

# Diseño de una propuesta didáctica de modelización matemática para la formación de futuros docentes

Luis Miguel Paz-Corrales <sup>1</sup> 

Maleni M. Pérez-Sarmiento <sup>2</sup> 

Avenilde Romo-Vázquez <sup>3</sup> 

## Resumen

La modelización se ha ido integrando progresivamente a la enseñanza de las matemáticas en diferentes niveles educativos. Sin embargo, siguen siendo escasas las propuestas didácticas en la formación de profesores de matemáticas que contemplen actividades de modelización en contextos extramatemáticos. Esto se debe, al menos en parte, a la complejidad que puede suponer para los profesores de matemáticas familiarizarse con el papel que desempeñan los modelos matemáticos en estos contextos. Una forma de superar esta complejidad es generar propuestas de enseñanza de la modelización matemática para la formación de profesores, basadas en un referente epistemológico derivado del análisis de dichos contextos. Con base en ello, y utilizando herramientas de la teoría antropológica de la didáctica y la metodología de la ingeniería didáctica, se diseñó una propuesta didáctica de modelización extramatemática centrada en el estudio de un desfibrilador, en la que se utilizan ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos asociados a un circuito eléctrico RC, como una vía para integrarla a la formación docente.

## Palabras clave

Desfibrilador, ecuaciones diferenciales, formación docente, modelización matemática.

---

<sup>1</sup> luismiguel.paz@cinvestav.mx  
Cinvestav, México

<sup>2</sup> maleni.perez@cinvestav.mx  
Cinvestav, México

<sup>3</sup> avenilde.romo@cinvestav.mx  
Cinvestav, México

Paz-Corrales, L. M., Pérez-Sarmiento, M. M., & Rómo-Vázquez, A. (2025). Diseño de una propuesta didáctica de modelización matemática para la formación de futuros docentes. En A. Solares-Rojas, & A. P. Preciado Babb (Eds.), *La investigación en modelización matemática: un diálogo entre educadores de Latinoamérica y España* (pp. 87–114). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S2/2025/01-04>

## Abstract

The integration of modelling into mathematics teaching has been progressively implemented across different educational levels. However, there is still a scarcity of didactic proposals in mathematics teacher education considering modelling activities in extra-mathematical contexts. This is partly due to the complexity that mathematics teachers may experience in familiarising themselves with the role that mathematical models play in these contexts. One way to overcome this complexity is to generate proposals for teaching mathematical modelling for teacher education based on an epistemological reference derived from the analysis of such contexts. Based on this, and using tools from the anthropological theory of the didactic and the methodology of didactic engineering, a didactic proposal for extra-mathematical modelling focused on the study of a defibrillator was designed, in which differential equations are used as mathematical models associated with an RC electrical circuit, as a path for integrating it into teacher education.

## Keywords

Defibrillator, differential equations, teacher education, mathematical modelling.

## Introducción

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) a través de sus evaluaciones internacionales (e.g., PISA) ha impulsado la integración de la modelización en la enseñanza de las matemáticas elementales para formar ciudadanos con capacidad para comprender, cuestionar y transformar su mundo. En efecto, varios planes de estudio se han modificado, desde niveles elementales hasta el bachillerato, integrando la modelización matemática a los objetivos de enseñanza de diversos países (Frejd, 2013; Jessen & Kjeldsen, 2021; Rodríguez, 2010). Sin embargo, esto resulta un desafío para los profesores, quienes no han recibido una formación específica (Sen Zeytun et al., 2023), y presentan dificultades para modelar situaciones en “contexto”, al que ellos reconocen como “incidental, sirve poco o nada” (Corriveau, 2022, p. 79). La desconexión entre la formación de profesores y las exigencias del curriculum es conocida como la *segunda discontinuidad* de Klein desde 1908, y considerada como una de las problemáticas centrales en la formación de profesores de matemáticas (Guedet et al., 2016; Kilpatrick, 2019). De acuerdo con Klein (2016/1933), este fenómeno consiste en dejar de lado las matemáticas universitarias estudiadas para enseñar las matemáticas del bachillerato. Para abordarlo, Klein propuso “ofrecer cursos que mostraran conexiones entre problemas de diversos campos de las matemáticas, y desarrollar cursos universitarios en matemáticas elementales desde un punto de vista superior” (Kilpatrick, 2019, p. 218).

La segunda discontinuidad de Klein ha sido retomada recientemente, mostrando la vigencia de su esencia y las particularidades que imponen las condiciones actuales (e.g., Barquero & Winsløw, 2022; de los Ángeles et al.,

2022; Eichler & Isaev, 2023; Pramasdyahsari et al., 2019). Winsløw y Grønbaek (2014) han analizado la segunda discontinuidad desde tres dimensiones: contexto institucional, rol del sujeto y contenidos matemáticos. Con base en ello, en esta investigación se propone una cuarta dimensión: modelización extramatemática (universidad vs. bachillerato). Klein sostiene que los estudiantes deben aprender a contemplar los fenómenos matemáticos de su entorno en lugar de aplicar las matemáticas a contextos artificiales, así como que la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato debe ser más intuitiva, mientras que en la universidad incluir más matemáticas aplicadas (Mattheis, 2019; Weigand, 2019). Lo anterior se refleja en el tercer volumen de su obra (Klein, 2016/1928), centrado en las matemáticas de precisión y de aproximación, i.e., en el vínculo entre las matemáticas y sus aplicaciones (Menghini, 2019). Lo anterior lleva a cuestionarse ¿qué tipo de propuestas didácticas para la formación docente pueden diseñarse con el objetivo de integrar la modelización asociada a contextos extramatemáticos? Para abordarla, se consideró el modelo de los Recorridos de Estudio y de Investigación para la Formación de Profesores y la metodología de diseño: la ingeniería didáctica, como se ilustra en las secciones siguientes.

### **Elementos de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)**

La TAD ofrece un modelo epistemológico para el análisis de la actividad humana en su dimensión institucional (Chevallard, 1999).

### **Dos nociones centrales: institución y praxeología**

Las nociones básicas de *institución* y de *praxeología* son fundamentales. Las *instituciones* son organizaciones sociales estables que hacen posible las actividades humanas, que pueden analizarse a través de un modelo único: la *praxeología*. Sus cuatro elementos son los siguientes: tipo de tarea, técnica, tecnología y teoría. Las *praxeologías* matemáticas y las de modelización matemática son similares, ya que “hacer matemáticas consiste mayoritariamente en producir, transformar, interpretar y desarrollar modelos matemáticos” (Barquero et al., 2019, p. 321). Las *praxeologías* pueden crearse, enseñarse y utilizarse en cualquier institución (por ejemplo, universidad, bachillerato, lugar de trabajo) y pueden circular entre instituciones (Chevallard, 1999).

### **Los Recorridos de Estudio e Investigación para la formación de profesores**

Los Recorridos de Estudio y de Investigación para la formación de profesores (REI-FP) constituyen un modelo de enseñanza de la modelización matemática para los futuros profesores, mediante un enfoque de investigación en el aula. Se enmarcan en el paradigma del *cuestionamiento del mundo* de la TAD (Chevallard, 2015), enfocado en el estudio de preguntas abiertas  $Q$ ,

provenientes de diferentes instituciones: cotidianas, académicas, industriales, etc. En este modelo, el sistema didáctico  $S$  se conforma por tres elementos: conjunto de futuros docentes  $X$ , conjunto de formadores  $Y$ , y una cuestión  $Q$ , que a partir de un medio didáctico  $M$  –conjunto de todos los recursos utilizados para estudiar  $Q$ – producen una respuesta válida  $R^\heartsuit$ , significativa en determinada institución. Lo anterior puede esquematizarse de la siguiente manera:

$$S(X; Y; Q) \leftrightarrow M \hookrightarrow R^\heartsuit$$

Los elementos que conforman el medio didáctico, subcuestiones, respuestas existentes, conocimientos, datos, teoremas y modelos matemáticos, resultan fundamentales en el estudio de  $Q$  y pueden ser generados por los participantes u obtenidos de los *medias* –fuentes de información, obras, libros de texto, artículos, expertos, programas computacionales, sitios web, entre otros–. Así, por ejemplo, una ecuación diferencial (ED) que modele el comportamiento de un circuito eléctrico es un elemento del medio que pudo ser obtenido de algún *media*, por ejemplo, de un artículo de investigación o de un sitio web. Un medio inicial y ciertos *medias* pueden ser propuestos por los formadores, con el objetivo de motivar el inicio del proceso de investigación (Barquero & Romo-Vázquez, 2022). Para analizar los REI-FP se proponen nueve dialécticas, como la de cuestiones y respuestas y la de media–medio. La primera elucida cómo las respuestas de ciertas cuestiones y subcuestiones permiten proponer una respuesta de  $Q$ , la cual puede ser representada mediante un mapa de cuestiones y respuestas (Winslów et al., 2013). La segunda evidencia la forma en que el medio se construye a partir de ciertos *medias*.

