Secuencias de problemas de Fermi para introducir la modelización matemática

Lluís Albarracín [1]
Irene Ferrando [2]
Carlos Segura [3]
Núria Gorgorió [4]

Resumen

En este capítulo sintetizamos los avances en la investigación sobre el uso de problemas de Fermi para sustentar secuencias de actividades promotoras de modelos matemáticos en el aula. En primer lugar, se describen las investigaciones desarrolladas en el seno de nuestro grupo de investigación, las cuales han permitido identificar el potencial de los problemas de Fermi como actividades de modelización matemática. Se detallan las herramientas de análisis desarrolladas para caracterizar los modelos que generan los alumnos, así como su uso en diversas investigaciones. En segundo lugar, se detalla la fundamentación teórica y las características de las secuencias de problemas de Fermi para promover la actividad de modelización matemática en las aulas de primaria y secundaria. Finalmente, se da cuenta de los estudios que muestran la utilidad de las secuencias de problemas de Fermi en la formación del profesorado, destacando su potencial para promover la flexibilidad en la resolución de problemas en futuros maestros.

Palabras clave

Problemas de Fermi, modelización matemática, estimación, secuencias de problemas.

---

[1] lluis.albarracin@uab.cat
Universitat Autònoma de Barcelona, España

[2] irene.ferrando@uv.es
Universitat de València, España

[3] carlos.segura@uv.es
Universitat de València, España

[4] nuria.gorgorio@uab.cat
Universitat Autònoma de Barcelona, España

Albarracín, L., Ferrando, I., Segura, C., & Gorgorió, N. (2025). Secuencias de problemas de Fermi para introducir la modelización matemática. En A. Solares-Rojas, & A. P. Preciado Babb (Eds.), *La investigación en modelización matemática: un diálogo entre educadores de Latinoamérica y España* (pp. 153–177). Editorial SOMIDEM.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S2/2025/01-07

Abstract

In this chapter, we summarize progress in research into the use of Fermi problems to support sequences of activities that promote mathematical modelling in the classroom. First, we describe the research carried out in our research group that has allowed us to identify the potential of Fermi problems as mathematical modelling activities. The analysis tools developed to characterize the models generated by the students and their use in different investigations are detailed. Secondly, the theoretical basis and characteristics of Fermi problem sequences for promoting mathematical modelling activities in primary and secondary schools are detailed. Finally, we report on studies that demonstrate the usefulness of Fermi problem sequences in teacher training, highlighting their potential to promote flexibility in problem solving in future teachers.

Keywords

Fermi problems, mathematical modelling, estimation, problem sequences.

La modelización matemática ha despertado el interés de la comunidad educativa por su potencial para describir fenómenos complejos y promover el pensamiento crítico (Vorhölter et al., 2014). Sin embargo, su inclusión en el aula como actividad habitual es aún limitada (Borromeo Ferri, 2021); lo que contrasta con la madurez alcanzada en la investigación sobre modelización matemática en educación (Schukajlow et al., 2018). En paralelo, se observa que la modelización matemática se ha asociado principalmente a los niveles de educación secundaria superior y niveles universitarios (Greer et al., 2007), aunque la investigación también ha demostrado que los estudiantes de los niveles de primaria y primeros cursos de secundaria pueden trabajar eficazmente con estas actividades (English, 2011). Ante esta situación, parece necesario profundizar en la investigación sobre actividades que faciliten la introducción de la modelización matemática en el aula a todos los niveles educativos. Una propuesta es utilizar los denominados problemas de Fermi, que plantean una situación real y abierta que requiere hacer estimaciones (Ärlebäck, 2009), permitiendo que los estudiantes experimenten con los principales procesos de la modelización matemática (Haberzettl et al., 2018) y construyan modelos matemáticos por sí mismos (Albarracín & Gorgorió, 2014).

En este capítulo sintetizamos los avances en el uso de problemas de Fermi como actividades de modelización matemática, desarrollados en el seno de nuestro grupo de investigación. Se describen investigaciones empíricas basadas en el análisis de producciones de estudiantes al trabajar con problemas de Fermi. Estas investigaciones nos permiten identificar algunos elementos clave en el diseño de las secuencias de problemas relativos al contenido matemático implicado y a sus variables contextuales. Discutimos el rol de las secuencias de problemas de Fermi en términos del potencial didáctico para los estudiantes, pero también como actividades clave en la formación de maestros o profesores, destacando los estudios recientes sobre su uso para promover la flexibilidad en resolución de problemas (Segura & Ferrando, 2023).

Modelización matemática y actividades promotoras de modelos

La modelización matemática como foco de investigación en el campo de la educación matemática se inicia con el trabajo de Pollak (1969), quien discute la relación entre las aplicaciones de las matemáticas y los procesos de enseñanza y aprendizaje. Posteriormente, el mismo Pollak (1979) presenta un primer marco teórico para la modelización matemática, que interpreta los procesos de modelización diferenciando entre el dominio matemático y el resto del mundo. Esta separación conduce necesariamente a un proceso de matematización de un fenómeno o situación real, pasando de la realidad al dominio matemático. Cuando el resolutor trabaja en el dominio matemático, genera un modelo que sustenta una respuesta que debe ser reinterpretada y validada en el contexto real (Blum, 2002).

En la investigación sobre modelización matemática en contextos educativos, la mayoría de los enfoques que describen los procesos cognitivos necesarios para enfrentarse a una tarea de modelización (Blum & Leiß 2007; Borromeo Ferri, 2010; Czocher, 2016; Galbraith & Stillman, 2006) coinciden en la necesidad de seguir una secuencia de procesos clave en ciclos de modelización idealizados, como el de Blum y Leiß (2007). Así, los alumnos intentan resolver los problemas pasando por diferentes etapas y volviendo atrás para reevaluar la situación estudiada. Por lo tanto, el proceso de resolución se repite en diferentes ciclos en los que los estudiantes mejoran los modelos y soluciones encontrados para el problema en el que están trabajando, adaptándolos a los requisitos del enunciado del problema (Blum & Borromeo Ferri, 2009).

De entre las diversas perspectivas teóricas de la modelización matemática (Abassian et al., 2020; Kaiser & Sriraman, 2006), nuestra investigación sobre problemas de Fermi y modelización matemática se enmarca en la denominada *Models and Modelling Perspective* (Lesh & Doerr, 2003a). Desde esta perspectiva, los modelos son sistemas conceptuales (formados por elementos, relaciones, operaciones y reglas que rigen las interacciones) que se expresan mediante sistemas de notación externos y que se utilizan para construir, describir o explicar el comportamiento de otros sistemas, quizá para poder manipularlos o predecirlos de forma inteligente (Lesh & Doerr, 2003b). Al participar en actividades de modelización, los alumnos desarrollan, modifican, amplían y revisan sus modelos a través de múltiples ciclos de interpretaciones, descripciones, conexiones, explicaciones y justificaciones (Doerr & English, 2003).

