

Aprendizagem em atividades de modelagem matemática: caracterização de uma temporalidade

Lourdes Maria Werle de Almeida ¹ 

Dirceu dos Santos Brito ² 

Resumo

Este capítulo traz ao debate a aprendizagem em atividades de modelagem matemática. A discussão com enfoque fenomenológico se propõe a tratar da temporalidade na constituição dessa aprendizagem. Isso implica em considerar que há nessas atividades momentos, identificados em cenas significativas, que são indicativos de aprendizagem. No desenvolvimento das atividades de modelagem realizado por estudantes de dois níveis de escolaridade distintos, estas cenas são apresentadas a partir do entendimento de que quando inquiremos a aprendizagem é em direção à pessoa que aprende que dirigimos o olhar, pois é ela, na totalidade dos seus modos de expressão, que revela essa aprendizagem. As cenas apresentadas permitem capturar que, o que se torna aprendido inclui compreensões acerca do fenômeno, dos encaminhamentos para a resolução do problema e acerca da matemática, apontando para dois aspectos concernentes às manifestações de aprendizagem ali percebidas: a percepção do início da aprendizagem, que se dá quando uma compreensão prévia do tema investigado se encaminha para uma compreensão de meios de ação; a relevância do contexto que remete à percepção de um entorno que revela aspectos locais e espaciais de onde essa aprendizagem ocorre. A temporalidade que se elucida é a consciência do tempo interno, relativa à apreensão do tempo pela pessoa. Neste sentido é que as cenas expressam do tempo-vivido dos estudantes em que as partes não-independentes de suas experiências implicam em significações fenomênicas. Em síntese, a temporalidade resulta dos esforços para situar cada parte da experiência num local do espaço, constituindo, entretanto, a unidade em todas elas.

¹ lourdes@uel.br

Universidade Estadual de Londrina (UEL), Brasil

² dirbrito@gmail.com

Secretaria de Estado de Educação (SEED), Brasil

Almeida, Lourdes Maria Werle de & Brito, Dirceu dos Santos. (2025). Aprendizagem em atividades de modelagem matemática: caracterização de uma temporalidade. En A. Solares-Rojas, & A. P. Preciado Babb (Eds.), *La investigación en modelización matemática: un diálogo entre educadores de Latinoamérica y España* (pp. 333–355). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S2/2025/01-14>

Palabras clave

Modelagem Matemática. Aprendizagem. Temporalidade. Fenomenologia.

Abstract

This chapter focus on the learning in mathematical modelling activities. The discussion with a phenomenological approach proposes to deal with a temporality in the constitution of this learning. This implies considering that there are moments in these activities, identified in significant scenes, that are indicative of learning. In the development of modelling activities carried out by students from two different educational levels, these scenes are presented based on the understanding that when we inquire about learning, it is towards the person who learns that we direct our gaze, as it is she/he in all her/his modes of expression, which reveals this learning. The scenes presented allow us to capture that what becomes learned includes understandings about the phenomenon, the directions for solving the problem and about mathematics, pointing to two aspects concerning the manifestations of learning perceived there: the perception of the beginning of learning that occurs when a prior understanding of the topic investigated leads to an understanding of means of action; the relevance of the context, that refers to the perception of an environment that reveals local and spatial aspects of where this learning takes place. The temporality that is elucidated is the awareness of internal time, relative to the person's apprehension of time. In this sense, the scenes refer to the students' lived time in which the non-independent parts of their experiences implied phenomenal meanings. In summary, temporality results from efforts to locate each part of the experience in a location in space, constituting, however, unity in all of them.

Keywords

Mathematical Modelling, Learning, Temporality, Phenomenology.

Para iniciar: uma incursão nas discussões sobre aprendizagem

Discussões relativas à aprendizagem têm se orientado por diferentes bases epistemológicas e filosóficas. Segundo Cunha (2012), o significado etimológico do verbo *aprender* tem origem do latim *apprehendere*, que diz respeito ao significado de apoderar-se, tomar posse, agarrar algo e mantê-lo preso junto a si. No latim, entretanto, essa apreensão remete tanto à ação de agarrar as coisas com as mãos quanto à de *agarrá-las com a mente*, de modo que aprender, na sua origem etimológica, incorpora os significados de aprender com o corpo ou com a mente.

Para o que se propõe o presente capítulo, alguns aspectos relativos à aprendizagem são agregados às discussões. Primeiramente, consideramos a assertiva apresentada em Illeris (2013, p. 103) de que “aprender é transformar experiência em conhecimento”. Esta ideia sugere que observações e reflexões realizadas em uma experiência levam à formação de conceitos e generalizações, os quais são empregados em novas experiências para tomar decisões

e resolver problemas. Em segundo lugar, a aprendizagem pode ser vista como uma transformação que se dá com cada pessoa, em sua totalidade, ou seja, o que se transforma pela aprendizagem é a pessoa que aprende, caracterizando assim a pessoalidade da aprendizagem (Illeris, 2013). Uma terceira característica, apontada em Jarvis (2013), é de que à aprendizagem se associam modos de expressão como gestos, falas, registros simbólicos e textuais.

Relativamente à aprendizagem em Matemática, D'Amore (2007), pondera que, no contexto da sala de aula, as condições que podem determinar a aprendizagem estão vinculadas às práticas pedagógicas. Essas condições, segundo esse autor, precisam ser ativadas e reproduzidas intencionalmente. De fato, o que se deseja ser apreendido não é incorporado pelo sujeito de forma desvinculada de uma atividade que organize e integre o que se pretende conhecer à rede de conhecimentos. Nesse sentido, as condições se identificam com as práticas educativas, sendo essas próprias práticas condições de aprendizagem e, portanto, podem ser abordadas como objetos de estudo. Dada uma prática educativa específica pode-se inquirir, por exemplo, como ela intermedeia a aprendizagem, apontando para especificidades deste intermédio.

É a partir deste entendimento que nos dirigimos à problematização da aprendizagem em atividades de modelagem matemática, vinculando-a à investigação da aprendizagem associada à matematização de situações-problema da realidade, a qual agrega aspectos cognitivos, sociais e culturais, extrapolando o domínio da matemática.

Embora esta temática já tenha sido objeto de investigação em algumas pesquisas da área (Braga, 2015; Brito & Almeida, 2021; Seki, 2023; Souza & Barbosa, 2014; Sousa & Almeida, 2019), o movimento de problematização nos permite manter a flexibilidade e a excitação e, como sugere o filósofo francês Michel Foucault, *sacudir a quietude* com a qual se trata da aprendizagem em atividades de modelagem matemática.

A aprendizagem que buscamos discutir, entretanto, não pode ser vista como absorção e retenção de conteúdos, mas sim como um processo ao qual dedicamos tempo sem, entretanto, antever precisamente o seu produto. Neste sentido, essa perspectiva filosófica nos leva a considerar que aprender implica elaborar soluções, no decorrer do tempo, para o enfrentamento da realidade em que vivemos.

O tempo em uma perspectiva fenomenológica e as questões de interesse

Na tradição filosófica, o tempo tem sido objeto de estudo desde a antiguidade estendendo-se à contemporaneidade. De fato, Aristóteles (384-322 a. C.) já estudava a problemática do tempo sob um viés físico associando-o ao movimento. Santo Agostinho (354-430) realizava a análise do tempo a

partir de um ponto de vista psicológico, afirmando: “Existem, pois, estes três tempos na minha mente que não vejo em outra parte: lembrança presente das coisas passadas, visão presente das coisas presentes e esperança presente das coisas futuras” (Agostinho, 1980, p. 270).