### **Metodología: La ingeniería didáctica**

La metodología de la ingeniería didáctica ha sido utilizada en el diseño e implementación de propuestas didácticas, por ejemplo, de modelización matemática (Artigue, 2020; Barquero & Bosch, 2015; García et al., 2019; Ramírez-Sánchez et al., 2023). Sus cuatro fases son las siguientes: (1) análisis preliminares; (2) diseño y análisis a priori; (3) experimentación y análisis in vivo; y (4) análisis a posteriori.

Una característica esencial de la ingeniería didáctica es su coherencia interna, basada en la confrontación entre los análisis a priori y los análisis a posteriori. Esto significa que la primera y la segunda fase permiten que haya una validez teórica del diseño, mientras que la tercera y la cuarta garantizan su validez experimental (Artigue, 2020). Este capítulo se enfoca en las dos primeras fases, donde se muestra cómo los resultados de los análisis preliminares fueron fundamentales para el diseño de una propuesta didáctica de modelización extramatemática, destinada a la formación de profesores de matemáticas. Se destaca también cómo el análisis a priori proporciona

elementos clave para anticipar el comportamiento de los sujetos genéricos y epistémicos, aunque se considere determinada institución, en este caso, la Universidad Pedagógica de Honduras (UPN), la única en este país que ofrece esta formación inicial.

### **Análisis preliminares**

Estos análisis pueden variar dependiendo del interés del estudio, por ejemplo, pueden incluirse análisis de la relación entre diversos conceptos matemáticos y el grupo de estudio; las dificultades que se presentan durante la enseñanza tradicional del tema y el análisis epistemológico del contenido enseñado (Artigue et al., 1995). En resumen, esta fase incluye tres análisis: epistemológico, didáctico e institucional. Se trata de una fase crucial ya que implica la construcción de un modelo epistemológico de referencia del saber en cuestión, así como la identificación de fenómenos didácticos hipotéticos (que no dependen del profesor ni del estudiante). Al respecto, Artigue (2020) señala que “se hace explícito el hecho de que el análisis a priori concierne a un sujeto genérico y epistémico” (p. 33). A continuación, se presentan el análisis institucional y el epistemológico, después se muestran los análisis de tres praxeologías de modelización matemática con el objetivo de tener un referente epistemológico y didáctico de los circuitos eléctricos RC como contexto extramatemático, y del proceso de modelización que involucra ecuaciones diferenciales (ED) y transformadas de Laplace (TL).

### *Análisis institucional*

La educación universitaria de los profesores de matemáticas en Honduras establece como perfil de egreso que ellos podrán impartir clases de matemáticas en los niveles de secundaria y bachillerato. Desde sus inicios, en 1959, los planes de estudio han mantenido tres áreas de formación: general, pedagógica y específica. A partir de 1989 se imparte un curso de ecuaciones diferenciales (Benavides-Cerrato et al., 2022). Más recientemente, en 2008, se implementó un enfoque basado en competencias en esta formación (Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán [UPNFM], 2008), que incluye la competencia de modelización matemática.

### *Análisis epistemológico*

La teoría de las ecuaciones diferenciales ha evolucionado desde la fundación del cálculo en el siglo XVII, y se pueden distinguir tres enfoques diferentes para su desarrollo y aplicación en la ciencia, como señalan Artigue y Rogalski (1990): algebraico, numérico y geométrico. El algebraico busca la resolución “exacta” de las ecuaciones mediante fórmulas; el numérico se centra en encontrar soluciones “aproximadas” a través de métodos computacionales; y el geométrico se dedica al estudio cualitativo global de las curvas de solución

de la ecuación diferencial. El enfoque algebraico predominó en este campo científico hasta que, a finales del siglo XIX, surgió el enfoque geométrico propuesto por Poincaré. Con el rápido avance de los sistemas dinámicos y el desarrollo de la tecnología digital se produjeron cambios que han favorecido los enfoques cualitativo y numérico. Por ejemplo, el desarrollo de una ingeniería didáctica<sup>1</sup> por Artigue, cuya motivación fue introducir a los estudiantes universitarios en el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales.

### *Análisis didáctico*

#### *Praxeología de una ED que modela un circuito eléctrico RC*

En el curso de ED para la formación de profesores de matemáticas de la UPN se considera a Zill (2013) como su bibliografía principal, por lo que se hizo un análisis, de la forma en que es abordada la modelización matemática, considerando, para ello, los capítulos 1 y 7. En el capítulo 1 se introduce a las ED como modelos matemáticos en diferentes disciplinas (e.g., biología, química y física) y se presentan dos enfoques denominados “análisis cualitativo” y “método analítico” para resolver ED. El *método analítico* consiste en la búsqueda de soluciones de una ED, y el *análisis cualitativo* permite responder preguntas del tipo ¿Qué podemos decir acerca de la geometría de las curvas de solución? Estos métodos pueden ser utilizados para realizar tareas relativas a las aplicaciones dentro del proceso de modelización, que el autor describe como: “(1) Supuestos e hipótesis, (2) Formulación matemática, (3) Resolver las ED, (4) Mostrar las predicciones del modelo” (Zill, 2013, p. 21). De acuerdo con Zill (2013), los matemáticos han adoptado como propias algunas palabras de ingeniería que consideran adecuadas para describir sistemas modelados por ED, por ejemplo, en el contexto de los circuitos, al analizar la solución de una ED, aparecen las palabras transitorio o de estados estacionario. También se usan las palabras entrada y salida cuando se dice que la función  $f$  es la función de entrada o de conducción, y la solución  $y(x)$  de la ED para una entrada dada se llama salida o respuesta.

En el capítulo 7 se ilustra el método analítico mediante la TL, la cual genera una de las técnicas que permite resolver una ED. En este análisis se identificó una praxeología cuyo tipo de tarea es el siguiente: Resolver una ED que modela un circuito eléctrico RC en serie (Figura 1a), y también se presenta un diagrama del circuito eléctrico (ver Figura 1b).

Para resolver esta tarea, se propone una técnica basada en la TL, conformada por cuatro pasos elementales:

Paso 1. Sustituir los datos dados en la ED.

Paso 2. Aplicar la TL a la ED.

<sup>1</sup> Entrevista a Artigue cuando recibió la Medalla Felix Klein en 2013. Publicada en *Leaders in Mathematics Education: Experience and Vision*.

Paso 3. Despejar  $Y(s)$  y descomponer en fracciones parciales.

Paso 4. Aplicar la TL inversa para obtener la solución de la ED.

### Figura 1

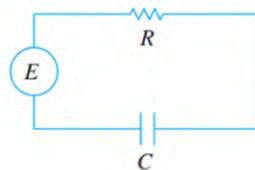
(a) Tarea sobre circuito RC en serie, modelado como una ED; (b) Circuito RC en serie

La corriente  $i(t)$  en un circuito RC en serie se puede determinar de la ecuación integral

$$Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E(t),$$

donde  $E(t)$  es el voltaje aplicado. Determine  $i(t)$  cuando  $R = 10 \Omega$ ,  $C = 0.5 \text{ f}$  y  $E(t) = 120t - 120t \mathcal{U}(t - 1)$ .

(a)



(b)

Nota. (a) Fuente: Zill (2013), p. 302; (b) Fuente: Zill (2013), p. 29

En el paso 1 se sustituyen los datos en la ED, modelo matemático dado del sistema, sin necesariamente requerir una reflexión sobre el significado de la resistencia  $R$  o del capacitor  $C$ , ya que resulta indistinto el sistema a modelar (e.g., un circuito RC o RLC, una masa-resorte, el crecimiento poblacional). Es decir, no se requieren conocimientos sobre el contexto extramatemático. Para los pasos 2 y 4 se recurre al uso de tablas sobre la TL, que aparecen en un apéndice del libro de texto, o al uso de teoremas previamente enunciados y no necesariamente demostrados. Además, en esta tarea se añade un quinto paso que consiste en mostrar las predicciones del modelo. Este paso, que no es común en las técnicas expuestas en este libro (análisis cualitativo), resulta interesante porque se menciona someramente que la solución de la ED es una función continua, aunque el voltaje sea una función discontinua. Lo anterior evidencia que, a menudo, los supuestos e hipótesis involucrados en el proceso de modelización no son tomados en cuenta. El acento está puesto sobre el manejo de la técnica para resolver una ED mediante la TL y no en las adaptaciones requeridas para convertirla en una técnica de modelización para contextos extramatemáticos. Lo que lleva a cuestionarse cómo se presenta esta técnica matemática en contextos extramatemáticos. Abordar esta cuestión resulta crucial para integrar la modelización extramatemática en la formación de futuros docentes, quienes al finalizar sus estudios universitarios se verán enfrentados a la enseñanza de la modelización extramatemática en el bachillerato. Para este diseño, se optó por los circuitos eléctricos por al menos dos razones: (1) los circuitos se modelan utilizando ED, cuya técnica de solución, generalmente, está basada en la TL; (2) los circuitos son abordados tanto en la formación de profesores, específicamente en el curso de ED, como en el Bachillerato Técnico Profesional en Electricidad.

