# La modelación como una forma de acercarse al aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas

María Trigueros [1]

**Resumen**

En este capítulo se expone una forma de introducir la modelación al aula de matemáticas. Esta experiencia se basa en la reflexión sobre su compatibilidad y su interrelación natural con la enseñanza de las matemáticas en términos de los postulados de la teoría Acción, Proceso, Objeto, Esquema (APOE). Se discute y ejemplifica cómo esta introducción de la modelación promueve la construcción del conocimiento matemático. Se subraya el relevante papel de las actividades diseñadas con base en una descomposición genética (DG), del trabajo colaborativo de los estudiantes y del papel del profesor en el desarrollo del modelo, así como en la promoción de las ideas y el conocimiento de los estudiantes. Se presenta, como ejemplo, un péndulo como modelo interdisciplinario. El modelo se desarrolló en un curso de ecuaciones diferenciales para estudiantes de ingeniería en la universidad. Los resultados obtenidos del análisis de la experiencia dan evidencia del valor de las ideas de los estudiantes y sobre el papel del profesor.

**Palabras clave**

Modelación, teoría APOE, péndulo, ecuaciones diferenciales, ingeniería.

---

[1] mtriguerosg@gmail.com
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México

Trigueros, M. (2025). La modelación como una forma de acercarse a el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. En A. Solares-Rojas, & A. P. Preciado Babb (Eds.), *La investigación en modelización matemática: un diálogo entre educadores de Latinoamérica y España* (pp. 135–151). Editorial SOMIDEM.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S2/2025/01-06

**Abstract**
A way to introduce the use of modeling in the mathematics classroom is presented in this chapter. This experience is based on reflection about its compatibility and its natural interrelation to mathematics teaching in terms of Action, Process, Object, Schema (APOS) theory postulates. The role of modeling is discussed and exemplified in terms of its possibility to promote knowledge construction. The role of the activities, designed with a genetic decomposition, that of collaborative teamwork and the teachers role in the model's development and in the emergence of students' ideas is underlined. An interdisciplinary model is presented as an example: a pendulum. The model was used in a differential equations course for engineering students at the university. Results from the analysis of this experience data give evidence of the value of students' ideas and the teacher's role.

**Keywords**
Modeling, APOS theory, differential equations, engineering.

Entre los muchos acercamientos al estudio de la educación matemática, el uso de modelos de fenómenos naturales o sociales ha llamado la atención y el interés de los investigadores (e.g. Leung et al., 2021; Guerrero-Ortiz & Camacho-Machín, 2022). Por más de una década, se han estudiado, desde distintas perspectivas, los beneficios y las limitaciones del uso de este tipo de enseñanza en la promoción de la comprensión y del conocimiento matemático. (e.g. Boaler, 2001; Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003; Trigueros, 2009; Villa-Ochoa et al., 2018). Estos fenómenos han incidido en la búsqueda de nuevas estrategias de enseñanza de las matemáticas, que permitan a estudiantes con diferentes intereses acercarse a ellas de diversas maneras (e.g. Lesh & Lehrer, 2003; Rasmussen, et al., 2012).

En términos de la investigación, las cuestiones que se plantean en este contexto tienen que ver con ¿Cómo utilizar la modelación para acercar a los estudiantes a las matemáticas? ¿Qué puede aportar la introducción de los conceptos a través del uso de modelos al aprendizaje de las matemáticas? ¿Cómo lograrlo? ¿Qué problemas específicos se deben elegir? ¿Qué características deben tener? La respuesta a estas preguntas no es fácil ni es única. En este trabajo discutiré una forma en la que puede utilizarse la modelación con el objetivo de favorecer en los estudiantes una comprensión profunda de los conceptos matemáticos en cuestión.

### *Distintas perspectivas de La modelación*

Conforme el uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas se ha extendido, han surgido discusiones acerca de la forma en que debe o puede enseñarse. Por una parte, hay investigadores que consideran que si se pretende modelar, es importante utilizar problemas reales que puedan abordarse en el aula, conjuntamente con la introducción de las técnicas de modelación matemática a los estudiantes (Blum & Borromeo, 2009). Otros investigadores opinan que los problemas a utilizar deben ser reales, aunque acotados de tal manera que sus objetivos sean claros y limitados para tener cabida en la enseñanza (Keiser, et al., 2006; Leung et al., 2021). Otras posturas aceptan el uso de problemas que se relacionan con situaciones reales, pero que se diseñan de manera tal que puedan ajustarse a las necesidades del aprendizaje de conceptos específicos y a las de los estudiantes. En estas posturas se acepta el uso de problemas "realistas" (Rasmussen et al., 2012), es decir, situaciones en las que el problema a modelar es una situación imaginaria, pero que los estudiantes puedan apropiarse como si fuera real, empleando la modelación para comprenderla y resolver los problemas que plantea.

Desde nuestro punto de vista, todas estas opciones pueden ser válidas y útiles para enseñar temas de matemáticas. Consideramos que, más que el tipo de problemas a utilizar, lo importante es que permitan responder las cuatro preguntas siguientes: ¿Qué aspectos del conocimiento matemático se pueden recuperar y mejorar a través del uso del problema a modelar? ¿Cómo diseñar problemas de modelación adecuados a los conocimientos previos de los estudiantes y al conocimiento que se desea desarrollar? ¿Cuáles aspectos del conocimiento matemático pueden desarrollarse durante el proceso de modelación? y ¿Cómo pueden entrelazarse las ideas que surgen de los estudiantes durante ese proceso con estrategias que permitan ahondar en el conocimiento emergente sin romper el flujo de las ideas que promueve la modelación?

