

# Modelización reflexiva en un curso de estadística y probabilidad a nivel bachillerato

Beatriz Arellano Sánchez <sup>1</sup> 

María Estela Navarro Robles <sup>2</sup> 

Armando Paulino Preciado Babb <sup>3</sup> 

## Resumen

Desde hace varias décadas se ha identificado que la enseñanza de la probabilidad y estadística en México se reduce a la memorización de fórmulas y procedimientos, dejando de lado el entendimiento conceptual y la posibilidad de desarrollar una actitud crítica y emancipatoria. En este capítulo proponemos la modelización reflexiva como una perspectiva complementaria de la modelización matemática basada en datos en donde los individuos se ven como parte del fenómeno que se modela. Realizamos un análisis exploratorio a las respuestas de estudiantes (cinco grupos de entre 30 y 50 estudiantes cada uno) en una actividad introductoria a la unidad de “Azar: Modelación y Toma de Decisiones” de un curso de Probabilidad y Estadística en el último año de bachillerato. El análisis se centró en la forma en la que los estudiantes contrastaron información de modelos estadísticos con sus propios modelos y contextos, situándose como parte del fenómeno al que se hacía referencia. Resultados preliminares incluyen la identificación de dos criterios, (1) consonancia vs disonancia y (2) inferencia vs no inferencia, con los cuales se puede describir la forma en la que los estudiantes realizaron dicho contraste, mostrando, en algunos casos, tanto una actitud crítica hacia dichos modelos como emancipatoria respecto a un potencial de inferencia en la comunidad.

## Palabras clave

Modelización matemática reflexiva, Bachillerato, Educación Matemática Crítica, Modelización matemática basada en datos.

---

<sup>1</sup> beatriz.arellano@cch.unam.mx

Universidad Nacional Autónoma de México, México

<sup>2</sup> m.estela.navarro@gmail.com

Universidad Pedagógica Nacional, México

<sup>3</sup> apprecia@ucalgary.ca

Universidad de Calgary, Canadá

Arellano Sánchez, B., Navarro Robles, M. E., & Preciado Babb, A. P. (2025). Modelización reflexiva en un curso de estadística y probabilidad a nivel bachillerato. En A. Solares-Rojas, & A. P. Preciado Babb (Eds.), *La investigación en modelización matemática: un diálogo entre educadores de Latinoamérica y España* (pp. 357–375). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S2/2025/01-15>

**Abstract**

Since several decades ago, it was identified that the teaching of probability and statistics in Mexico is reduced to memorization of formulas and procedures, leaving aside conceptual understanding and the possibility of developing a critical and emancipatory attitude. In this chapter, we propose reflexive modelling as a complementary perspective of mathematical modelling based on data in which individuals see themselves as a part of the modelled phenomenon. We conducted an exploratory analysis of students' answers (five groups with 30 to 50 students each) in an introductory activity to the unit "Randomness: Modelling and Decision Making" in a course during the last year of high school at the Sciences and Humanities School in Mexico. The analysis focused on the way students contrasted information from given statistical models with their own models and contexts, situating themselves as a part of the corresponding phenomenon. Preliminary findings include the identification of two criteria, (1) Consonance vs Dissonance, and (2) Agency vs No Agency, which can be used to describe how students conducted such contrast showing, in some cases, an attitude not only critical toward such models but also emancipatory regarding a potential agency in the community.

**Keywords**

Reflexive mathematical modelling, High school, Critical mathematics education, Mathematical modelling based on data.

En México, la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad se suele reducir al uso de fórmulas y procedimientos para calcular diversas medidas o probabilidades y, en el mejor de los casos, a la interpretación de estas, ya que en los contenidos a nivel medio superior se favorece la comprensión procedimental más que la conceptual, como lo refieren diversos investigadores (Cruz & Ojeda, 2021; Gómez-Blancarte et al., 2021; Sánchez & Valdez, 2017). En esta aproximación, los modelos estadísticos y probabilísticos son percibidos como representaciones prescriptivas de un fenómeno, los cuales deben ser utilizados sin mayor cuestionamiento. Por ejemplo, Cruz y Ojeda (2021) reportaron que en 410 programas de cursos de estadística de varias instituciones mexicanas no se promueve el surgimiento de nuevas preguntas de investigación estadística después de obtenerse los resultados, argumentando que en su interpretación se debe incluir una actitud crítica hacia los mismos. No se toma en cuenta el porqué se usan estos modelos, cuál es la relación con el fenómeno que están modelando y cómo se pueden verificar o contrastar con lo que ocurre realmente. En este capítulo proponemos una aproximación con diferente perspectiva a la modelización, retomando algunos elementos de la educación matemática crítica, la cual surge como resultado del análisis de una actividad en un curso de Probabilidad y Estadística en nivel bachillerato (estudiantes entre 17 y 18 años) en la zona metropolitana de la Ciudad de México (CDMX). La actividad es parte de una de las situaciones de aprendizaje que se diseñaron e implementaron como parte

del trabajo doctoral en educación matemática de la primera autora de este capítulo.

Si bien existen distintas perspectivas sobre la modelización, tanto en matemáticas como en estadística (Ärleback & Kawakami, 2023; Kaiser & Sriraman, 2006), hay consenso de que la modelización en ambos casos implica el estudio de algún fenómeno a través de modelos matemáticos. Los modelos estadísticos en particular se basan en datos provenientes del fenómeno a estudiar, y pueden ser considerados como modelos matemáticos (Ärleback & Kawakami, 2023). La aproximación a la modelización que adoptamos en este capítulo se puede enmarcar dentro de la perspectiva sociocrítica (Kaiser & Sriraman, 2006), en la que además de aprender un contenido matemático, se abordan situaciones sociales relevantes para los estudiantes.