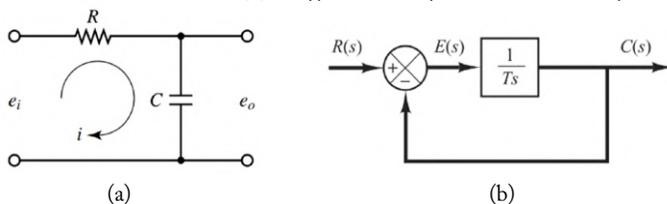
### *Praxeología de modelización de un circuito eléctrico*

La praxeología de modelización de un circuito eléctrico fue identificada y analizada en el libro de texto *Ingeniería de control moderna* (Ogata, 2010). Su análisis mostró que las ED son utilizadas ampliamente en la resolución de tareas extramatemáticas (e.g., circuitos eléctricos; masa-resorte). A diferencia de Zill (2013), el estudio de la noción de función de transferencia resulta central, pues relaciona la función de salida con la de entrada, y es obtenida al aplicar la TL a una ED que modela el comportamiento de un sistema físico. Esta noción es importante porque permite estudiar y controlar dicho sistema, i.e., determinar su estabilidad. A continuación, se describen los elementos de esta praxeología:

El tipo de tarea  $T'_*$  Modelar sistemas eléctricos, consiste en determinar la función de salida de un sistema de primer orden de lazo cerrado, circuito RC, dada la función de entrada: escalón unitario. Al igual que en Zill (2013), se presenta un diagrama del circuito (Figura 2a), pero se introduce un nuevo elemento, un diagrama de bloques (Figura 2b).

### **Figura 2**

(a) Diagrama de circuito RC en serie. (b) Diagrama de bloques de un sistema de primer orden



Nota. Fuente: Ogata (2010), pp. 161–162.

La técnica se describe en cinco pasos:

Paso 1. Aplicar la TL a la función de entrada y sustituir en la función de transferencia dada.

Paso 2. Despejar para  $C(s)$ .

Paso 3. Hacer la descomposición en fracciones parciales.

Paso 4. Aplicar la TL inversa y obtener la señal de salida  $c(t)$ .

Paso 5. Analizar la estabilidad relativa y el error en estado estacionario.

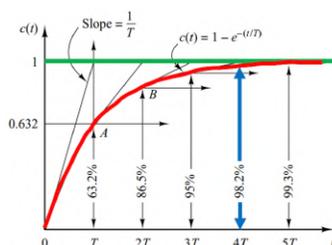
Al comparar esta técnica con la presentada en Zill (2013) se identifican pasos comunes, por ejemplo: aplicar la TL a la ecuación dada, descomponer en fracciones parciales y aplicar la TL inversa para obtener la solución. La TL es una herramienta que facilita la transición del análisis de un fenómeno en el dominio del tiempo, representado por una ecuación diferencial, al análisis en el dominio de la frecuencia, expresado como una ecuación algebraica. En este sistema se espera que la función de salida  $c(t)$  se comporte como la función de entrada (la función escalón unitario), esto es

$0 \leq c(t) < 1$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , ya que la pendiente  $\frac{1}{T}$  disminuye a medida que aumenta el valor de  $t$ , i.e., el estado estacionario se alcanza matemáticamente en un tiempo infinito.

Sin embargo, en la práctica, una estimación razonable para  $t$  sucede en el cuarto instante de tiempo (Figura 3) para garantizar que el comportamiento del sistema sea estacionario. De este modo, la respuesta se mantiene dentro del 2% del valor final deseado.

### Figura 3

Respuesta escalón unitario



Nota. Fuente: Ogata (2010), pp. 162.

Los análisis anteriores permitieron comprender, al menos parcialmente, el estado actual de la enseñanza de las ED (Zill, 2013) y su aplicación en contextos extramatemáticos (Ogata, 2010). Esto reveló que ambas praxeologías se enmarcan en un paradigma contrario al del cuestionamiento del mundo (véase un análisis más detallado de ambas praxeologías en Paz-Corrales et al., 2023). En coherencia con este paradigma, resulta legítimo preguntarse ¿cuáles son las aplicaciones de los circuitos eléctricos? Esta pregunta ha llevado a considerar una tercera praxeología, centrada en el estudio de una aplicación específica: los desfibriladores.

#### *Praxeología de modelización matemática del desfibrilador*

La praxeología de modelización matemática del desfibrilador es un ejemplo de los circuitos RC en serie, modelados con una ED de primer orden. Con base en Rodríguez (2010) y Silva (2018) se identificó la siguiente praxeología:  $T^*$ : Modelar un desfibrilador como un circuito eléctrico a partir de su diagrama y establecer los valores de sus parámetros.

Paso 1: Establecer la ED que modela el desfibrilador como circuito RC en serie.

Paso 2: Resolver la ED usando TL con el PVI:  $V(0) = V_0$

Paso 3: Determinar el valor del capacitor.

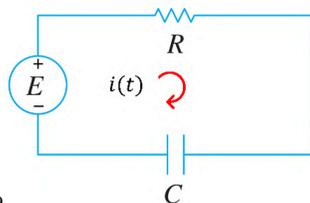
Paso 4: Determinar el voltaje que el capacitor necesita almacenar para generar la descarga esperada.

Paso 5: Calcular la resistencia que interviene en la alimentación del capacitor, lo que influirá en el tiempo de carga.

Para llevar a cabo los pasos de esta técnica se consideran estos supuestos: el cuerpo humano, específicamente, el corazón, se modela como una resistencia pura de  $75 \Omega$ , se requiere que el shock transmita el 85% de la energía en 8 ms y una energía de 360 J y el tiempo de carga es de  $t = 4$  s.

#### Figura 4

Diagrama circuito RC en serie



Nota. Fuente: Zill (2013), p. 29

En el paso 1 los circuitos son analizados a través de tres leyes. Las primeras dos, son las leyes de corrientes y voltajes de Kirchhoff y la tercera es la ley de Ohm: el voltaje a través de una resistencia es directamente proporcional a la intensidad que en ella fluye:  $V = iR$ . Para el circuito de la Figura 4 se usa la ley de nodos de Kirchhoff, que establece que en cualquier instante de tiempo la suma de las corrientes  $i$  es cero (ecuación 1). Dado que se estudia la descarga del capacitor sobre la resistencia, el voltaje del generador debe ser considerado cero, i.e.,  $V(0) = V_0$  en  $t = 0$ . En la ecuación 2, la intensidad es proporcional al cambio de voltaje con respecto al tiempo y el segundo término se deduce por la ley de Ohm.

$$i_C + i_R = 0 \quad (1)$$

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{R}v = 0 \quad (2)$$

En el segundo paso se aplica la TL a la ED y la TL inversa, así resulta la solución de la ED:

$$C(s v(s) - V(0)) + \frac{1}{R}v(s) = 0$$

$$v(s) = \frac{V_0}{Cs + \frac{1}{R}} = \frac{\frac{CV_0}{C}}{s - \left(-\frac{1}{RC}\right)}$$

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Para determinar el valor del capacitor  $C$ , correspondiente al tercer paso, se debe considerar que la capacitancia se define como  $C = \frac{q}{V}$ , el voltaje a través del capacitor será  $V_c = \frac{q}{c}$ , de esta forma se obtiene que

$$q(t) = CV(t) \longrightarrow q(t) = CV_0 e^{-\frac{1}{RC}t} = q_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Se sabe que se transmite el 85% de la energía en  $t = 8 \text{ ms}$ , esto implica que  $q(t) = 0.15q_0$ , sustituyendo:

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \rightarrow 0.15q_0 = q_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$C = -\frac{t}{R \ln(0.15)} = -\frac{8 \times 10^{-3} \text{ s}}{(75 \Omega) \ln(0.15)} = 56.22 \mu\text{F}$$