### *Breve reflexión sobre la interdisciplinariedad*

Cuando se usa la modelación en la enseñanza de las matemáticas en cursos dirigidos a estudiantes de distintos campos del conocimiento, suele favorecerse la inclusión de situaciones relacionadas con fenómenos específicos de esos campos. Por ejemplo, se incluye un fenómeno de movimiento para estudiantes de ingeniería, o de trasmisión de enfermedades para estudiantes de biología o medicina. Esta práctica tiene un sustento doble, por una parte, se motiva a los estudiantes a pensar en el valor de las matemáticas en su ámbito profesional, y por otra parte, se presenta la relación de las matemáticas con otras disciplinas, tomando en cuenta la interdisciplinariedad. Sin embargo, con frecuencia ocurre que una vez que el problema ha sido planteado haciendo uso de los conceptos matemáticos adecuados, el problema de inicio se deja de lado. Se continúa con el desarrollo del contenido matemático, y solo se regresa a la actividad cuando se han obtenido resultados; en ocasiones, esa relación únicamente se ve reflejada en el uso de las unidades apropiadas para las cantidades resultantes. No se incluye un análisis de los resultados en términos de su papel en la disciplina que le dio origen (Hernández-Suarez C.A. et al., 2016).

Podemos preguntarnos, ¿es realmente la introducción de problemas con contenido de otras ciencias un problema interdisciplinario? No desde nuestra perspectiva. Para que lo sea, es importante no perder de vista el problema original para convertirlo en un problema de aplicación que se resuelve mediante un modelo matemático.

El problema seleccionado debe cumplir con las condiciones de una situación de modelación y tratarse sin perder de vista el entorno científico –considerando la ciencia de una manera amplia— en el que está inmerso a lo largo de todo su proceso de estudio. Esto implica identificar las distintas etapas de trabajo matemático que el problema requiere, y dar sentido a lo que se usa y se obtiene en términos de la disciplina en cuestión. De esta manera, la interrelación entre la ciencia o ciencias empleadas y el papel de las matemáticas se hace patente.

La modelación puede dar "vida" a una visión más completa de la aportación de las distintas disciplinas a la solución del problema abordado. De esta manera, la modelación se considera como un camino de ida y vuelta en cada uno de los distintos pasos del proceso. Durante todo el proceso de modelación y solución del problema, se hace patente que no es suficiente plantear un problema de otra disciplina para "transformarlo" en un problema matemático y considerarlo como un problema cercano al de "aplicación". Este cuidado puede parecer irrelevante, pero implica tomar consciencia de que, en un problema interdisciplinario, no se puede subordinar una disciplina a la otra. Es necesario velar por la consideración de ambas disciplinas al mismo nivel. La posibilidad de pasar constantemente de una a la otra permite establecer un marco en el que las ciencias se relacionan siempre entre sí (García, 2011). Este acercamiento subraya las peculiaridades de cada una de las disciplinas y las relaciones entre ellas.

Esta reflexión es importante dado el creciente interés de los últimos años en el papel de la interdisciplinariedad en la enseñanza en general, en lo que se conoce como CTIM (Ciencias, Tecnología, Ingeniería, Matemáticas, o STEM por sus siglas en inglés). En esta postura se subraya la inclusión de problemas de distintas disciplinas para estimular las relaciones entre ellas en los procesos didácticos. Un enfoque adecuado en el trabajo en esta dirección requiere tener conciencia de lo que significa la noción de interdisciplinariedad a diferencia de la de aplicación. El papel de la modelación en el aula puede fortalecer la idea de que no se trata únicamente de utilizar problemas de "aplicación" de la matemática en diferentes contextos, sino de trabajar en situaciones que permitan poner en relieve las relaciones entre las disciplinas.

### *Una forma de acercarse a la modelación*

Nuestra motivación en el uso de modelos en la clase de matemáticas se relaciona, por una parte, con la importancia de promover la reflexión sobre los conceptos matemáticos y su relación con fenómenos en distintos entornos, además de fortalecer el trabajo colaborativo de los estudiantes a través de la discusión de un problema que les resulte interesante, así como de la reflexión sobre sus conocimientos matemáticos y extramatemáticos previamente construidos. Este es el punto de partida de un proceso en el que la discusión y la reflexión están presentes de tal forma que la introducción de las matemáticas a enseñar resulte de una necesidad y no se convierta en una imposición. En estos términos, la discusión que suscita el problema permite reconocer el uso de las matemáticas en otras disciplinas y en entornos diversos, además de que da pie a la introducción y construcción de un nuevo concepto o grupo de conceptos para los estudiantes. El contenido es, generalmente, parte del programa del curso de matemáticas que se está impartiendo.

El modelo desarrollado inicialmente sirve de sustento al trabajo matemático y proporciona elementos para ofrecer oportunidades de construcción de nuevo conocimiento. Para ello se utilizan las herramientas de la teoría APOE, que han demostrado ser exitosas en la promoción del aprendizaje de los estudiantes.