Kawakami y Ärleback (2024), en su revisión de 63 publicaciones, identificaron tres justificaciones para la enseñanza de la modelización en estadística como una forma de *modelización matemática basada en datos*: orientación en competencias, orientación en contenidos y orientación social. La propuesta que ofrecemos en este capítulo se enmarca en la tercera justificación que promueve la toma de decisiones en el mundo real, social y en contextos sociales, en donde los datos juegan un papel preponderante. Esta justificación también resalta la necesidad de desarrollar un entendimiento crítico del uso y propósito de la estadística, modelos estadísticos y modelización en dichos contextos, enfatizando el abordar problemas y contextos sociales. Consideramos que el hacer modelización desde una perspectiva social permite que la formación de los estudiantes sea más integral y que, además, adquieran conciencia crítica social desde un punto de vista tanto cuantitativo como cualitativo.

Los alumnos participantes crearon modelos estadísticos relativos a distintos aspectos de su realidad, como su tipo de sangre y la edad a la que los jóvenes empiezan a ingerir bebidas alcohólicas y consumir tabaco. Estos modelos, basados en muestras pequeñas conformadas por los equipos de trabajo de los estudiantes, fueron contrastados y comparados con modelos provenientes de datos a nivel nacional e internacional. Es importante resaltar que en esta perspectiva el alumno forma parte del fenómeno, tanto de manera individual como colectiva, por lo que no lo ve desde afuera, sino que se involucra y actúa dentro porque sus datos forman parte de la información que está revisando. En este sentido, se pretendía que los estudiantes tuvieran una aproximación crítica a ciertos modelos y a su forma de interpretarlos a partir de su propio contexto, así como de los datos recabados dentro de su equipo. Por este motivo hemos llamado *modelización reflexiva* a esta forma de trabajar con modelos matemáticos, la cual describimos en la siguiente sección.

En concreto, el propósito de esta investigación fue analizar las reflexiones que hacen los estudiantes a partir de un cotejo, comparación y contraste de sus modelos y de sus propios contextos con los modelos proporcionados en la actividad. Dicho cotejo se puede considerar como parte de la etapa de verificación en diversos ciclos de modelización matemática (Perrenet & Zwaneveld, 2012). Dado nuestro interés en desarrollar una actitud crítica, analizamos los datos desde la perspectiva de la educación matemática crítica (Sánchez Aguilar, 2014) para abordar la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo cotejan los estudiantes los modelos estadísticos con sus propios modelos, sus contextos sociales y familiares en el proceso de modelización reflexiva?

### **Modelización Matemática Reflexiva**

La perspectiva hacia la modelización que adoptamos en este estudio retoma elementos de la educación matemática crítica, que, de acuerdo con Sánchez Aguilar (2014), es una corriente de investigación enfocada en aspectos políticos, económicos y éticos relacionados con la educación matemática. Así, esta corriente es consistente con la perspectiva sociocrítica de la modelización matemática (Kaiser & Sriraman, 2006), que busca atender problemas socioculturales a través de la modelización matemática en la enseñanza. Esta corriente constituye una forma de concebir a las matemáticas y sus métodos de enseñanza-aprendizaje de manera distinta a lo que comúnmente se observa en las escuelas. Para Ernest et al. (2016), desde esta perspectiva no se ve a las matemáticas como neutrales, sino más allá de sus aplicaciones, desde un punto de vista social o político, donde tienen una carga que da forma a los conceptos, métodos, verdades y demostraciones. Así, los métodos de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina también tienen una carga social y política que heredan de la forma de concebir a las matemáticas y a la educación.

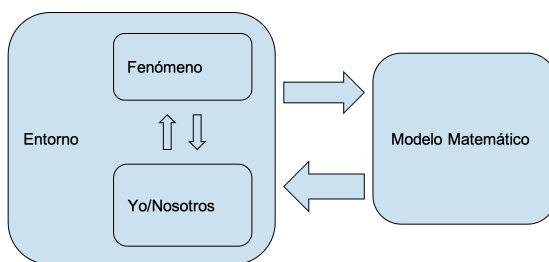
Skovsmose y Niss (2008) han hecho referencia al poder de las matemáticas para construir justificaciones y legitimar ciertas acciones, e incluso, justificaciones falsas. Estos autores explicaron cómo en Dinamarca se tomaban decisiones económicas, políticas y sociales basadas en 60 modelos; sin embargo, se hicieron preguntas como “¿Quién construyó los modelos? ¿Qué aspectos de la realidad se incluyeron en los modelos? ¿Quién tiene acceso a esos modelos? ¿Quién tiene el control de los modelos? ¿En qué sentido es posible falsificar un modelo?” (p. 9). Es, en este sentido, que se han trabajado los modelos en la actividad que aquí se analiza, procurando el desarrollo de una actitud crítica hacia la modelización y los modelos. En vez de que el modelo sea la guía para que el estudiante entienda su contexto, los estudiantes contrastan el modelo con su propio contexto. Esto permite que el modelo sea susceptible de ser analizado de forma crítica, lo cual, creemos,

hace que los estudiantes tomen conciencia de su entorno y desarrollen una actitud crítica que les permitirá ser ciudadanos capaces de tomar decisiones para consolidar un sistema democrático. Además, como mencionan Skovsmose y Niss (2008), “cuando una decisión se elige a conciencia, el entorno cambia” (p.9).

Esta aproximación promueve la formación de ciudadanos que puedan transformar a la sociedad mediante el aprendizaje de las matemáticas, a través del uso reflexivo de modelos, tal como se propone. En este sentido, el alumno es parte del fenómeno que se modela, por lo que proponemos incluir una perspectiva personal en la modelización, que se refleja en el ciclo de modelización reflexiva mostrado en la Figura 1. Reconocemos las etapas de ciclos de modelización matemática comúnmente citados en la literatura (Perrenet & Zwaneveld, 2012), pero la omitimos en la Figura 1 para enfatizar el elemento personal que forma parte del entorno, usando la primera persona (singular o plural). Una de las etapas principales de los distintos ciclos de modelización es la verificación del modelo. Esta etapa es particularmente relevante desde la modelización reflexiva, ya que la verificación se da desde un nivel personal, cotejando modelos con la realidad inmediata de los individuos que se ven dentro del fenómeno a modelizar.