Una línea de investigación bien establecida dentro de esta perspectiva se ha centrado en las actividades promotoras de modelos (denominadas MEA por su formulación en inglés, *Modelling Eliciting Activities*) en múltiples contextos, con estudiantes que van desde primaria hasta universidad. Las MEA son actividades en las que los estudiantes se enfrentan a una situación problemática en la que necesitan construir un modelo para dar sentido a la situación. Existen seis principios bien establecidos para su diseño: el principio de realidad (o de creación de sentido), el principio de construcción, el principio de autoevaluación, el principio de documentación, el prototipo simple y el principio de generalización (Lesh & Doerr, 2003b; Lesh et al., 2000). Sin embargo, las MEA aisladas pueden no ser suficientes para ayudar a los estudiantes a desarrollar un modelo generalizado que pueda utilizarse y reutilizarse en diversos contextos (Doerr & English, 2003), por lo que aparece la necesidad de encadenar múltiples actividades de modelización estructuralmente relacionadas y que ofrezcan oportunidades a los alumnos para explorar, aplicar y probar construcciones matemáticas relevantes en diferentes situaciones y contextos. Esta es la función de las secuencias de actividades para el desarrollo de modelos (Doerr & English, 2003). A lo largo del trabajo con la secuencia de desarrollo de modelos, los alumnos se involucran en múltiples ciclos de descripciones, interpretaciones, conjeturas y explicaciones, lo que los lleva a refinar y desarrollar sus modelos de forma iterativa. En este proceso, la interacción con otros estudiantes y la participación en debates dirigidos por el profesor son prácticas clave para facilitar este desarrollo (Segura et al., 2023).

Problemas de Fermi como actividades de modelización matemática

Los problemas de Fermi son un tipo de problemas que implican realizar estimaciones aproximadas, pero fundamentadas, de cantidades de magnitud, a menudo basadas en datos incompletos (Efthimiou & Llewellyn, 2007). Reciben su nombre por Enrico Fermi, quien los usaba en sus clases de Física para mostrar el poder del razonamiento deductivo, y como preparación para el trabajo experimental en el laboratorio de Física.

Dada su formulación, en la que se solicita una estimación sin proporcionar datos específicos en el enunciado, por lo que la resolución de los problemas de Fermi a menudo implica descomponer el problema original en subproblemas más sencillos (Carlson, 1997) para llegar a una solución, esto mediante estimaciones razonables (Taggart et al., 2007), conjeturas fundamentadas (Sriraman & Lesh, 2006) y diversos tipos de razonamiento matemático (Ridgway et al., 2001). Ärlebäck (2009) describe los problemas de Fermi como “problemas abiertos, no estándar, que requieren que los estudiantes hagan suposiciones sobre la situación del problema y estimen cantidades relevantes antes de realizar, a menudo, cálculos sencillos" (p. 331).

Un ejemplo de problema de Fermi es estimar el número de lentejas que contiene un paquete de un kilogramo. Este problema puede parecer anecdótico, pero implica la generación de un modelo de distribución de objetos en el espacio, y su combinación con experimentos que permitan obtener información del mundo real. Un ejemplo de problema de Fermi con un contexto relevante es el utilizado por Morgan (2017) en un curso de astrobiología, en el que se pide estimar la cantidad de energía utilizada por la humanidad cada año para compararla con la energía que la Tierra recibe del Sol. Otros ejemplos de problemas de Fermi pueden ser la estimación de la cantidad de gente que cabe en un pabellón deportivo, el tiempo necesario para ir andando desde París a Barcelona o la cantidad de médicos necesarios en un país.

Los problemas de Fermi se caracterizan por ser actividades que requieren la simplificación y matematización de la realidad (Gallart et al., 2017). Basándose en las premisas del proceso de modelización mencionadas anteriormente, dichos problemas se consideraron eficaces para iniciar el proceso de modelización (Albarracín & Gorgorió, 2014; Ärlebäck, 2009; Czocher, 2016; Ferrando & Albarracín, 2021; Peter-Koop, 2009), ya que promueven que los estudiantes generen modelos matemáticos sencillos a partir de su conocimiento previo del mundo real (Henze & Fritzlar, 2010). Así, el contexto en el que se formulan los problemas de Fermi es un aspecto clave del proceso de modelización. Estos problemas demandan estimaciones de cantidades implicadas en una situación de la vida real, lo que requiere comprensión de los conceptos matemáticos necesarios para construir modelos, en lugar de solo recordar y aplicar hechos y procedimientos conocidos (Albarracín & Gorgorió, 2015).

Nuestra aproximación a los problemas de Fermi en Educación Matemática

Como se ha explicado, el proceso habitual para la resolución de problemas de Fermi se basa en su descomposición en subproblemas, en los que resulta más sencillo obtener estimaciones razonadas. Esta forma de trabajar se conoce en la literatura como el "método de estimaciones de Fermi" (*Fermi estimates method*). La investigación sugiere que, mediante instrucción directa, este método puede ser enseñado con éxito a los estudiantes de secundaria para resolver un amplio rango de problemas de Fermi (Raviv et al., 2016; Barahmeh et al., 2017).

Aunque la investigación sobre estos problemas generalmente enfatiza el uso de la estimación, se ha sugerido que esta forma de obtener resultados numéricos para los subproblemas puede ser reemplazada por otras actividades matemáticas (Sriraman & Knott, 2009). En este sentido, Ärlebäck y Albarracín (2019) revisaron los artículos científicos sobre el uso de problemas de Fermi en las diversas áreas de Educación que han prestado atención a este tipo de problemas. A partir de esta revisión, Albarracín y Ärlebäck (2019) proponen un marco teórico para describir el proceso de resolución de problemas de Fermi a partir de en cuatro actividades matemáticas: estimación, experimentación (referida habitualmente a actividades de medida), búsqueda de datos en fuentes externas y recolección de datos estadísticos. De esta forma, la resolución de un problema de Fermi puede ampliarse de una breve actividad, en la que se genera un modelo simple y se determinan valores parciales a partir de estimaciones, a proyectos más amplios y de mayor entidad, en los que algunos subproblemas clave se estudian como investigaciones independientes (Albarracín, 2021). En estas investigaciones se infiere que, al responder a subproblemas específicos, los estudiantes pueden diseñar experimentos y recoger datos reales para mejorar la confianza en las estimaciones obtenidas.

Dada la naturaleza de las actividades implicadas en el proceso de resolución de problemas de Fermi, que abarcan desde estimaciones hasta experimentaciones o recogidas de datos, entendemos que combinar trabajo individual y grupal es la forma de organización idónea en este tipo de actividades. Además, esta dinámica promueve el intercambio de ideas entre los estudiantes al generar modelos matemáticos (Zawojewski et al., 2003). Sin embargo, hemos observado (Albarracín & Gorgorió, 2014) que una parte de los estudiantes que se enfrentan de forma individual a los problemas generan propuestas que incluyen elementos de modelización matemática sin necesidad de instrucción previa o soporte de sus compañeros. De esta forma, para aprovechar al máximo las ideas que puedan aportar todos los miembros de un grupo, es conveniente solicitar a los estudiantes que generen un plan de acción de forma individual al inicio del trabajo en una secuencia de problemas.

Estudios dedicados a la caracterización de los modelos matemáticos de los estudiantes al resolver problemas de Fermi

Identificación de estrategias y modelos

Los primeros estudios surgidos en el seno de nuestro grupo de investigación sobre la resolución de problemas de Fermi parten de los trabajos de Peter-Koop (2009) y Ärlebäck (2009), pioneros en el estudio del potencial educativo de estos problemas en el área de la Educación Matemática. Estos estudios sientan las bases teóricas que sustentan la caracterización de las estrategias de resolución de problemas de Fermi, y que se usa en la tesis de Albarracín (2011).