En el cuarto paso, se utiliza la relación  $E = \frac{1}{2} C V^2$ , obteniéndose el voltaje:

$$V = \sqrt{\frac{2E}{C}} = \sqrt{\frac{2(360 \text{ J})}{56.22 \times 10^{-6} \text{ F}}} = 3578.4856 \text{ V}$$

En el paso 5 se retoma la relación  $\tau = RC$  como una constante de tiempo y se establece que el tiempo en que se estabiliza el capacitor es  $t = 5\tau$ , lo que implica que

$$\tau = \frac{t}{5} = \frac{4}{5} = 0.8 \text{ s}$$

finalmente:

$$R = \frac{\tau}{C} = \frac{0.8 \text{ s}}{56.22 \times 10^{-6} \text{ F}} = 14.22 \text{ k}\Omega.$$

La técnica de esta tercera praxeología comparte ciertos pasos con las técnicas expuestas en Zill (2013) y Ogata (2010), como aplicar la TL al modelo matemático y descomponer la expresión resultante en fracciones parciales, entre otros procedimientos. No obstante, la praxeología del desfibrilador es particularmente interesante porque desarrollar su técnica requiere situarse en un enfoque de indagación, que permite establecer una serie de hipótesis sobre el fenómeno (tecnología). Este enfoque refleja el primer paso del proceso de modelización con ED descrito por Zill (2013) (ver análisis didáctico), pero no se encuentra en la técnica de las dos primeras praxeologías.

## **Fase 2. Diseño del REI-FP “Caracterización de los componentes electrónicos de un desfibrilador” y análisis a priori**

El diseño del REI-FP se basó en los análisis preliminares, así como en el diseño y análisis de un REI inicial, que fue experimentado con tres participantes.

### *REI inicial*

La tarea de modelización matemática abierta, que consistía en la caracterización de los componentes electrónicos del circuito de un desfibrilador, a partir de especificaciones de diseño impuestas, se planteó a tres participantes: un programador, una ingeniera y un profesor de matemáticas, todos

con experiencia en investigación, pero sin conocimientos previos en electrónica. Se les dio la libertad de identificar las suposiciones necesarias para abordar la tarea propuesta, así como de diseñar el proceso de indagación, incluyendo la selección de fuentes de información y los elementos del medio (tales como subcuestiones, respuestas existentes, uso de simuladores). La situación presentada fue la siguiente:

La nueva reforma de prevención de muerte súbita cardíaca de la Secretaría de Salud exige que todos los centros laborales, educativos, deportivos y sociales, tanto públicos como privados, estén equipados con desfibriladores. En la unidad del Consejo Nacional de Protección de la escuela donde usted labora, se han cotizado diversos modelos de acuerdo con las especificaciones establecidas por dicha secretaría.

Sin embargo, los desfibriladores disponibles están fuera del presupuesto escolar. Por lo tanto, se ha decidido que los profesores se organicen para construir uno. Un ingeniero biomédico les ha proporcionado un diagrama electrónico (ver Figura 5) y les ha indicado que, proponiendo los valores adecuados para los componentes del diagrama, se asegura el funcionamiento correcto del equipo.

Para abordar esta situación, se les proporcionó un *media*: un artículo de electrónica básica para equipo médico. La premisa subyacente era que personas sin conocimientos previos sobre desfibriladores y circuitos podrían resolverla, adquiriendo nuevos conocimientos a través de un enfoque de indagación, lo cual es coherente con los REI en el paradigma del *Cuestionamiento del mundo*. Las respuestas al REI producidas por los tres participantes revelaron que la naturaleza abierta de esta tarea dificultaba su abordaje para personas con escasa experiencia en electrónica. Por ejemplo, mientras se esperaba que el cálculo inicial se centrara en la capacitancia del capacitor, el programador consideró al transformador como el componente protagonista. La ingeniera, por su parte, consideró que el capacitor solo funcionaba como un filtro, concluyendo que obtener su valor no era primordial, y no llegó a la respuesta esperada. En cuanto al profesor, si bien prestó atención al cálculo del capacitor, dedicó mucho tiempo al estudio de conocimientos relativos a los circuitos. Esto sugiere que el diseño inicial resultaba inviable para su implementación en una formación de futuros docentes. Con base en ello, se decidió generar un segundo diseño que fuese menos abierto y más estructurado, acompañado de varios *medias* y, por tanto, de un *medio* inicial más amplio.

### *REI-FP “Caracterización de los componentes electrónicos de un desfibrilador”*

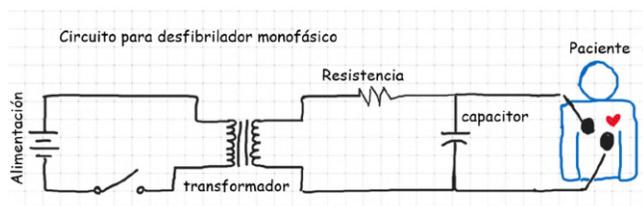
Se propuso una situación problemática:

La nueva reforma de prevención de muerte súbita cardíaca de la Secretaría de Salud exige que todos los centros laborales, educativos, deportivos y sociales, tanto públicos como privados, estén equipados con desfibriladores. En la unidad

del Consejo Nacional de Protección de la escuela donde usted labora, se han cotizado diversos modelos de acuerdo con las especificaciones establecidas por dicha secretaría. Sin embargo, los desfibriladores disponibles están fuera del presupuesto escolar. Por lo tanto, se ha decidido que los profesores se organicen para construir uno. Un ingeniero biomédico les ha proporcionado un diagrama electrónico (ver Figura 5) y les ha indicado que, proponiendo los valores adecuados para los componentes del diagrama, se asegura el funcionamiento correcto del equipo.

### Figura 5

Diagrama electrónico del desfibrilador



La pregunta generatriz considerada para el REI-FP fue la siguiente:

*Q<sub>0</sub> ¿Cómo proponer los valores de los componentes del circuito electrónico de un desfibrilador externo para que cumpla con características específicas de su diseño?*

Resolver esta situación requiere la caracterización de los componentes electrónicos de un circuito RC en serie. Para ello, es necesario comprender el comportamiento de los circuitos, a través de las ED que modelan matemáticamente las leyes de Kirchhoff. Con base en los análisis preliminares, y considerando que los futuros docentes de matemáticas no cuentan con una preparación previa en electrónica y áreas afines, el educador responsable del curso de ED jugará el papel del ingeniero biomédico. Asimismo, para lograr el desarrollo del REI-FP se proponen tres etapas, que se presentan a continuación:

#### ***Etapas 1. El uso de ED para describir el comportamiento de un fenómeno.***

Durante esta etapa, se pretende que los futuros docentes construyan y den significado a un modelo matemático basado en ED de primer orden asociadas al circuito RC en serie, el cual representa el funcionamiento del desfibrilador. Para lograrlo, se les proporcionarán dos *medias*: un artículo (Singh et al., 2011) y un video (Ramos, 2021). Además, se aplicarán dos cuestionarios: el primero tiene el objetivo de motivarlos a indagar sobre los desfibriladores y su funcionamiento interno, mientras que el segundo se enfoca en la relación de las ecuaciones diferenciales con los modelos matemáticos de los sistemas dinámicos, como es el caso del circuito del desfibrilador. Para finalizar esta etapa, se les brindará una tabla para sintetizar la información obtenida, lo que permitirá establecer relaciones y elaborar el modelo matemático.

***Etapla 2. Interacción con el modelo: Asignación de valores a los componentes electrónicos.*** Se plantea que, con el modelo obtenido, los futuros docentes calculen los valores para los distintos elementos que conforman el circuito, lo que implica analizar las características de diseño dadas en la situación y la resolución de la ED construida en la etapa anterior. Para ello, se les proporcionará una tabla de especificaciones que el desfibrilador deberá cumplir. Los *media* propuestos contienen: un sitio web Khan Academy y un libro (Singh et al., 2011) donde podrán indagar sobre algunas características de los componentes del circuito, un applet de GeoGebra (Correas Lorente, 2018), así como un simulador en línea de Autodesk Tinkercad (Espinosa Ariza, 2020) que permiten interactuar con dichas características.

***Etapla 3. Simulación y validación.*** Se espera que los futuros docentes utilicen un software para simular el circuito que han caracterizado. Se plantea que diversos valores sean evaluados tomando en consideración los componentes accesibles en el mercado. La dinámica considerada para el desarrollo de estas etapas se explicita en siguiente sección.