A concepção de tempo que mais fortemente nos impulsiona neste capítulo é a temporalidade fenomenológica como caracterizada pelo filósofo e matemático contemporâneo Edmund Husserl (1859-1938). Husserl, reconhecendo as dificuldades enfrentadas por Agostinho para tratar a problemática do tempo, desenvolve sua teoria não a partir da psicologia, mas sim de um ponto de vista fenomenológico. Conforme aponta Andrade (2021), a fenomenologia sugere uma análise do tempo e da experiência temporal. O entendimento husserliano sobre a apreensão subjetiva do tempo a partir da fenomenologia aponta para a impossibilidade de se distinguir nela o que é passado e o que é presente, pois na consciência há um continuum temporal. Neste continuum a consciência do tempo caracteriza-se pela impossibilidade de se distinguir, efetivamente, o que é passado e o que é presente na consciência, pois o principal ponto analisado por Husserl sobre a temporalidade, tal como ela é vivenciada pelo sujeito consciente, diz respeito ao *presente vivo* que engloba uma extensão temporal que não está restrita ao *agora atual*, mas abarca um horizonte temporal denso que inclui antes, agora e depois (Andrade, 2021).

Embora a apreensão do tempo pela consciência seja um continuum, Sokolowski (2004), sugere que pode-se caracterizar uma estrutura temporal que inclui três qualificações do tempo. A primeira é o tempo objetivo (ou o tempo do mundo) que é o tempo dos relógios e dos calendários. Quando dizemos que a palestra durou uma hora, que no primeiro bimestre ensinamos derivada e no segundo ensinamos integral, por exemplo, identificamos estes eventos no tempo cronológico, mensurável e verificável. A segunda é o tempo subjetivo (ou tempo interno ou tempo imanente). Esse tempo diz respeito às sequências de atos e experiências mentais, aos eventos da consciência. Atos e experiências intencionais seguem-se uns aos outros e podem ser retomados por meio da memória, não podendo, entretanto, ser mensurados. Para Husserl (1994) é esse o tempo no qual se constitui uma mirada subjetiva em relação à unidade dos momentos vividos num determinado fluxo. Ou seja, há experiências que são antes, depois ou concomitantes com outras, mas não medidas no tempo no mundo. O tempo interno não é público, é privado. Por fim, uma terceira qualificação do tempo é adicionada às duas anteriores: a da consciência do tempo interno. Ou seja, se na segunda qualificação está uma temporalidade subjetiva, interna, há de haver um momento de estar *consciente de ou de ter consciência* desse tempo interno.

É essa terceira qualificação da temporalidade, ou seja, é a consciência do tempo interno que é constituinte dos fenômenos que se mostram em nossa

experiência. E como isto se dá? Segundo Müller (2001, p. 29), “as partes de nossa experiência guardam entre si uma relação de não-independência”. Cada parte tem na outra um complemento ou continuidade. Ademais, para que essas partes expressem um fenômeno é necessário que haja entre elas uma relação de implicação. Todavia, para compreender como se dá essa relação de implicação, não basta considerar o modo espacial, segundo o qual essas partes se manifestam. É preciso, nesse caso, considerar o modo temporal segundo o qual essas partes se mostram, pois segundo Müller (2001), o tempo é a realização elementar da estrutura implicativa de nossa experiência.

Embora não esteja no escopo do capítulo aprofundar uma discussão filosófica sobre essa estrutura da temporalidade, é preciso destacar dois aspectos. Primeiro, não se pode pensar que o tempo objetivo é o mais básico. Ao invés disso, o tempo objetivo é dependente do tempo subjetivo. O tempo do mundo pode ser medido por relógios e calendários, por exemplo, somente porque possuímos um tempo subjetivo. O segundo aspecto é que, sendo a temporalidade interna um meio pelo qual flui o tempo externo, a consciência do tempo interno é, como afirma Sokolowski (2004), mais interna do que o tempo externo. Esta consciência constitui a temporalidade das atividades que ocorrem na nossa vida consciente, como as percepções, as imaginações, as recordações, as manifestações, entre outros.

Para os propósitos do presente capítulo, trazendo ao debate a aprendizagem em atividades de modelagem matemática, o que se pode perguntar é: estaria a temporalidade integrada à constituição dessa aprendizagem? Estariam, no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, caracterizados *momentos, tempos* em que se pode observar que da experiência decorre conhecimento, consoante à caracterização de aprendizagem em Illeris (2013)?

Sobre modelagem matemática

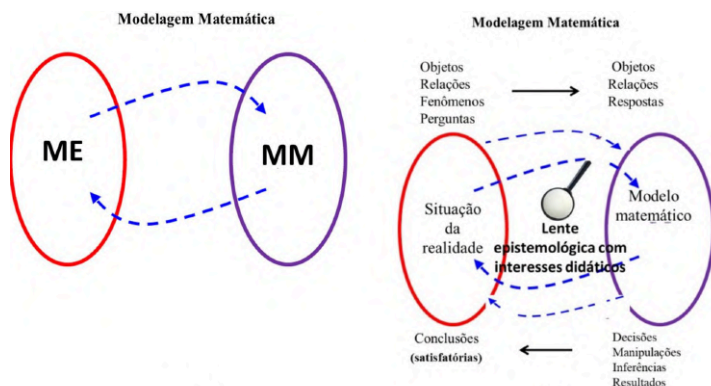
Um panorama de como a modelagem tem sido realizada na sala de aula apresentado em Burkhardt (2018), indica que, embora diferentes encaminhamentos para estas atividades tenham sido sugeridos e implementados a partir da década de 1960, todos eles incluem um processo investigativo que visa entender, explicar ou prever especificidades de uma situação da realidade. Esse entendimento, explicação ou previsão é, geralmente, mediado por um modelo matemático (Almeida, 2018; Blum, 2015; Geiger et al., 2022). A interlocução entre matemática e realidade assim elucidada pode ser teorizada mediante esquemas reconhecidos como ciclos de *modelagem matemática*.

Os primeiros exemplares de ciclos de modelagem matemática, como o apresentado por Niss et al., (2007) (Figura 1a), tinham a intenção de ilustrar que o *mundo extramatemático* (ME) e o mundo matemático (MM) eram postos em diálogo em atividades desse tipo mediante uma conversão e uma

reconversão . Entretanto, conforme aponta Almeida (2022), uma lente epistemológica com interesses educacionais amplia a compreensão sobre a conversão e a reconversão, trazendo à tona especificidades (Figura 1b) do estudo de uma situação da realidade mediado por um modelo matemático.

Figura 1

Ciclo de modelagem matemática



Nota. Fonte: Almeida (2022)

A lente sobre a interlocução entre matemática e realidade no presente texto ilumina o que se pode dizer da aprendizagem dos estudantes modeladores nestes processos de conversão e reconversão.

De acordo com Moreira (2011), ao falar sobre a aprendizagem a partir de teorias é preciso considerar que cada uma delas pode ser vista como uma construção humana que busca interpretar circunstâncias e condições relativas à aprendizagem, representando uma perspectiva particular de compreendê-la, explicá-la a partir dessas condições.