Con este bagaje previo, en Albarracín y Gorgorió (2014) se caracterizan las estrategias de resolución de problemas de Fermi por parte de estudiantes de secundaria, a problemas de Fermi que involucran la estimación la cantidad de objetos necesarios para llenar un espacio, como la cantidad de personas que caben en el patio del instituto o el número de vasos necesario para llenar una piscina. En este trabajo, lo primero que se observa es la dificultad para rastrear las decisiones tomadas por los estudiantes cuando deben resolver este tipo de problemas, pues tienden a centrarse en conseguir valores numéricos, e ignoran explicar por escrito la motivación de sus decisiones. Por ello, se toma la opción de solicitar a los estudiantes que escriban planes de acción (en el sentido de Pólya, 1945) en los que describan detalladamente qué procesos (acciones) seguirían para obtener la estimación demandada, pero sin realizar los cálculos ni proporcionar respuestas numéricas. Esto permite hacer un análisis en el que se identifican las acciones propuestas por los alumnos. En muchos casos, estas acciones están encadenadas con el objetivo claro de conseguir la estimación solicitada, constituyendo una estrategia que podría ser adaptada a otras situaciones. Una parte importante de las estrategias identificadas se basan en la construcción de un modelo matemático. Las principales estrategias identificadas en Albarracín y Gorgorió (2014), y que han seguido presentes en los estudios posteriores de forma continuada, son las siguientes:

- Recuento exhaustivo: se propone contar uno a uno todos los elementos del grupo de objetos.
- Fuente externa: se traslada la responsabilidad de responder al problema a un tercero, que supuestamente dispone de la información necesaria.
- Densidad: se basa en razonar a partir de una estimación de la densidad, entendida como un valor estimado del número de elementos que ocupan una unidad fijada previamente. Así, a partir de esta estimación de la densidad (elementos/unidad), es posible deducir el número de elementos multiplicando la densidad por la medida total.
- Iteración de una unidad: se determina el número de objetos dividiendo el área de la superficie total ocupada del lugar donde se encuentran las personas u objetos y dividiéndolo por la superficie que ocupa un solo elemento, que actúa como punto de referencia, en el sentido establecido por Joram et al. (2005), en los procesos de medida.
- Distribución en cuadrícula: se utiliza una imagen mental de la distribución de objetos ordenados regularmente en un modelo de cuadrícula, después se estima el número total de objetos que se encuentra en cada fila y/o columna, y, por último, aplica la regla del producto para establecer el resultado.

El estudio y caracterización de estrategias de resolución se complementa con el presentado en Albarracín y Gorgorió (2013), en el que se analiza la influencia del contexto de cada problema en el modelo generado en la estrategia. Se observa que para problemas con una misma formulación matemática (estimar el número de objetos que ocupan un volumen), los modelos propuestos por los estudiantes varían en función del contexto concreto del problema. Como luego se verá, este resultado abre la puerta a introducir variaciones de contexto en una secuencia de problemas para promover diferentes tipos de aproximaciones a problemas similares.

Uno de los aspectos en el que hemos centrado esfuerzos es en el proceso de caracterización de estrategias de resolución a partir de planes de acción, en los que se construye un modelo matemático y de resoluciones reportadas en informes. En nuestro trabajo adoptamos la definición de modelo matemático que proponen Lesh y Harel (2003). Estos autores consideran que los modelos son sistemas conceptuales y procedimentales utilizados para construir, describir o explicar otros sistemas. Esta definición presenta una dificultad a los investigadores, pues no es común que los estudiantes expliciten los conceptos matemáticos en los que basan sus modelos. Sin embargo, la definición de modelo se sustenta en dos elementos que sí pueden identificarse en el análisis de producciones de los estudiantes, como son los procedimientos que encadenan y los tipos de lenguaje utilizados. A partir de estas consideraciones, es posible inferir los conceptos implícitos que consideran los estudiantes al proponer cadenas de procedimientos (acciones) explícitos. En Gallart et al. (2017) presentamos y validamos una herramienta de análisis de los modelos matemáticos desarrollados en las estrategias de resolución de problemas de Fermi. Esta herramienta está destinada a la caracterización de modelos a partir de la determinación cualitativa de los conceptos, procedimientos y lenguajes utilizados en el plan de acción. Ha sido utilizada en diversos estudios para sostener resultados de investigación que nos han permitido aprender sobre cómo los estudiantes de diversas edades se enfrentan a la resolución de problemas de Fermi.

Aspectos diferenciadores en las producciones de los estudiantes al resolver problemas de Fermi

En Ferrando et al. (2017) se pueden distinguir aspectos diferenciadores entre los modelos producidos por alumnos sin experiencia en actividades de modelización, frente a aquellos modelos producidos por alumnos con experiencia previa, tanto en los conceptos y lenguajes utilizados para dar forma a los modelos matemáticos construidos como en los elementos añadidos al modelo, mismos que proporcionan la complejidad necesaria para adaptarse a las características del contexto estudiado. En Albarracín y Gorgorió (2019) se caracterizan los modelos generados por estudiantes de educación primaria. Se observa que los alumnos de 5º y 6º curso de primaria pueden producir soluciones basadas en modelos matemáticos a partir de su conocimiento del mundo real. En general, estos modelos están basados en conceptos relacionados con otros contenidos matemáticos trabajados previamente, como puede ser la iteración de la unidad; sin embargo, algunos equipos de trabajo basan sus modelos en conceptos como la densidad de población, que no ha sido tratada previamente.

En Ferrando y Albarracín (2021) se comparan los modelos desarrollados por estudiantes de diversas edades (desde 7 hasta 15 años) en las estrategias de resolución de un mismo problema de Fermi, el cual consiste en estimar el número de personas que cabrían como público en el patio del centro escolar si se organiza un concierto. Este estudio comparativo permite establecer el tipo de modelos matemáticos que pueden desarrollar de forma autónoma los estudiantes de diferentes niveles educativos. Los estudiantes de menor edad (7 años) no generan modelos en sus estrategias de recuento básicas, pero a partir de 4º curso de primaria se observa que son capaces de desarrollar modelos matemáticos. En concreto, los estudiantes de los cursos superiores pueden trabajar con el modelo de la distribución en cuadrícula, así como con la iteración de la unidad. No es hasta la etapa de secundaria que los alumnos cambian los modelos basados en disponer individuos en un plano, ya sea en distribución en cuadrícula o a partir de la superficie ocupada por una persona, a un modelo conceptualmente complementario, basado en propiedades del plano como la densidad de población.

El bloque de estudios que conforman esta sección consolida a los problemas de Fermi como actividades ideales para introducir la modelización matemática a partir del trabajo con estimaciones. Lo anterior nos han permitido identificar una variedad de modelos matemáticos basados en conceptos fundamentales en los currículos de matemáticas, mostrando que existe una graduación en la complejidad de los modelos que desarrollan los estudiantes. El uso de secuencias de problemas de Fermi podría promover esta variedad de modelos distintos, como se explicará en la siguiente sección.

Investigaciones sobre secuencias de problemas de Fermi

Para el diseño de las secuencias de problemas de Fermi es necesario considerar diversos elementos que detallamos en esta sección. Se trata de determinar el tipo de problema matemático al que se van a enfrentar los alumnos, proporcionar diversos problemas que permitan desarrollar los conceptos matemáticos esenciales a partir de la introducción de contextos variados, y considerar el rol de cada uno de los problemas dentro de la secuencia.

Para proporcionar coherencia a la secuencia a diseñar, partimos de la elección de varios problemas matemáticos que comparten su estructura matemática (Albarracín y Gorgorió, 2015). Un ejemplo sería crear una secuencia basada en problemas de estimación de objetos en un recinto acotado. En este caso, se pueden elegir problemas en los que se solicite estimar el número de gotas necesarias para llenar un vaso, el número de monedas que caben en la caja fuerte de un banco, o el número de naranjas que pueden transportarse en un camión. Todos estos problemas tienen la misma estructura matemática (un elemento que se repite debe ocupar todo un volumen), pero los objetos a estudiar (gota, moneda, naranja) ocupan de forma diferente el espacio y se acomodan entre ellos de forma distinta. Por ejemplo, las gotas no tienen una forma definida, y se fusionan llenando totalmente el recinto acotado; las monedas son cilindros achatados y las naranjas tienen una forma muy próxima a esferas, pero en ambos casos no es posible llenar totalmente el recinto acotado. Si el enunciado se refiere a una moneda concreta (de 1 euro, dólar o peso), todos los objetos tendrán la misma forma y volumen, lo que no ocurre en el caso de las naranjas. Estas variaciones en las características de los objetos son parte de las variables contextuales del problema de Fermi que se plantea (Ferrando et al., 2020; 2021).