Cuando se inicia un tema utilizando un modelo, el trabajo colaborativo de los estudiantes, apoyados por el profesor, da lugar al inicio de un ciclo de modelación. Durante su trabajo, los estudiantes probablemente requerirán algo que no conocen o no conocen a fondo. La curiosidad que surge de la necesidad de continuar con el trabajo, como propone Harel (2009) en su modelo de aprendizaje, permite introducir un ciclo de enseñanza propuesto por la teoría Acción, Proceso, Objeto y Esquema (APOE) en su metodología didáctica. Estos dos ciclos se van intercalando durante el trabajo en clase, obedeciendo a las necesidades de los estudiantes hasta terminar con un modelo que permite resolver, de alguna manera, el problema inicial (Trigueros & Possani, 2013).

Así, la construcción del concepto o conceptos nuevos para los estudiantes, como se ejemplificará más adelante, requiere de desarrollar un modelo didáctico específico que permita a los profesores diseñar o utilizar actividades elaboradas con la teoría APOE, que apoyan la construcción de nuevo conocimiento de acuerdo con las necesidades de los estudiantes. Así, el ciclo de modelación se engarza con un ciclo de enseñanza específico en el que se intenta propiciar la reflexión de los estudiantes, de tal forma que se construya colaborativamente el conocimiento deseado.

El diseño, tanto de los problemas de modelación como de las actividades desarrolladas con base en la teoría APOE, requieren de un trabajo colaborativo previo entre maestros, en el que se busquen y diseñen actividades de modelación interesantes para los estudiantes, o se utilicen modelos y preguntas diseñadas con el mismo fin por otros maestros que se analizan previo a su puesta en marcha. Se preguntan qué aspectos del conocimiento matemático de los estudiantes pueden inducir la necesidad de ciertos conceptos matemáticos, y cómo podría el profesor responder a las necesidades de los estudiantes para diseñar actividades que les apoyen en su labor.

El uso de esta estrategia de modelación permite utilizar las ventajas que el trabajo sobre un modelo ofrece, al tiempo que se abre la oportunidad para los estudiantes de construir conocimiento a lo largo del proceso de trabajo. La modelación permite pensar en el papel que las matemáticas toman en la sociedad, mismas que se pueden aprender de forma profunda, tanto en la universidad como en otros niveles escolares.

Este acercamiento promueve la motivación de los estudiantes, pero no se queda ahí. En este tipo de modelación se presenta un ambiente propicio para recuperar ideas previas de los estudiantes y para introducir nuevos conceptos. En particular, juega un papel fundamental como un medio en el que se propicia la aparición de necesidades conceptuales de los estudiantes, se estimula la discusión y el aprendizaje, y en el que es posible favorecer el uso de la tecnología. Todo ello, en la práctica, permite la creación de un ambiente estimulante de aprendizaje en el que las matemáticas permean.

Durante el trabajo colaborativo en equipo y durante la discusión grupal guiada por el profesor, el docente sigue el trabajo de los estudiantes, les plantea preguntas con el fin de motivar las discusiones o inducir la reflexión sobre ideas pertinentes e importantes que surgen en la discusión. De esta manera, el profesor puede recuperar los conocimientos previos, las ideas incorrectas y las que potencian el desarrollo del modelo o de los conceptos a aprender, así como el uso que los estudiantes hacen de ideas de sentido común informado o de su conocimiento de otras disciplinas. Esta posibilidad de observación participante permite al profesor jugar el papel de agente que estimula la reflexión, la creatividad y la construcción de relaciones entre los conocimientos de los estudiantes, al tiempo que promueve la construcción de relaciones entre distintos conceptos matemáticos y con otras disciplinas.

Podría parecer que lo que se ha planteado hasta aquí es una posición muy ambiciosa, pero congruente con los objetivos de la educación matemática. No siempre es posible lograr todo lo esperado, pero la experiencia y la posibilidad de refinar los modelos y las actividades abren las puertas a dicha posibilidad.

## Marco Teórico

La teoría APOE es una teoría basada en la epistemología de Piaget, desarrollada por Dubinsky y sus colaboradores del grupo RUMEC (Arnon et al., 2014), cuyo objetivo es comprender la forma en que los estudiantes construyen conocimiento matemático en un entorno social, como la universidad o la escuela. Para ello, la teoría propone cuatro estructuras teóricas de las que toma su nombre: Acción, Proceso, Objeto y Esquema.

En esta teoría, el aprendizaje de un concepto matemático inicia cuando un estudiante genérico, es decir, un representante de los estudiantes en el nivel educativo de interés, hace Acciones sobre Objetos matemáticos previamente construidos. Un ejemplo en el ámbito de las ecuaciones diferenciales sería ejecutar las Acciones necesarias sobre el Objeto derivada de una función, y el objeto función para construir una ecuación diferencial. Cuando esas Acciones se repiten y el estudiante reflexiona sobre ellas, el estudiante interioriza dichas Acciones en un Proceso.

En el proceso de construcción de un concepto, el estudiante requiere hacer diversas Acciones; estas se encadenan, en ocasiones, para formar un Proceso, pero también pueden interiorizarse de manera independiente en Procesos diferentes. La construcción de Procesos se pone en evidencia cuando el estudiante puede llevar a cabo Acciones mentalmente, o cuando ha generalizado un conjunto de Acciones que puede llevar a cabo sin necesidad de un apoyo externo o de seguir pasos específicos memorizados.

