compás, simbólicas como el sistema cartesiano, o digitales como los sistemas de geometría dinámica, permean tanto las formas de representar, modelar y explorar conceptos como los caminos de planteamiento y resolución de los problemas. En los últimos 50 años, las propuestas del currículum matemático y el diseño e implementación de ambientes de enseñanza/aprendizaje de la disciplina reconoce a la resolución de problemas como un aspecto central en la construcción de conocimiento matemático de los estudiantes. En este capítulo se revisan los principios y fundamentos de la resolución de problemas, la importancia de las tareas o problemas y el uso de diversas herramientas en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. Se

---

[1] dortizmay@outlook.com
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México

[2] msantos@cinvestav.mx
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México

Ortiz-May, D., & Santos-Trigo, M. (2025). La resolución de problemas matemáticos, tecnologías digitales, y razonamiento en el estudio de las matemáticas del bachillerato. En A. Solares-Rojas, & A. P. Preciado Babb (Eds.), *La investigación en modelización matemática: un diálogo entre educadores de Latinoamérica y España* (pp. 65–86). Editorial SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S2/2025/01-03

destaca el uso de tecnologías digitales en la formulación, modelación y resolución de problemas, y se introduce una bitácora digital como una herramienta que les permita a los estudiantes registrar, compartir y discutir conceptos y acercamientos de resolución de los problemas. En esta dirección se apunta a un modelo híbrido de trabajo donde el estudiante presenta, comparte y defiende sus ideas de las tareas que realiza en forma remota, las cuales se discuten y amplían en las sesiones presenciales. Es decir, se apunta a un modelo dual que concilie y promueva el trabajo remoto de los estudiantes con el desarrollo de las actividades presenciales.

Palabras clave
Resolución de problemas matemáticos, Modelación matemática, Tecnologías digitales, Sistemas de geometría dinámica, Enseñanza híbrida.

Abstract
Two intertwined activities stand out in the process of learning mathematics: formulating and posing problems and looking for different ways to solve. Problematic situations involve various contexts, including mathematical or real-world contexts. During the process of solving a problem, constructing representations to model phenomena is important to explore relationships that are essential to find a solution. The use of concrete tools such as rulers and compasses, symbolic tools such as the Cartesian system, or digital tools such as dynamic geometry systems, permeate ways in which students represent, model and explore concepts as well as how they solve and discuss solutions. In the last 50 years, mathematics curriculum proposals and the design and implementation of teaching/learning environments have recognized modeling problem-solving activities are central in the students' construction of mathematical knowledge. In this chapter, we review principles and foundations of problem-solving, the importance of tasks or problems, and the use of various tools in the development of students' mathematical thinking. We highlight the use of digital technologies to pose, model and solve problems and we introduce the use of a digital wall as a tool that allows students to record, share, and discuss problems and to understand mathematical concepts. To this end, we propose a hybrid model to work with students in which they represent and convey their ideas related to their remote work when tackling problem solving tasks. Thus, expanding upon their remote work during face-to-face sessions. In other words, a dual model is aimed at reconciling and promoting students' remote work with the development of face-to-face activities.

Keywords
Mathematical problem-solving, Mathematical modelling, Digital Technologies in education, Dynamic geometry system, Hybrid education.

Introducción

La resolución de problemas es una actividad que distingue y permea el funcionamiento y las actividades del ser humano. En el quehacer cotidiano, los individuos se involucran en diversas tareas, como transportarse de un lugar a otro, atender y resolver situaciones de trabajo, del hogar, escolares, diseñar y seguir un plan de alimentación o plantear y seguir una rutina de ejercicios. En este camino se plantean preguntas, identifican parámetros relevantes, usan unidades de medida para cuantificar el tiempo, la distancia, la velocidad, el dinero, etc. para explorar caminos de solución o respuestas. En las prácticas del desarrollo del conocimiento matemático, se reconoce que la formulación y resolución de problemas son actividades esenciales en el quehacer y avances de la disciplina. La comunidad matemática ha tenido la tradición de identificar, plantear, y divulgar listas de problemas no resueltos que inspiran y guían el desarrollo de la disciplina (Devlin, 2002; Hilbert, 1902). Halmos (1980) afirma que, durante el estudio de las matemáticas, los axiomas, teoremas, definiciones, fórmulas y los métodos son ingredientes importantes; sin embargo, ninguno de ellos es el corazón de la disciplina. "…la razón de la existencia de los matemáticos es resolver problemas y, por lo tanto, de lo que realmente la matemática consiste es de problemas y soluciones" (Halmos, 1980, p. 519). En general, durante el proceso de plantear y resolver problemas disciplinarios, los individuos tienden a identificar y comprender conceptos, representar, modelar y explorar situaciones problemáticas, buscar diversos caminos de resolución, y comunicar y sustentar resultados o soluciones. En esta perspectiva, en la agenda de investigación de la educación matemática ha existido el interés de analizar y caracterizar cómo los maestros y estudiantes aprenden conceptos y desarrollan competencias de resolución de problemas (Santos-Trigo, 2020a; 2024; Schoenfeld, 1985; 2022; 2023). Romberg y Kaput (1999) identifican las prácticas matemáticas que deben estructurar y sustentar el currículum matemático y los escenarios de enseñanza:

> Las actividades del currículum son prácticas y tareas que involucran a los estudiantes en la resolución de problemas y que fomentan la matematización. Incluyen situaciones que están sujetas a medirse y cuantificarse, e involucran variación o cambios cuantificables, incertidumbre e incluyen nuestro lugar en el espacio y características espaciales del mundo que habitamos y construimos. Además, motivan a los estudiantes en el uso de lenguajes matemáticos para expresar, comunicar, razonar, calcular, abstraer, generalizar y formalizar (p. 6).

¿Cómo se formula un problema matemático? ¿Cómo caracterizar un problema o tarea matemática? ¿Qué resulta importante durante el proceso de resolución de problemas? ¿Cómo el uso consistente de herramientas o artefactos materiales (concretos), semióticas, o digitales inciden e influyen en las formas de representar, explorar, razonar, y resolver problemas y comunicar resultados? En la discusión de este tipo de preguntas resulta importante revisar los principios que sustentan la propuesta de aprender y desarrollar conocimiento matemático a partir de o basado en la resolución de problemas (Liljedahl & Santos-Trigo, 2019; Santos-Trigo, 2024).

