Promoviendo el desarrollo del sentido numérico de estudiantes de educación media superior

Virginia Garrido-Adame [1]
Olimpia Figueras [2]
Minerva Martínez-Ortega [3]

RESUMEN
El sentido numérico es un rasgo deseable de desarrollar dada su estrecha relación con el éxito en matemáticas. En este artículo se presenta el análisis de la implementación de una actividad cuya intención era generar la reflexión de los estudiantes sobre el uso y las distintas formas de representar los números. El objetivo es caracterizar actividades que promuevan el desarrollo del sentido numérico de estudiantes de 15 a 18 años de edad acerca de los números reales. El análisis de los datos se hizo en dos dimensiones: 1) sobre la aplicación en el aula y 2) sobre el impacto en el uso y promoción del desarrollo del sentido numérico. Como resultados se obtuvo la descripción de actividades plausibles para promover el desarrollo de este.

PALABRAS CLAVE
Sentido numérico, Números reales, Estudiantes de 15 a 18 años.

---

[1] virginia.garrido@cinvestav.mx
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
https://orcid.org/0000-0002-0279-564X

[2] figuerao@cinvestav.mx
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
https://orcid.org/0000-0003-0334-9470

[3] cetis76@hotmail.com
Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de Servicios No. 76, México
https://orcid.org/0000-0002-6835-2841

Garrido-Adame, V., Figueras, O., & Martínez-Ortega, M. (2024). Promoviendo el desarrollo del sentido numérico de estudiantes de educación media superior. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 153–162). Editorial SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-15

INTRODUCCIÓN

En la década de los 80´s, investigadores en educación matemática y profesores (Edwards, 1984; Hope, 1989; Ronau, 1988) empezaron a hablar de una comprensión matemática, alfabetización cuantitativa, sentido común matemático, inmediatez con los números y muchos otros términos que finalmente se englobaron en lo que en la actualidad se conoce como "sentido numérico". Desde entonces, ha sido considerado en el currículo de diferentes países –National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000) en Estados Unidos, Secretaría de Educación Pública [SEP] (2020) en México, Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP] (2022) en España–, en los que parece tomarse como una estrategia para mejorar la enseñanza de la aritmética.

En México, en el año 2009, el término sentido numérico fue introducido en los planes y programas de educación básica y permaneció hasta el año 2020. La formación de los alumnos que ahora cursan el nivel medio superior –15 a 18 años de edad– incluía un eje temático denominado Sentido numérico y pensamiento algebraico, el cual se dividía en: Números y sistemas de numeración, Problemas aditivos, Problemas multiplicativos y Patrones y ecuaciones (SEP, 2013). Aun cuando uno de los temas era sobre los números, parece que se dio prioridad a la resolución de problemas aritméticos y algebraicos, dejando de lado la comprensión de las propiedades de los números y las diferentes formas de representarlos. Aunque continuamente se usaban, es probable que no se reflexionara sobre estos objetos matemáticos.

En investigaciones como Castañeda (2011), Vega-Castro et al. (2012) y Hernández et al. (2015), se documentaron dificultades que estudiantes de bachillerato enfrentan al interpretar los números que obtienen cuando resuelven un problema o una operación. Por ejemplo, para los alumnos no es fácil explicar por qué la división entre cero no existe o por qué la raíz negativa de un número sí se puede conocer, pero la raíz cuadrada de un número negativo no existe en los números reales. Incluso hay evidencia de que les falta pericia para usar los números naturales. Esto pone en desventaja a los alumnos de nivel medio superior, pues se da por hecho que conocen los números reales cuando en realidad tímidamente han sido mencionados en primaria y secundaria.

La investigación descrita en este documento forma parte de un estudio más amplio, en el cual se pretende que los estudiantes de bachillerato –15 a 18 años de edad– desarrollen su sentido numérico acerca de los números reales y fortalezcan aquel relacionado con los otros sistemas numéricos. Por ahora, se responde a la pregunta ¿Cómo caracterizar actividades con las cuales es posible promover el desarrollo del sentido numérico de estudiantes de nivel medio superior?

En la siguiente sección se dan a conocer conceptos necesarios para la investigación y la relación entre ellos, mismos que fueron tomadas como punto de partida para el diseño de actividades.

MARCO CONCEPTUAL

Existen diferentes definiciones de sentido numérico, la mayoría de estas han sido propuestas en investigaciones llevadas a cabo con estudiantes de educación básica –5 a 14 años de edad–, nivel educativo en el que los sistemas numéricos estudiados son los números naturales, enteros y racionales. Como la intención es analizar actividades en las que se requiera usar números reales, las definiciones que hay en la literatura no se adecuan totalmente a las necesidades de la investigación, por lo que es conveniente precisar qué se va a entender por sentido numérico acerca de los números reales.