## **Análisis a priori del REI-FP**

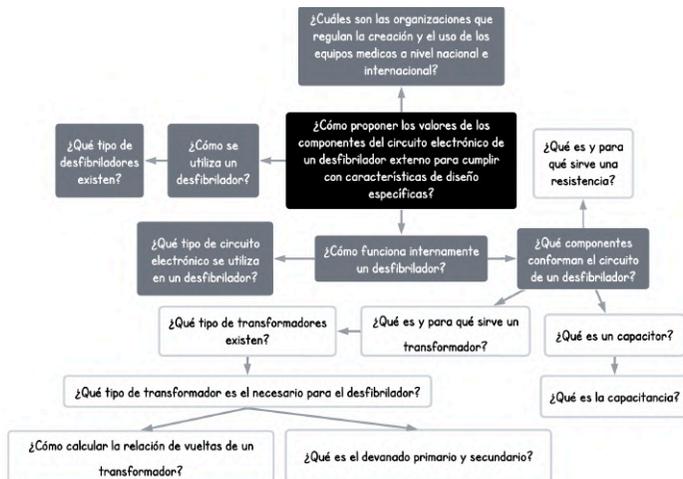
### **Etapla 1**

Para iniciar el desarrollo del REI-FP se presenta a los futuros docentes la situación sobre el diseño del desfibrilador y la pregunta generadora:  $Q_0$ : *¿Cómo proponer los valores de los componentes del circuito electrónico de un desfibrilador para cumplir con características de diseño específicas?* Para un primer acercamiento a la electrónica, se proponen dos medias: un artículo (Singh et al., 2011) y un video (Ramos, 2021) que describen el funcionamiento general de algunos componentes básicos utilizados en los equipos médicos. Asimismo, se da una tabla con características sugeridas para el desfibrilador, la cual está inspirada en las descripciones del equipo médico la Agencia de Regulación Sanitaria (ARSA). Posteriormente, se propone contestar el siguiente cuestionario:

- a. ¿Cuáles son las organizaciones que regulan la creación y uso de los equipos médicos a nivel nacional e internacional?
- b. ¿Cómo se utiliza un desfibrilador?
- c. ¿Qué tipo de desfibriladores existen?
- d. ¿Cómo funciona internamente un desfibrilador?
- e. ¿Qué tipo de circuito electrónico se utiliza en un desfibrilador?
- f. ¿Qué componentes electrónicos conforman el circuito del desfibrilador?

Estudiar estas cuestiones, derivadas de  $Q_0$ , representada en negro (Figura 6), motiva una búsqueda abierta en diferentes fuentes, pero principalmente en sitios web. Se considera que a partir de las preguntas del cuestionario, representadas en gris, podrían surgir preguntas derivadas, representadas en blanco (Figura 6).

**Figura 6**  
*Mapa de preguntas de la etapa 1*



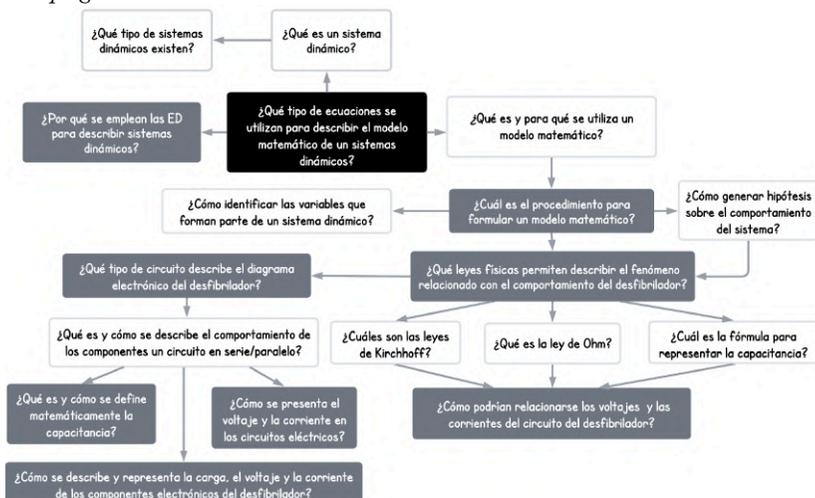
Las preguntas que podrían derivar del inciso (f) permiten familiarizarse con el vocabulario técnico propio de la electrónica, necesario para comprender el modelado del sistema. Al finalizar el cuestionario, se propone que el educador genere una discusión sobre el funcionamiento de los componentes, la cual concluya que el capacitor es el componente principal, debido a que realiza la descarga sobre el paciente. Se propone un segundo cuestionario con la finalidad de orientar el REI-FP al uso de las ED como modelos matemáticos:

- a. ¿Qué tipo de ecuaciones se utilizan para describir los modelos matemáticos de los sistemas dinámicos?
- b. ¿Por qué se emplean las ED para describir sistemas dinámicos?
- c. ¿Cuál es el procedimiento para formular un modelo matemático?
- d. ¿Qué leyes físicas permiten describir el fenómeno relacionado con el comportamiento del desfibrilador?
- e. ¿Qué tipo de circuito describe el diagrama electrónico del desfibrilador?
- f. ¿Cómo se describe y representa la carga, el voltaje y la corriente de los componentes electrónicos del desfibrilador?
- g. ¿Qué es y cómo se define matemáticamente la capacitancia?
- h. ¿Cómo podrían relacionarse los voltajes y las corrientes del circuito del desfibrilador? Utilizando la ley de mallas.

Para abordar este cuestionario se proponen cuatro medias: Kuo (1996), Ogata, (2010), Singh et al. (2011) y Zill (2013). Con el fin de responder al inciso (c), se espera que se utilice el primer capítulo del libro de Zill (2013), lo que debería llevarlos a la formulación de otras

interrogantes relacionadas con las hipótesis y suposiciones de los sistemas dinámicos, así como a la identificación de las variables involucradas en los modelos matemáticos. Por ejemplo, las preguntas resaltadas en blanco de la Figura 7.

**Figura 7**  
Posibles preguntas relacionadas a los modelos matemáticos



Las preguntas relacionadas con el comportamiento físico del desfibrilador, como el inciso (d), conducirán a la búsqueda de información asociada a los circuitos en serie y en paralelo, y a su vez a la comprensión de las ecuaciones que describen el voltaje y la corriente en los circuitos. Se espera que se establezcan las relaciones de la ley de Ohm entre el voltaje, la corriente y la resistencia. Es decir,  $V = iR$  donde  $V$ ,  $i$ ,  $R$ , representan el voltaje, la intensidad (corriente) y la resistencia, respectivamente; y a las leyes de Kirchhoff, específicamente la segunda ley, la cual establece que “el voltaje aplicado  $E(t)$  a un circuito cerrado debe ser igual a la suma de las caídas de voltaje en el circuito” (Zill, 2013, p. 24). Con lo que se obtendrán relaciones entre la corriente  $i(t)$  y la carga  $q(t)$  para los elementos de los circuitos eléctricos como inductores, capacitores y resistores, como se muestra en la Tabla 1.

**Tabla 1**  
Relaciones entre voltaje e intensidad de algunos componentes electrónicos

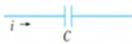
Inductor ( $L$ )	Resistor ( $R$ )	Capacitor ( $C$ )
$L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}$	$iR = R \frac{dq}{dt}$	$\frac{1}{C}q$

Donde  $i$ ,  $q$ ,  $t$ , representan la corriente, la carga y el tiempo respectivamente

El educador proporcionará a los futuros docentes una tabla como la presentada en la Figura 8, con el objetivo de que se complete a partir de la información obtenida en el cuestionario. De esta forma se sintetiza la información obtenida de los componentes electrónicos para su análisis. Las respuestas esperadas se han marcado en azul.

**Figura 8**

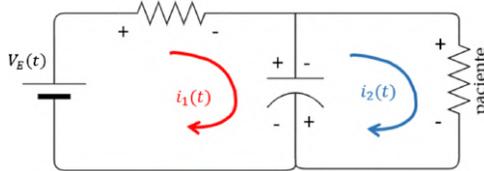
*Cuadro de síntesis*

Elemento	Inductancia	Resistencia	Capacitancia
Símbolo	L	R	C
Unidades	henrys (h)	ohms ( $\Omega$ )	farads (f)
Voltaje	$L \frac{di}{dt}$	$iR$	$\frac{1}{C} q$
Diagrama			

Posteriormente, el educador retomará el diagrama electrónico de la situación inicial y promoverá la discusión sobre los modelos matemáticos y la forma en cómo éstos sirven para describir el comportamiento de diversos fenómenos construidos a partir de ED, entre los cuales estarán los circuitos. Para ello se redibujará el diagrama, sustituyendo al paciente por una resistencia y marcando las dos posibles mallas que es necesario calcular para obtener el modelo del circuito, utilizando las ecuaciones de las leyes de Kirchhoff (Figura 9).