Sobre los fundamentos de resolución de problemas matemáticos y aprendizaje

En los últimos 50 años, la resolución de problemas matemáticos ha sido un dominio o área de investigación y práctica que ha influido en el diseño del currículum y en la implementación de escenarios de enseñanza y aprendizaje de la disciplina en el mundo (Liljedahl & Cai, 2021; Santos-Trigo, 2020a; Santos-Trigo, 2024; Toh et al., 2023). Se reconoce también que pueden surgir diferentes maneras, caminos o interpretaciones sobre cómo estructurar e implementar acercamientos de resolución de problemas que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes (Törner et al., 2007); sin embargo, existen principios y fundamentos que identifican y sustentan el diseño y funcionamiento de un ambiente de aprendizaje basado en la resolución de problemas. En esta dirección, un aspecto esencial en cualquier acercamiento de resolución de problemas para la construcción y aprendizaje de conocimiento matemático es conceptualizar a la disciplina como un conjunto de dilemas que se necesitan resolver en términos de recursos y estrategias matemáticas (Santos-Trigo, 2024). Es decir, en las experiencias de los estudiantes en la resolución de problemas se destaca el desarrollo de una forma de pensar que refleje hábitos del pensamiento matemático y el quehacer de la disciplina (Cuoco et al., 1996). Los ambientes de enseñanza y aprendizaje basados en la resolución de problemas deben reflejar microcosmos de los aspectos de la práctica y cultura matemática "para que los estudiantes desarrollen un sentido de la actividad matemática, sus experiencias con la disciplina deben ser consistentes con los caminos en que las matemáticas se construyen" (Schoenfeld, 1992, p. 339).

En la misma dirección, Pólya (1945) reconoce la importancia de que los estudiantes desarrollen un acercamiento o método inquisitivo que los guíe y oriente en la tarea de comprender conceptos, analizar el sentido y pertinencia de las definiciones, entender y aplicar teoremas y en los procesos de resolución de problemas. Este método se expresa por medio de las preguntas que los estudiantes plantean alrededor de cuatro fases asociadas con el proceso de resolución de problemas: la fase de comprensión y búsqueda de sentido del enunciado del problema (¿De qué se trata el problema? ¿Qué se pide determinar? ¿Qué datos o información incluye?, etc.); el diseño de un plan de solución (¿Se puede descomponer o resolver un caso más simple? ¿Se puede hacer una tabla con los datos y buscar algún patrón?, etc.); la implementación del plan (¿Qué operaciones y procedimientos están involucrados? ¿Qué información aportan los resultados parciales acera de la solución del problema?, etc.); y una visión retrospectiva (¿Qué datos se usaron? ¿hay consistencia de las unidades? ¿Tiene o hace sentido la solución? ¿Se puede resolver el problema de otras maneras? ¿puede el método de solución aplicarse a otros problemas? ¿Cómo se puede extender el dominio del problema? etc.). "Para Polya, las matemáticas son espacios de cuestionamiento y reflexión para encontrar el sentido de los conceptos y entender cómo y porqué las ideas matemáticas se desarrollan y encajan en la forma en que lo hacen" (citado en Schoenfeld, 2020, p. 1167). Así, en el camino de comprender conceptos y resolver problemas, los estudiantes problematizan la tarea y plantean interrogantes o preguntas (Cevikbas et al., 2022) como un medio para examinar los conceptos y problemas, y contrastar explicaciones de sus maestros u otros estudiantes. El premio Nobel Isidor Rabi comentó que cuando regresaba de la escuela a su casa, "mientras otras madres preguntaban a sus hijos ¿'qué aprendiste hoy'?, su madre le decía, ¿Izzy, planteaste alguna buena pregunta hoy?" (Berger, 2014, p. 67). En el aprendizaje y la resolución de problemas matemático, el método inquisitivo no solo resulta importante para que los estudiantes analicen los conceptos y enunciados de problemas, sino que también son parte de la forma en que los matemáticos desarrollan la disciplina.

Artigue y Blomhøj (2013) afirman que "el proceso inquisitivo funciona como una interrelación entre lo conocido y desconocido en situaciones donde un individuo o grupo se enfrenta a un reto o desafío" (pp. 798–799). En esta perspectiva, el principio de problematizar y resolver problemas es fundamental en la organización del currículum y en la implementación de actividades de aprendizaje. Además, la búsqueda de diferentes caminos o métodos para resolver problemas ofrece a los estudiantes la oportunidad de identificar diversos conceptos y estrategias que resultan importantes en los procesos de resolución. En esta dirección, también se analizan y contrastan los conceptos, recursos y estrategias o métodos usados en términos de su aplicación para resolver otros problemas y formas de extender el dominio inicial de los problemas y en la generación de resultados.

La importancia de los problemas en la resolución de problemas

Los problemas o tareas matemáticas son esenciales, además de que son el vehículo para que los estudiantes aprendan conceptos y desarrollen competencias de resolución. Los problemas pueden situarse en diferentes contextos realistas (que incluyen datos o información asociadas con situaciones reales), auténticos (que el estudiante reconoce como plausibles e interesantes) y en contextos matemáticos (búsqueda de relaciones entre objectos o pruebas de teoremas). El enunciado incluye dilemas o preguntas por resolver o información e instrucciones para que los mismos estudiantes formulen y resuelvan sus propios problemas. Schoenfeld (1983) establece que "un problema es solo un problema (como los matemáticos usan el término) si no sabes cómo entrarle a resolverlo. Un enunciado que no incluye 'sorpresas' y puede resolverse con un procedimiento familiar o de rutina (no importa qué tan complicada sea) es un ejercicio" (p. 41). De la misma manera, Mason (2016) plantea que "algo o alguna situación es un problema solo cuando alguien experimenta un estado de problematicidad, toma la tarea de trabajar la situación, y se involucra en alguna actividad de analizar el sentido del problema y formas de resolverlo" (p. 263). Cai y Nie (2007) reportan que los maestros en China privilegian, organizan e implementan actividades de resolución de problemas alrededor de tres tipos de problemas: (*a*) un problema y la búsqueda de soluciones múltiples o distintas formas de resolverlo. Aquí los maestros presentan un problema y les dan una oportunidad a los estudiantes para que lo resuelvan en diferentes caminos; (*b*) múltiples problemas, una solución, es decir, una familia de problemas se puede resolver con un método y algunos comparten la misma respuesta; (*c*) un problema y múltiples cambios. Aquí se les solicita a los estudiantes identificar y explorar variaciones o cambios de un problema después de que lo hayan resuelto.