Figura 1

Habilidades asociadas con el sentido numérico acerca de los números reales

1. Habilidad para componer, descomponer y recomponer números
2. Habilidad para identificar cuál representación de un número es más conveniente que otra
3. Habilidad para comparar números
4. Habilidad para ordenar números
5. Habilidad para lidiar con el orden de magnitud de un número en situaciones concretas
6. Habilidad para usar puntos de referencia
7. Habilidad para vincular símbolos de operación y relación de manera significativa
8. Habilidad para reconocer los efectos de las operaciones en los números
9. Habilidad para hacer cálculos mentales mediante estrategias propias
10. Habilidad para hacer estimaciones
11. Habilidad para valorar la razonabilidad de los resultados obtenidos al resolver problemas, o bien al hacer cálculos
12. Habilidad para ubicar números en la recta numérica
13. Habilidad para reconocer hechos dados
14. Habilidad para distinguir semejanzas y diferencias entre las propiedades y características de los distintos sistemas numéricos
15. Habilidad para autorregularse

De acuerdo con Garrido-Adame et al. (2022, p.46), la expresión de sentido numérico acerca de los números reales se refiere al "conjunto de conocimientos y habilidades acerca de los números reales que usa una persona para hacer juicios matemáticos y desarrollar estrategias numéricas al resolver problemas que involucren esos números". Los conocimientos están relacionados con las propiedades de los números naturales, enteros, racionales e irracionales; y las habilidades son sobre su uso, además de las diferentes formas de representarlos.

En la Figura 1 se enlistan habilidades que también fueron propuestas en Garrido-Adame et al. (2022) como parte del sentido numérico y que pueden usarse como indicadores para notar su uso. En la sección de método se explica cómo estos indicadores son el hilo conductor para llevar a cabo la investigación.

MÉTODO

El estudio más amplio, mencionado anteriormente, se está desarrollando bajo la metodología investigación de diseño (*design researc*h, en inglés). En un primer ciclo se implementaron diferentes actividades con la intención de que estudiantes de segundo semestre de bachillerato reflexionarán sobre el uso y las distintas formas de representar a los números reales. Cada actividad estaba vinculada con el desarrollo de una o más de las habilidades asociadas con el sentido numérico mostradas en la Figura 1.

En este documento se presenta el análisis de la actividad llamada *Los divisores*, así como los resultados preliminares para responder la pregunta de investigación. En la Tabla 1 se indican algunas características de dicha actividad.

Tabla 1

Especificaciones de la actividad Los divisores

Planteamiento: ¿Cuántos números naturales dividen al número (2^5) (3^4)? Adaptado de Beam et al (2016)
Objetivo: Descomponer y componer números usando sus divisores *Sistema numérico al que va enfocado:* Números naturales *Uso de tecnología:* Calculadora *Habilidades meta relacionadas con el sentido numérico* (*ver Figura 1*): 1. Habilidad para componer, descomponer y recomponer números y 7. Habilidad para vincular símbolos de operación y relación de manera significativa *Conexión con la asignatura de Geometría y Trigonometría:* El perímetro, área y volumen de una figura son números que pueden ser representados por medio de las operaciones hechas con el valor de sus dimensiones, la habilidad 1 es necesaria para identificar la composición. Existen diferentes símbolos geométricos, así que desarrollar la habilidad 7 es indispensable para no confundirse con la notación de Geometría.

El diseño de la actividad *Los divisores* está inspirado en la estructura de las tareas propuestas en Beam et al. (2016). Estos autores proponían empezar la sesión con conocimientos y reflexiones previas, luego establecer la conexión con los grados escolares anteriores, plantear el problema y hacer reflexiones finales. El problema original era con el número natural $p^a \times q^b$ donde $p, q, a, b \in \mathbb{N}$ y p, q primos distintos, y la tarea era encontrar el número total de factores de dicho número.

En esta investigación la expresión $p^a \times q^b$ fue cambiada por (2^5) (3^4) con la intención de tener una expresión aritmética, con la cual no se involucrara directamente el sentido algebraico. En lugar de preguntar por los factores, se preguntó por los divisores, ya que se consideró más intuitiva la definición de divisor. La conexión de la actividad se estableció con la asignatura de Geometría y Trigonometría porque era el curso que tomaban los estudiantes que participaron en el primer ciclo del experimento de diseño. En la Tabla 2 se muestran los conocimientos previos y reflexiones finales propuestos.