**Figura 9**

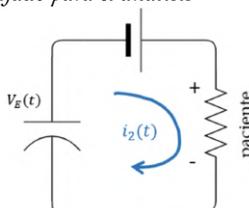
*Círculo redibujado con dos mallas para el análisis del desfibrilador*



Con el redibujo, y previo a los cálculos, se plantea que el educador guíe la reflexión hacia la posibilidad de simplificar el modelo, puntualizando que la única malla necesaria para modelar el funcionamiento del desfibrilador es la marcada en azul en la Figura 9.

**Figura 10**

*Círculo de desfibrilador redibujado para el análisis*



Esto llevará a que se aislen únicamente dos de los componentes y la fuente de alimentación, obteniendo así el diagrama de la Figura 10, a partir del cual se construirá la ED que describe el comportamiento del desfibrilador siguiendo la ley de corriente de Kirchoff con apoyo de la ley de Ohm:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = V_E(t)$$

Los futuros docentes presentarán al educador los cálculos realizados en los pasos del modelado del circuito y la solución de la ED.

Las condiciones iniciales  $q(0) = q_0$  y  $V_E(0) = V_{E_0}$  deberán ser consideradas, aunque el método de solución de la ED quedará a discreción de ellos. En este análisis se ha utilizado la TL como método de solución, proceso que se detalla a continuación:

$$R \mathcal{L} \left\{ \frac{dq}{dt} \right\} + \frac{1}{C} \mathcal{L}\{q\} = \mathcal{L}\{V_{E_0}\} \quad \text{Aplicando TL a la ED}$$

$$Q = \frac{V_{E_0}}{s \left( R s + \frac{1}{C} \right)} + \frac{R q_0}{\left( R s + \frac{1}{C} \right)} \quad \text{Utilizando las fracciones parciales}$$

$$Q = \frac{V_{E_0} C}{s} - \frac{V_{E_0} C}{\left( s + \frac{1}{RC} \right)} + \frac{q_0}{\left( s + \frac{1}{RC} \right)} \quad \text{Aplicando TL inversa donde } \tau = RC \text{ y } C = \frac{q}{V}$$

## Etapas 2

Una vez obtenido el modelo matemático y comprendida la dinámica del circuito, se propone realizar los cálculos para asignar los valores de sus componentes. Se espera que el capacitor sea el primer elemento al que se le asigne un valor, i.e., calcular su capacitancia. Se propone que el educador oriente la consulta de la media de la etapa 1, así como las búsquedas en sitios web para investigar sobre las ecuaciones de carga y descarga del capacitor. La investigación de estas ecuaciones (carga y descarga) y su comparación con el modelo obtenido vienen dadas por  $q(t)$ , la solución de la ED:

	Carga		Descarga
$q(t) =$	$q_1 \left( 1 - e^{-t/\tau} \right)$	+	$q_0 \left( e^{-t/\tau} \right)$

La capacitancia se calculará considerando las características presentadas en la Tabla 2. El porcentaje de descarga para la desfibrilación exitosa en un tiempo establecido pretende guiar a los participantes a calcular la capacitancia por medio de la ecuación de descarga del capacitor:  $q(t) = q_0 \left( e^{-t/\tau} \right)$ .

**Tabla 2**  
*Especificaciones de un desfibrilador externo monofásico*

<b>Desfibrilador externo monofásico</b>	
<b>Descripción</b>	Equipo electromédico portátil, de soporte de vida, para la descarga sincrónica o asincrónica, con el fin de revertir alteraciones del ritmo cardiaco. Monitor y alarmas visibles y audibles, ajustable por el usuario. Con paletas convertibles para adulto y para niño, con excitación externa que detecte actividad electrocardiográfica, reusables y batería recargable de 24V que permita dar 30 desfibrilaciones
Parámetro	Rango aceptable
Energía para descargar externa	0-360 <i>Joules</i>
Corriente máxima recomendada	30 <i>amperes</i>
Tiempo máximo para cargar de 0 a 360 <i>Joules</i>	8 <i>segundos</i> , <b>recomendable 4 <i>segundos</i></b>
<i>Para una desfibrilación exitosa, se recomienda que el 85% de la energía se descargue sobre el paciente en un tiempo de 8 milisegundos.</i>	

Si el 85% de la descarga se transmite en  $t = 8 \text{ ms}$ , entonces  $q_c = 0.15q_0$ ,

$$0.15q_0 = q_0 \left( e^{-t/\tau} \right) \rightarrow \ln(0.15) = -\frac{t}{RC}$$

Los futuros docentes indagarán el valor de la resistencia del paciente para completar los cálculos, y se prevé que concluyan que la resistencia torácica oscila entre  $[70, 150] \Omega$  (de la Torre, 2008). Considerando una resistencia de  $75\Omega$ :

$$C = -\frac{8 \times 10^{-3} \text{ s}}{(75 \Omega)\ln(0.15)} = 56.22 \mu\text{F}$$

Para redirigir la atención hacia los cálculos del voltaje del capacitor, el educador cuestionará: *¿Cuál es el voltaje que el capacitor necesita almacenar para generar la descarga esperada?* Los estudiantes podrían generar otras preguntas, como se muestra en la Figura 11.

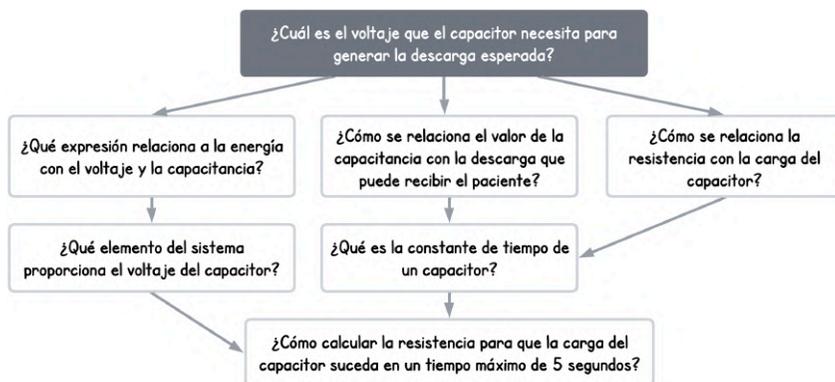
La relación buscada está basada en la energía que puede almacenar un capacitor,  $E = \frac{1}{2}CV^2$ . Despejando para  $V$  y sustituyendo los valores:

$$V = \sqrt{\frac{2E}{C}} = \sqrt{\frac{2(360\text{J})}{56.22 \times 10^{-6} \text{ F}}} = 3578.4856 \text{ V}$$

El educador analizará los parámetros de diseño restantes y concluirá que es necesario calcular la resistencia en la alimentación del capacitor, lo que influirá en el tiempo de carga, (ver Tabla 2). Esto motivaría otras preguntas relacionadas a la carga del capacitor (ver Figura 11).

**Figura 11**

Posibles preguntas sobre la descarga del capacitor



Los *media* propuestos para esta etapa incluyen un sitio web que proporciona una introducción a los tiempos de estabilidad de los capacitores (McAllister, s.f.), así como el applet en línea de GeoGebra que permite interactuar con las gráficas de carga y descarga (Correas Lorente, 2018). Se sugiere que esta interacción sea grupal y guiada por el educador, quien motive reflexiones basadas en la constante de tiempo de los capacitores. Por ejemplo, se puede plantear preguntas sobre el valor de tiempo de estabilización del capacitor, el cual tiende a infinito matemáticamente, pero físicamente es válido en la quinta constante de tiempo. Se espera que utilizando la fórmula de la constante de tiempo  $\tau = RC$ , se establezcan relaciones con los datos previamente dados y calculen la resistencia faltante, i.e., que el tiempo máximo para estabilizar el desfibrilador sea de 4 s:

$$t = 5\tau \longrightarrow 4 = 5\tau \longrightarrow \tau = 800 \times 10^{-3} \text{ s}$$

Con lo que,

$$R = \frac{\tau}{C} = \frac{800 \times 10^{-3} \text{ s}}{56.22 \times 10^{-6} \text{ F}} = 14.22 \text{ k}\Omega$$

Finalmente, se calculará la potencia del transformador. El educador explicará que se trata del cálculo de la *relación de vueltas* o *relación de transformación*, considerando un transformador ideal. Las posibles preguntas sobre el funcionamiento de los transformadores se presentan en la Figura 12. Se propone consultar el tema “Transformadores Ideales” (Singh et al., 2011).