**Figura 1**

*Ciclo de modelización reflexiva*



Cabe señalar que este cotejo dentro de la modelización reflexiva no es simplemente una verificación en la que se evalúe el modelo, ya que incluye un contraste con el contexto inmediato del individuo. El resultado del cotejo no necesariamente es la validación o rechazo de un modelo, pues puede reflejar elementos de la educación matemática crítica, tales como el proponer reflexiones sobre las ideas de emancipación y resignificación de los procesos educativos desde la perspectiva de los estudiantes, como lo han propuesto Martini y Godoy (2022). Estos autores, en su revisión de la literatura, identificaron que uno de los objetivos de la educación matemática crítica es buscar reformulaciones didácticas con el objetivo de teorizar propuestas pedagógicas que ayuden a la posibilidad de promover prácticas en el sentido de la teoría crítica. Siguiendo estas ideas, consideramos importante promover

una participación activa y emancipatoria en la sociedad, lo cual podría lograrse a largo plazo. En este estudio se muestra cómo los estudiantes pueden conocer y reconocerse dentro de su entorno social. Así, desde nuestra perspectiva, el ciclo de modelización reflexiva implica conocer el entorno de la comunidad y de la sociedad, de manera que el individuo pueda reflexionar críticamente sobre distintas situaciones en su comunidad para tomar decisiones informadas dentro de una sociedad democrática. El ciclo de modelización reflexiva también sirvió de marco analítico, como se explica en la siguiente sección.

## Metodología

El estudio que presentamos se basó en la exploración de las respuestas a cuestionarios aplicados en una actividad llamada *¿Qué tan diferente somos?*, realizada durante la pandemia de COVID-19 por estudiantes del último año del Colegio de Ciencias y Humanidades, Plantel Naucalpan (CCHN), México, en la introducción de la *Unidad 3, Azar: Modelación y Toma de Decisiones del curso Probabilidad y Estadística I*. La primera autora de este capítulo fue la maestra del curso.

Esta investigación se puede describir como un estudio de caso exploratorio de carácter cualitativo (Yin, 2014). Los resultados se sitúan dentro del mismo caso sin implicar, todavía, una generalización a otros contextos escolares. El caso corresponde a la implementación de la actividad y los datos se componen de las respuestas escritas y orales de los estudiantes (cinco grupos de entre 30 y 50 estudiantes cada uno) a la actividad mencionada. De acuerdo con el ciclo de modelización reflexiva (Figura 1), decidimos usar como unidad de análisis los comentarios y respuestas en las que los estudiantes usaban la primera persona para referirse a los datos o al fenómeno. La información obtenida de estas dos sesiones fue codificada siguiendo el proceso de comparación constante, identificando conceptos, conexiones y patrones relevantes de dichas respuestas, con lo que se lograron obtener las primeras categorías emergentes (Charmaz, 2014). Esto llevó a una discusión analítica entre los autores de este capítulo, en un proceso constante de revisión y refinación. Al final, se identificaron dos temas centrales o criterios, descritos en la sección de resultados, con los que se aborda la pregunta de investigación.

### *Descripción de la actividad ¿Qué tan diferente somos?*

En esta actividad los estudiantes abordaron la pregunta *¿qué tan diferentes somos?* a través de la elaboración de encuestas en equipos y del contraste de sus datos con modelos estadísticos referentes a las preguntas de la encuesta. De acuerdo con los programas de estudio en México, los estudiantes tendrían que haber trabajado el tema de probabilidad en grados escolares anteriores, por lo menos haciendo cálculos desde un punto de vista frecuentista

o clásico. Sin embargo, la docente observó que la mayoría no recordaba el tema, algunos decían nunca haberlo trabajado escolarmente y sólo unos cuántos tenían una noción más precisa de este, por lo que esta actividad introductoria se abordó de forma distinta, contemplando que era suficiente que los estudiantes tuvieran nociones de variación y porcentaje, además de distinguir fenómenos aleatorios. Dicha actividad fue diseñada para que los alumnos recuperaran sus experiencias y realizaran el análisis de su entorno, a través de preguntas guía que fueron contestadas primero por equipos y después en sesión plenaria, considerando los datos que investigaron y compararon.

La actividad consistió en dos sesiones. En la primera sesión se hizo una reunión con cada grupo, en la cual se les explicó la actividad, inmediatamente después formaron equipos de 4 a 6 integrantes. Cada equipo entregó una tabla con sus resultados y la información proporcionada o la que investigaron (como la que se muestra en la Tabla 1) para después comparar y contrastar los resultados.

**Tabla 1**  
*Tabla de resumen de la actividad*

| Información (variables)                                                      | Promedio o % del Equipo | Promedio o % País/Mundial | Observaciones |
|------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|---------------------------|---------------|
| a) % de integrantes que viven:<br>En Cd. de México<br>En el Estado de México |                         |                           |               |
| b) Promedio de personas que habitan en el hogar                              |                         |                           |               |
| c) % de Tipo sanguíneo y factor Rh                                           |                         |                           |               |
| d) Edad promedio de consumo de alcohol, en caso de que aplique               |                         |                           |               |
| e) Edad promedio de consumo de tabaco, en caso de que aplique                |                         |                           |               |

Cabe mencionar que la primera pregunta está relacionada con la situación geográfica de la escuela, ubicada en Naucalpan, Estado de México, muy cerca de los límites con la CDMX, que son dos entidades federativas distintas.

La actividad requirió que los estudiantes calcularan medidas estadísticas para su equipo, correspondientes a las cinco variables que se presentan en la Tabla 1. Después investigaron acerca de esas mismas variables en modelos sugeridos del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI, 2021),

Consejo Nacional de Población (CONAPO, 2010) y de un estudio realizado por Méndez (2004). Si bien estas fuentes son confiables, no todas estaban actualizadas, o no tenían información que correspondía geográficamente con la CDMX o el Estado de México. Esto no se les mencionó a los estudiantes, pero sí se les comentó que podían buscar y usar información de otras fuentes. Para terminar de completar la Tabla 1, se requirió que los estudiantes compararan y contrastaran los resultados de su equipo con modelos estadísticos provenientes de las fuentes consultadas.