No âmbito da área de modelagem matemática a aprendizagem tem recebido atenção considerando diferentes pressupostos teóricos ou perspectivas diversas (Brito, 2018; Kaiser et al., 2006; Seki, 2023). Nas perspectivas cognitivistas (Blum & Ferri, 2009; Ferri, 2018; Moura & Alves, 2022; entre outros), o foco da atenção refere-se à cognição do indivíduo, aos seus estilos de aprendizagem e ao modo com que atribui significados a objetos do mundo. Nas perspectivas interacionistas (Ferruzzi & Almeida, 2015; Littig et al., 2019; Taranto et al., 2022), a aprendizagem é considerada como algo que ocorre nas interações entre professor e estudantes e outros elementos didáticos da prática pedagógica. Já em perspectivas sociais (Almeida, 2022; Cantoral et al., 2018; Souza & Barbosa, 2019; Souza, 2012; Supriadi, 2020), caracteriza-se a aprendizagem a partir da influência da linguagem, de elementos culturais e de práticas sociais.

Não obstante a estas perspectivas, na literatura, muito se discute sobre a aprendizagem em modelagem matemática a partir de *competências*. Competências de modelagem e competências matemáticas reúnem elementos que dizem do que os estudantes aprendem quando envolvidos com modelagem matemática (Cevikbas et al., 2022; Geiger et al., 2022) e o fazem a partir de formas particulares de associar a aprendizagem às competências.

No presente capítulo, procura-se compreender a aprendizagem em atividades de modelagem à luz da fenomenologia, evitando impor ao fenômeno uma estrutura teórica que oriente o pesquisador na percepção da manifestação de aprendizagem. Na perspectiva fenomenológica o interesse está dirigido aos modos subjetivos e às formas de manifestação da experiência, que permanecem não temáticos em perspectivas outras.

Procedimentos metodológicos e os ambientes de pesquisa

Para a investigação da temporalidade na possível aprendizagem em atividades de modelagem matemática adotou-se um enfoque da pesquisa qualitativa centrado na fenomenologia. A noção de qualidade que interessa à fenomenologia não é, como observa Bicudo (2011, p. 18), aquela “tomada como já dada e pertinente ao objeto”, mas aquela que se mostra na percepção, aquela que é percebida no fenômeno. Como consequência dessa noção, o olhar sobre o fenômeno assume uma perspectiva em que sujeito e objeto não se mostram apartados e a unidade entre eles não é rompida.

Para apresentar as deliberações, são consideradas duas atividades de modelagem matemática desenvolvidas por estudantes em duas unidades escolares brasileiras. Uma delas foi realizada com uma turma de estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental e outra com uma turma do segundo ano de um curso de Ciência da Computação na disciplina de Cálculo Diferencial Integral (CDI).

Para dar suporte às declarações relativas à temporalidade na constituição da aprendizagem é necessário observar a expressividade dos movimentos dos estudantes enquanto atuam, falam, gesticulam, comunicam, escrevem, desenham no decorrer da realização das atividades. Com essa finalidade, gravações das aulas em áudio e vídeo foram efetivadas e textos escritos foram produzidos e entregues.

As em ambas atividades foi delineado um cenário em que estudantes e professor pudessem realizar procedimentos de investigação sobre as situações em estudo de modo que as suas compreensões sobre a matemática e a situação pudessem ser expressas e captadas. Buscou-se, assim, criar as condições para que os modos de expressão pudessem ser registrados em vídeo, mediante a filmagem e, posteriormente, transcritos, priorizando, nessa transcrição, a descrição de como as gesticulações linguísticas dos estudantes implicam significados.

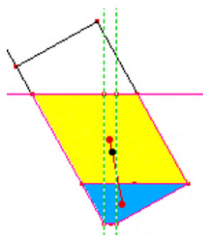
Na atividade realizada no Ensino Fundamental, além dos dados obtidos com as gravações, ao final da atividade a seguinte solicitação foi feita aos estudantes: tente se lembrar das coisas que você aprendeu nessa atividade e descreva, o mais detalhadamente que você puder, as situações nas quais essa aprendizagem ocorreu para você. Já na atividade do Ensino Superior, dados também foram coletados com o uso do software OBS¹ mediante qual a imagem da tela do computador é capturada de maneira simultânea com o som das falas dos estudantes ao desenvolverem a atividade. Além disso, também foram capturadas as telas dos relatórios escritos dos estudantes postados no aplicativo Google Classroom.

Para dar visibilidade às ideias expressas nos dados, são selecionadas cenas significativas do conjunto de dados. Essas resultam da leitura atenta das descrições em sua totalidade, buscando pelas experiências vividas dos estudantes ao realizarem a atividade. Para ilustrar esse processo, no capítulo essas cenas foram organizadas em quadros e uma explicação realizada pelos pesquisadores (autores do capítulo), relativamente ao que é interrogado na pesquisa (a aprendizagem dos estudantes). Assim, é que se revelam convergências de falas, gestos, fisionomias, compreensões intersubjetivas, relatos, entre outros atos de expressão dos estudantes, em sintonia com o que se apregeia na atitude fenomenológica de pesquisa (Bicudo, 2011; Detoni & Paulo, 2011).

Atividade 1: Por que a lata de refrigerante fica em equilíbrio?

O tema dessa atividade é a investigação de estruturas inclinadas nas construções e na arquitetura, inspirada num experimento didático de modelagem sugerido por Alsina (2009) e discutido mais detalhadamente em Mason (2001). Por que uma lata de refrigerante fica em equilíbrio, apoiada sobre sua borda numa superfície horizontal, quando seu conteúdo líquido está situado num intervalo de, aproximadamente, 50 ml e 200 ml? Essa é a questão proposta aos estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental e que direcionou o desenvolvimento da atividade. A exploração dessa questão procurou conduzir esses estudantes a investigar as condições de equilíbrio de estruturas inclinadas e a compreender que o equilíbrio da lata requer que a linha vertical que passa pelo centro de gravidade, passe também pela borda sobre a qual ela está apoiada, conforme mostra a Figura 2. Essa compreensão abrange a aprendizagem do conceito de *centroide* ou *centro geométrico* de figuras planas, pois o centro de gravidade da lata pode ser aproximado pelo centroide de figuras obtidas a partir do seu corte vertical.

¹ O OBS Studio (Open Broadcaster Software) é um programa gratuito de transmissão de vídeos. Ele captura imagens de várias fontes, como por exemplo câmeras e telas, codifica essas imagens.

Figura 2*Corte vertical e centros geométricos da lata inclinada**Nota.* Fonte: Adaptado de Mason (2001)

Na sala de aula, a atividade iniciou com uma apresentação, feita pelo professor, em que discutiu a presença de estruturas inclinadas na arquitetura, na natureza e na indústria, para, em seguida, propor aos estudantes, organizados em grupos de quatro a seis membros, a investigação da questão que abre este tópico. Cada grupo recebeu uma lata de refrigerante vazia, água, uma proveta graduada e uma régua para efetuar medidas. Com esses materiais, os grupos verificaram as quantidades máxima e mínima em que a lata fica em equilíbrio e discutiram porque esse equilíbrio ocorre apenas numa determinada faixa de valores. Para introduzir o conceito de centroide, foi proposto aos estudantes investigar a localização do *ponto de equilíbrio* de formas geométricas recortadas em papel cartolina. Com isso, eles aprenderam a determinar o centroide de triângulos, quadrados, retângulos, paralelogramos, círculos e trapézios utilizando métodos experimentais e construções com régua e compasso (Figura 3).