Un Proceso se puede revertir en las Acciones que le dieron lugar y puede coordinarse con otro Proceso para formar uno nuevo. Esta estructura se pone en evidencia, por ejemplo, cuando el estudiante es capaz de distinguir diversas ecuaciones diferenciales y comprender que para cada una de ellas es posible encontrar un conjunto solución, conformado por una familia de funciones. El estudiante es capaz también de revertir este Proceso cuando puede reconocer una ecuación diferencial que tiene dicha solución.

Cuando el estudiante requiere considerar el Proceso en su totalidad, lo encapsula en un Objeto sobre el cual puede ejercer nuevas Acciones, por ejemplo, determinar de qué tipo es una ecuación diferencial dada, comparar distintas ecuaciones diferenciales en términos de sus soluciones, o determinar propiedades de distintas ecuaciones diferenciales.

Por último, un Esquema es una estructura diferente. Está constituido por Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas previamente construidos que están relacionados entre sí. Cuando el estudiante enfrenta un problema evoca, subjetiva u objetivamente, un Esquema que puede aplicar. Un ejemplo de Esquema de Ecuaciones diferenciales podría estar formado por diferentes tipos de ecuaciones de primer orden como Objetos, algunos métodos de solución como Proceso o como Acción y algunas relaciones entre una ecuación diferencial y el procedimiento necesario para encontrar su solución.

Los Esquemas, de acuerdo a la teoría, evolucionan continuamente a través del establecimiento de diferentes tipos de relación entre sus componentes, así como mediante la asimilación o la acomodación de nuevas estructuras en el Esquema. Esta evolución puede analizarse a través de la evidencia de construcción de tres niveles específicos: Intra-, Inter-, y Trans-, mismos que se distinguen por el tipo de relaciones que cada estudiante muestra haber construido entre todas sus componentes, las iniciales y las incorporadas durante su evolución. Los Esquemas pueden además ser coherentes y tematizarse en un Objeto sobre el que se ejercen nuevas Acciones.

Un elemento fundamental de la teoría APOE, y que la distingue de otras teorías, es un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos que son necesarios para construir un concepto matemático dado. Este modelo se denomina Descomposición Genética (DG). Los investigadores proponen este modelo con base en su experiencia como profesores, en resultados de investigaciones previas o en el análisis de la historia de un concepto. El modelo propuesto, como otros modelos, debe probarse experimentalmente y puede validarse, refinarse o descartarse dependiendo de los resultados obtenidos. La DG no pretende ser un modelo único, pues distintas DGs pueden coexistir; lo importante es que una DG se considera válida cuando da cuenta de las construcciones necesarias para formar un concepto o tema a través de los resultados experimentales.

Si bien la modelación no se introdujo originalmente en esta teoría, es compatible metodológicamente con ella, dado que cuando los estudiantes se encuentran ante un problema de modelación utilizan Esquemas previamente construidos, tanto en el ámbito de las matemáticas como en otras disciplinas, o a través de diversas experiencias. Los estudiantes pueden tomar elementos de ellos para elegir variables que les permitan afrontar el problema. Mediante Acciones o Procesos sobre esas variables consideradas como Objeto, así como mediante la coordinación de Procesos, se construye un modelo matemático como Proceso, el cual puede encapsularse en un Objeto o constituir un nuevo Esquema. Nuevas Acciones sobre el Objeto "modelo" o la construcción de relaciones entre las componentes del modelo como Esquema permiten su desarrollo y la posibilidad de encontrar soluciones al problema de modelación planteado (Trigueros, 2014).

El objetivo de este trabajo es ejemplificar la forma en que se utiliza la modelación con base en la teoría APOE. Para ello se hace énfasis en las ideas importantes que surgen durante el trabajo en el modelo y que se observaron en cuatro diferentes ocasiones en las que se utilizó el mismo modelo (Trigueros, 2018).

La teoría APOE cuenta con su propia metodología de investigación y una metodología de enseñanza, que se discuten a continuación. (Arnon et al. 2014).

## Metodología

La metodología de investigación de la teoría APOE se siguió en los problemas de modelación que se presentan más adelante. El modelo, al que llamamos "el reloj de péndulo", tiene como objetivo estimular en los estudiantes la construcción de los conceptos de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, además de sistemas de ecuaciones lineales relacionados en un curso de ecuaciones diferenciales con un acercamiento basado en los sistemas dinámicos. Se ha utilizado en cuatro ocasiones, en la primera de las cuales se profundizó en los conocimientos de la física de los estudiantes y no incluyó el acercamiento a los sistemas dinámicos.

Los estudiantes se encontraban cursando el cuarto semestre de Ingeniería en Sistemas o Industrial. Todos cursaron los programas en la misma universidad. Los cursos fueron impartidos por profesores diferentes utilizando el acercamiento didáctico discutido con anterioridad. Durante la implementación de los cursos, los profesores se apoyaron mutuamente respecto al seguimiento de la experiencia y en el análisis de los resultados obtenidos.