Selden et al. (1989) publican resultados de un estudio donde se les pedía a estudiantes universitarios que habían cursado y aprobado un primer curso de cálculo diferencial resolver cinco problemas no rutinarios. Un ejemplo de estos problemas fue: Encuentra al menos una solución de la ecuación $4x^3 + x^4 = 30$ o explica por qué tal solución no existe. Se observa que en el enunciado del problema no se incluyen términos que explícitamente se refieran a los contenidos de cálculo; sin embargo, el análisis acerca de cómo la función asociada a la ecuación se comporta demanda el uso de conceptos estudiados en esa materia. Los autores reportaron que los estudiantes mostraron serias dificultades para resolver este tipo de problemas. De hecho, ninguno de los 17 participantes resolvió alguno de estos cinco problemas. Los autores encontraron en otros estudios que incluso estudiantes que había obtenido A & B en sus cursos de cálculo mostraron dificultades para resolver estos problemas. También encontraron que cuando se les preguntó a los estudiantes sobre los conceptos y recursos necesarios para resolver estos problemas (cálculo de la derivada, significado geométrico de la primera y segunda derivada, determinar máximos y mínimos, etc.), todos respondieron en forma adecuada. Es decir, los participantes poseían los conocimientos, pero no fueron capaces de identificarlos y usarlos en la resolución de los problemas.

Koichu (2010) afirma que las dificultades que los estudiantes muestran al resolver problemas novedosos o no rutinarios se pueden explicar a partir de que (*a*) en general, los estudiantes universitarios dedican poco tiempo a analizar el sentido y la comprensión del enunciado y así pensar después en un plan de solución, ya que rápidamente entran en una fase de ejecutar y escribir algo que no necesariamente los conduce a un camino sustentable de solución; (*b*) los estudiantes desarrollan rutinas o métodos generales tentativos para resolver los problemas que muchas veces les impide avanzar y explorar otros caminos de solución; y (*c*) los estudiantes no han desarrollado experiencias o estrategias que les permitan pensar en caminos que impliquen considerar un análisis del problema en sentido inverso, es decir, partiendo del final o de las conclusiones, y de ahí analizar las condiciones del problema (*working backwards*). Se sugiere que los estudiantes deben tener la oportunidad de resolver problemas novedosos o no rutinarios y desarrollar el hábito de analizar y comprender el enunciado del problema antes de involucrarse en un camino de solución. La idea es, entonces, que desarrollen los recursos y estrategias que les permitan identificar la estructura profunda de los problemas, por ejemplo, relacionar la existencia de las raíces de un polinomio con el comportamiento de la función asociada a cierto dominio o intervalo, en lugar de buscar un algoritmo para encontrar raíces.

¿Cómo diseñar e implementar problemas matemático no rutinarios? En la discusión de esta pregunta, Santos-Trigo (2019) propone un marco para transformar problemas de rutina o ejercicios que aparecen en los libros de texto en actividades no rutinarias que extienden la naturaleza y dominio inicial de los problemas. Con el uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) como GeoGebra, los estudiantes construyen modelos dinámicos de los problemas, y al mover algunos elementos dentro del modelo, buscan relaciones matemáticas que involucran el comportamiento de atributos asociados con objetos o conceptos (áreas, perímetros, velocidad, pendiente, etc.) ¿Cómo se formula un problema? ¿Cómo se caracteriza o qué es importante en el proceso de resolución de un problema? Krutestkii (1976) analizó la naturaleza y habilidades matemáticas, y diseñó en su programa de investigación una variedad de problemas o tareas matemáticas que usó en entrevistas que le permitieron conocer los procesos de solución de los niños al resolver los problemas. La lista de problemas incluía series del mismo tipo, pero con diferentes niveles de dificultad, enunciados con información incompleta o redundante, donde los niños tenían que identificarla, completarla o eliminarla para resolver la tarea, problemas con varias soluciones, etc. De hecho, estos tipos de problemas han sido parte de las tareas que investigadores y maestros han usado para estudiar, analizar y promover el desarrollo del conocimiento matemático y las competencias de resolución de problemas de los estudiantes. Pehkonen (2019) afirma que "el desarrollo de las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes no solo es una parte esencial del aprendizaje de las matemáticas dentro de las áreas de contenido, sino que es una parte central en el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles escolares" (p. 116).

La idea de problematizar (Hiebert et al., 1996) no solo permea los procesos de resolución de los problemas, sino también las formas de formularlos y plantearlos. Así, la observación de un fenómeno o evento, o la lectura o escucha de alguna información, son situaciones que pueden generar datos para que el maestro o estudiante formule y se involucre en procesos de resolución de problemas. Por ejemplo, en la figura 1 se observa que un tráiler se atasca al pasar por debajo de un puente. ¿Por qué este evento sucede de manera frecuente? En la figura se observa que las periódicas restauraciones del asfalto generan una inclinación del camino antes de llegar al puente. ¿Cómo se puede modelar el comportamiento de las dimensiones que determinan la altura del tráiler de tal manera que pueda librar sin problema el paso del puente cuya altura es conocida?

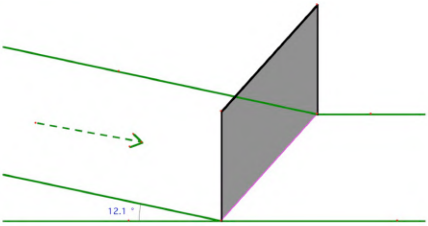
Figura 1

Un camión tráiler pasando por debajo de un puente

¿Cómo representar los elementos importantes del problema? Santos-Trigo et al. (2024) describen fases importantes alrededor de la modelación del problema a partir de una representación dinámica que involucra el concepto de derivada en su solución. La figura 2 muestra una simplificación que asocia algunas figuras geométricas con el camino, su inclinación y el puente en dos dimensiones. Es decir, la idea es modelizar el problema con recursos matemáticos.

Figura 2

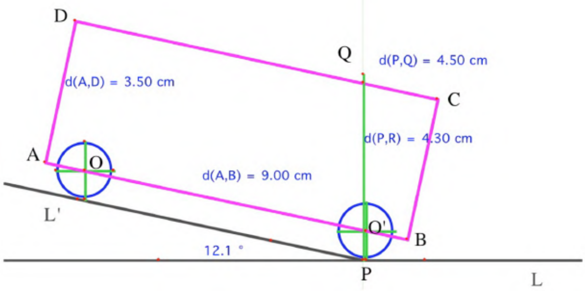
Representación inicial de la calle y el puente



¿Cómo representar la caja, las llantas, la altura del tráiler y la del puente? La figura 3 muestra un modelo dinámico del problema, donde las dimensiones de la caja del tráiler (rectángulo) son $AD = 3.5$ *cm*, $AB = 9$ *cm*, el ángulo de inclinación del camino son 12.1 grados y la altura fija del puente $PQ = 4.5$ *cm*

Figura 3

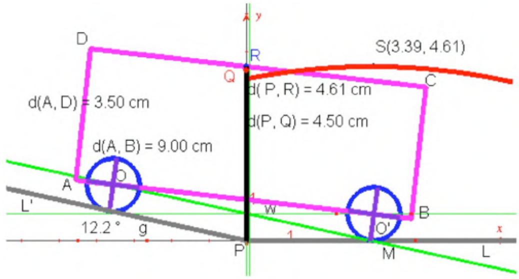
Un modelo dinámico del tráiler al pasar por debajo del puente



En la figura 4, el punto M es móvil y se puede desplazar sobre los rayos L & L', el segmento PQ representa la altura fija del puente y es perpendicular a la recta L desde el punto P. Al mover el punto M sobre el rayo L, la altura que alcanza el tráiler cuando pasa por la entrada del puente (PR) cambia en función de la posición del punto M. El punto S se define como el punto con la misma abscisa que el punto M (punto móvil) y cuya ordenada es el valor de la altura PR. Se observa que al mover el punto M, el punto S genera o traza un camino que representa la variación de la altura PR con relación a la posición del punto M.