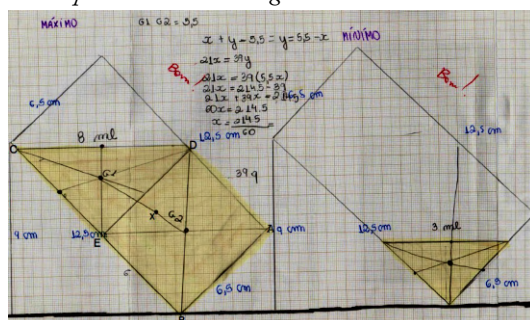
Figura 3*Corte vertical e centros geométricos da lata inclinada**Nota.* Fonte: Dados da pesquisa

Em seguida, os grupos foram orientados a utilizar as medidas da lata, do seu ângulo de inclinação e da altura da água em 50 ml e 200 ml para construir uma representação bidimensional do corte vertical da lata. Após essa construção, foram convidados a investigar qual é a relação entre o centro geométrico desse corte vertical para quantidades de líquido entre 50 ml e 200 ml e o equilíbrio da lata. Com isso, os estudantes consideraram, para a

quantidade mínima, que a parte com líquido é representada por um triângulo, e, para a quantidade máxima, a parte com líquido é descrita por um trapézio, conforme mostra a Figura 4. Desse modo, o centro de gravidade da lata pode ser aproximado pelo centroide do triângulo (50 ml) e pelo centroide do trapézio (200 ml).

Figura 4

Construção realizada para obter os centros geométricos em 200 ml e 50 ml

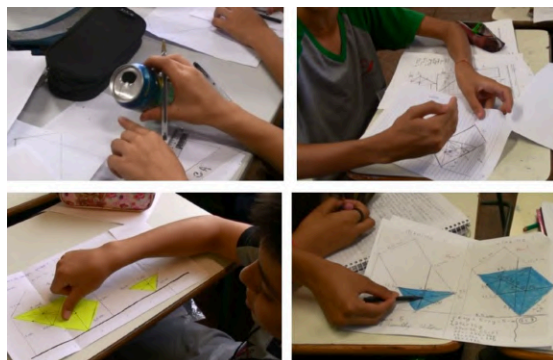


Nota. Fonte: Dados da pesquisa

Por fim, cada grupo discutiu e apresentou seus resultados aos demais grupos em relação à questão investigada. Em síntese, os grupos procuraram mostrar como obtiveram os centroides do triângulo e do trapézio no corte vertical da lata inclinada, explicando, a partir dessa construção, que o equilíbrio da lata ocorre quando o corte vertical que passa por esses centroides passa também na extremidade do segmento que representa a borda sobre a qual a lata está apoiada, conforme mostra a Figura 5. Cada grupo, portanto, procurou interpretar sua construção geométrica para explicar por que a lata fica em equilíbrio somente na faixa de 50 ml a 200 ml de líquido.

Figura 5

Construção realizada para obter os centros geométricos em 200 ml e 50 ml



Nota. Fonte: Dados da pesquisa

Atividade 2: Discutindo a moeda Bitcoin em uma disciplina de Cálculo Diferencial

Nesta atividade a temática da moeda Bitcoin (BTC) foi sugerida pela professora, sendo sua introdução mediante informações, conforme Figura 6.

Figura 6

Informações sobre a situação



Na sala de aula, os estudantes da disciplina formaram grupos. Em geral, os grupos, ao iniciar desenvolvimento da atividade, perceberam que as informações apresentadas pela professora não eram suficientes. No entanto, usando um aplicativo de celular para escanear o *QR CODE*² que estava no material recebido, os estudantes tinham acesso, em tempo real, à quantidade de moedas mineradas e puderam explorar o seu comportamento.

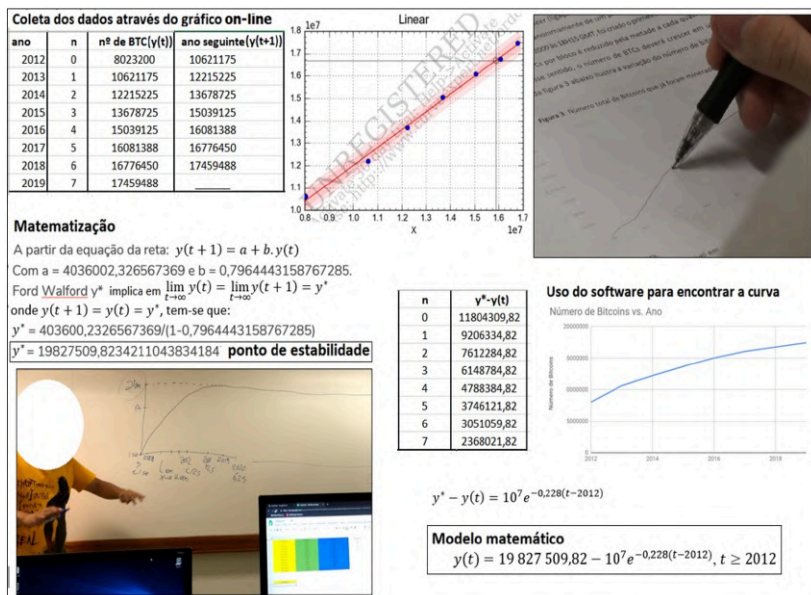
Com essa possibilidade de atualizar os dados, o interesse nessa atividade foi estudar o comportamento da moeda no decorrer do tempo, certos de que

² Código de barras bidimensional que pode, ao ser escaneado por uma câmera de celular, deu acesso a um novo link.

que há uma quantidade limitada dessa moeda disponível para comercialização. Assim, foi construído um modelo matemático para determinar a quantidade de Bitcoin em cada ano e também fazer estimativas para anos futuros. A introdução de modelos exponenciais assintóticos e a significação de assíntota foram se realizando, articulando matemática com recursos da tecnologia, tais como aplicativos de celular, de computador e software como CurveExpert e GeoGebra. A atividade proporcionou aos estudantes conhecer mecanismos do funcionamento da moeda digital bem como sua conversão em valores da moeda oficial do Brasil (real). Os encaminhamentos e a resposta de um dos grupos estão sintetizados na Figura 7.

Figura 7

A atividade do Bitcoin



Nota. Fonte: Almeida e Goulart (2020)

Ao final cada grupo compartilhou suas conclusões em relação à comercialização e funcionamento da mineração dessa moeda digital.

O fenômeno da aprendizagem nas atividades de modelagem matemática

De um ponto de vista fenomenológico, a aprendizagem que se indaga nas atividades de modelagem matemática é a aprendizagem percebida. Isto é, embora se possa falar acerca de uma aprendizagem efetiva ou existente a partir de uma caracterização específica do que a aprendizagem é, o que se considera é aquilo que é percebido como aprendizagem. O fenômeno

aprendizagem é constituído pela consciência e ocorre de maneira não independente dos modos subjetivos de apreensão, sendo essa apreensão manifesta nas experiências que se estendem no tempo de desenvolvimento da atividade de modelagem. Assim, o que o professor percebe como aprendizagem está nos modos de expressão dos estudantes e pode ser apresentado em cenas significativas desse desenvolvimento.

Relativamente à atividade do ponto de equilíbrio da lata, o Quadro 1 inclui cenas e a percepção do professor em relação à aprendizagem dos estudantes nestas cenas. Particularmente, o quadro mostra o trabalho de um grupo de estudantes que, após conseguir determinar experimentalmente as quantidades máxima e mínima de líquido com as quais a lata de refrigerante fica em equilíbrio, trabalha na elaboração de uma explicação para a razão desse equilíbrio ocorrer somente entre as quantidades de 50 ml e 200 ml.