Se diseñó la DG relativa a los conceptos matemáticos requeridos por el modelo y se consideraron elementos específicos del modelo empleado, que hace alusión a la física del movimiento armónico en el diseño del modelo a utilizar. A partir de dicha DG se desarrollaron actividades para guiar la construcción de los conceptos requeridos en el trabajo con cada uno de los modelos. El profesor introducía estas actividades cuando consideraba que los estudiantes requerían reflexionar sobre lo que estaban trabajando, funcionando como apoyo para continuar con el trabajo con el modelo considerado, o para estimular la construcción de los conceptos deseados.

La didáctica fue colaborativa en todo momento. Durante la clase se siguió el ciclo de enseñanza (ciclo ACE) de la teoría APOE. Este consiste en el trabajo colaborativo de los estudiantes con el modelo y/o con las actividades diseñadas con la DG en pequeños grupos de 4 estudiantes (A), seguido de discusión en clase de todo el grupo con el profesor (C). Estas dos partes del ciclo se repiten conforme el profesor lo considera pertinente. Al final de la clase, el profesor deja actividades o ejercicios como tarea (E). Durante todas las sesiones dedicadas al trabajo que aquí se ejemplifica se privilegió el trabajo en el modelo en cuestión para estimular la reflexión de los estudiantes y seguir su aprendizaje. El ciclo de modelación se apoyó, cuando era necesario, del trabajo en actividades diseñadas con la DG para asegurar una construcción profunda y sólida de los conceptos deseados, así como para promover la construcción de relaciones entre conceptos. Lo anterior permitió el desarrollo de los Esquemas de los estudiantes, relacionados con el contexto del problema de modelación, así como la promoción de la toma de conciencia de los alumnos de la estructura matemática involucrada en la solución del problema.

Se trabajó en el aula durante cuatro sesiones y se tuvo un período de experimentación de dos semanas fuera de ella. Durante ese periodo, los equipos debían hacer dos visitas al profesor, en las que él les brindaba apoyo y documentaba sus avances, dudas y descripciones.

En todas las sesiones de clase se audio grabó el trabajo de los estudiantes y la discusión grupal. Los dos profesores que impartieron el curso completaron una bitácora después de cada sesión de clase. Todo el material obtenido fue codificado de acuerdo con la metodología de investigación de la teoría APOE, considerando particularmente los momentos clave en los que surgieron ideas interesantes, o cuando los estudiantes mostraban evidencia de las distintas construcciones descritas en la DG. El análisis para este estudio se llevó a cabo por los profesores mencionados anteriormente. Para ello se codificaron los datos y se analizaron en los diferentes semestres en los que el problema de modelación se utilizó. Se consideró el análisis de este modelo en específico porque, en el momento en que se utiliza, los estudiantes ya conocen lo que es una ecuación diferencial y algunos métodos de solución de análisis como un sistema dinámico, e inician el estudio de las ecuaciones de segundo orden y de los sistemas de ecuaciones diferenciales. El análisis en términos de la DG de cada profesor se discutió entre todos ellos hasta consensuar las diferencias de interpretación.

Se presenta a continuación la Descomposición Genética (DG) que sirvió de modelo para diseñar las actividades conceptuales que acompañaron el trabajo en el modelo. El nivel de análisis que se utilizó en este caso fue el de Esquema de la teoría APOE.

*Descomposición genética del Esquema de sistemas de ecuaciones diferenciales*

La DG para la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales utilizada en este trabajo consiste de la parte relacionada con el conjunto solución de un sistema de ecuaciones diferenciales publicada en (Trigueros, 2014). El desarrollo del Esquema de representación de las funciones implica la construcción de relaciones entre la función como vector, la representación paramétrica de las funciones, curvas, derivada de las funciones y tangente a una curva; la triada correspondiente se describe a continuación.

El desarrollo del Esquema de la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales involucra la relación entre el conjunto solución como una familia de funciones, la curva solución y el proceso seguido para encontrar el conjunto solución, su relación con conceptos del álgebra lineal y puede describirse mediante los siguientes niveles.

Nivel Intra- solución, donde los estudiantes pueden resolver un sistema de ecuaciones diferenciales autónomas y, en ocasiones, no autónomas; pueden relacionar el sistema de ecuaciones con su solución mediante sustitución en el sistema de ecuaciones, es decir, mediante una relación de correspondencia. Reconoce el significado de las soluciones en línea recta, aunque no la relación de éstas con las propiedades de una base en el espacio vectorial correspondiente. La relación con las representaciones de la solución sigue criterios memorizados que no funcionan en todos los casos.

El nivel Inter- solución se caracteriza por la construcción de relaciones de transformación entre las distintas soluciones del conjunto solución.

Relaciona el significado de las soluciones en línea recta y su papel en el comportamiento de otras en el conjunto solución. Establece relaciones de transformación entre algunas representaciones gráficas del conjunto solución, aunque en otros casos no establece la relación inversa para decidir cuándo una representación es conveniente, e incluso posible para algunos sistemas de ecuaciones diferenciales. En general, las relaciones que se construyen entre el conjunto solución y las propiedades de una base son relaciones de correspondencia. No es claro para los estudiantes cuándo una representación es conveniente o incluso posible para algunos sistemas de ecuaciones.