Al final de la sesión, los equipos respondieron de forma general a la pregunta ¿qué tan diferentes somos?, a partir de la comparación de sus modelos estadísticos y de los modelos proporcionados o de los que ellos investigaron.

En la segunda sesión se hizo una plenaria con cada grupo, en la cual, voluntariamente, los estudiantes compartieron los resultados que les parecieron más relevantes de sus equipos, sus experiencias y reflexiones, y contestaron a la pregunta antes mencionada.

El análisis que aquí se muestra corresponde a las respuestas de los estudiantes, junto con las observaciones del cuadro comparativo (Tabla 1) que había hecho cada equipo y, en algunos casos, lo que compartieron en la sesión plenaria. Seleccionamos algunas de las respuestas de los estudiantes para ilustrar los resultados del estudio en la siguiente sección.

## Resultados

Enfocamos nuestro análisis en las respuestas en las que se identifica el uso de la primera persona, dado nuestro interés en la modelización reflexiva. Al contrastar los datos de su equipo con los modelos de otras fuentes, los estudiantes encontraron consistencia en algunos casos, e inconsistencia en otros. Si bien en la mayoría de los comentarios no se mencionan explícitamente datos numéricos, los estudiantes hicieron referencia a los resultados y sus implicaciones.

Es importante recordar que el marco de la modelización reflexiva que proponemos se basa en los ciclos comunes de modelización matemática y sólo añadimos la parte en la que los estudiantes hablan en primera persona, situándose dentro del fenómeno que se modela. El marco es, por un lado, una perspectiva de modelización, y por el otro, un lente analítico que orienta nuestra atención a los comentarios que hicieron los estudiantes, en los que se ubica el centro del fenómeno que se aborda.

Las respuestas que se analizarán fueron seleccionadas por su claridad y por la identificación de los estudiantes con ellas. Cada respuesta fue clasificada de acuerdo con dos criterios, cada uno con dos categorías opuestas:

- 1) Consonancia/Disonancia
- 2) Injerencia/No injerencia



Estos criterios pueden considerarse como variables dicotómicas, y las categorías como valores de dichas variables.

La categoría de consonancia del primer criterio se refiere a que los alumnos perciben una similitud del modelo analizado respecto a los datos generados en su equipo. En este caso, los modelos coinciden con los resultados del equipo. En contraste con esta categoría, la disonancia es similar a la disonancia cognitiva, descrita por Festinger (1957) como un sentimiento de incomodidad experimentado al tener dos creencias contradictorias. En esta categoría se observa que los alumnos muestran discrepancias entre lo que observan en sus equipos y el modelo consultado en otras fuentes. Notamos que en los casos de disonancia, algunos alumnos hicieron preguntas, justificaciones y críticas de tipo social, económico, biológico y matemático, sin que la docente haya intervenido de manera directa en su formulación. Las categorías de disonancia y consonancia son mutuamente excluyentes para cada variable y se aplican en cada comentario por separado. Así, un mismo equipo puede tener un comentario dentro de la categoría de consonancia para una variable, como el tipo de sangre, y otro comentario clasificado como disonancia para otra variable, por ejemplo, el número de habitantes en su hogar.

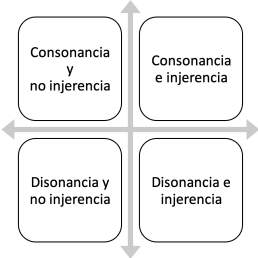
En cuanto al segundo criterio, en la categoría de injerencia se clasificaron las respuestas y reflexiones en las que los alumnos pudieran injerir dentro del contexto social relacionado con el fenómeno que se modela. Por ejemplo, los estudiantes podrían decidir empezar a beber alcohol o no. Los alumnos saben que, al estar dentro del fenómeno estudiado, sus acciones presentes se ven reflejadas en este y, en algunas ocasiones, sus decisiones futuras pueden injerir en su contexto, cambiando su realidad. En contraste, la categoría de no injerencia se refiere a reflexiones y respuestas en las que los estudiantes no injerir en el contexto. Por ejemplo, los estudiantes no pueden injerir en su tipo de sangre, es decir, no lo pueden cambiar. Notamos, sin embargo, que aun cuando el tipo de sangre no se puede cambiar, algunos estudiantes mencionaron la posibilidad de poder donar sangre a muchas personas dado su grupo sanguíneo. En este último caso consideramos una injerencia, ya que los estudiantes se ven a sí mismos como posibles donadores, impactando en su contexto social.

Los dos criterios anteriores se pueden combinar usando un plano coordenado, en el cual cada criterio corresponde a un eje. Los cuadrantes refieren a las combinaciones de cada criterio, como se muestra en la Figura 2.

La Figura 2 se usó como una representación para clasificar las respuestas y reflexiones de los estudiantes. Los ejemplos de estas categorías, presentados en las siguientes secciones, nos permiten, por un lado, describir la forma en que los estudiantes se identificaron dentro del fenómeno que se estaba modelando, y por otro, identificar elementos de pensamiento crítico, como

lo son la evaluación o pertinencia de los modelos, la contextualización de los datos en su ubicación geográfica o la posibilidad de inferencia en algunas variables de su contexto social.

**Figura 2**  
*Representación cartesiana de los criterios de clasificación*



*Consonancia e Inferencia*

El primer ejemplo de respuesta de consonancia que discutimos corresponde al tipo sanguíneo y su factor Rh. La información sugerida para consulta fue publicada en la Revista de la Facultad de Medicina de la Universidad Nacional Autónoma de México (Méndez, 2004), en la que se analizó una muestra de la zona media del Estado de San Luis Potosí. A los estudiantes no se les mencionó que este modelo correspondía a otra entidad geográfica y que se había publicado varios años atrás. La Tabla 2 resume la información del modelo que se les recomendó consultar a los estudiantes.