En nuestro trabajo tomamos la perspectiva de *upscaling & downscaling contexts* (Pla-Castells & Ferrando, 2019; Albarracín et al., 2022), en la que todos los problemas de la secuencia son equivalentes desde el punto de vista de su estructura matemática, pero presentan diferentes niveles de dificultad para los estudiantes debido al contexto específico elegido para cada uno de ellos. El aspecto clave de esta forma de diseñar secuencias de problemas es desafiar a los alumnos con un problema sencillo, situado en un contexto conocido y próximo, para el que puedan generar fácilmente un modelo matemático. A partir de aquí se les presentan problemas en contextos lejanos y referidos progresivamente a situaciones más complejas. Pla-Castells y Ferrando (2019) usaron esta fórmula de diseño en una secuencia para estimar la cantidad de personas necesarias para rodear una ciudad. Como estrategia de andamiaje diseñada para estudiantes de primaria, se empieza el trabajo de aula estimando la cantidad de personas necesarias para cubrir el perímetro de la clase, y luego el perímetro del centro escolar. De esta forma, los estudiantes pueden experimentar la situación propuesta en contextos cercanos, para progresivamente enfrentarse al problema objetivo: estimar el número de personas necesario para rodear el perímetro de un municipio.

Una parte importante de los estudios desarrollados sobre secuencias de problemas de Fermi se han soportado en la secuencia que describimos a continuación. Desde un punto de vista estrictamente matemático, todos ellos demandan la estimación de una gran cantidad de elementos dispuestos sobre una superficie delimitada. Los problemas de esta secuencia son los siguientes:

- Problema P1: ¿cuántas personas caben en el patio del instituto?

- Problema P2.1: ¿cuántas personas caben en el Palau St. Jordi para un concierto?
- Problema P2.2: ¿cuántas personas cabrían en la plaza del ayuntamiento de tu municipio durante una manifestación?
- Problema P2.3: ¿cuántas personas cabrían en la Plaza Cataluña de Barcelona durante una manifestación?
- Problema P2.4: ¿cuántos árboles hay en Central Park?

El problema P1 actúa como una actividad promotora de modelos (MEA), ya que es el primer contacto de los alumnos con la problemática y requiere de la creación de un modelo matemático inicial. Este problema se refiere a una situación familiar, que puede trabajarse en grupos en la escuela, experimentando en el espacio real para vivenciar las dificultades que presenta el problema, lo que favorece las interacciones entre los estudiantes para desarrollar el modelo.

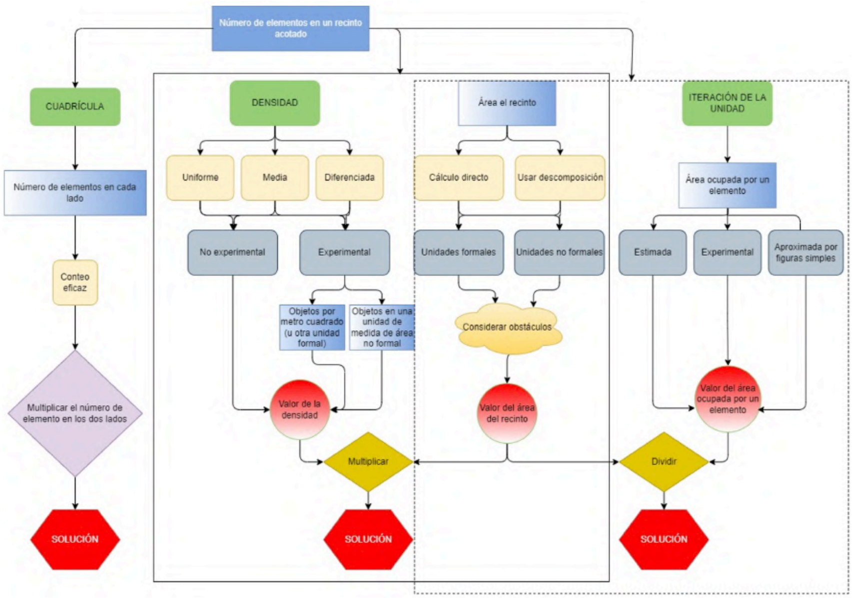
Los problemas P2.1, P2.2, P2.3 forman parte de la secuencia para ayudar a los alumnos a cuestionar, desarrollar, adaptar o reconstruir los modelos que han creado para resolver P1, con el fin de llegar a construir uno generalizable. Debido a las características de los contextos de los problemas P2, los alumnos no pueden ir realmente a los lugares mencionados en el enunciado del problema, por lo que para resolverlos tienen que explorar cómo los modelos creados para resolver P1 se pueden adaptar para responder a estas nuevas situaciones, contrastando así las debilidades y fortalezas de los modelos creados. El problema P2.4 es ligeramente diferente de los anteriores, ya que no se trata de estimar el número de personas en un recinto, sino el número de árboles en un escenario mucho mayor, alejado de la realidad de los alumnos. El problema P2.4 promueve que los alumnos generalicen las estrategias de los problemas anteriores para utilizarlas en este nuevo contexto, por ejemplo, determinando la distancia a la que dos árboles pueden crecer al competir por los recursos naturales (luz, nutrientes en el suelo).

En Albarracín y Gorgorió (2018) se analiza la forma en la que los diversos grupos de una clase se enfrentan a esta secuencia. Se inicia el trabajo con la demanda de un plan de acción individual para el problema P1. Estos planes se ponen en común en grupos de 3 o 4 estudiantes para generar un plan de acción grupal consensuado. La propuesta se implementa de manera grupal y experimental, observando elementos y referentes a incorporar en sus estrategias y modelos en el lugar real del problema (el patio del instituto). Este proceso permite obtener una estimación para el problema P1, pero también un modelo que merece ser comunicado. Por ello, se organiza una puesta en común en la que los estudiantes contrastan resultados y modelos. Uno de los resultados más relevantes de esta investigación es que para resolver el problema P1 se obtiene una gran variedad de modelos distintos. Sin embargo, en los siguientes problemas de la secuencia, los estudiantes se centran en desarrollar el modelo de densidad de población, que se revela como eficaz y adaptable al resto de situaciones. Este estudio proporciona una información relevante sobre la forma en la que se van extendiendo las ideas de los estudiantes durante la secuencia, permitiendo que todos ellos participen en un proceso de resolución en el que trabajan con modelos progresivamente más refinados. Sin embargo, se constata que la actividad supone dificultades de gestión para el profesorado, ya que los estudiantes desarrollan una gran variedad de detalles para los modelos con los que trabajan, y guiar a los alumnos durante el proceso es muy demandante.

Por ello, en Albarracín et al. (2021) se estudian los procedimientos específicos desarrollados por los alumnos y que constituyen los modelos implementados. Para cada problema se identifican los procesos aplicados por cada grupo y se genera un árbol de soluciones (Levav-Waynberg y Leikin, 2012). Como todos los problemas de la secuencia se refieren a la misma estructura matemática, algunos elementos son comunes. Los tres grandes modelos se basan en las estrategias de distribución en cuadrícula, de la iteración de la unidad y de la densidad de población. Sin embargo, cada uno de estos modelos se desarrolla de formas diversas. Por ejemplo, la densidad de población puede ser uniforme en toda la superficie, diferenciada por zonas, o una densidad promedio para simplificar la situación. Otro ejemplo es la forma de determinar la superficie que ocupa un elemento en la iteración de una unidad, que puede determinarse por estimación, a partir de la experimentación o por simplificación de la forma del objeto. Este árbol de soluciones del problema, presentado en la Figura 1, supone una herramienta para el profesorado en dos sentidos. Por una parte, permite anticiparse a la actividad e identificar rápidamente los procedimientos que están desarrollando los alumnos, ubicándolos en un modelo concreto. Por otro lado, el profesorado puede proponer nuevos problemas en los que los estudiantes tengan la posibilidad de explorar procedimientos específicos que quieran promoverse.