En el nivel Trans- solución los estudiantes muestran haber construido relaciones de conservación al ser capaces de resolver, interpretar y describir gráficamente diferentes sistemas de ecuaciones y de relaciones de conservación, entre las soluciones en línea recta, las propiedades del sistema y el papel de la base del espacio vectorial. La coherencia del Esquema se demuestra mediante la habilidad del estudiante de discriminar entre aquellos sistemas en los que el uso de los métodos analíticos es más apropiado de aquellos para los cuales las representaciones gráficas son más adecuadas, y por su capacidad de determinar cuándo y por qué las soluciones de un sistema forman la base de un espacio vectorial.

*Un proyecto: "el reloj de péndulo". Introducción al problema*

¿Qué tan efectivo es el uso de un péndulo como reloj? ¿Cómo podría probarse su efectividad si lo es? Construyan un reloj de péndulo y discutan en su reporte la metodología seguida y la efectividad de su reloj, apoyándose en datos recogidos en la experiencia. Incluyan también una reflexión sobre si es necesario reconsiderar el modelo propuesto para su desarrollo y cómo podría mejorarse.

*Consideraciones iniciales*

Antes de abordar el problema, los estudiantes habían trabajado con ecuaciones diferenciales de primer orden utilizando un modelo económico. Desde el inicio se utilizó el ciclo ACE. En esta parte del curso se discutieron las ideas de los estudiantes acerca de la variación, así como su papel en fenómenos físicos y en otras disciplinas como la Economía. Se encontró que los estudiantes hacían una equivalencia entre la derivada y la variación sin poder explicar realmente la variación como razón de cambio y la derivada como un límite. El trabajo en los modelos permitió reconsiderar estas ideas. Por otra parte, un modelo relacionado con variación de precios permitió la introducción del método cualitativo de análisis de ecuaciones autónomas mediante la representación de la variación en la línea fase.

El proyecto propuesto se llevó a cabo durante ocho sesiones de clase de dos horas cada una. Durante ese tiempo se cubrió la parte del temario correspondiente a las ecuaciones lineales de segundo orden y los sistemas lineales. Es importante mencionar que en los distintos grupos los profesores desarrollaron el mismo proyecto y utilizaron las mismas actividades elaboradas con la DG, pero no necesariamente hicieron todo de manera idéntica, dado que cada grupo desarrolla su propia dinámica de trabajo. Nuestro interés es dar cuenta de aquellas ideas que surgen en todos los grupos y que son cruciales para enriquecer o movilizar el trabajo en el modelo.

*Resultados: Momentos importantes en el trabajo de los estudiantes*

Los alumnos se interesaron en el proyecto. Discutieron en torno al movimiento del péndulo en distintas condiciones que dependen del medio en el que se da el movimiento, e hicieron listas de variables para comentar en la discusión. Ninguno de los grupos recordaba las ecuaciones del movimiento del péndulo que habían utilizado anteriormente en un curso de Física. Todos empezaron por considerar la distancia de la lenteja del péndulo al punto de equilibrio. Algunos equipos cambiaron el foco y discutieron:

E1: *…no, porque el péndulo baja y sube al mismo tiempo que se mueve horizontalmente, tendríamos que medir las dos…*

E2: *Creo que sería más fácil con el ángulo, en cómo cambia en el tiempo, porque solo nos tenemos que fijar en una variable no en dos…*

E3: *…es algo que oscila como un resorte y ahí podemos considerar las fuerzas que actúan … en el péndulo" …*

E2: *creo que la fuerza importante es la de la gravedad y bueno, también habría que considerar la fricción, y otra fuerza que está… una es la de la cuerda que no deja que se caiga…*

E3: *la tensión de la cuerda debe compensarse con la gravedad, pero no están en la misma dirección, creo que hay que pensar en componentes"*

E1: *para que sirva como reloj hay que estarle dando cuerda o algo así, si no se va a parar.*

Al compartir estas ideas en la discusión en grupo, la atención general pasó a considerar el ángulo que cambia en el tiempo como la posible variable a utilizar, así como el papel de las fuerzas que podrían intervenir en el movimiento del péndulo.

Esta discusión refleja, por una parte, argumentos que ponen el acento en la matemática al referirse a las distancias y a los ángulos, y otros que se centran en la Física, las fuerzas como causantes del movimiento y demás ideas que fueron descartadas en la discusión.

Durante la discusión en grupo, estas ideas se combinaron a través de la sugerencia de la descomposición de las fuerzas: "la tensión se cancela con la componente paralela a la cuerda de la fuerza de gravedad y solo queda la otra componente que es m g seno del ángulo". Además, se encontró que en todos los casos algún alumno propuso "la fricción como una fuerza que cambia el período del reloj".

El trabajo en equipos continuó.

E1: *"No podemos hacer todo de golpe, es complicado, para mi es mejor empezar por las menos fuerzas y luego lo vamos complicando… o sea primero la gravedad, después la fricción y luego la que impide que se pare".*

Consideramos que las ideas que emergen del conocimiento previo de los estudiantes sentaron la base que sustentaría el proyecto completo. Por su parte, la sugerencia de comenzar por el problema más simple es una idea emergente que señala un proceder que economiza y direcciona el trabajo. La profesora intervino en la discusión en grupo porque la idea no resultó convincente para todos: "La idea es buena, pero recuerden que para hacerlo necesitamos considerar hipótesis que permitan eliminar de momento esas variables" y en esa misma discusión se decidió no considerar la resistencia del aire y que no hay otras fuerzas que "lo empujen".