**Tabla 2**  
*Grupos sanguíneos de San Luis Potosí (Méndez, 2004)*

| Grupo Sanguíneo | Rh       | Número | Porcentaje |
|-----------------|----------|--------|------------|
| O               | positivo | 6,819  | 68.19      |
| O               | negativo | 137    | 1.37       |
| A               | positivo | 2,186  | 21.86      |
| A               | negativo | 41     | 0.41       |
| B               | positivo | 702    | 7.02       |
| B               | negativo | 14     | 0.14       |
| AB              | positivo | 96     | 0.96       |
| AB              | negativo | 5      | 0.05       |
| Total           |          | 10,000 | 100        |

*Nota.* Elaboración propia a partir de (Méndez, 2004) Frecuencia de los grupos sanguíneos ABO y Rh (D) en la zona media del Estado de San Luis Potosí.

Al respecto, uno de los equipos contestó:

E1: *El grupo O es el más común en México y predomina en nuestro equipo, aunque tenemos una ventaja en el equipo porque hay de varios tipos de sangre para poder donar.*

En esta respuesta se puede observar que hay consonancia entre lo que ocurre en la mayoría del equipo, ya que se muestra que se identifican con la información predominante del modelo sugerido por Méndez (2004), aunque no mencionan qué ocurre con otros tipos de sangre entre los integrantes.

Cabe destacar que el comentario al final sobre la ventaja de la variedad de tipos de sangre para poder donar sugiere una disposición de apoyo a la comunidad, por lo que consideramos este comentario como injerencia. El siguiente ejemplo es muy similar al analizado anteriormente.

E2: *En México el grupo sanguíneo más común es el O y hasta predomina en nuestro equipo, este tipo sanguíneo tiene una ventaja al ser uno de los que puede donar a varios tipos de sangre, aunque el donador universal es el O-.*

Este equipo vuelve a encontrar consonancia con el modelo y también hace referencia a la posibilidad de donar sangre, lo cual representa una posible injerencia en el contexto social.

Otro de los ejemplos en esta categoría se encontró en la respuesta que dio un equipo a la edad en la que empezaron a consumir alcohol. Entre los modelos sugeridos, se les proporcionó a los estudiantes información de CONAPO (2010), donde se describe la situación de los jóvenes en México:

El consumo de alcohol entre los adolescentes está presente desde edades tempranas. Ya a los 15 años 13 por ciento de los varones y ocho por ciento de la población femenina ha ingerido alcohol. La edad media estimada para el inicio de consumo de bebidas alcohólicas entre la población de 15 a 24 años es de 19.9 años. (p. 50).

El siguiente comentario del Equipo 3 muestra implícitamente una consonancia con el modelo analizado:

E3: *El consumo de alcohol en los jóvenes en México se ve ya desde los 15 años, ya que, al iniciar esta etapa solemos hacerlo por motivos de convivencia, presión social o simplemente curiosidad, todo esto se debe a que es un buen medio para mantener relaciones sociales y una convivencia que puede llegar a ser agradable.*

Con la palabra “solemos” se puede inferir la consonancia con el modelo, aunque no se percatan de que el modelo se realizó con información de hace más de 10 años; tampoco hacen referencia al promedio, sino al valor mínimo del rango de edad en que empiezan a consumir alcohol. Además, justifican las razones por la que lo hacen ellos, lo cual los lleva a sentirse parte del fenómeno, es decir, se reconocen injiriendo en el contexto relacionado con el consumo de bebidas alcohólicas.

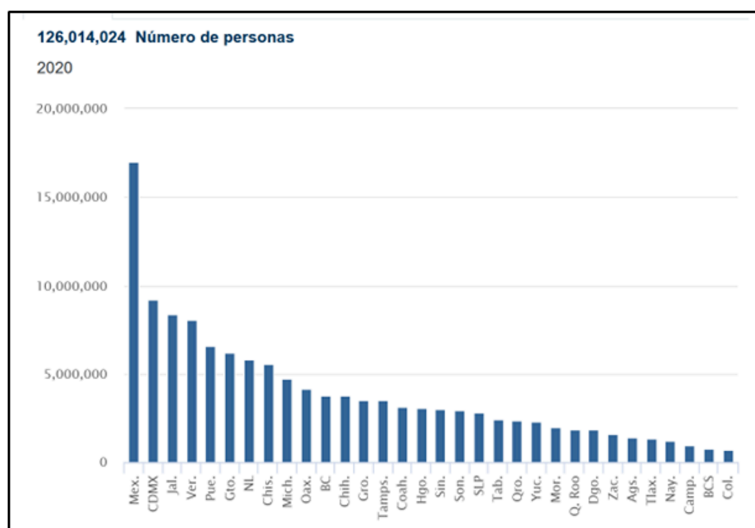
### *Consonancia y No Injerencia*

Un ejemplo en esta categoría corresponde a la pregunta sobre el porcentaje de integrantes del equipo que vivía en la CDMX o en el Estado de México. En la información que se les sugirió estaba el porcentaje de habitantes por estado de todo el país (INEGI, 2021). La Figura 3 fue parte de la información

sugerida a los alumnos y se observó que varios de ellos la consultaron, pues hicieron referencia a la información representada en ella.

### Figura 3

*Población en México 2020*



*Nota.* Gráfico reproducido de acuerdo con los Términos de Libre Uso de la Información del INEGI). <https://www.inegi.org.mx/programas/ccpv/2020/>

México, como país, se divide en 32 entidades federativas, entre las que se encuentra la CDMX; es diferente al Estado de México, que cuenta con una mayor cantidad de población, tal como se puede apreciar en la Figura 3. La CDMX le sigue, ya que, en 2020 y conforme al censo del INEGI, entre estas dos entidades representaron casi el 21% de la población total del país; la CDMX con 9.2 millones y el Estado de México con 16.9 millones de habitantes.