El éxito de las secuencias de problemas de Fermi, como la detallada en esta sección, se concreta en Albarracín et al. (2022). En este estudio se comparan las producciones de los alumnos de dos grupos-clase distintos, al resolver el problema 2.4. El grupo de control se enfrenta directamente al problema de estimar la cantidad de árboles en Central Park, y el grupo experimental trabaja en toda la secuencia de problemas. Los resultados del estudio ponen de manifiesto que la secuencia actúa como una actividad de andamiaje que permite a los alumnos desarrollar modelos efectivos para resolver el problema 2.4. No solo el porcentaje de éxito en la resolución es mayor para los participantes en el grupo experimental, sino que los modelos generados son más ricos en el sentido que incorporan un mayor número de elementos de complejidad y suposiciones realistas (Krawitz et al., 2018).

Figura 1
Árbol del problema de la estimación de objetos en una superficie



Los árboles de soluciones son útiles para que el profesorado anticipe los modelos que pueden desarrollar sus estudiantes, así como para diseñar secuencias que permitan promover múltiples estrategias que den lugar a distintos modelos. Además, debe considerarse como un instrumento importante en la formación del futuro profesorado.

Problemas de Fermi y formación del profesorado

Una parte importante de nuestros trabajos sobre el uso de secuencias de problemas de Fermi tiene como foco de interés las competencias para la enseñanza de la resolución de problemas (Chapman, 2013) y la modelización matemática (Huincahue-Arcos et al., 2018). Así, para implementar con éxito estos problemas en primaria, la primera condición es que los maestros sean competentes en su resolución (Thompson, 1985). En particular, la resolución de tareas abiertas de modelización, como los problemas de Fermi, requiere del conocimiento y gestión de múltiples estrategias (Huincahue-Arcos et al., 2018). Como se ha visto, los árboles de soluciones de Albarracín et al. (2021) permiten controlar todas las decisiones del proceso de resolución de problemas de Fermi en los que se estiman los objetos en una superficie, clasificando todas las posibles estrategias y procedimientos que dan lugar a un modelo. Desde esta perspectiva, consideramos a estos problemas de Fermi como *Multiple Solution Tasks* (Leikin y Levav-Waynberg, 2008), que exigen al profesorado utilizar y comparar distintas estrategias.

Esta perspectiva teórica es la que sustenta la tesis doctoral de Segura (2022).

En este sentido, en Ferrando et al. (2021) se estudia si existen relaciones entre las características contextuales de los problemas de Fermi y la estrategia más utilizada por los futuros maestros. Para ello se sigue el árbol de soluciones de Albarracín et al. (2021) y se utiliza una secuencia de problemas de Fermi, diseñada por contraste de las variables contextuales implicadas en el desarrollo de los modelos matemáticos (Ko & Marton, 2004): el tamaño y forma de los objetos a estimar, su disposición ordenada o desordenada, el tamaño de la región en el que se sitúan los objetos, la ausencia o presencia de los objetos en el lugar del problema.

Los resultados del trabajo de Ferrando et al. (2021) demuestran que existe una relación estadísticamente significativa entre las mencionadas características contextuales de los problemas de la secuencia y las estrategias más utilizadas por los futuros maestros. Por ejemplo, los contextos con una distribución ordenada de los objetos influyen en estrategias de distribución en cuadrícula, especialmente si el patrón de orden es visible (los objetos están presentes) y si los objetos son pequeños y con forma regular (por ejemplo, cuando se demanda la estimación del número de adoquines en una superficie rectangular). En el caso de los contextos en los que hay una distribución desordenada de objetos con forma irregular, hay un uso importante de estrategias basadas en la densidad, especialmente cuando el tamaño de los elementos es pequeño (por ejemplo, cuando se pide la estimación del número de briznas de césped en un jardín).

Estas relaciones contexto-estrategia fueron validadas con otra secuencia de problemas de Fermi diferentes, aunque diseñados con los mismos valores de las variables contextuales (Ferrando et al., 2020). Además, se encontró que otros aspectos relacionados con la estructura sintáctica y semántica del problema, como la introducción de una situación narrativa o de preguntas indirectas (Leiss et al., 2019; Orrantia et al., 2014), afectan al éxito de los futuros maestros, lo que señala que debe estudiarse con mayor profundidad su rendimiento como resolutores de problemas. Por lo tanto, estos resultados abren el camino para profundizar en dos aspectos clave de la competencia de los futuros maestros en la resolución de problemas de Fermi: la flexibilidad en el uso de múltiples estrategias y el rendimiento.

La flexibilidad en la resolución de problemas se refiere a la capacidad de los individuos para usar varias estrategias en un mismo tipo de problema (Star & Rittle-Johnson, 2008). Se considera como una habilidad matemática importante (Heinze et al., 2009), aunque ha sido escasamente estudiada en problemas de modelización (Schukajlow et al., 2015). En Ferrando y Segura (2020), siguiendo a Elia et al. (2009), se define la flexibilidad a lo largo de una secuencia de problemas de Fermi como el uso de más de una estrategia en varios de los problemas que la componen. Por ejemplo, un resolutor demuestra flexibilidad si en un problema de Fermi utiliza la estrategia de densidad (como para estimar cuántas personas caben en el patio del colegio), pero en otro similar (como estimar cuántos coches cubren un aparcamiento) cambia a una estrategia de iteración de la unidad. Además, en Ferrando y Segura (2020) se observa que las secuencias de problemas de Fermi, diseñadas por contraste de variables contextuales, promueven la flexibilidad en los futuros maestros, pues la mayoría de ellos (más de dos tercios) no utilizan solo una estrategia a lo largo de la secuencia.

En cuanto al rendimiento de los futuros maestros, en Segura y Ferrando (2021) se establece un sistema de tipos de error específico para problemas de Fermi, recogiendo trabajos previos sobre errores en el proceso de modelización (Crouch & Haines, 2007; Klock & Siller, 2020), y sobre errores relacionados con las habilidades de medida y estimación de magnitudes (Baturo & Nason, 1996; Hildreth, 1983). A partir de esta categorización de errores, en Segura y Ferrando (2021) se tratan niveles de rendimiento a lo largo de una secuencia de problemas de Fermi, distinguiendo entre cometer errores estratégicos (graves, pues suponen la interrupción del desarrollo del modelo, al no identificar las variables del modelo o las relaciones entre ellas), cometer errores de trabajo matemático (relativos a las habilidades de medida y estimación, al razonamiento proporcional o los procedimientos de cálculo), y no cometer ningún error.

En el trabajo de Segura y Ferrando (2023) también se establecen niveles de flexibilidad a lo largo de una secuencia de problemas de Fermi: nada flexible, moderadamente flexible (si se cambia sólo una vez de estrategia) y muy flexible (si se cambia más de una vez de estrategia). La aportación más relevante de este trabajo es que se encuentra una relación estadísticamente significativa entre los niveles de rendimiento de los futuros maestros y sus niveles de flexibilidad. Los futuros maestros que son capaces de usar distintas estrategias y cambiar varias veces de una a otra cuando resuelven problemas de Fermi tienen un rendimiento más alto, es decir, cometen menos errores estratégicos y de trabajo matemático que aquellos que siempre utilizan la misma estrategia o sólo cambian de estrategia una vez. Además, se encontró que los futuros maestros flexibles tratan de adaptar su estrategia a las características contextuales del problema, siguiendo dos criterios, o buscar la estrategia más rápida (menor número de operaciones, como la iteración de la unidad) o la más rigurosa (procedimientos con apoyo empírico, como la densidad).