As cenas do Quadro 1 buscam explicitar a manifestação de duas compreensões para as condições de equilíbrio. A primeira é expressa na ideia de nível de equilíbrio para se referir à altura do nível da água nas quantidades máxima e mínima em que a lata fica em equilíbrio. De fato, André entende que há dois níveis de equilíbrio. Quando a lata tem muita água de modo que fica acima do nível de equilíbrio, então a lata cai. E, quando a lata tem pouca água, ficando abaixo do nível de equilíbrio, a lata também cai. A segunda compreensão é expressa na fala de André, indicando que a assimetria do peso é a causa do desequilíbrio do livro apoiado no dedo. Com isso, André percebe a possibilidade de vincular a ideia de equilíbrio à distribuição simétrica do peso. Essa ideia é utilizada explicitamente por Bernardo que, utilizando gestos, indica na imagem da lata a linha que passa pela base de apoio e afirma que ela divide o peso em duas partes iguais.

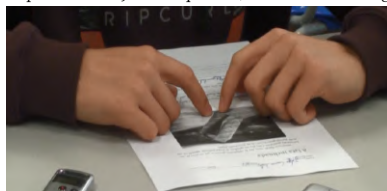
Neste sentido, a sequência de diálogos indica duas mudanças significativas na compreensão dos estudantes sobre as condições de equilíbrio de um objeto. A primeira é a percepção de que essas condições dependem da distribuição simétrica do peso do objeto em relação ao ponto de apoio. Essa compreensão é expressa na experiência com o livro. Mas, a noção de peso que os estudantes empregam é intuitiva, ou seja, o equilíbrio não é percebido como resultado de anulação de forças.

Quando utilizam a noção de peso para explicar o equilíbrio da lata, os estudantes recorrem à simetria física da lata ou à simetria da área da imagem representada no papel. Os seus gestos empregados nessa explicação mostram que a compreensão do equilíbrio encaminha para uma abordagem geométrica. Neste sentido, essas cenas manifestam a aprendizagem como um desdobramento de uma compreensão prévia que direciona a investigação na atividade de modelagem para uma abordagem geométrica. A aprendizagem, neste caso, se expressa como transformações que ocorrem na maneira como os estudantes se relacionam com o tema ou com a matemática.

Quadro 1

*Descrição de cenas significativas de um grupo de estudantes*³

Modos de expressão	Percepção do professor	n
ANDRÉ: Eu acho que... é porque... quando tem bastante água..., ela passa acima... do nível de equilíbrio e quando tem pouca água, fica abaixo do nível de equilíbrio. (André fala, procurando com dificuldade as palavras, estende a mão aberta virada para baixo para acentuar a palavra <i>nível</i>, levantando e abaixando a mão, respectivamente, na pronúncia de acima e abaixo).	O estudante emprega intuitivamente as noções de altura, nível da água, nível de equilíbrio para expressar sua compreensão sobre as condições de equilíbrio da lata.	1
PROFESSOR: É, tem a ver com isso, mas pensa no seguinte: se você pegar um objeto, como um caderno desses ou um livro para colocar ele em equilíbrio, apoiado no dedo, você precisa colocar o dedo aonde? ANDRÉ: No meio! (André se expressa reposicionando seu corpo na direção do professor e enfatizando a palavra "meio"). PROFESSOR: E, por que, se você apoiar o dedo aqui na ponta, o caderno não fica em equilíbrio? ANDRÉ: ...porque é mais pesado daquele lado, ali! (André enfatiza a pronúncia de "ali" com um gesto de indicação com o dedo).	O estudante percebe, no exemplo discutido pelo professor, uma possibilidade de compreender as condições de equilíbrio dos objetos.	2
PROFESSOR: Beleza, Daniel! Então, vamos lá ... para que o Daniel mantenha o caderno em equilíbrio, ele precisa manter o dedo no centro do caderno. Por que... no centro? ANDRÉ: (...) porque ele manja do bagulho ... porque ele divide o peso do caderno no centro. (André gesticula para enfatizar a palavra "divide").	A interação entre os membros do grupo faz com que eles se aproximem da compreensão de que as condições de equilíbrio dos objetos dependem da distribuição simétrica do peso em relação ao ponto de apoio.	3
(O professor tenta retomar a discussão sobre a experiência em que a lata fica em equilíbrio). PROFESSOR: Então, no caso da água, por que só com essa quantidade ... nesse intervalo, a lata fica em equilíbrio? BERNARDO: ... porque fica dividido? (Dá ênfase a palavra "dividido"). PROFESSOR: O quê ... que fica dividido? BERNARDO: A lata fica em equilíbrio porque o peso fica dividido! É porque o peso da água fica dividido... o que tem de peso de um lado, tem que ser a mesma coisa do outro. (Bernardo enfatiza a pronúncia de um lado e do outro, gesticulando a mão para um lado e para outro lado). (O professor retoma a ideia de Bernardo para discutir a relação entre o equilíbrio e a linha vertical que passa pelo centro de gravidade da lata). PROFESSOR: ..., mas o peso da água fica dividido aonde ..., aí na lata? (Bernardo pega uma folha com a imagem de uma lata de refrigerante inclinada sobre sua borda para responder à pergunta do professor). BERNARDO: ...ó, porque tem quantidades iguais dos dois lados da lata entre a base, a base da água, tipo aqui ó, aqui ... aqui é a base...e tem quantidades iguais de água aqui e aqui ó... então passando desse nível mais ou menos aqui, ó... que é nesse nível... ele já começa a desequilibrar a lata... porque não são mais quantidades iguais. (Bernardo explica as condições de equilíbrio, utilizando uma imagem da lata)	As ideias desenvolvidas anteriormente são retomadas e rearticuladas pelo estudante, mostrando a realização de uma síntese da compreensão do grupo sobre as condições de equilíbrio da lata.	4

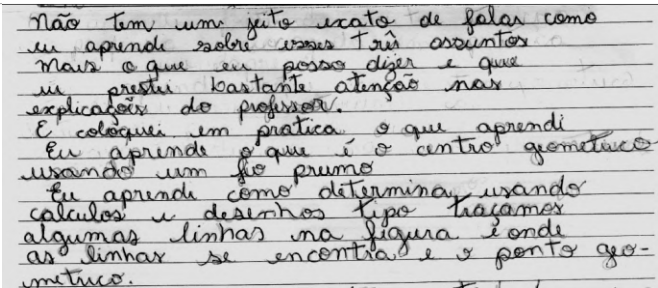


³ Os nomes dos estudantes são fictícios.

Além disso, nos relatos dos estudantes, a aprendizagem pode ser tomada como aquilo que eles próprios percebem como sendo aprendizagem. Por exemplo, a estudante Maria percebe que sua aprendizagem na atividade de modelagem se dá articulando outras aprendizagens, tais como saber colocar em prática conhecimentos e efetuar construções e experimentos (Quadro 2).

Quadro 2

Descrição da estudante Maria sobre sua aprendizagem e a percepção do professor



Percepção do professor
A estudante reconhece que não é possível descrever precisamente como aprendeu os assuntos envolvidos na atividade de modelagem, mas ela percebe que precisou estar muito atenta às orientações do professor e colocar em prática o que aprendeu. Aprendeu o que é centro geométrico usando um fio de prumo, aprendeu como determinar usando cálculos e efetuando construções.