Figura 4

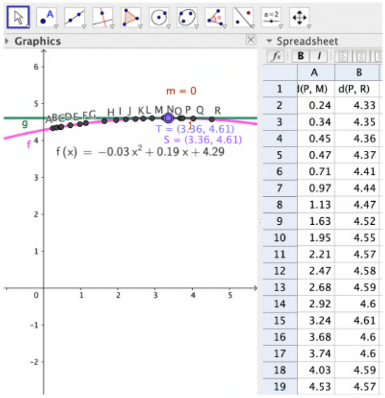
Trazo del camino que genera el punto S al mover el punto M



En la Figura 5 se muestra una tabla que incluye algunos valores de las coordenadas del punto S que se generan al mover el punto M. La función $f(x)$ es la curva ajustada a un polinomio de segundo grado y se observa que la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto T cambia dependiendo de la posición del punto. Cuando la pendiente es cero, se obtiene que el valor de la altura será el máximo (4.61). Es decir que la altura del puente necesita tener un valor mayor que 4.61 para que el tráiler no tenga problemas para cruzar por debajo de él.

Figura 5

Determinando el valor máximo de la altura del tráiler



En este ejemplo, se ilustra la importancia de que los estudiantes desarrollen recursos y estrategias que les permita problematizar situaciones que suceden a su alrededor (¿cómo modelar el comportamiento de una sustancia activa en el organismo de un paciente?) o que emergen en ambientes escolares (¿se puede determinar el área de un triángulo cuyos vértices son el ortocentro, circuncentro, y centroide de un triángulo dado?). En esta dirección, el uso sistemático y coordinado de tecnologías digitales no solo ofrece a los estudiantes la oportunidad de construir y explorar modelos dinámicos de los problemas, sino también potencia y expande las formas de razonamiento basados en el uso de lápiz y papel.

Sobre los escenarios híbridos de enseñanza y el uso de una bitácora digital

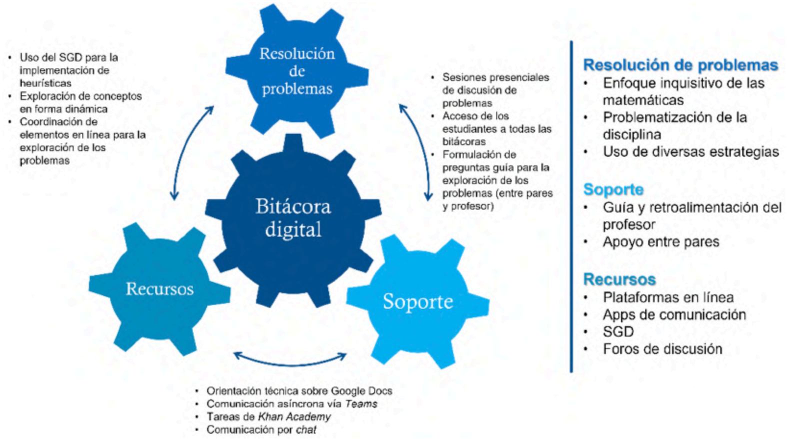
Uno de los retos que enfrentaron los estudiantes durante el confinamiento social impuesto por la pandemia COVID-19 fue el uso de aplicaciones y desarrollos digitales en sus actividades escolares. Así, las herramientas no solo incidieron en las formas en las que los estudiantes interactuaban y trabajaban las tareas matemáticas en colaboración con sus maestros y compañeros, sino que también les permitió continuar las discusiones más allá de las sesiones de clase y consultar libremente recursos en línea con la idea de revisar o extender la comprensión de conceptos o resolver problemas. ¿Qué transformaciones requieren los ambientes de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas en términos de la incorporación y conciliación del trabajo remoto o en línea y las actividades presenciales que se desarrollan en el salón de clase?

Ortiz-May (2024) diseñó e implementó un curso de cálculo diferencial e integral para estudiantes del nivel bachillerato centrado en la resolución de problemas, que incluye actividades presenciales y trabajo en línea o remoto. Un curso de esta naturaleza implica dos ideas importantes: a) el trabajo de problematizar los contenidos matemáticos en la resolución de problema, y b) la incorporación de tecnologías digitales como elementos clave en el desarrollo de ideas y procesos matemáticos. Aquí, la Bitácora Digital surge y funge como una herramienta que permite enlazar estos dos elementos en la medida que los estudiantes llevan a cabo un registro sobre sus acercamientos a la resolución de problemas y, adicionalmente, sobre cómo reflexionan acerca de ideas matemáticas clave.

El trabajo con una Bitácora Digital implica considerar un marco conceptual sobre las directrices a partir de las cuales se diseña, organiza e implementa un escenario de aprendizaje que incorpora elementos de trabajo remoto y presencial. Este marco conceptual se sintetiza en la Figura 6, donde destacan tres componentes relacionados: la resolución de problemas como acercamiento de enseñanza, el uso de recursos digitales y un sistema de retroalimentación para los estudiantes.

Figura 6

La bitácora digital y la resolución de problemas en el estudio de las matemáticas



La bitácora representa un instrumento para que los estudiantes, registren, estructuren y monitoreen sus acercamientos de resolución de problemas en términos de tres dimensiones relacionadas:

1. Un método inquisitivo que promueve el planteamiento de preguntas de los estudiantes como un medio para comprender conceptos y resolver problemas.
2. El uso coordinado de tecnologías o aplicaciones digitales (Dick & Hollebrands, 2011) para representar, explorar, y resolver problemas; y tecnologías de usos múltiples (internet, Zoom, Teams, etc.) que les permite presentar, discutir, y compartir ideas y resultados (Santos-Trigo & Reyes-Martinez, 2019); y

3. Un sistema de ayuda que ofrece a los estudiantes asesoría técnica, retroalimentación y formas de involucrarse en discusiones sincrónicas y remotas (Santos-Trigo et al., 2022).