Por último, en cuanto a los estudios sobre la competencia de los futuros maestros en uso de múltiples estrategias, en Segura et al. (2023) se aborda cómo los resolutores adaptan y comparan las estrategias que habían desarrollado en sus planes de acción individuales cuando deben volver a resolver una secuencia de problemas de Fermi en grupo y en el lugar real de los problemas. Se encuentra que los futuros maestros, cuando trabajan en grupo, son capaces de adaptar su modelo a características del contexto que no habían sido previstas en los planes de resolución individuales, demostrando pericia adaptativa (Hatano & Inagaki, 1986) y enriqueciendo el modelo con más factores de complejidad y suposiciones realistas (Segura et al., 2021). Además, en este trabajo se establecen categorías de acuerdo (Stasson et al., 1991), encontrando que, cuando no hay cambios entre las características contextuales evocadas en los planes de resolución individuales y las experimentadas *in situ*, la resolución grupal se hace por consenso total o implementando el plan de resolución mayoritario en el grupo.

Síntesis de las aportaciones

La investigación desarrollada en el seno de nuestro grupo sobre el uso de problemas de Fermi como actividades de modelización ha ido alcanzando diversos hitos. Los primeros trabajos corroboraron que los problemas de Fermi pueden tratarse en el aula como actividades de modelización matemática; de hecho, los problemas de Fermi se han mostrado efectivos como actividades que permiten introducir la modelización matemática en las etapas de educación primaria y secundaria. Por lo tanto, los problemas de Fermi se muestran como una opción interesante para superar las dificultades identificadas para que las actividades de modelización matemática se incluyan de forma habitual en las aulas (Borromeo Ferri, 2021).

La propuesta original del uso de los problemas de Fermi se basa en descomponer el problema inicial en subproblemas más sencillos que se resuelven a partir de estimaciones razonadas (Carlson, 1997). Nuestra investigación interpreta esta descomposición como un proceso de modelización matemática, y nuestros estudios han permitido caracterizar los modelos que los alumnos generan por ellos mismos. Este conocimiento es clave para diseñar secuencias de problemas de Fermi, ya que permite identificar los elementos matemáticos que los alumnos ponen en marcha para resolver cada problema, así como crear conexiones entre las resoluciones esperadas. De esta forma, corroboramos que se pueden diseñar secuencias de problemas de Fermi que promueven la modelización matemática y el desarrollo de modelos complejos por parte de los alumnos, ampliando los estudios previos en el área (Ärlebäck, 2009; Peter-Koop, 2009).

Otro aspecto importante para facilitar la incorporación de la modelización matemática en las aulas es la formación del profesorado (Borromeo Ferri, 2021). Nuestros esfuerzos se han dirigido a generar herramientas validadas para promover el uso de múltiples estrategias de resolución de problemas de Fermi, y a estudiar el impacto que tienen estas herramientas en el desarrollo de aspectos claves de la competencia del docente, como son la flexibilidad y el rendimiento como resolutor. Estos estudios deberían permitirnos generar un cuerpo de conocimiento que contribuya a mejorar la formación inicial del profesorado de primaria y secundaria, con el fin de hacerlos capaces de utilizar y aprovechar el potencial didáctico de los problemas de Fermi en las aulas de matemáticas.

Conviene destacar que el desarrollo de herramientas que nos han permitido caracterizar los modelos matemáticos que generan los alumnos ha abierto la puerta a nuevos desarrollos metodológicos que permiten estudiar modelos matemáticos en proyectos de modelización más complejos (Montejo-Gámez et al., 2021). Los trabajos desarrollados por nuestro grupo de investigación han puesto los problemas de Fermi en el debate de la comunidad investigadora en modelización matemática, y ya se han desarrollado investigaciones que los utilizan para explorar otros elementos, tales como la creatividad matemática (Okamoto, 2022), la evaluación de la competencia de modelización en pruebas escritas (Greefrath y Frenken, 2021) o el rol de las suposiciones sobre el mundo real en la modelización (Schukajlow et al., 2023). Nuestra experiencia muestra la conveniencia de usar problemas de Fermi en la investigación sobre modelización matemática o resolución de problemas, ya que estos concentran los aspectos esenciales de la actividad y son útiles para realizar estudios empíricos con los que se pueda obtener evidencias para abordar objetivos de investigación relevantes.

Un ejemplo de la potencialidad de los problemas de Fermi para sustentar investigaciones en Educación Matemática que van más allá de su uso, son los estudios sobre flexibilidad y adaptabilidad en la resolución de problemas. Como hemos visto, el estudio de la flexibilidad enlaza naturalmente con el análisis de la adaptabilidad, entendida como la capacidad de no solo obtener diferentes estrategias para problemas similares, sino de establecer un criterio para escoger, en función de criterios objetivos, la más adecuada en cada uno (Hatano & Inagaki, 1986). Esta problemática se aborda en Segura (2022), desarrollando criterios de adaptabilidad para problemas de Fermi, que extienden los obtenidos en estudios previos con problemas aritméticos verbales (Hickendorff, 2022). Sin embargo, queda pendiente completar un estudio cualitativo que permita profundizar estos resultados para estudiar qué formas de comparar estrategias (un mismo problema con distintas soluciones, problemas distintos con la misma solución) son más efectivas para desarrollar la flexibilidad/adaptabilidad. Esto ayudaría a diseñar un tipo de formación que mejore el rendimiento de estudiantes de todos los niveles educativos. Por otro lado, la flexibilidad es uno de los criterios para evaluar la creatividad (Levav-Waynberg y Leikin, 2012), y recientemente, Lu y Kaiser (2022) han enriquecido las competencias de modelización, incluyendo la creatividad. Por tanto, sería interesante avanzar en el estudio de la creatividad y su relación con la flexibilidad en el marco de los problemas de Fermi, en línea con la investigación desarrollada por Okamoto et al. (2023).

Los problemas de Fermi se presentan como una línea de investigación con un gran potencial para realizar contribuciones relevantes a la Educación Matemática. Se han desarrollado métodos de investigación que deben permitir estudiar nuevos tipos de problemas, como los que incluyen estimaciones volúmenes o tasas de cambio. También tiene mucho potencial el estudio de contextos socialmente relevantes a partir de problemas que traten cuestiones de desarrollo sostenible, cambio climático o problemáticas sociales. Dado que el uso de los problemas de Fermi permite estudiar en detalle aspectos de la modelización matemática que son difíciles de estudiar en proyectos complejos, como son los procesos de validación de los modelos construidos por los estudiantes, nuestra experiencia acumulada y compartida en este capítulo nos permite afirmar que los problemas de Fermi pueden tener un papel relevante en la investigación en Educación Matemática en los próximos años.

Agradecimientos

Lluís Albarracín es profesor Serra Húnter en la Universitat Autònoma de Barcelona. Esta publicación ha recibido el soporte de los proyectos PID2020-117395RB-I00 y PID2021-126707NB-I00 financiados por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por "FEDER Una forma de hacer Europa". Esta investigación también cuenta con el apoyo del grupo de investigación GIPEAM (2021SGR00159).