Nota. Fonte: Construído pelos autores

Para inferir sobre aprendizagem dos estudantes na atividade da moeda Bitcoin são apresentados no Quadro 3 os modos de expressão captados das gravações e dos relatórios, gerando cenas significativas das ações dos estudantes.

Quadro 3

Descrição de cenas significativas de um grupo de estudantes ⁴

Modos de expressão	Percepção do professor	n
O estudante Luiz, explorando informações relativas ao tema na <i>internet</i> encontrou uma <i>calculadora de BTCs</i> cujo uso é on-line e que, além de fazer a conversão da moeda para a moeda oficial do Brasil (real), apresenta representações gráficas da situação. Motivados pelas informações de Luiz, os estudantes do grupo iniciaram suas discussões relativas ao desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. 	Luiz indica ter compreendido o que é Bitcoin e como se dá o movimento da moeda. Além disso, ele conseguiu convencer seus colegas sobre o planejamento das ações do grupo.	1

⁴ Os nomes dos estudantes no Quadro são fictícios.

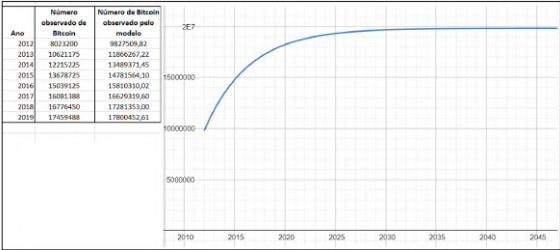
Quadro 3 (continua)

Descrição de cenas significativas de um grupo de estudantes

Modos de expressão	Percepção do professor	n
LUIZ: Mas se você olhar para esse gráfico, vê que isso a gente não pode prever, é muito instável (referindo-se aos gráficos das Figuras abaixo). PEDRO: É que vai dividindo, dividindo, até que não dá mais para dividir, deve ter alguma coisa no código deles que não deixa dividir mais a moeda. MARIA: Mas este gráfico que a gente está estudando (Figura abaixo) é da data e da quantidade de BTC que já foi minerado. Não fala de valor em dinheiro aqui. Ele está indo em exponencial aqui. É que nem o da bateria do celular (fazendo referência a uma atividade já desenvolvida na disciplina), não é que vai estabilizar, vai carregando, vai carregando até ficar estável (diz o estudante ao apontar para a tela do computador). PEDRO: Mas só que neste caso nunca vai ficar estável, é quase uma assíntota (fazendo uma associação com um conteúdo que já havia estudado na disciplina). JOSÉ: Acho então que a gente pode achar esta curva aqui (referindo-se à curva apresentada no site) e depois fazer um limite dela... vai dar para ver como ela está. Vamos ver com a professora. LUIZ: Professora, a gente pensou de ver se quando a moeda vai acabar... PROFESSORA: Mas sabem que vai acabar? LUIZ: Assim... se ela vai crescendo e chega um instante em que estabiliza, já que ela é limitada como consta no site (referindo-se às informações encontradas em sites). José: É que a gente sabe que qualquer moeda virtual é limitada e conforme vai minerando, elas vão ficando escassas. LUIZ: É isso então que pretendemos mostrar, tipo, construir um modelo para isso, sabe.	A interação entre os membros do grupo faz com que eles se aproximem da compreensão de que, para a situação do uso da moeda, é possível usar conceitos com os quais já se depararam na disciplina de CDI. Função exponencial e limite são conceitos a que os estudantes se remetem nessa etapa em que ainda planejam como construir uma resposta para o problema em questão. O estudante Luiz usa a expressão “estabiliza, já que ela é limitada”. O próximo passo seria matematizar essa ideia, no contexto da disciplina de CDI.	2
	Há nessa cena um indicativo de que os estudantes percebem na situação a necessidade de usar o conceito de limite e de assíntota e reconhecem o gráfico de uma função assintótica.	3
LUIZ: Mas se a moeda é limitada, como isso vai entrar na função? (referindo-se ao modelo matemático). JOSÉ: É isso tem a ver com limite, mas não sei muito bem, hem! Vamos chamar a profe (referindo-se à professora). ... PROFESSORA: Vocês então acham que vai usar limite? Mas vejam, se é algo que estabiliza..., o que significa isso??? Lembram do que é uma assíntota, hem pessoal? LUIZ: Ah, sim professora, é como se a gente olha para a função como essa, ela pode ter uma assíntota aqui (O estudante aponta para o gráfico da Figura d – linha anterior). MARIA: Humm, acho que é isso mesmo! Só que a assíntota não está no desenho aqui (mostrando para o gráfico da Figura d).		

Quadro 3 (continua)

Descrição de cenas significativas de um grupo de estudantes

Modos de expressão			Percepção do professor	n
(A professora introduz na aula de CDI um método ⁵ de obtenção de valor de estabilidade em modelos assintóticos. Os estudantes utilizam <i>software</i> para realizar ajustes, cálculos e construir gráficos). O modelo matemático construído foi validado pelos estudantes e sua interpretação associada às possibilidades de usá-lo para estimativas futuras com relação à comercialização da moeda Bitcoin. “O modelo matemático encontrado trouxe resultados satisfatórios, pois nos dá que o valor da moeda se estabiliza em 19 827 509 83 ou, aproximadamente, 20 milhões, e nas nossas informações encontradas diz que esse valor é 21 milhões. Isso também pode ser observado no gráfico que fizemos usando o GeoGebra ⁶.” (relatório da atividade entregue).			Há nessa cena, relativa a um recorte do relatório digital entregue pelos estudantes, indicativos de aprendizagem relativa ao significado do modelo que construíram bem como da interpretação do gráfico construído para o modelo assintótico obtido.	4
				

As cenas significativas são apresentadas a partir do entendimento de que quando inquirimos a aprendizagem é em direção à pessoa que aprende que dirigimos o nosso olhar, pois é ela, na totalidade dos seus modos de expressão, que revela essa aprendizagem. Do mesmo modo como o fenômeno cor é indissociável de uma superfície, por exemplo, também o fenômeno aprendizagem é indissociável da pessoa que aprende, pois é no inacabamento expresso em cada pessoa que a aprendizagem se manifesta (Brito, 2018). Ademais, entendemos que essa aprendizagem sempre se mostra como um movimento, indicando mudança e transformação. Identificamos uma experiência como sendo de aprendizagem porque a pessoa que aprende expressa alguma forma de mudança ou transformação, em sintonia com o conceito de aprendizagem apresentado por Illeris (2013).

Temporalidade e aprendizagem nas atividades de modelagem matemática

Colocar em discussão a vivência da temporalidade na constituição da aprendizagem em atividades de modelagem matemática implica em considerar que nessas atividades há momentos significativos que indicam aprendizagem. Esses momentos mostram-se relevantes porque formam em si uma unidade

⁵ Método de Ford-Walford (ver Bassanezi, 2002).
⁶ Software de Geometria Dinâmica, livre acesso. Disponível em: www.geogebra.org.br

de sentido que direciona os acontecimentos que se dão a partir deles. A identificação desses momentos, entretanto, não se desvinctula de um fazer específico que as atividades de modelagem exigem. De fato, é a flexibilidade das ações dos estudantes para percorrer as etapas do ciclo de modelagem que, implicitamente, orienta suas experiências vividas em cada atividade, sendo as cenas representativas de algumas delas.