*Péndulo simple*

Los estudiantes ya habían identificado la importancia de la fuerza de gravedad y la tensión de la cuerda, un estudiante propuso relacionarlas: la gravedad se equilibra con la tensión de la cuerda de la que cuelga la lenteja y en respuesta a ello otro estudiante propuso "solo la componente de la gravedad que está en el sentido perpendicular de la cuerda hace que se mueva el péndulo". La atención cambió nuevamente hacia el movimiento y la búsqueda de una forma de representar estas conclusiones en una ecuación que incluyera cambios en la variable seleccionada.

La pregunta de una estudiante en un equipo E6: "¿podemos usar la ecuación de Newton? Porque la aceleración es la derivada de la velocidad y la velocidad de la posición…" cambió nuevamente la dirección de la discusión. Este comentario fue fundamental en la consideración de una ecuación diferencial de segundo orden. Pero más interesante aún es que en otros grupos varios estudiantes habían considerado dos ecuaciones de primer orden, una para la relación entre la aceleración y la derivada de la velocidad, y otra entre la velocidad como derivada de la posición. Estos estudiantes pusieron de manifiesto la construcción de un Esquema en el nivel Inter-derivada.

En este episodio, la mayor parte de los demás estudiantes mostró que su Esquema de derivada se encontraba en un nivel Intra- derivada de desarrollo.

Frente a las ecuaciones diferenciales presentadas como modelo para el péndulo, los profesores, durante la discusión en grupo, preguntaron a los estudiantes el significado de cada una, e introdujeron actividades basadas en la DG para estimular la comprensión de las ecuaciones, su relación con la Física y la forma de resolverlas.

En dos de los grupos apareció una idea que consideramos de importancia señalar, aun cuando no apareció en todos ellos. Estos estudiantes preguntaron "¿Podemos utilizar la recta fase para analizar el comportamiento de las soluciones como en el caso de las ecuaciones de primer orden?" y "¿Puede haber una línea fase para la función velocidad y otra para la función aceleración?" Esta transición está ligada a la emergencia del nivel Trans-derivada del Esquema, dado que los estudiantes que la propusieron fueron capaces de considerar una posible relación de conservación del análisis geométrico de las ecuaciones diferenciales de primer orden y el análisis geométrico de los sistemas de ecuaciones de segundo orden. Destaca también cómo la discusión constante entre la Física y las Matemáticas se refleja en la forma en que se plantea la pregunta sobre las dos líneas fase. Otro comentario que indica esta misma transición se encontró en el trabajo de varios alumnos que, al ver las dos posibilidades de representación analítica del movimiento del péndulo, hicieron Acciones sobre las derivadas del sistema y encontraron cómo éste podía transformarse en una ecuación diferencial de segundo orden. Las actividades diseñadas con la DG incluyeron tareas en las que los estudiantes tuvieron oportunidad de dibujar el plano fase de diversos sistemas de ecuaciones lineales y de interpretar los diagramas en términos del comportamiento del péndulo.

*Péndulo amortiguado*

La introducción de la fricción en el movimiento del péndulo motivó discusiones para entenderla. En algunos equipos, los estudiantes discutían preguntas acerca de la forma matemática de incorporarla al modelo: "velocidad en la dirección del movimiento, ¿cómo le hacemos?" La experiencia cotidiana de los estudiantes jugó un papel importante en la discusión en grupo:

E3; "*Es constante… no?*"

E2: "*No, yo he oído que las naves espaciales se pueden quemar cuando entran a la atmósfera porque van muy rápido…*"

EI: "*En las carreras de fórmula uno a veces las llantas se desgastan mucho si el conductor frena cuando va muy rápido*".

Los profesores intervinieron explicando algo como,

P1: "*tienen razón, la fricción es difícil de definir. Una buena aproximación para nuestro problema es considerarla proporcional a la velocidad del péndulo*" y preguntó, "*¿cómo modificarían su modelo?*"

Una estudiante propuso:

E9: "*lo que cambia es la fuerza, ahora hay que sumarle la velocidad, no le puedes sumar la velocidad a una fuerza, bueno, pero… lo que aumentas es la fuerza que es kv… con menos porque va contra el movimiento… pero tenemos que asegurar que es la…*"

Con esta idea modificaron la ecuación, sumando la fuerza de fricción y continuando con la solución y el trabajo en actividades introducidas para dibujar el plano fase.

*Péndulo forzado*

Los alumnos iniciaron el trabajo en el péndulo forzado conscientes de que necesitaban una fuerza externa periódica:

E7: "*…como cuando empujas algo que cuelga y se mece*"

E6: "*pero necesitamos estarlo empujando con el ritmo de la oscilación para que no se pare*" Todos los equipos usaron una fuerza del tipo

E2: "*es como F= Kcosrt*" y explicaron

E1: "*la r tiene que ser la misma que la del péndulo normal*"

En todos los grupos, los estudiantes hicieron mucho esfuerzo en la construcción del péndulo que se pedía en el trabajo y que se realizó fuera de clase para hacer experimentación. Surgieron péndulos originales usando, por ejemplo, un metrónomo para lograr empujar con la misma frecuencia. Los estudiantes midieron y concluyeron la actividad. Esta transición puso de manifiesto la evolución del Esquema. En el análisis del examen final se hizo patente que la mayoría de los estudiantes construyeron el Esquema a nivel Inter-ecuaciones diferenciales, y algunos estudiantes dieron evidencia de la construcción Trans-ecuaciones diferenciales del Esquema.