Tabla 2

Conocimientos previos y reflexiones finales propuestos en la actividad Los divisores

Conocimientos previos	Planteamiento	Reflexiones finales
¿Cuáles son los números naturales? Escribe doce números naturales. ¿A qué es igual 6^2? ¿Qué operación representa la expresión (5) (4) ? ¿Cuáles son los divisores de 10? ¿Por qué? ¿Por qué 6^2 no es igual a 12? ¿Si 128 = (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) = 2^7 sólo el 2 es divisor de 128?	¿Cuántos números naturales dividen al número (2^5) (3^4)?	¿Qué significa 40 es divisible por 5? ¿Existe alguna forma de saber que un número es divisible por 2? ¿divisible por 8? ¿Cómo se pueden usar los divisores de un número para escribirlo de diferentes formas?

La recolección de datos fue a través de hojas de trabajo que contestaron 56 estudiantes de segundo semestre de bachillerato –15 a 16 años – separados, de acuerdo con la organización del plantel, en dos grupos de 28 alumnos durante tres momentos. El primero fue para recuperar conocimientos previos, el segundo para resolver el planteamiento y el tercero para las reflexiones finales. Las tres secciones se hicieron de forma individual durante 10, 15 y 10 minutos respectivamente, en los que los estudiantes contestaban con lapicero su hoja de trabajo. Al término de cada momento, se llevó a cabo una discusión grupal de aproximadamente 10 minutos para intercambiar ideas, durante este tiempo la profesora–investigadora tomó notas de las expresiones relacionadas con el sentido numérico que decían los estudiantes. La actividad tuvo una duración total de 65 minutos. Además de las hojas de trabajo, se grabó un video de la sesión de cada grupo. El uso de calculadora solo se permitió a un grupo, para poder comparar semejanzas y diferencias al usar dicho artefacto.

El análisis de los datos fue cualitativo, considerando dos dimensiones: 1) sobre la aplicación en el aula y 2) sobre el uso y promoción del desarrollo del sentido numérico. Las observaciones relacionadas con la primera dimensión fueron hechas mientras se llevaba a cabo la actividad y en los videos de cada sesión, tomando en consideración aspectos como la pertinencia del tiempo, de los materiales, de las intervenciones del profesor; la disposición de los estudiantes para participar en la actividad; el uso de la calculadora; y la relación con los contenidos matemáticos propios de la asignatura que cursaban los estudiantes en el momento de la toma de datos.

Las observaciones sobre la segunda dimensión se hicieron en las hojas de trabajo. Se buscaba evidencia del uso de las habilidades 1 y 7, es decir, de qué manera los estudiantes lograban componer, descomponer y recomponer el número para identificar sus divisores. Por otro lado, se analizó si los alumnos vinculaban los paréntesis con la operación multiplicación y si los exponentes los interpretaban como una multiplicación por sí mismo según el número de veces que se indicara.

Figura 2

Fragmento de la tabla hecha para el análisis de los datos de la pregunta 3

Conocimientos previos. Pregunta 3. ¿A qué es igual 6^2?			
Estudiante	Calculadora	Respuesta	Observaciones
C1	Sí	6x6=36 36 porque el 6 esta elevado al cuadrado eso quiere decir que seria 6x6=36	Usa el símbolo x para indicar la multiplicación. Reconoce al exponente como elevar al cuadrado.
S1	No	Es igual a 36, porque se multiplica 6x6 que es igual a 36	Usa el símbolo x para la multiplicación.
C14	Sí	36 se multiplica por si mismo	Hace referencia a la multiplicación por sí mismo.
C2	Sí	36	Sólo da el resultado.
S2	No	36 porque 6x6 es igual a 36	Usa el símbolo x para indicar la multiplicación.
S3	No	64, porque se multiplica doble vez	Hace referencia a una multiplicación incorrecta. Usa la expresión "doble vez".
S7	No	a 36. Porque el seis se multiplica por si mismo	Hace referencia a la multiplicación por sí mismo.