Relativamente à atividade do equilíbrio da lata de refrigerante, a cena 4 do Quadro 1, expressa que os estudantes retomam e rearticulam ideias sobre as condições de equilíbrio e isso direciona a investigação do tema para uma abordagem geométrica. Já na cena 1 do Quadro 1 percebemos a manifestação de percepções acerca de como se dá o início da aprendizagem de condições de equilíbrio. Mais especificamente, esse início se dá quando uma compreensão prévia do tema investigado direciona para uma investigação que se expressa no modo específico da geometria, isto é, as percepções iniciais da aprendizagem manifestam o uso de modo linguístico de expressão específico para a atividade de modelagem relativa ao centro geométrico.

Nas cenas 2 e 3 do Quadro 1 percebemos a manifestação da percepção de um fundo, de um entorno que revela aspectos locais e espaciais de *onde* essa aprendizagem ocorre. Esses aspectos contextuais *situam* a aprendizagem na atividade de modelagem em relação ao olhar de um observador que vê a aprendizagem de um ponto de vista específico. A aprendizagem, neste caso, não é constituída por um observador universal, mas por um situado num tempo e espaço específicos. Por exemplo, a cena do Quadro 2 explicita a percepção do estudante acerca da aprendizagem do centro geométrico, considerando que ela se deu realizando experiências exploratórias com o fio de prumo e efetuando cálculos e construções, isto é, essa aprendizagem se mostra num ambiente de prática, construções e experimentações. É esta demanda da atividade de modelagem de construir e experimentar que cria as condições para que a experiência proporcione meios de tornar perceptível a aprendizagem.

No que diz respeito à atividade do Bitcoin, a cena 1 do Quadro 3 revela a manifestação de como ocorre o início da aprendizagem relativamente à temática Bitcoin. O estudante avalia as informações que tem e percebe a necessidade de ampliá-las. Neste momento, o uso da tecnologia é ativado pelo estudante, que demonstra apropriação de uma consciência do tempo interno necessária para que a atividade seja realizada nas condições, no espaço e em atendimento às indicações da professora.

Nas cenas 2 e 3 do Quadro 3 por sua vez, percebemos sinais de um contexto em que a aprendizagem se dá. Nestes momentos, na expressão linguística dos estudantes, emerge a nomenclatura de objetos matemáticos, revelando aspectos específicos que situam a aprendizagem. De fato, as interações com os colegas, bem como as informações obtidas em sites e

sua interpretação sinalizam um modo de aprender estimulado pelas necessidades da modelagem matemática. Neste momento parece se mostrar a percepção de um tempo interno privado para os diferentes estudantes. De fato, enquanto um estudante solicita a intervenção da professora, outro se dedica a encontrar meios de uma matematização da situação.

Por fim, na cena 4 do Quadro 3 a aprendizagem se revela nos meios de expressão apresentados no relatório, indicando um estado de conhecimento relativo ao funcionamento da moeda virtual e de usos da matemática pertinentes para elucidar esse movimento.

O que se pode dizer das cenas apresentadas para as duas atividades é que incluem características típicas da modelagem matemática. Permitem ao observador capturar que, o que se torna aprendido inclui compreensões acerca do fenômeno, acerca dos encaminhamentos para a resolução do problema e compreensões acerca da matemática. É neste sentido que o que se pode dizer da aprendizagem nestas cenas significativas associadas ao fazer requerido pela modelagem matemática inclui: (i) ao elaborar relatos em que descrevem sua aprendizagem, os estudantes eventualmente lançam um olhar para si próprio, seus sentimentos, vontades valores, características pessoais, de modo que esse olhar manifesta a presença do “Eu” no modo como a aprendizagem se dá; (ii) As percepções da ocorrência da aprendizagem manifestam, além do próprio estudante que aprende, a presença e a influência de outras pessoas; (iii) Percepções da presença e da influência do tema investigado na atividade de modelagem sobre a aprendizagem manifestada na vivência dos estudantes.

As cenas significativas também destacam dois aspectos concernentes às manifestações de aprendizagem ali percebidas: a percepção do início da aprendizagem que se dá quando uma compreensão prévia do tema investigado se encaminha para uma compreensão de meios de ação; a relevância do contexto que remete à percepção de um fundo, de um entorno que revela aspectos locais e espaciais de onde essa aprendizagem se dá.

As considerações aqui apontadas, revelam a presença do tempo, do espaço e do observador na constituição da aprendizagem. Não se trata de um tempo como sequência de momentos e um espaço como soma de lugares que se dão independentes do observador. Mas, trata-se de uma trama tecida pelo observador/tempo/espaço para agregar a temporalidade na constituição da aprendizagem. A temporalidade que aqui se elucida é a consciência do tempo interno como caracteriza Sokolowski (2004). Neste sentido é que as cenas significativas expressam o tempo-vivido dos estudantes em que as partes não-independentes de suas experiências implicaram em significações. Em síntese, a temporalidade resulta dos esforços para situar cada parte da experiência num local do espaço, constituindo, entretanto, a unidade em todas elas.

Considerações finais

A problematização da aprendizagem em atividades de modelagem matemática aqui apresentada traz ao debate a vivência da temporalidade na constituição da aprendizagem. O enfoque fenomenológico adotado neste capítulo implica na compreensão de que a aprendizagem à qual nos referimos é sempre a aprendizagem percebida, aquilo que professor/professora percebe como aprendizagem. Na pesquisa empírica em que estudantes do Ensino Fundamental e do Ensino Superior desenvolveram atividades de modelagem matemática, os modos de expressão dos estudantes foram capturados por meio de gravações e registros. Desses dados foram extraídas cenas significativas e sobre elas é que se discute a aprendizagem.

O enfoque fenomenológico, portanto, afasta-se de considerar condições específicas como o fazem perspectivas cognitivistas da aprendizagem (Kaiser et al., 2006), de buscar na interação entre estudantes e professor indícios de aprendizagem (Ferruzzi & Almeida, 2015) ou mesmo de direcionar a atenção mais diretamente à linguagem e às práticas sociais nessas atividades (Cantoral, et al., 2018; Souza & Barbosa, 2019). Tampouco se pode falar da aprendizagem em termos de competências que os estudantes revelam ter adquirido nessas atividades, conforme apontam as pesquisas indicadas em Cevikbas et al. (2022).

Ao invés disso, o fenômeno da aprendizagem em atividades de modelagem matemática constitui uma totalidade expressa na experiência dos estudantes. Nesse contexto, a palavra *experiência* refere-se à relação de implicação mútua que as partes estabelecem entre si e que remetem a essa totalidade. A aprendizagem como transformação que se busca nestas cenas inclui na constituição uma temporalidade como consciência do tempo interno, levando-nos a conjecturar que, no desenvolvimento de atividades de modelagem, há momentos em que da experiência assim entendida, decorre conhecimento, conforme conceitua Illeris (2013).

Estas experiências, todavia, se constroem consoante às demandas que atividades de modelagem oferecem, as quais requerem construção e experimentação e oferecem condições para que a experiência proporcione meios de tornar perceptível a aprendizagem.

Embora tendo no horizonte o que se pode dizer da aprendizagem, tanto na filosofia quanto na psicologia, por exemplo, sem entretanto defender um modelo único sobre o que a aprendizagem é e como ocorre, as discussões empreendidas no texto podem estar na direção do que D'Amore (2007) considera como uma epistemologia da aprendizagem em matemática e, particularmente, em atividades de modelagem matemática.