Un ejemplo de consonancia y no injerencia se puede ver en la respuesta de uno de los equipos respecto al porcentaje de estudiantes del equipo que vivía en el Estado o en la CDMX:

E4: *El Estado de México es la de mayor población en el país pues representa el 13.48%, seguido de la Ciudad de México que representa el 7.3% cómo nos podemos dar cuenta las integrantes vivimos en el área metropolitana, la cual como sabemos es la más poblada del país, vivimos en el Estado de México y es por ello que asistimos al CCHN.*

Esta respuesta frente a la información presenta consonancia, porque identifican que viven en la parte más poblada del país, incluso mencionan el área metropolitana para referirse a la zona urbana de la CDMX y a la conurbada del Estado de México. Para terminar, reafirman que viven en el

Estado de México y, como consecuencia, asisten al CCHN, que se encuentra en dicha entidad. Esta respuesta la clasificamos como de no injerencia, ya que no mencionan ningún tipo de posible acción relacionada con vivir en la zona más poblada del país, ni en ese momento, ni a futuro.

### *Disonancia e Injerencia*

Ofrecemos dos ejemplos en esta combinación de categorías. El primer ejemplo corresponde a la edad promedio de consumo de alcohol. El modelo con el que se hizo la comparación es el mismo que se presentó antes, del Equipo 3. La respuesta de uno de los equipos fue:

E5: *La mayoría de **nosotros** [énfasis añadido] comenzamos a tomar bebidas alcohólicas a partir de los 16 años, pero los habitantes mexicanos empezaron a partir de los 19, existe mayor probabilidad de encontrar adolescentes que empiezan a consumir estas bebidas [a temprana edad] que adultos que hayan empezado a consumirlas como a los 17, 18 o 19 años.*

En la respuesta de este equipo usa la palabra “nosotros” para compararse con el modelo, al que se refieren como: “la mayoría de los habitantes mexicanos”, aquí ellos se excluyen, como si ese dato no los describiera a ellos mismos. Muestran disonancia al reconocer que los estadísticos del equipo no se parecen al modelo del país, pero sí tratan de justificar que hay más adolescentes que inician con el consumo de bebidas alcohólicas a temprana edad y que los adultos empezaron después, como resolviendo esta discrepancia.

De forma implícita, están considerando que el modelo anterior (adultos) corresponde a edad más avanzada de inicio de consumo de alcohol, y el modelo actual (ellos) corresponde a edad más temprana. Este modelo, de forma implícita, lo clasificamos como de injerencia, ya que tienen la claridad de que el modelo que consultaron no los representa, por lo que si se consideraran sus datos, se obtendría un modelo distinto.

La siguiente respuesta en esta clasificación corresponde también al tema de la edad a la que se empieza a beber. En la respuesta analizada se puede observar que el equipo encontró diferencias entre sus datos y el modelo de CONAPO (2010), como se puede leer a continuación:

E6: *La edad promedio de consumo de alcohol en México ronda entre los 19.9 años y en el equipo la edad [promedio es] de 14.8 años. Para llegar a esta diferencia de datos se deben considerar factores del medio en que nos encontramos, familia y el alcance que se tiene del alcohol.*

La respuesta muestra disonancia al mencionar “la diferencia de datos” con respecto al país. De igual forma, parece que en este caso tampoco se dieron cuenta que los datos del modelo tenían, al menos, diez años.

En este caso, la injerencia es muy relevante, ya que, en su justificación, la diferencia la atribuyen a otros elementos de tipo social, y que el tener acceso

a alcohol, o no, puede depender de la toma de decisiones de alguien (comerciantes, autoridades o grupos sociales), así como que el mantener o cambiar costumbres familiares dependen de las decisiones de cada uno de los integrantes de la familia. Este es un ejemplo de inferencia en el que se dan cuenta que se puede modificar, en este caso, la edad a la que empiezan a tomar alcohol, y que eso es consecuencia de decisiones multifactoriales.

Un ejemplo más de esta categoría corresponde a la pregunta sobre los tipos de sangre, como se muestra en la siguiente respuesta:

E7: *Vimos que los datos eran de la población de San Luis Potosí y entonces pues como que no nos sonó, no teníamos familiares de ahí entonces, investigamos más y vimos un mapa del Rh, se nos ocurrió investigar en bancos de sangre o alguna página de internet con gráficas y tablas con esa información como hospitales públicos [...] veíamos que tuviera lógica con lo que habíamos encontrado antes en otro tipo de páginas [...] Es difícil en algunos lugares del mundo encontrar cierto tipo de sangre y un dato curioso "hay un tipo de sangre llamada de oro, que tienen muy poca gente", entonces, ¿si tienen un accidente qué pasa?*

En esta respuesta relacionada con la genética del equipo se nota una inconsistencia (disonancia) con respecto a la población de otra entidad del país, por lo que deciden investigar en otras fuentes con gráficas y tablas, comparando la información. Esta respuesta sugiere una posición crítica hacia los datos que se les compartieron inicialmente, los cuales correspondían a una entidad federativa distinta.

Además de encontrar algo que no sabían antes, como lo describen en el dato curioso, estos estudiantes reflexionaron acerca de las implicaciones que podría tener, en un caso de emergencia, una persona con el tipo sanguíneo de oro. Clasificamos este comentario como inferencia porque los estudiantes se dan cuenta que el tener distintos tipos de sangre se refleja en posibles donaciones.

### *Disonancia y No Inferencia*

Hubo un equipo que contestó de manera conjunta respecto a la edad de inicio de consumo de alcohol y tabaco, así que además de la comparación con el modelo presentado antes, usaron como punto de comparación el modelo de CONAPO (2010):

De acuerdo con la Encuesta Nacional de Salud (ENSANUT) 2006, la estimación de la edad media al inicio del consumo de tabaco entre los jóvenes es de 20.1 años de edad, es decir, en la adultez temprana. La vulnerabilidad de la población adolescente y joven ante las estrategias publicitarias emprendidas por las compañías tabacaleras se materializa en sus patrones de consumo desde edades tempranas. En México la edad oficial en la que un joven puede adquirir tabaco es de 18 años, sin embargo, esto no ha sido

un impedimento para que su consumo llegue a individuos de menor edad. (p. 48)

Al respecto, lo que comentó un equipo fue:

E8: *Ninguno de **nosotros** [énfasis añadido] consumimos alcohol o tabaco, mientras que con el país sí somos muy diferentes, el consumo de alcohol y tabaco es mayor en el país.*

La primera observación que notamos es el uso de la palabra “nosotros” a manera de apropiación o identificación con el modelo del equipo. Sin embargo, al inicio especifican que no son parte de la población que consume alcohol o tabaco, y que, por tanto, son muy diferentes. Esto muestra disonancia, pero reconocen que en el país, el consumo de dichas sustancias está presente.