## Resultados y conclusiones

El análisis de un problema de investigación desde una nueva perspectiva permitió poner en relieve aspectos generales de los procesos de modelación que no se suelen identificar. El uso de la teoría APOE nos proporciona una forma de entender la modelación como estrategia didáctica. Las actividades diseñadas utilizando la DG complementan el trabajo en el modelo y permiten desarrollar otros espacios de reflexión y trabajo colaborativo que dan nuevas posibilidades de reflexionar en lo que se hace con el modelo, pero también con la matemática en sí, lo que promueve un aprendizaje profundo de los temas estudiados.

Los resultados obtenidos en esta experiencia dan cuenta de la forma en que los estudiantes recuperan sus conocimientos previos durante el trabajo en equipo. En este caso, se trabajó con temas tanto de física como de matemáticas, tales como la selección de variables pertinentes, el uso de la descomposición de fuerzas en sus componentes y la posibilidad de determinar expresiones algebraicas para fuerzas físicas no tratadas anteriormente. Los estudiantes proporcionan evidencias de la evolución de su Esquema de Ecuaciones diferenciales conforme hacen sentido de las relaciones entre las fuerzas, la derivada y la doble derivada.

Como en otras experiencias de la modelación, el trabajo y la discusión de los estudiantes favoreció la aparición de ideas relevantes, como la importancia de simplificar el problema para poder modelarlo y posteriormente modificarlo para trabajar con situaciones más complejas, el desarrollo de la línea de fase como herramienta de análisis de las ecuaciones diferenciales y la doble línea fase que sirvió para introducir el espacio fase y la descripción cualitativa de los sistemas de ecuaciones diferenciales.

## Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsk. E., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory: Framework for research and curriculum development in Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/nxn2

Blum, W., & Borromeo, R. (2009). Mathematical modelling. Can it be taught and learned. *Journal of Mathematical Modeling and Application, 1*(1), 45–58. https://bit.ly/4fDAeMt

Boaler, J. (2001) Mathematical modelling and new theories of learning. *Teaching Mathematics and its Applications, 20*(3), 121–128. https://doi.org/ftk3n5

García, R. (2011). Interdisciplinariedad y sistemas complejos. *Revista Latinoamericana de Metodología de las Ciencias Sociales, 1*(1). 66–101.

Guerrero-Ortiz C., & Camacho-Machín M. (2022). Characterizing tasks for teaching mathematics in dynamic geometry system and modelling environments. *Mathematics, 10*(8), 1239. https://doi.org/nxn4

Harel, G. (2009). DNR-based instruction in mathematics as a conceptual framework. En B. Sriraman, & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education* (pp. 343–367). Springer. https://doi.org/dh74bn

Hernández-Suarez, C. A., Jaimes-Contreras, L. A., & Chaves-Escobar, R. F. (2016). Modelos de aplicación de ecuaciones diferenciales de primer orden con geogebra: actividades para resolver problemas de mezclas. *Mundo FESC, 6*(11), 7–15. https://www.fesc.edu.co/Revistas/OJS/index.php/mundofesc/article/view/77

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003) The didactical use of models in realistics mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 9–35. https://doi.org/c63x9b

Keiser, G., Blomhøj, M., & Sriraman, B. (2006) Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM, 38*(2). 82 –85. https://doi.org/bt6cfx

Leung, F., Stillman, G., Kaiser, G., & Won, K. (Eds.). (2021). *Mathematical modelling education in east and west.* Springer. https://doi.org/nxn5

Lesh, R., & Lehrer, R. (2003) Models and Modeling Perspectives on the Development of Students and Teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(2–3), 109–129. https://doi.org/ffxg5t

Rasmussen, C., Zandieh, M., Larson, C., & Sweeney. G. (2012). An inquiry-oriented approach to span and linear independence: The case of the magic carpet ride sequence. *PRIMUS, 22*(8), 577–599. https://doi.org/nxn6

Trigueros, M. (2018). Learning Linear Algebra Using Models and Conceptual Activities. En S. Stewart, C. Andrews- Larson, A. Berman, & M. Zandieh (Eds.), *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 29–50). Springer. https://doi.org/nxn7

Trigueros, M. (2014). Vínculo entre la modelación y el uso de representaciones en la comprensión de los conceptos de ecuación diferencial de primer orden y de solución. *Revista Educación Matemática, esp. 25 años*. 207–226. https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Esp-1-10.pdf

Trigueros, M., & Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications, 438*(4), 1779–1792. https://doi.org/bcsw8c

Trigueros Gaisman, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa, 9*(46), 75–87.

Villa-Ochoa, J. A., Milton, R., & Gavarrete, M. E. (2018). Aproximaciones socioculturales a la modelación en educación matemática: Aportes de una comunidad latinoamericana. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 11*(1) 4–12. https://www.redalyc.org/journal/2740/274058504001/html/