Referencias

Abassian, A., Safi, F., Bush, S., & Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning, 12*(1), 53–65. https://doi.org/pnb5

Albarracín, L. (2011). *Sobre les estratègies de resolució de problemes d'estimació de magnituds no abastables* [Tesis Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona]. Dipòsit Digital de Documents de la UAB. https://ddd.uab.cat/record/296776

Albarracín, L. (2021). Large Number Estimation as a Vehicle to Promote Mathematical Modeling. *Early Childhood Education Journal, 49*(4), 681–691. https://doi.org/10.1007/s10643-020-01104-x

Albarracín, L., & Ärlebäck, J. B. (2019). Characterizing mathematical activities promoted by Fermi problems. *For the Learning of Mathematics, 39*(3), 10–13. https://ddd.uab.cat/record/296776

Albarracín, L., Ferrando, I., & Gorgorió, N. (2021). The Role of Context for Characterising Students' Strategies when Estimating Large Numbers of Elements on a Surface. *International Journal of Science and Mathematics Education 19*(6), 1209–1227. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10107-4

Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(3), 289-315. https://doi.org/10.12802/relime.13.1631

Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 79–96. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9528-9

Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2015). A brief guide to modelling in secondary school: estimating big numbers. *Teaching Mathematics and Its Applications, 34*(4), 223–228. https://doi.org/10.1093/teamat/hrv006

Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2018). Students estimating large quantities: From simple strategies to the population density model. *Euroasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(10), em1579. https://doi.org/10.29333/ejmste/92285

Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2019). Using Large Number Estimation Problems in Primary Education Classrooms to Introduce Mathematical Modelling. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education, 27*(2), 45–57. https://doi.org/10.30722/IJISME.27.02.004

Albarracín, L., Segura, C., Ferrando, I., & Gorgorió, N. (2022). Supporting mathematical modelling by upscaling real context in a sequence of tasks. *Teaching Mathematics and its Applications, 41*(3), 183–197. https://doi.org/pnb6

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Mathematics Enthusiast, 6*(3), 331–364. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1157

Ärlebäck, J., & Albarracín, L. (2019). The use and potential of Fermi problems in the STEM disciplines to support the development of twenty-first century competencies. *ZDM, 51*(6), 979–990. https://doi.org/gh43f8

Barahmeh, H. M., Hamad, A. M. B., & Barahmeh, N. M. (2017). The Effect of Fermi Questions in the Development of Science Processes Skills in Physics among Jordanian Ninth Graders. *Journal of Education and Practice, 8*(3), 186–194. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1131587.pdf

Baturo, A., & Nason, R. (1996). Students teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics, 31*(3), 235–268. https://doi.org/10.1007/BF00376322

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education–Discussion document. *Educational studies in mathematics, 51*(1–2), 149–171. https://doi.org/10.1023/A:1022435827400

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application, 1*(1), 45–58. https://bit.ly/4fDAeMt

Blum, W., & Leisß, D. (2007). How do Students and Teachers Deal with Modelling Problems. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economics. ICTMA 12* (pp. 222–231). Horwood Publishing. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(1), 99–118. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8

Borromeo Ferri, R. (2021). Mandatory Mathematical Modelling in School: What Do We Want the Teachers to Know?. En F. K. S. Leung, G. Stillman, G. Kaiser & K. L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West* (pp. 103–117). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_9

Carlson, J. E. (1997). Fermi problems on gasoline consumption. *The Physics Teacher, 35*(5), 308–309. https://doi.org/10.1119/1.2344696

Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 1-6. https://doi.org/g39zkk

Crouch, R., & Haines, C. (2007). Exemplar Models: Expert-Novice student behaviours. *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics-ICTMA 12*, 90–100. https://doi.org/10.1533/9780857099419.3.89

Czocher, J. A. (2016). Introducing modeling transition diagrams as a tool to connect mathematical modeling to mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 18*(2), 77–106. https://doi.org/nxn3

Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education 34*(2), 110–136. https://doi.org/10.2307/30034902

Efthimiou, C. J., & Llewellyn, R. A. (2007). Cinema, Fermi problems and general education. *Physics Education, 42*(3), 253–261. https://doi.org/bxh3w4

Elia, I., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM, 41*(5), 605–618. https://doi.org/bzqcjd

English, L. D. (2011). Data modeling in the beginning school years. En J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer & S. Thornton (Eds.), *Proceedings of the 23rd biennial conference of The Australian Association of Mathematics Teachers and the 34th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 226–234). AAMT-MERGA. https://eprints.qut.edu.au/46990/

Ferrando, I. & Albarracín, L. (2021) Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: analysis of emerging models. *Mathematics Education Research Journal, 33*(1), 61–78. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00292-z

Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M., & Gorgorió, N. (2017). Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de Fermi. *Bolema, 31*(57), 220–242. https://doi.org/pnb7

Ferrando, I., & Segura, C. (2020). Fomento de la flexibilidad matemática a través de una secuencia de tareas de modelización. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 17,* 84–97. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.306

Ferrando, I., Segura, C., & Pla-Castells, M. (2020). Relations entre contexte, situation et schéma de résolution dans les problèmes d'estimation. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 20*(3), 557–573. https://doi.org/10.1007/s42330-020-00102-w

Ferrando, I., Segura, C., & Pla-Castells, M. (2021). Analysis of the relationship between context and solution plan in modelling tasks involving estimations. En F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser, & K. L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West* (pp. 119-128). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_10

Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM, 38*(2), 143–162. https://doi.org/10.1007/BF02655886

Gallart, C., Ferrando, I., García-Raffi, L. M., Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2017). Design and implementation of a tool for analysing student products when they solve fermi problems. En G. A. Stillman, W. Blum, & G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications. Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 265–275). Springer. https://doi.org/pnb8

Greefrath, G., & Frenken, L. (2021). Fermi problems in standardized assessment in grade 8. *Quadrante, 30*(1), 52–73. https://doi.org/10.48489/quadrante.23587

Greer, B., Verschaffel, L., & Mukhopadhyay, S. (2007). Modelling for life: Mathematics and children's experience. En W. Blum, W. Henne, & M. Niss (Eds.), *Applications and modelling in mathematics education (ICMI Study 14)* (pp. 89–98). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_7

Haberzettl, N., Klett, S., & Schukajlow, S. (2018). Mathematik rund um die Schule—Modellieren mit Fermi-Aufgaben. En K. Eilerts, & K. Skutella (Eds.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 5. Ein ISTRON-Band für die Grundschule* (pp. 31–41). Springer. https://doi.org/pnb9

Hatano, G., & Inagaki, K. (1986). Two courses of expertise. En H. W. Stevenson, H. Azuma, & K. Hakuta (Eds.), *Child development and education in Japan* (pp. 262–272). W H Freeman & Co.

Henze, J., & Fritzlar, T. (2010). Primary school children's model building processes by the example of Fermi questions. En A. Ambrus & E. Vásárhelyi (Eds.), Problem Solving in Mathematics Education. *Proceedings of the 11th ProMath conference* (pp. 60–75). Eötvös Loránd University. https://bit.ly/4jUp5Jn

Heinze, A., Star, J.R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM, 41*(5), 535–540. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4

Hickendorff, M. (2022). Flexibility and Adaptivity in Arithmetic Strategy Use: What Children Know and What They Show. *Journal of Numerical Cognition, 8*(3), 367–381. https://doi.org/10.5964/jnc.7277

Hildreth, D. J. (1983). The use of strategies in estimating measurements. *The Arithmetic Teacher, 30*(5), 50–54. https://doi.org/10.5951/AT.30.5.0050

Huincahue-Arcos, J., Borromeo-Ferri, R., & Mena-Lorca, J. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza de las ciencias, 36*(1), 99–115. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2277

Joram, E., Gabriele, A. J., Bertheau, M., Gelman, R., & Subrahmanyam, K. (2005). Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(1), 4–23. https://www.jstor.org/stable/30034918

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM, 38*(3), 302–310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Klock, H., & Siller, H.-S. (2020). A Time-Based Measurement of the Intensity of Difficulties in the Modelling Process. En H. Wessels, G. A. Stillman, G. Kaiser, & E. Lampen (Eds.), *International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 163–173). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4_15

Krawitz, J., Schukajlow, S., & Van Dooren, W. (2018). Unrealistic responses to realistic problems with missing information: What are important barriers?. *Educational Psychology, 38*(10), 1221–1238. https://doi.org/10.1080/01443410.2018.1502413

Ko, P. Y., & Marton, F. (2004). Variation and the secret of the virtuoso. En F. Marton, & A. B. M. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning* (pp. 43–62). Roudledge.