Este ejemplo lo clasificamos como disonancia, aunque no cognitiva porque se saben fuera del grupo de consumidores. No les causa conflicto y no sienten la necesidad de justificar por qué son diferentes. Por otro lado, lo clasificamos como de no injerencia, ya que no ven sus acciones reflejadas en el modelo ni ahora ni en un futuro.

El siguiente ejemplo es la respuesta de un equipo respecto al porcentaje de integrantes del equipo que viven en la CDMX o en el Estado de México.

E9: *Debido a que la muestra del equipo es pequeña, el porcentaje de los adolescentes que habitan en el Estado de México es del 100%, mientras que en el país es menor porque es imposible que todos los adolescentes mexicanos habiten en el Estado de México.*

En este caso, su porcentaje no concuerda con el modelo encontrado en el país (INEGI, 2021), lo cual muestra disonancia; explican esta discrepancia con términos estadísticos y geográficos, especificando que su muestra es pequeña y, de manera implícita, asumen que no tiene sentido que los adolescentes de entidades lejanas del CCHN asistan a este. Dado que no mencionan las implicaciones de vivir en el Estado de México, los clasificamos como de no injerencia.

Para finalizar con el análisis de los ejemplos seleccionados y sus respectivas clasificaciones, terminaremos con un ejemplo de tipo de sangre. Al respecto, el Equipo 10 comentó lo siguiente.

E10: *Según los datos que tenemos en nuestro equipo, un 50% de los integrantes tienen el O- como tipo de sangre, esto no coincide con los datos a nivel mundial ya que, según los mismos, la sangre O- ocupa el 5to lugar en la población, mientras que el 33.3% de los integrantes tiene sangre de tipo O+ y el 16.7% sangre tipo A+, no encontramos similitud, pero es porque en el equipo somos pocos integrantes.*

Este equipo identifica una discrepancia entre el modelo proporcionado y sus propios datos, por lo que el comentario fue clasificado como de disonancia. Notamos que el comentario se limita a la comparación porcentual de personas respecto al tipo de sangre y su factor Rh sin hacer alusión al

hecho de que la mitad de los integrantes del equipo es O-, correspondiente al donador universal. No se menciona la posibilidad de ser donadores, como algunos otros equipos comentaron anteriormente.

### Consideraciones finales

En este capítulo hemos propuesto a la modelización reflexiva como una aproximación a la modelización matemática basada en datos, usando elementos de la educación matemática crítica (Skovsmose & Niss, 2008) con una orientación social (Kawakami & Ärlebäck, 2024), en donde se enfatiza la formación del estudiante como partícipe dentro de una sociedad democrática. Esta aproximación representa una alternativa a la forma de enseñar estadística y probabilidad basada en procedimientos y fórmulas, común en México (Cruz & Ojeda, 2021; Gómez-Blancarte et al., 2021; Sánchez & Valdez, 2017). En este sentido, no solo se busca el desarrollo de un entendimiento conceptual de la estadística y la probabilidad, sino también que los estudiantes usen las matemáticas como herramienta para conocer su entorno y conocerse a sí mismos. Esta perspectiva de la modelización matemática se puede aplicar a distintos ciclos de modelización (Perrenet & Zwaneveld, 2012), enfatizando la forma en la que los estudiantes se ven reflejados dentro del fenómeno a modelar desde su propia experiencia y contexto social.

El estudio exploratorio que presentamos en este capítulo se enfocó en la forma en la que los estudiantes se ubican dentro de los fenómenos de los cuales ellos forman parte, tales como los distintos grupos de tipos de sangre, la edad en la que los jóvenes empiezan a ingerir bebidas alcohólicas o fumar, y la distribución geográfica de la población. Consideramos que al contrastar los modelos que se ofrecen a los estudiantes (datos estadísticos en este caso) con sus propios modelos y contextos, se abre una oportunidad no solo para darle sentido a los conceptos básicos de estadística, sino también para promover una actitud crítica hacia los modelos establecidos, ofreciendo un espacio de emancipación en el sentido de una potencial participación ciudadana. Los dos criterios resultantes del análisis de los datos para este caso particular (Figura 2) abren la posibilidad de tomar una actitud crítica a los datos de otros modelos (Skovsmose & Niss 2008), sobre todo cuando estos no corresponden con los datos de los estudiantes (disonancia), así como de identificar una posible participación relacionada con los fenómenos estudiados (injerencia).

La disonancia parece ser un posible detonador de una actitud crítica hacia los modelos presentados a los estudiantes, que, en su mayoría, no eran actuales, como el caso de la edad en la que empezaron a consumir alcohol o tabaco; o no correspondían a la zona geográfica de los alumnos participantes en el estudio. Respuestas como las de los Equipos 5, 6 y 7 tomaron en cuenta



las fuentes de los datos, por lo que sugieren una postura crítica en el sentido de cuestionar la pertinencia de los modelos con los que contrastaron sus propios datos. En algunos casos, los estudiantes fueron más allá de un cuestionamiento y buscaron modelos más actuales o acordes con la población representada para hacer sus comparaciones, como el caso de los tipos de sangre y factor Rh que se muestra en la respuesta del Equipo 7.

Al cotejar modelos establecidos con sus propios datos no solo se puede promover una actitud crítica hacia estos modelos, sino también es factible desarrollar una actitud de participación, o injerencia, en la comunidad. Esto se puede apreciar en los comentarios de los alumnos que se clasificaron como injerencia. Las variables que más destacaron en cuanto a injerencia fueron la edad en la que empezó a consumir alcohol y tabaco (Equipos 5 y 6), en las que la mayoría se sintió identificado con el fenómeno. Esto los llevó a tratar de justificar su contexto tomando en cuenta factores de tipo social y económico. Un caso particularmente interesante de injerencia es el que se observa respecto al tipo de sangre. Si bien no es posible cambiar el tipo de sangre, notamos una actitud participativa en el sentido del potencial para donar sangre, tanto en el caso de consonancia (Equipos 1 y 2) como en el de disonancia (Equipo 7). Lo anterior refleja elementos de participación y toma de decisiones consistentes con la postura emancipatoria de la educación matemática crítica, como lo sugieren Martini y Godoy (2022).