Referencias

- Agostinho, S. (1980). *Confissões* (2a ed., Tradução de J. Oliveira Santos e A. Ambrósio de Pina). Abril Cultural, (Os pensadores).
- Almeida, L. M. W. & Goulart, T. C. K. (2020). Recursos Semióticos em Atividades de Modelagem Matemática. *Jornal internacional de estudos em Educação Matemática*, 13(3), 1–12.
<https://jiecem.pgsscogna.com.br/jiecem/article/view/8324>
- Almeida, L. M. W. (2018). Considerations on the use of mathematics in modelling activities. *ZDM*, 50(1), 19–30. <https://doi.org/nxq6>
- Almeida, L. M. W. (2022). Uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática. *Vidya*, 42(2), 121–145. <https://doi.org/nzrd>
- Alsina, C. (2009). Los secretos geométricos en diseño y arquitectura. En M. I. Marrero & J. Rocha (Coord.), *Horizontes matemáticos* (pp. 339–352). Servicio de Publicaciones de la Universidad de la Laguna.
- Andrade, D. H. L. (2021). *Um estudo sobre a temporalidade na fenomenologia de Edmund Husserl*. [Dissertação Mestrado em Filosofia – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Ciências Humanas, Comunicação e Artes Programa de Pós-Graduação em Filosofia].
<http://www.repositorio.ufal.br/jspui/handle/123456789/8742>
- Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Editora Contexto.
- Bicudo, M. A. V. (2011). *A pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica*. Cortez Editora.
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? En S. J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (Vol. 1, pp. 73–96). Springer.
<https://doi.org/nxq7>
- Blum, W. & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learn? *Journal of mathematical modelling and application*, 1(1), 45–58.
<https://bit.ly/3BVHMF6>
- Braga, R. M. (2015). *Aprendizagem em modelagem matemática pelas interações dos elementos de um sistema de atividade na perspectiva da teoria da atividade de Engestrom*. [Tese Doutorado - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas].
- Brito, D. S. (2018). *Aprender Geometria em Práticas de Modelagem Matemática: Uma Compreensão Fenomenológica*. [Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática - Universidade Estadual de Londrina]
<https://repositorio.uel.br/handle/123456789/16592>
- Brito, D. S. & Almeida, L. M. W. (2021). Práticas de modelagem matemática e dimensões da aprendizagem da geometria. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 21(1), 1–29. <https://doi.org/nxq3>

- Burkhardt, H. (2018). Ways to teach modelling – a 50-year study. *ZDM*, 50(1), 61–75. <https://doi.org/gmq8ft>
- Cantoral, R.; Moreno-Durazo, A. & Caballero-Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: An empirical approach to teaching and learning. *ZDM*, 50(1), 77–89. <https://doi.org/gf4sg3>
- Cevikbas, M.; Kaiser, G. & Schukajlow, S. (2022). A systematic literature review of the current discussion on mathematical modelling competencies: state-of-the-art developments in conceptualizing, measuring, and fostering. *Educational Studies in Mathematics*, 109(2), 205–236. <https://doi.org/g6vg>
- Cunha, A. G. (2012). *Dicionário etimológico da língua portuguesa* (3a. ed.). Lexikon.
- D'Amore, B. (2007). *Elementos de didática da matemática*. Editora Livraria da Física.
- Detoni, A. R. & Paulo R. M. (2011). A organização dos dados da pesquisa em cenas. En M. A. V. Bicudo (Ed.), *Fenomenologia: confrontos e avanços*. Cortez.
- Ferri, R. B. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer. <https://doi.org/ndp2>
- Ferruzzi, E. C. & Almeida, L. M. W. (2015). Diálogos em modelagem matemática. *Ciência & Educação (Bauru)*, 21(2), 377–394. <https://doi.org/nxq9>
- Geiger, V.; Galbraith, P.; Niss, M. & Delzoppo, C. (2022). Developing a task design and implementation framework for fostering mathematical modelling competencies. *Educational Studies in Mathematics*, 109(2), 313–336. <https://doi.org/gpzg6w>
- Husserl, E. (1994). *Lições para uma fenomenologia da consciência interna do tempo*. Imprensa Nacional.
- Illeris, K. (Ed.). (2013). *Teorias contemporâneas da aprendizagem*. Penso.
- Jarvis, P. (2013). Aprendendo a ser uma pessoa na sociedade: aprendendo a ser eu. En K. Illeris (Ed.), *Teorias Contemporâneas da Aprendizagem* (Tradução de Ronaldo Cataldo Costa). Penso.
- Kaiser, G.; Blomhøj, M. & Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM*, 38(2), pp. 82–85. <https://doi.org/bt6cfx>
- Littig, J.; Lorenzoni, L.; Rezende, O. L. T. & Sousa, M. A. V. F. (2019). A Modelagem Matemática na perspectiva sociocrítica e a Teoria da Situação Didática: identificando aproximações potencializadores da aprendizagem e do desenvolvimento do conhecimento reflexivo. *REnCiMa. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10(1), 1–13. <https://revistapos.cruzeirosul.edu.br/rencima/article/view/1603>
- Mason, J. (2001). Modelling modelling: Where is the centre of gravity of-for-when teaching modelling. En J. F. Matos, W. Blum, K. Houston, & M. E. Carreira (Eds.), *Modelling and Mathematics Education. ICTMA -9 Applications in Science and technology* (pp. 39–61). Woodhead Publishing. <https://doi.org/nxrd>
- Moreira, M. A. (2011). *Teorias de aprendizagem*. E.P.U.

- Moura, L. C. & Alves, D. B. (2022). Modelagem Matemática para a Aprendizagem Significativa Crítica. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 13(4), 1–24. <https://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/3929>
- Müller, M. J. (2001). *Merleau-Ponty: acerca da expressão*. EDIPUCRS.
- Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. L. (2007). Introduction. En W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. New ICMI Study Series* (pp. 3–32), Springer. <https://doi.org/fhw2sn>
- Seki, J. T. P. (2023). *Uma visão panorâmica da aprendizagem em modelagem matemática*. [Tese Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática–Universidade Estadual de Londrina].
- Sokolowski, R. (2004). *Introdução à fenomenologia*. Edições Loyola.
- Sousa, B. N. P. A. & Almeida, L. M. W. (2019). Apropriação Linguística e Significado em Atividades de Modelagem Matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(65), 1195–1214. <https://doi.org/nxq5>
- Souza, E. G. & Barbosa, J. C. (2014). Contribuições teóricas sobre aprendizagem matemática na modelagem matemática. *Zetetiké*, 22(41), 31–58. <https://doi.org/nxrf>
- Souza, E. G. & Barbosa, J. C. (2019). A aprendizagem de regras do sistema matemático escolar na modelagem matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 22(1), pp. 39–66. <https://doi.org/nxq4>
- Souza, E. G. (2012). *A aprendizagem matemática na modelagem matemática*. [Tese Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências - Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana].
- Supriadi, S. (2020). Pre-service elementary teachers: analysis of the disposition of mathematical modeling in ethno mathematics learning. *Ilkogretim Online*, 19(3), 1407–1421. <https://doi.org/nxrc>
- Taranto, E., Colajanni, G., Gobbi, A., Picchi, M., & Raffaele, A. (2022). Fostering students' modelling and problem-solving skills through Operations Research, digital technologies and collaborative learning. *International Journal of Mathematical Education In Science And Technology*, 55(8), 1957–1998. <https://doi.org/nxrb>