A partir de las preguntas de la Figura 12 se espera concluir que es necesario calcular la relación de vueltas para un transformador elevador, utilizando la fórmula:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$$

donde  $n$  es la relación de vueltas,  $v_1$  y  $v_2$  representan el voltaje en el devanado primario y secundario del transformador;  $N_1$  y  $N_2$  el número de vueltas del devanado primario y secundario (Figura 13).

**Figura 12**

*Posibles preguntas relacionadas a los transformadores*



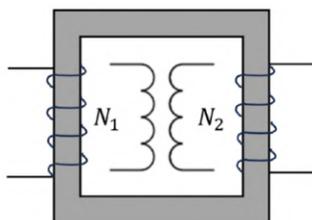
En este caso, el voltaje  $v_1$  corresponde a la alimentación marcada en la hoja de características, i.e.,  $v_1 = 24V$ , mientras que  $v_2$  al voltaje que se suministrará en el capacitor para producir la descarga,  $v_2 = 3578.4856 V$ . Por lo tanto,

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{3578.4856}{24} = 149.10$$

Es decir, la relación de las bobinas en el transformador, si se considera una alimentación de  $24V$ , es de aproximadamente 149. Cada uno de los cálculos realizados en las dos etapas deberán presentarse al educador como evidencia de las técnicas empleadas.

**Figura 13**

*Representación de las bobinas de un transformador*

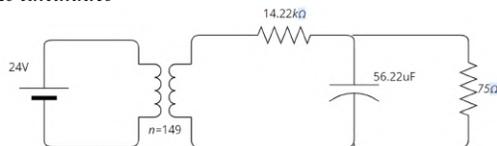


### Etapa 3

Una vez asignados los valores (Figura 14), se proporcionará el simulador Autodesk Tinkercad (Figura 15) para corroborar los cálculos realizados (Espinosa Ariza, 2020).

#### Figura 14

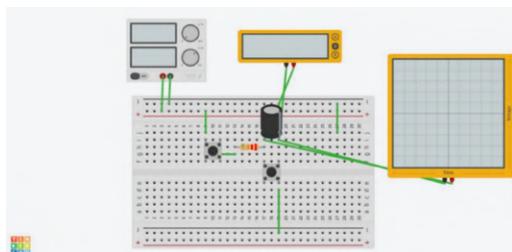
*Círculo con valores calculados*



En este programa se ingresarán los valores propuestos del capacitor y la resistencia de alimentación, para poder observar la gráfica de carga y verificar si se cumple el tiempo especificado. Con el objetivo de reflexionar sobre la idealización de los cálculos, se propone realizar una búsqueda de los capacitores disponibles en el mercado que cumplan con los valores calculados, i.e., un capacitor de  $56.22 \mu F$  capaz de almacenar  $3578.48 V$ .

#### Figura 15

*Carga y descarga de un condensador*



*Nota:* Adaptado de “Carga y descarga de un condensador”, simulador Autodesk Tinkercad por Y. Espinosa Ariza, 2020 (<https://bit.ly/4jwVg1Q>). CC BY 3.0

Utilizando el valor de un capacitor comercial, se propone simular y verificar si el circuito cumple con el comportamiento esperado del desfibrilador. El objetivo es concluir que, al cambiar el valor del capacitor, también cambian cálculos importantes como el voltaje de almacenamiento y la relación de vueltas del transformador. Una vez presentado el REI-FP propuesto, el *medio* didáctico inicial y la forma en que se ha propuesto la actividad del educador y de los futuros docentes, se presenta un análisis de su viabilidad en la formación de futuros docentes.

#### *Viabilidad*

El análisis del programa de estudios de la formación de profesores de matemáticas de la UPN de Honduras, específicamente del curso de ED,

sugiere que el REI-FP diseñado podría integrarse en el estudio de las ED, ampliando la praxeología de modelización matemática analizada en Zill (2013) y discutida en los análisis preliminares. Se considera que los *media* y el *medio M* inicial aseguran la viabilidad del REI-FP en esta formación, y que los futuros docentes no requieren de conocimientos previos sobre electrónica o circuitos, sino que pueden construirlos a partir de la interacción con los *medias* propuestos. Estos *medias*, artículos, libros, sitios web, videos, conjunto de preguntas, simulador, sobre los circuitos eléctricos, la forma en que son modelados y sus aplicaciones, posibilitan el estudio del funcionamiento de un desfibrilador y sus componentes, así como el reconocimiento de su relación con las ecuaciones diferenciales. El análisis a priori da cuenta de cómo el *medio* didáctico inicial, que incluye los *medias* y la estructuración del REI-FP en tres etapas, ofrece una posible ruta para su desarrollo, lo que garantiza teóricamente su viabilidad para ser integrado a la formación de futuros profesores.

Asimismo, se identificó que uno de los objetivos del plan de estudios de la UPN es que los futuros docentes diseñen e implementen propuestas didácticas (por ejemplo, planes de clase, talleres, rally matemático, etc.). Se considera que esta misma propuesta puede ser adaptada por ellos para ser implementada en el bachillerato, haciendo que este objetivo se amplíe, incluyendo el diseño de propuestas de modelización matemática. Por ejemplo, en el bachillerato técnico profesional en electricidad se estudian los circuitos en serie y paralelo en diferentes cursos (Electrotecnia I, II; Matemáticas IV, Física IV, Automatización de circuitos eléctricos) (Secretaría de Educación, República de Honduras [SEDUC], 2007). En dichos cursos se tratan praxeologías similares, y su técnica está basada en aplicar las leyes de Kirchhoff (método de mallas y de nodos), la ley de Ohm e incluso los sistemas de ecuaciones lineales. También se ha identificado que en el bachillerato hondureño se incluye el estudio del cálculo integral y diferencial (límites, derivadas e integrales), y las ED aparecen de forma implícita (Mejía, 2016). En síntesis, se considera que este REI-FP dota a los futuros profesores de una experiencia formativa con la modelización extramatemática bajo un enfoque de indagación.

## Conclusiones

El diseño de propuestas para la formación de profesores, como la que se presenta aquí, contribuye a la reflexión sobre la segunda discontinuidad de Klein, específicamente en una dimensión poco abordada: la modelización extramatemática. Para ello, la ingeniería didáctica y los análisis preliminares permiten construir un modelo epistemológico y didáctico específico, en este caso, conformado por tres praxeologías de modelización matemática, las cuales exhiben diferentes niveles de uso de los contextos extramatemáticos.

En un *nivel 1* está la praxeología estudiada en Zill (2013), relacionada con el lenguaje y los diagramas del contexto. No obstante, para su desarrollo no se requiere conocimientos de contextos extramatemáticos. En un *nivel 2* están las praxeologías en las que el contexto extramatemático influye mucho más que en el primero, ya que se analiza la estabilidad de un sistema de un circuito, requiriendo conocimientos ingenieriles sólidos (Ogata, 2010). En un *nivel 3* están las praxeologías que integran el contexto extramatemático, por ejemplo, el modelado del desfibrilador basado en un circuito RC en serie (Rodríguez, 2010; Silva, 2018). Este nivel fue elegido ya que muestra el rol del contexto extramatemático en la generación de supuestos y la toma de decisiones durante el desarrollo de una actividad de modelización, sin requerir necesariamente conocimientos previos del contexto extramatemático.

El diseño del REI-FP implicó la creación de un *medio* didáctico inicial, basado en los análisis de los tres participantes, y que fue enriquecido por las consideraciones sobre la experiencia de los futuros docentes con la electrónica, por ejemplo, al evaluar posibles estrategias para la resolución de los tiempos de estabilización del capacitor. Ogata (2010) considera la estabilización de sistemas con base en la función de transferencia, noción que pertenecen a la ingeniería y que podría haberse utilizado en el diseño, pero ésta y otras nociones requieren un conjunto de conocimientos previos que no se relacionan directamente con los que el futuro docente empleará en su labor, por lo que esta estabilización decidió orientarse directamente con base en las ED del capacitor. Asimismo, el uso de un simulador para comprobación, donde se provee el circuito previamente armado, permite validar los resultados obtenidos sin tener que profundizar en el uso de estos programas.

Este REI-FP podría adaptarse específicamente al bachillerato en electricidad porque se trata de una actividad de indagación, y los estudiantes en este nivel educativo estudian los circuitos eléctricos. El desarrollo de un REI como el del desfibrilador permite que las matemáticas estudiadas tengan una *raison d'être*. Finalmente, se consideró que los conocimientos contextuales pueden ser construidos a través la indagación, guiada por cuestionarios y *medias* sugeridos; se puede proceder de manera análoga en el nivel bachillerato.