Dada la naturaleza exploratoria de este estudio de caso (Yin, 2014), es importante resaltar limitaciones y alcances de los resultados. Los datos provienen de una investigación doctoral. El enfoque de cómo se sitúan los estudiantes dentro de los fenómenos a modelar surgió de un análisis a posteriori a la colecta de datos, sin que estos se hubieran colectado con ese propósito inicial. Por otro lado, el caso se centró en una única actividad introductoria, por lo que los resultados no se pueden generalizar a otros temas u otras actividades dentro de la probabilidad y estadística. Tampoco nos enfocamos en el desarrollo conceptual de los elementos matemáticos relacionados con la actividad, que en este caso sirvieron de diagnóstico e introducción sin incorporar contenidos nuevos. Finalmente, creemos que la mayoría de los estudiantes en el estudio no estaban acostumbrados a tomar una actitud crítica hacia la información que se les presenta, lo cual se vio reflejado en el reducido número de equipos que consideró revisar las fuentes con las que trabajaron.

Estas limitaciones representan posibles líneas de investigación, como sería la del diseño de actividades con el propósito de involucrar a los estudiantes en la modelización reflexiva. Dichas líneas de investigación podrían enfocarse en diversos ámbitos, incluyendo otros contenidos matemáticos y distintos contextos escolares. También sería pertinente utilizar

distintas aproximaciones metodológicas, según el enfoque de la forma en la que los estudiantes se ven dentro de los fenómenos que se pretenden estudiar.

Los resultados presentados en este capítulo están situados dentro del caso correspondiente a la implementación de la actividad ¿qué tan diferentes somos? en cinco grupos de bachillerato, por lo que se podrían considerar como preliminares. Sin embargo, la modelización reflexiva, como un caso de la modelización basada en datos, tiene el potencial de usarse con otros propósitos, tales como el diseño de actividades interdisciplinarias que combinen otras áreas del conocimiento y la etnomodelización con un enfoque en aspectos culturales locales.

## Referencias

- Ärleback, J. B. & Kawakami, T. (2023). The relationships between statistics, statistical modelling and mathematical modelling. En G. Greefrath, S. Carreira & G. A. Stillman (Eds.), *Advancing and consolidating mathematical modelling: Research from ICME-14* (pp. 293–309). Springer. <https://doi.org/j6hr>
- Consejo Nacional de Población [CONAPO]. (2010). *Situación actual de los jóvenes en México: Serie de documentos técnicos*. CONAPO. [https://mexico.unfpa.org/sites/default/files/pub-pdf/cuadro\\_3.pdf](https://mexico.unfpa.org/sites/default/files/pub-pdf/cuadro_3.pdf)
- Cruz, C. & Ojeda, M. (2021). A diagnosis of statistical service courses in Mexico. *Education Research Journal*, 20(2), 1–13. <https://doi.org/nxrg>
- Charmaz, K. (2014). *Constructing grounded theory*. Sage.
- Gómez-Blancarte, A. L., Rocha Chavez, R. & Chávez Aguilar, R. D. (2021). A survey of the teaching of statistical literacy, reasoning and thinking: Teachers' classroom practice in mexican high school education. *Statistics Education Research Journal*, 20(2), 1–18. <https://doi.org/nhk9>
- Ernest, P., Sriraman, B., & Ernest, N. (Eds.) (2016). *Critical mathematics education: Theory, praxis and reality*. Information Age Publishing.
- Festinger, L. (1957). *A theory of cognitive dissonance*. Row and Peterson
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM* 38(3), 302–310. <https://doi.org/df4smp>
- Kawakami, T., & Ärleback, J. B. (2024). Investigating the role of data in the teaching of statistical modelling: A literature review. En J. Häggström, C. Kilhamn, L. Mattsson, H. Palmér, M. Perez, K. Pettersson, A. S. Røj-Lindberg, & A. Teledahl (Eds.), *Mediating mathematics: Proceedings of Madif 14. SMDF. Mediating mathematics* 37 (pp. 37–47). Swedish Society for Research in Mathematics Education <https://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:du-48788>
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía [INEGI]. (2021). *Población total. Censo de Población y Vivienda 2020*. INEGI. <https://www.inegi.org.mx/programas/ccpv/2020/>

- Martini, L. & Godoy, E. V. (2022). Mathematics education in the light of critical theory emerging from the Frankfurt school: Discourses and meanings. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática* 13(6), 1–24. <https://doi.org/nxrj>
- Méndez, E. (2004). Frecuencia de los grupos sanguíneos ABO y Rh (D) en la zona media del Estado de San Luis Potosí. *Revista de la Facultad de Medicina UNAM* 47(1), 21–23. <https://www.medigraphic.com/pdfs/facmed/un-2004/un041f.pdf>
- Perrenet, J. C., & Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(6), 3–21. <https://research.tue.nl/files/3584468/397091290505369.pdf>
- Sánchez Aguilar, M. (2014). Educación matemática crítica en México: Una argumentación sobre su relevancia. *Didac* 64, 30–36 <https://didac.iberomx.com/index.php/didac/issue/view/14>
- Sánchez, E. & Valdez, J. (2017). Las ideas fundamentales de probabilidad en el razonamiento de estudiantes de bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 11, 127–143. <https://doi.org/nxrh>
- Skovsmose, O., & Niss, M. (Eds.). (2008). Critical mathematics education for the future. En M. Niss (Ed.), *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education IMFUFA*, (pp. 1–20). Roskilde University. <https://vbn.aau.dk/ws/files/17034122/CriticalMathematicsEducation>
- Yin, R. K. (2014). *Study Research Design and Methods*. Sage.