En este contexto se ilustra el proceso de apropiación de la bitácora que los estudiantes mostraron durante el desarrollo de las actividades del curso.

Sobre el desarrollo y naturaleza de las sesiones

El curso se llevó a cabo en dos modalidades: (*i*) sesiones presenciales en el salón de clase, donde el maestro implementó y coordinó diversas dinámicas, incluyendo presentaciones y el trabajo por equipo. Aquí, los estudiantes tuvieron la oportunidad de problematizar los contenidos estudiados y los problemas que suelen encontrarse en los libros de texto a través de exploraciones con el uso de GeoGebra. En estas sesiones se plantearon y discutieron algunas preguntas sobre cómo representar los problemas en GeoGebra y cómo utilizar diversas herramientas para explorarlos. (*ii*) El trabajo en línea o remoto que los estudiantes registraban en un documento de *Google Docs*, donde incluían una mirada retrospectiva sobre sus acercamientos en las sesiones presenciales. Esto implicó complementar sus bitácoras con consultas externas en sitios web, o del contenido, orientados por el maestro a través de Teams o con el uso de la plataforma Khan Academy. La Tabla 1 sintetiza la forma de conducir las actividades del curso.

Tabla 1

Directrices del trabajo presencial y remoto durante el curso

Trabajo presencial	Trabajo remoto
El profesor:	
· Presentaba un problema ante el grupo, invitando a los estudiantes a explorarlo con GeoGebra · Monitoreaba el trabajo de los estudiantes, aclarando dudas conceptuales o técnicas · Planteaba preguntas guía (e.g., ¿cómo usar el modelo para resolver las actividades? ¿qué argumentos pueden construirse de manera adicional?); y · Exhortaba a los estudiantes a presentar sus resultados ante el resto del grupo, que mostrara aproximaciones que pudieran enriquecer el trabajo de los demás	· Asignaba cuestionarios, videos y artículos interactivos por medio de la plataforma Khan Academy para que los estudiantes revisaran extra-clase · Facilitaba materiales textuales, videos y presentaciones en el canal general de Teams para que los estudiantes consultaran; y, · Elaboraba cuestionarios de opción múltiple por medio de Teams para complementar el trabajo matemático de las sesiones presenciales.
Los estudiantes:	
· Trabajaban en grupos pequeños (de 1 a 3 integrantes) en representar los problemas en GeoGebra · Resolvían los problemas con ayuda de modelos dinámicos en GeoGebra; y · Realizaban un registro inicial en su bitácora (Google Docs)	· Complementaban sus bitácoras con reflexiones retrospectivas sobre su trabajo en las sesiones presenciales · Trabajaban en tareas asignadas por el profesor en Khan Academy y Teams; y · Buscaban y seleccionaban contenido que consideraran importante de incluir como complemento del trabajo matemático en las sesiones presenciales

La idea central de este modelo conceptual se basa en la interrelación de los elementos que lo componen. Esto significa que se promueve la apropiación de las herramientas digitales en términos de los significados matemáticos a los que pueden asociarse. Esto es posterior a una fase inicial en la que los estudiantes exploraron la interfaz general de GeoGebra; las tareas sirvieron como un medio por el cual los estudiantes activaron las herramientas de GeoGebra, de modo que estuvieran asociadas a la solución de problemas.

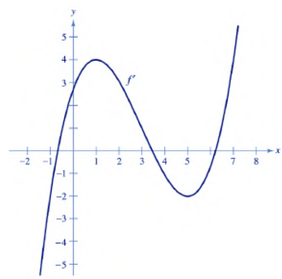
Exploración de un problema

Se presenta un ejemplo que muestra el trabajo de una pareja de estudiantes al resolver el problema:

Actividad A

La figura de la derecha muestra la gráfica de f'. Si se sabe que $f(0) = -4$, responde:

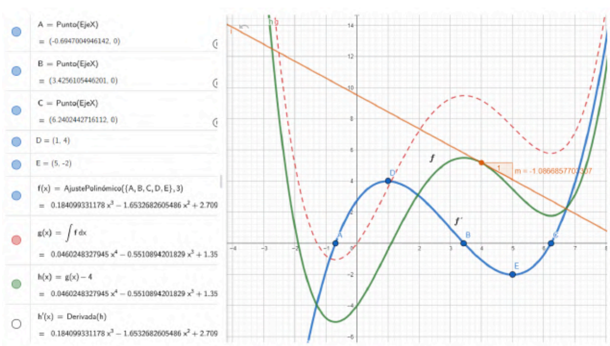
a) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente a f cuando $x = 4$?
b) ¿Es posible que $f(2) = -1$? ¿Por qué sí o por qué no?
c) ¿Se cumple que $f(5) - f(4) > 0$?
d) Bosqueja la gráfica de f



Algunas preguntas planteadas por el profesor con la intención de orientar a los estudiantes incluyen: ¿cómo se puede replicar o construir la curva f' con el uso de GeoGebra? ¿Qué información se puede identificar y extraer de la gráfica que permita la construcción de f'? ¿Se pueden identificar algunos puntos de f' en el plano cartesiano? ¿pueden argumentar de varias formas sus respuestas? Con base en estas preguntas, los estudiantes construyeron el modelo de la Figura 7.

Figura 7

Modelo https://www.geogebra.org/m/a3wzxjcp



En este modelo se observa que los estudiantes identificaron algunos puntos clave para la construcción de la figura, comparándolos visualmente con la figura de la Actividad A. Los estudiantes generaron la curva f' mediante la herramienta de ajuste polinomial. En el modelo también puede apreciarse el proceso de determinar f: se encuentra la antiderivada de f', obteniendo una función que pasa por el origen (curva punteada en la Figura 7). No obstante, se observa que después se define la función $h(x) = g(x) - 4$, la cuál los estudiantes nombran como f. Adicionalmente, los estudiantes trazan la recta tangente a la curva f cuando $x = 4$, que coincide con el valor de $f'(4)$.

Comentario. Los estudiantes caracterizaron la curva a través de la identificación de puntos clave en la imagen: sus raíces y sus extremos. El uso de un polinomio de grado 3 coincide con la intención de hacer que la figura no posea más “crestas", aunque esto también pudo haber ocurrido por medio de un proceso de prueba y error: elegir otro grado que no sea 3 permite ver a los estudiantes qué tanto coincide la curva obtenida con la figura asociada al Problema A. También se observa que los estudiantes toman en cuenta la relevancia de la constante de integración en el proceso de integración, ya que primero obtienen una función $g(x) = F(x) + C$, con $C = 0$. Puesto que en el enunciado del problema se especifica que , los estudiantes introducen la función $h(x) = g(x) - 4$,, es decir, trasladan verticalmente la curva encontrada hacia abajo para que cumpla con las condiciones del problema.