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2008). Solution spaces of multiple-solution connecting tasks as a mirror of the development of mathematics teachers' knowledge. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 8*(3), 233–251. https://doi.org/10.1080/14926150802304464

Leiss, D., Plath, J., & Schwippert, K. (2019). Language and mathematics-key factors influencing the comprehension process in reality-based tasks. *Mathematical Thinking and Learning, 21*(2), 131-153. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1570835

Lesh, R. A., & Doerr, H. M. (Eds.) (2003a). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching.* Routledge. https://doi.org/10.4324/9781410607713

Lesh, R. A., & Doerr, H. M. (2003b). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. A. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3–33). Routledge.

Lesh, R., & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(2), 157–189. https://doi.org/10.1080/10986065.2003.9679998

Lesh, R. A., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A. E., & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. En A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591–645). Routledge.

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 73–90. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.11.001

Lu, X., & Kaiser, G. (2022). Creativity in students' modelling competencies: Conceptualisation and measurement. *Educational Studies in Mathematics, 109*(2), 287-311. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10055-y

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., & Adamuz-Povedano, N. (2021). A tool for the analysis and characterization of school mathematical models. *Mathematics, 9*(13), 1569. https://doi.org/10.3390/math9131569

Morgan, D. L. (2017). Measuring the effect of an astrobiology course on student optimism regarding extraterrestrial life. *International Journal of Astrobiology, 16*(3), 293–295. https://doi.org/10.1017/S1473550416000239

Okamoto, H. (2022). Measuring Creativity in the Fermi Problem, a Type of Mathematical Modeling, Applying Information Theory. *Journal of Educational Technology Development and Exchange, 15*(1), 9–18. https://doi.org/pncc

Okamoto, H., Hartmann, M., & Kawasaki, T. (2023). Analysis of the Relationship between Creativity in Fermi Problems Measured by Applying Information Theory, Creativity in Psychology, and Mathematical Creativity. *Education Sciences, 13*(3), 315. https://doi.org/10.3390/educsci13030315

Orrantia, J., Múñez, D., Vicente, S., Verschaffel, L. & Rosales, J. (2014). Processing of situational information in story problem texts. An analysis from on-line measures. *The Spanish Journal of Psychology, 17*, 1–14. https://doi.org/g79dgg

Peter-Koop, A. (2009). Teaching and Understanding Mathematical Modelling through Fermi-Problems. En B. Clarke, B. Grevholm, & R. Millman (Eds.), *Tasks in primary mathematics teacher education* (pp. 131–146). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8_10

Pla-Castells, M., & Ferrando, I. (2019). Downscaling and upscaling Fermi problems. En Jankvist, U. T., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Veldhuis, M. (Eds.). *Proceedings of Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1248–1255). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. https://hal.science/hal-02408969v1

Pollak, H. O. (1969). How can we teach application of mathematics? *Educational Studies in Mathematics, 2*,(2), 393–404. https://doi.org/10.1007/BF00303471

Pollak, H.O. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. En United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (Ed.), *New Trends in Mathematics Teaching* (Volume IV, pp. 232–248). UNESCO. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000124827.locale=es

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press.

Raviv, D., Harris, A., & Dezotti, T. (2016). Estimation as an essential skill in entrepreneurial thinking. In American Society for Engineering Education (Ed.), *Proceedings 123rd ASEE Annual Conference and Exposition. ASEE*. https://doi.org/10.18260/p.26739

Ridgway, J., Swan, M., & Burkhardt, H. (2001). Assessing mathematical thinking via FLAG. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, & A. Shoenfled (Eds.), *The teaching and learning of mathematics at university level An ICME Study* (pp. 423–430). Springer. https://doi.org/dz2f97

Schukajlow, S., Krug, A., & Rakoczy, K. (2015). Effects of prompting multiple solutions for modelling problems on students' performance. *Educational Studies in Mathematics, 89*(3), 393–417. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9608-0

Schukajlow, S., Kaiser, G., & Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. *ZDM, 50*(1), 5–18. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0933-5

Schukajlow, S., Krawitz, J., Kanefke, J., Blum, W., & Radkocy, K. (2023). Open modelling problems: cognitive barriers and instructional prompts. *Educational Studies in Mathematics, 144*(3), 417–438. https://doi.org/pncd

Segura, C. (2022). *Flexibilidad y rendimiento en la resolución de problemas de estimación en contexto real. Un estudio con futuros maestro.* [Tesis de doctorado, Universitat de València]. RODERIC, Repositorio institucional de la Universitat de València. https://roderic.uv.es/items/4b89c8ac-e72c-4b47-a671-7261e2afb5da

Segura, C., & Ferrando, I. (2021). Classification and Analysis of Pre-Service Teachers' Errors in Solving Fermi Problems. *Education Sciences, 11*(8), 451. https://doi.org/10.3390/educsci11080451

Segura, C., & Ferrando, I. (2023). Pre-service teachers' flexibility and performance in solving Fermi problems. *Educational Studies in Mathematics, 113*(2), 207-227. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10220-5

Segura, C., Ferrando, I., & Albarracín, L. (2021). Análisis de los factores de complejidad en planes de resolución individuales y resoluciones grupales de problemas de estimación de contexto real. *Quadrante, 30*(1), 31–51. https://doi.org/10.48489/quadrante.23592

Segura, C., Ferrando, I., & Albarracín, L. (2023). Does collaborative and experiential work influence the solution of real-context estimation problems? A study with prospective teachers. *The Journal of Mathematical Behavior, 70*, 101040. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101040

Sriraman, B., & Knott, L. (2009). The Mathematics of Estimation: Possibilities for Interdisciplinary Pedagogy and Social Consciousness. *Interchange, 40*(2), 205–223. https://doi.org/10.1007/s10780-009-9090-7

Sriraman, B., & Lesh, R. (2006). Modeling conceptions revisited. *ZDM, 38*(3), 247–254. https://doi.org/10.1007/BF02652808

Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and instruction, 18*(6), 565–579. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.018

Stasson, M.F., Kameda, T., Parks, C.D., Zimmerman, S.K., & Davis, J.H. (1991). Effects of assigned group consensus requirement on group problem solving and group members' learning. *Social Psychology Quarterly, 54*(1), pp. 25–35. https://doi.org/10.2307/2786786

Taggart, G. L., Adams, P. E., Eltze, E., Heinrichs, J., Hohman, J., & Hickman, K. (2007). Fermi Questions. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(3), 164–167. https://doi.org/10.5951/MTMS.13.3.0164

Thompson, A. G. (1985). Teachers' conceptions of mathematics and the teaching of problem solving. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 281–294). Routledge.

Vorhölter, K., Kaiser, G., & Ferri, R. B. (2014). Modelling in mathematics classroom instruction: An innovative approach for transforming mathematics education. En Y. Li, E. A. Silver & S. Li. (Eds.), T*ransforming mathematics instruction* (pp. 21–36). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-04993-9_3

Zawojewski, J. S., Lesh, R. A., & English, L. D. (2003). A models and modeling perspective on the role of small group learning activities. En R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds), *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Teaching, and Learning* (pp. 337–358). Routledge.