## Referencias

- Artigue, M. (2020). Metodologías de investigación en didáctica de las matemáticas: ¿Dónde estamos? *Educação Matemática Pesquisa* 22(3), 25–64. <https://doi.org/nzjj>
- Artigue, M., & Rogalski, M. (1990). Enseigner autrement les équations différentielles en DEUG. *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année*, 113–128. <https://numerisation.univ-irem.fr/IWN90004>

- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Una empresa docente.
- Barquero, B., & Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education. New ICMI study series* (pp. 249–272). Springer. <https://doi.org/nzjk>
- Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2019). The unit of analysis in the formulation of research problems: The case of mathematical modelling at university level. *Research in Mathematics Education*, 21(3), 314–330. <https://doi.org/nzjf>
- Barquero, B., & Romo-Vázquez, A. (2022). Study and Research for Teacher Education: Some Advances on Teacher Education in the Paradigm of Questioning the World. En Y. Chevallard, B. Barquero, M. Bosh, I. Florensa, J. Gascón, P. Nicolás, & N. Ruiz-Monzón (Eds.), *Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 125–137). Springer. <https://doi.org/nzjh>
- Barquero, B. & Winsløw, C. (2022). Preservice secondary school teachers revisiting real numbers: A striking instance of Klein's second discontinuity. En R. Biehler, M. Liebendörfer, G. Gueudet, C. Rasmussen & C. Winsløw (Eds.), *Practice-Oriented Research in Tertiary Mathematics Education* (pp. 513–531). Springer. <https://doi.org/nzh3>
- Benavides-Cerrato, C., Orellana, D.M., Castellón, L.B., Matute, K., Gómez, G., Soto, L.A., González, A.R., & Ramos, L.A. (2022). Formación de profesores de matemáticas. El caso de Honduras. *Fuentes de Aprendizaje e Innovación*, 3, 69–103
- Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. En S. J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173–187). Springer. <https://doi.org/nzjg>
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–265. <https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/>
- Correas Lorente A. (14 de marzo de 2018). *Carga y descarga de un condensador*. GeoGebra. <https://www.geogebra.org/m/tmP3cpGw>
- Corriveau, C. (2022). Collaboration between secondary and post-secondary teachers about their ways of doing mathematics using contexts. En R. Biehler, M. Liebendörfer, G. Gueudet, C. Rasmussen, & C. Winsløw (Eds.), *Practice-Oriented Research in Tertiary Mathematics Education* (pp. 67–89). Springer. <https://doi.org/nzht>
- de la Torre, P. R. (2008). *Etapas de potencia de un desfibrilador externo automático*. [Tesis de Maestría, Instituto Tecnológico de Monterrey]. Repositorio institucional–Instituto Tecnológico de Monterrey. <http://hdl.handle.net/11285/631981>

- de los Ángeles, G., Ochoviet, C., & Molfino, V. (2022). Connections identified by teacher educators between the mathematics they teach and the mathematics their students will teach in the Future. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 17(1), em0668. <https://doi.org/nzh4>
- Eichler, A. & Isaev, V. (2023). Improving prospective teachers' beliefs about a double discontinuity between school mathematics and university mathematics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 44(1), 117–142. <https://doi.org/nzh5>
- Frejd, P. (2013). An analysis of mathematical modelling in Swedish textbooks in upper secondary school. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 18(3), 59–95. <https://doi.org/n3n8>
- Espinosa Ariza, Y. (2020). *Carga y descarga de un condensador* [Simulación en Autodesk Tinkercad]. Autodesk, Inc. <https://bit.ly/4jwVg1Q>
- García, F. J., Barquero, B., Florensa, I., & Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 75–94. <https://doi.org/nzjm>
- Gueudet, G., Bosch, M., Disessa, A., Kwon, O. N., & Verschaffel, L. (2016). *Transitions in Mathematics Education*. Springer. <https://doi.org/nzhv>
- Jessen, B. E., & Kjeldsen, T. H. (2021). Mathematical modelling in scientific contexts and in Danish upper secondary education: are there any relations? *Quadrante*, 30(2), 37–57. <https://doi.org/nzhs>
- Kilpatrick, J. (2019). A Double Discontinuity and a Triple Approach: Felix Klein's Perspective on Mathematics Teacher Education. En Weigand, H G., McCallum, W., Menghini, M., Neubrand, M., Schubring, G. (Eds.), *The Legacy of Felix Klein* (ICME-13 Monographs, pp. 215–226). Springer. <https://doi.org/nzhw>
- Klein, F. (2016). *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint. Volume I: Arithmetic, Algebra, Analysis* (G. Schubring, Trad.). Springer. <https://doi.org/nzhx> (Original work published 1933)
- Klein, F. (2016). *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint. Volume III: Precision Mathematics and Approximation Mathematics* (M. Menghini, Trad.). Springer. <https://doi.org/nzhz> (Original work published 1928)
- Kuo, B. C. (1996). *Sistemas de Control Automático*. Prentice Hall.
- Mattheis, M. (2019). Aspects of “Anschauung” in the work of Felix Klein. En H.-G. Weigand, W. McCallum, M. Menghini, M. Neubrand, & G. Schubring (Eds.), *The Legacy of Felix Klein* (pp. 93–106). Springer. <https://doi.org/nzh8>
- McAllister, W. (s.f.). *La respuesta natural de un circuito RC*. Khan Academy. <https://bit.ly/40rx34f>
- Mejía, M. Á. (2016). *El uso de ecuaciones diferenciales en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en el bachillerato*. [Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México]. <https://repositorio.unam.mx/contenidos/178574>

- Menghini, M. (2019). Precision Mathematics and Approximation Mathematics: The Conceptual and Educational Role of Their Comparison. En H.-G. Weigand, W. McCallum, M. Menghini, M. Neubrand, & G. Schubring (Eds.), *The Legacy of Felix Klein* (pp.181–201). <https://doi.org/nzjc>
- Ogata, K. (2010). *Ingeniería de Control Moderna* (5th ed.) (S. Dormido & R. Dormido, Trans.). Prentice Hall.
- Paz-Corrales, L.M., Romo-Vázquez, A. & Pérez-Sarmiento, M. (2023). An analysis of mathematical modelling in university textbooks to address Klein's second discontinuity in teacher education. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 13)* (pp. 1317–1324). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.
- Pramasdyahsari, A. S., Setyawati, R. D., & Albab, I. U. (2019). Connecting university mathematics and school mathematics to address Klein's double discontinuity: A case of ring theory. *Beta: Jurnal Tadris Matematika*, 12(2), 122–132. <https://doi.org/10.20414/betajtm.v12i2.336>
- Ramírez-Sánchez, C.A., Romo-Vázquez, A., Romo-Vázquez, R., & Velázquez-Rojas, D. (2023). Study of modeling questions in a first-year university mathematics online course. *Educational Studies in Mathematics*, 114(3), 503–524. <https://doi.org/nzjn>
- Ramos, M. (2021, 2 de enero). *Cómo funciona un desfibrilador - Ejemplos con simulación* [Video]. YouTube. <https://bit.ly/42oZJgR>
- Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 13(4), 191–210. <https://relime.org/index.php/relime/article/view/299/319>
- Secretaría de Educación, República de Honduras [SEDUC]. (2007). *Planes y programas de estudios de educación media. Bachillerato técnico profesional en electricidad*. SEDUC. <https://bit.ly/3Ch7TNO>
- Sen Zeytun, A., Cetinkaya, B., & Erbas, A. K. (2023). Why do prospective teachers have difficulties in mathematical modelling? Insights from their perspectives. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 55(1), 94–117. <https://doi.org/nzhr>
- Silva, L. T. (2018). *El diseño de un desfibrilador: una actividad de modelización matemática para la formación de ingenieros* [Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio institucional-Instituto Politécnico Nacional. <https://bit.ly/3PLz7PC>
- Singh, S. K., Ingham, R., & Golding, J. P. (2011). Basics of electricity for anaesthetists. *Continuing Education in Anaesthesia, Critical Care & Pain*, 11(6), 224–228. <https://doi.org/cb9vmz>

- Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán [UPNFM]. (2008). *Plan de estudio de la carrera de Profesorado en Matemáticas en el grado de Licenciatura. UPNFM*
- Weigand, H. G. (2019). What Is or What Might Be the Legacy of Felix Klein? En H.-G. Weigand, W. McCallum, M. Menghini, M. Neubrand, & G. Schurbring (Eds.), *The Legacy of Felix Klein* (pp. 23–31). Springer.  
<https://doi.org/nzh9>
- Winsløw, C., & Grønbæk, N. (2014). Klein's double discontinuity revisited: Contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(1), 59–86.
- Winsløw, C., Matheron, Y. & Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 267–284. <https://doi.org/gf5g9c>
- Zill, D. (2013). *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications* (10th ed.). Brooks & Cole.