Registro de los estudiantes sobre la Actividad A

¿Cómo es el proceso de registrar y reflexionar las aproximaciones de los estudiantes respecto al problema? ¿Qué tipo de exploraciones y conexiones matemáticas emergen cuando los estudiantes exploran este problema a través de las herramientas de GeoGebra? A continuación, se presenta una transcripción sobre la forma en que los estudiantes registraron las respuestas al problema en su bitácora (Figura 8)

Figura 8

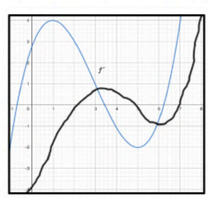
Bitácora

Para el inciso a, ya que nos están dando la función derivada el valor de la pendiente en f es igual al valor y de la derivada, por lo que el valor de la pendiente en $x = 4$ sería de aproximadamente -1.

Para el inciso b, la función integral de la derivada dada nos daría la función original, en el punto 0 tenemos un valor de -4 y en ese momento la derivada es positiva por lo que está creciendo. Visualmente, podemos calcular un cacho [una sección] *de la integral de f' de 0 a 2, que sería un poco más de 6 y por lo tanto* [al sumarle a -4] *no es -1.*

En el inciso c, ¿se cumple que $f(5) - f(4) > 0$? No, ya que viendo la función f' vemos que f creció antes de pasar primero por 4 y luego por 5 ya que la derivada es negativa, por lo que $f(4)$ es mayor a $f(5)$ por lo que la resta resulta en números negativos.

Bosquejo:



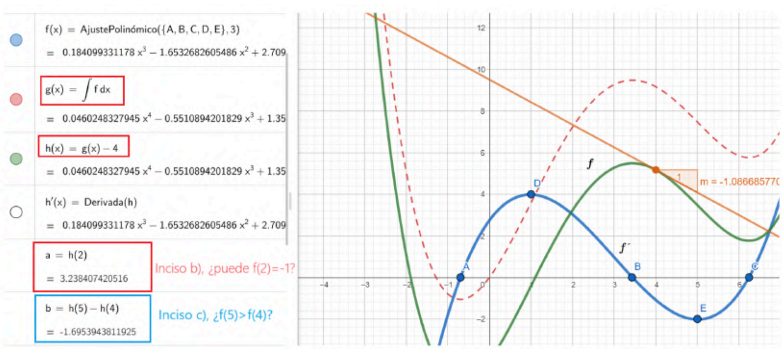
https://www.geogebra.org/m/a3wzxjcp

Comentario. En el trabajo con la bitácora digital puede notarse que los estudiantes aún exhiben cierta adherencia a reportar únicamente sus respuestas de modo que muestren de manera sintética sus resultados. No obstante, gracias al modelo que proporcionan, puede vincularse la forma en que llevaron a cabo sus razonamientos para dar respuesta a las preguntas a través de las herramientas de GeoGebra. Por ejemplo, se observa en el modelo de la Figura 7 que para el inciso a se llevó a cabo el proceso de obtener y trazar la recta tangente en $x = 4$.

Para el siguiente inciso, los estudiantes plantean un argumento geométrico. Nótese que una vez obtenida f, determinar si es posible que $f(2) = -1$ no consiste en una pregunta en la que sea necesario indagar, pues los estudiantes pueden obtener el valor en la Vista Algebraica de GeoGebra (Figura 9). Esto ocurre también con la siguiente pregunta, donde también pueden obtener la resta $f(5) - f(4)$ y verificar si es mayor o menor que cero.

Figura 9

Uso de la Vista Algebraica para responder los incisos b) y c)



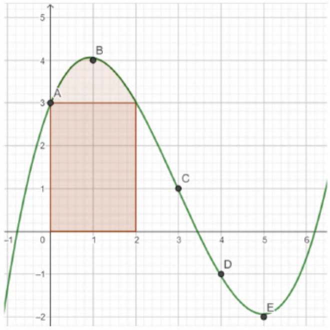
En este sentido, explorar el problema con GeoGebra significa generar argumentos a través de conectar ideas matemáticas. En su respuesta al inciso b, los estudiantes analizaron la gráfica de f' e interpretaron el área bajo la curva como la cantidad de acumulación o incremento que habría entre $f(0)$ y $f(2)$. Es decir, identificaron de manera empírica la siguiente relación:

$$\int_0^2 f'(x)\,dx = f(2) - f(0)$$

En la Figura 10 se ilustra el razonamiento que tratan de expresar los estudiantes: de 0 a 2, el área bajo la curva cubre un rectángulo de 6 unidades y un sobrante adicional, de modo que al sumar esta cantidad a , el resultado esperado tendría que ser mayor a -1.

Figura 10

Ilustrando la idea de acumulación



El empleo de recursos en la bitácora

En el proceso de organizar una bitácora digital es posible identificar el tipo de recursos que los estudiantes consideran al trabajar en las tareas matemáticas. En este ejemplo, los estudiantes identificaron la Actividad A como parte del estudio del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), de modo que crearon una sección con ese título. Durante el trabajo remoto, los estudiantes pudieron complementar su bitácora con exploraciones sobre el TFC. A continuación, se presenta una transcripción de esta sección (figura 11).

Figura 11

Bitácora

Teorema Fundamental del Cálculo TFC

El primer teorema nos dice que la derivada de una función equivalente a la integral desde 0 a otro valor(x) es igual a la función que se está derivando. La función equivalente G(x) da como resultado la integral desde 0 hasta x, también se puede interpretar como la antiderivada de la función que se deriva. El punto del teorema es relacionar la derivada y la integral siendo estas opuestas.

$$G(x) = \int_0^x f(t)dt\,, \qquad G'(x) = f(x)$$

https://www.geogebra.org/m/kz3uzqre

El segundo teorema nos dice que teniendo esta función equivalente F(x), la función antiderivada de la función a integrar, podemos calcular la integral de un punto (a) a (b) si obtenemos los valores de F(a) y F(b) y a la función del límite superior (b) le restamos la del límite inferior (a).

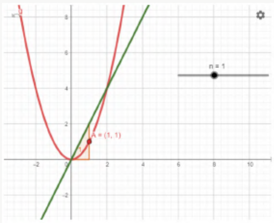
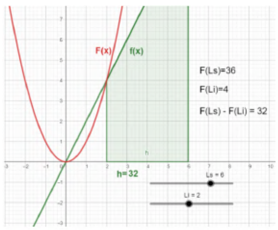
$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

https://www.geogebra.org/m/yu7tb7yk

En esta sección, los estudiantes construyeron dos modelos para explorar el TFC. Se incluyen los enlaces a los modelos y, gracias al protocolo de construcción de GeoGebra, es posible analizar el orden de construcción de los elementos del modelo. La Tabla 2 resume el contenido de estos modelos.

Tabla 2

Modelos exploratorios sobre las dos partes del TFC

Modelo dinámico	Descripción
 https://www.geogebra.org/m/kz3uzqre	Definen una función $f(x) = x$ y un deslizador n; a partir de ello, calculan el área bajo la curva de f en el intervalo $[0, n]$. Obtienen la antiderivada $F(x) = x^2$ y definen el punto $A = (n, f(n))$. El punto A siempre está sobre gráfica de la antiderivada al mover el deslizador. Es decir, F se define como una función que asocia el límite superior de integración de la integral definida $\int_0^n f(x)\,dx$ con el área bajo la curva.
 https://www.geogebra.org/m/yu7tb7yk	Definen la función $f(x) = x$ y obtienen su antiderivada $F(x) = x^2$. Crean dos deslizadores L_s y L_i los cuales son los límites superior e inferior del área bajo la curva de la función f. Por otro lado, calculan $F(L_s) - F(L_i)$. Al modificar los valores de los deslizadores, el área bajo la curva de f en el intervalo $[L_i, L_s]$ siempre es igual a la diferencia $F(L_s) - F(L_i)$.

El trabajo de la bitácora digital promueve en los estudiantes una perspectiva de las matemáticas donde se pueden realizar exploraciones de manera empírica con las herramientas de GeoGebra. Fuera del aula, los estudiantes tienen la oportunidad de construir sus propios acercamientos y modelos para complementar sus reflexiones sobre los conceptos matemáticos involucrados, en este ejemplo, se trata de la relación entre una función y su antiderivada a través del Teorema Fundamental del Cálculo. En este sentido, se rompe con la idea de que el aprendizaje matemático solo puede ocurrir dentro del salón de clases, y se promueven en los estudiantes ideas relacionas con la continuidad en sus procesos de exploración sobre problemas. Los hábitos inquisitivos sobre la reflexión de las interrelaciones matemáticas que están involucradas en la resolución de problemas son elementos clave para el desarrollo de competencias asociadas a la modelización matemática (Vorhölter et al., 2019). Adicionalmente, se argumenta que, en el uso de la bitácora digital, los estudiantes ponen en práctica elementos relacionados con la implementación de tecnologías digitales en la construcción de modelos matemáticos.

Discusión y Reflexiones finales

La educación matemática es una disciplina con una agenda de investigación y práctica que ha generado bases y marcos conceptuales que explican y caracterizan cómo se desarrolla el conocimiento matemático y las formas en que los estudiantes o maestros aprenden conceptos y construyen competencias de resolución de problemas (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1980; 1989; 2000). ¿Qué principios o fundamentos sustentan la perspectiva de organizar y estructurar las propuestas del currículum y los escenarios de aprendizaje en actividades que promuevan la formulación y resolución de problemas matemáticos? ¿Qué tipo de problemas y tareas matemáticas resultan importantes en la construcción de conceptos y en el desarrollo de competencias de resolución de problemas de los estudiantes? ¿Cuál es el papel del uso de las herramientas o cómo inciden en las formas en que los estudiantes/maestros representan, exploran, razonan, resuelven problemas y comunican resultados? En la discusión de estas preguntas se revisan los fundamentos de la resolución de problemas que conceptualiza la disciplina como un conjunto de dilemas que el maestro o estudiante resuelven con el uso de recursos y estrategias que son consistentes con las prácticas del desarrollo de la disciplina. En esa dirección, los estudiantes problematizan su aprendizaje y privilegian el planteamiento de preguntas como un medio para explorar conceptos y resolver problemas. El ejemplo del tráiler ilustra la actividad de problematizar un evento y representarlo por medio de un modelo matemático que permita resolver el problema. Además, en un acercamiento de resolución de problemas, los estudiantes siempre buscan diversas maneras de representar, explorar, y resolver las situaciones planteadas. Aquí, los estudiantes identifican los recursos y contrastan los conceptos y estrategias que emplean en los distintos métodos de solución. En este contexto, el uso coordinado de tecnologías digitales resulta importante en las formas de representar y explorar conceptos, así como en la generalización de resultaos y en la búsqueda de extensiones o nuevos problemas. Por ejemplo, el uso de un sistema de geometría dinámica, como GeoGebra, ofrece herramientas que les permiten construir modelos dinámicos de conceptos o problemas (Santos-Trigo, 2020b). La exploración de estos modelos, que resulta al mover algunos de sus elementos, los conduce a la búsqueda de relaciones o conjeturas asociadas con el comportamiento de los atributos y las formas o argumentos para sustentarlas.

En respuesta a la experiencia acumulada durante el periodo del confinamiento social debido a la pandemia COVID-19, se introduce el concepto de una bitácora digital como herramienta que los estudiantes usan para registrar, compartir, discutir, y monitorear no solo sus acercamientos y experiencias individuales en los procesos de comprensión de conceptos y resolución de los problemas, sino también como una herramienta de reflexión colectiva que les permite involucrase en discusiones sincrónicas o en línea entre pares y con el maestro, con la intención de evaluar el desempeño individual y del grupo como parte de una comunidad de aprendizaje. El trabajo que registran los estudiantes en la bitácora digital ofrece información relevante acerca de su desempeño, además de que es una oportunidad para que conozcan y contrasten las aportaciones y acercamientos de sus pares o compañeros.

A lo largo de la implementación de una bitácora digital, los estudiantes construyeron modelos dinámicos para explorar problemas matemáticos. Esto implica traducir una situación matemática (como en el caso del ejemplo presentado en este capítulo) o una situación contextual a una representación dinámica construida a través de herramientas de GeoGebra. Se argumenta que esto promueve en los estudiantes un conjunto de competencias necesarias para la práctica de modelación, en la medida en que se requiere representar figuras y relaciones estáticas, descritas en situaciones matemáticas, en términos de objetos dentro del SGD, donde el movimiento y la visualización son clave para el estudio de relaciones conceptuales. Aproximaciones como la bitácora digital permiten ver el potencial que tiene ofrecer a los estudiantes espacios donde pueden reflexionar sobre el grado de apropiación de herramientas digitales, particularmente un SGD, de modo que se abre la puerta a la posibilidad de que los estudiantes construyan modelos dinámicos a través de los cuales puedan interpretar y representar la realidad, en línea con lo descrito por Kaiser y Sriraman (2006). De este modo, se promueven competencias de modelado al interactuar con modelos dinámicos, activando conexiones profundas entre los objetos matemáticos.

Agradecimientos

Este capítulo ha sido realizado con el apoyo del Proyecto PID2022 - 139007NB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ FEDER, UE.

Referencias

Artigue, M. & Blomhøj (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM, 45*(6), 797–810. https://doi.org/ghqjcw

Berger, W. (2014). *A more beautiful question.* Bloomsbury Publishing.

Cai, J., & Nie, B. (2007). Problem solving in Chinese mathematics education: research and practice. *ZDM, 39*(5), 459–473. https://doi.org/b88vvs

Cevikbas, M., Kaiser, G. & Schukajlow, S. (2022). A systematic literature review of the current discussion on mathematical modelling competencies: State-of-art developments in conceptualizing , measuring, and fostering. *Educational Studies in Mathematics, 109*(2), 205–236. https://doi.org/g6vg

Cuoco, A., Goldenberg, E. P. & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(4), 375–402. https://doi.org/cgprqn

Devlin, K. (2002). *The millennium problems. The seven greatest unsolved mathematical puzzles of our time.* Granta Publications.

Dick, T. P. & Hollebrands, K. F. (2011). *Focus in high school mathematics: Technology to support reasoning and sense making.* National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM].

Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly, 87*(7), 519–524. https://doi.org/b75pwp

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., Olivier, A., & Wearne, D. (1996). Problem Solving as a Basis for Reform in Curriculum and Instruction: The Case of Mathematics. *Educational Researcher, 25*(4), 12–21. https://www.jstor.org/stable/1176776

Hilbert, D. (1902) Mathematical Problems. *Bulletin of the American Mathematical Society, 8*(10), 437–479. https://bit.ly/3DOsIk2

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM, 38*(3), 302–310. https://doi.org/df4smp

Koichu, B. (2010) On the relationships between (relatively) advanced mathematical knowledge and (relatively) advanced problem-solving behaviours. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(2), 257–275. https://doi.org/dcc2jw

Krutestkii, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. University of Chicago Press.

Liljedahl, P., & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. *ZDM, 53*(4), 723–735. https://doi.org/h8bk

Liljedahl, P. & Santos-Trigo, M. (2019) (Eds.). *Mathematical problem solving. Current themes, trends, and research.* Springer. https://doi.org/nzjw

Mason, J. (2016). When Is a Problem…? "When" Is Actually the Problem!. En P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems. Research in Mathematics Education* (pp. 263–285). Springer. https://doi.org/nzjz

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (1980). *An agenda for action*. NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles standards for school mathematics.* NCTM.

Ortiz-May, D. (2024). *La bitácora digital como herramienta reflexiva en un curso de cálculo integral de bachillerato.* [Tesis doctoral no publicada, CINVESTAV-IPN]

Pehkonen, E. (2019). An alternative method to promote pupils' mathematical understanding via problem solving. En P. Felmer, P. Liljedahl, & B. Koichu (Eds.), *Problem solving in mathematics instruction and teacher professional development* (pp. 111–122). Springer. https://doi.org/nzj3

Pólya, G. (1945). *How to solve it* (2nd edition, 1957). Princeton University Press.

Romberg. T. A., & Kaput, J. J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. En E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 3-17). Routledge. https://doi.org/nzjv

Santos-Trigo, M. (2024). Problem solving in mathematics education: tracing its foundations and current research-practice trends. *ZDM, 56*(2). 211–22. https://doi.org/nzjr

Santos-Trigo, M. (2019). Mathematical Problem Solving and the use of digital technologies. En P. Liljedahl, & M. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving. Current Themes, Trends, and Research, ICME 13 Monographs* (pp. 63–89). Springer. https://doi.org/nzj2

Santos-Trigo, M. (2020a). Problem-solving in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 686–693). Springer. https://doi.org/nzjq

Santos-Trigo, M. (2020b).: Prospective and practicing teachers and the use of digital technologies in mathematical-problem solving approaches. En S. Llinares, & O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education* (vol. 2, pp. 163–195). Brill. https://doi.org/nzj6

Santos-Trigo, M. & Reyes-Martínez, I. (2019) High school prospective teachers' problem-solving reasoning that involves the coordinated use of digital technologies. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50*(2), 182–201. https://doi.org/gjxpdv

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Gómez-Arciga, A. (2022). A conceptual framework to structure remote learning scenarios: a digital wall as a reflective tool for students to develop mathematics problem-solving competencies. *International Journal of Learning Technology, 17*(1), 27–52. https://doi.org/nzj5

Santos-Trigo, M., Camacho-Machín, M. & Barrera-Mora, F. (2024). Focusing on foundational Calculus ideas to understand the derivative concept via problem-solving tasks that involve the use of a Dynamic Geometry System. *ZDM, 56*(6), 1287–130. https://doi.org/nzj7

Schoenfeld, A. H. (1983), The wild, wild, wild, wild world of problem solving: A review of sorts. *For the Learning of Mathematics, 3*(3), 40–47. https://www.jstor.org/stable/40247835

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Schoenfeld A. H (1992) Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D.A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). National Council of Teachers of Mathematics-Macmillan Publishing Company.

Schoenfeld, A. H. (2020). Mathematical practices, in theory and practice. *ZDM, 52*(6),1163–1175. https://doi.org/gkchwr

Schoenfeld, A.H. (2022). Why Are Learning and Teaching Mathematics So Difficult? En Danesi, M. (Ed.), *Handbook of Cognitive Mathematics.* Springer. https://doi.org/nzjs

Schoenfeld, A.H. (2023). A Theory of Teaching. En A.-K.Praetorius, C. Y. Charalambous (Eds.), *Theorizing Teaching* (pp. 159–187). Springer. https://doi.org/nzjt

Selden, A., Selden, J. & Mason, A. (1989). Can average calculus students solve non routine problems? *Journal of Mathematical Behavior, 8*, 45–50 .

Toh, T. L., Santos-Trigo, M., Chua, P. H., Abdullah, N.A., & Zhang, D. (Eds.). (2023). *Problem posing and problem solving in mathematics education: International research and practice trends*. Springer. https://doi.org/nzjx

Törner, G., Schoenfeld, A. H., & Reiss, K. M. (2007). Problem solving around the World: Summing up the state of the art. *ZDM, 39*(5), 353. https://doi.org/d49gtk

Vorhölter, K., Greefrath, G., Borromeo Ferri, R., Leiß, D., & Schukajlow, S. (2019). Mathematical Modelling. En H. Jahnke, & L. Hefendehl-Hebeker (Eds.), *Traditions in German-Speaking Mathematics Education Research (ICME-13 Monographs* (pp. 91–114). Springer. https://doi.org/nzj8