Tabla 3

Categorías propuestas en el análisis de la pregunta 3

Categoría	Descripción	Subcategorías		Respuestas	Por categoría
1. Elevar al cuadrado	Explícitamente se reconoce a la expresión 6^2 como un número elevado al cuadrado y lo asocian con una multiplicación.	1.1 Multiplicación con paréntesis		2	6
		1.2 Multiplicación con símbolo x		3	
		1.3 Multiplicación con la palabra "por"		1	
2. Multiplicación	Se asocia 6^2 con una multiplicación.	2.1 Multiplicar 6x2 – incorrecto		1	9
		2.2. Multiplicar 6 x 6	2.2.1 Con paréntesis	2	
			2.2.2 Con símbolo x	5	
			2.2.3 Con letra	1	
3. Multiplicar por sí mismo	Se interpreta la expresión 6^2 como multiplicar por sí mismo.	3.1. Multiplicación con paréntesis		4	9
		3.2. Multiplicación sin especificar		5	
4. Multiplicar dos veces	Se interpreta 6^2 como multiplicar dos veces. No recomendable.	4.1. Multiplicación con paréntesis		3	9
		4.2. Multiplicación con símbolo x		1	
		4.3. Multiplicación sin especificar		5	
5. Resultado sin explicación	Solo se escribe el resultado.	5.1. Correcto		14	17
		5.2. Incorrecto		3	
6. Otros	Existe ambigüedad en la justificación de su respuesta.			6	6

Posteriormente, se construyeron categorías identificando palabras clave asociadas a las habilidades relacionadas con el sentido numérico acerca de los números reales (Ver Tabla 3). En el caso de la pregunta ¿A qué es igual 6^2?, la habilidad 7 –habilidad para vincular símbolos de operación y relación de manera significativa– era la que tenía mayor relación, de ahí que las categorías hayan sido propuestas según los símbolos utilizados.

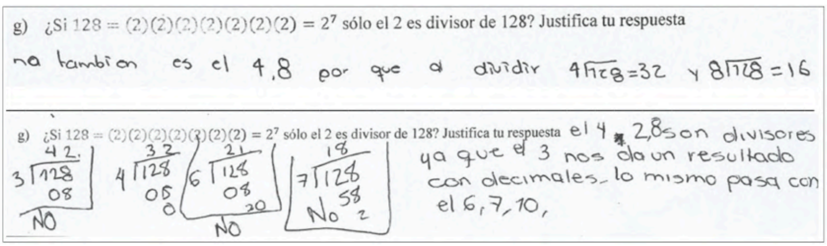
La validez de los resultados se puede garantizar con la triangulación de los datos hecha por las investigadoras. Por cuestiones de espacio sólo se muestra el ejemplo del análisis de una pregunta.

RESULTADOS

Con respecto a la aplicación en el aula, es difícil mostrar evidencia de las observaciones, ya que solo se tienen las notas de campo y los videos. Aunque se podrían presentar transcripciones de estos, los fragmentos quedarían descontextualizados.

Figura 3

Respuestas obtenidas en la sección de conocimientos previos


g) ¿Si 128 = (2)(2)(2)(2)(2)(2)(2) = 2^7 sólo el 2 es divisor de 128? Justifica tu respuesta

no también es el 4,8 por que al dividir 4⟌128 = 32 y 8⟌128 = 16

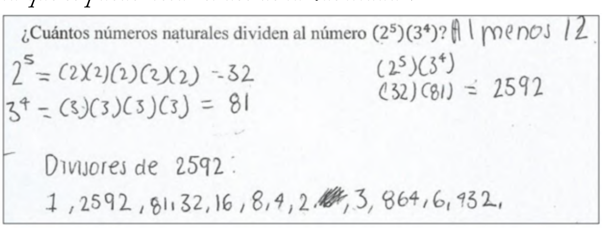
g) ¿Si 128 = (2)(2)(2)(2)(2)(2)(2) = 2^7 sólo el 2 es divisor de 128? Justifica tu respuesta el 4, 2, 8 son divisores ya que el 3 nos da un resultado con decimales. lo mismo pasa con el 6, 7, 10,

3⟌128 = 42, 08, NO; 4⟌128 = 32, 08, 0; 6⟌128 = 21, 08, 20, NO; 7⟌128 = 18, 58, 2, No

Sobre el uso y promoción del desarrollo del sentido numérico, en la sección de conocimientos previos, la pregunta sobre los divisores de 128 sí generó una reflexión en los estudiantes, después de responder las preguntas anteriores se percataron de que además del 2, otros números podían dividirlo, lo que podría tomarse como un comportamiento asociado a la habilidad 1, ya que lograron componer potencias de 2. En la Figura 3, se puede apreciar (arriba) una respuesta en la que se usó calculadora y una (abajo) sin uso de esta.

Figura 4

Respuesta en la que se puede notar el uso de la habilidad 7


¿Cuántos números naturales dividen al número $(2^5)(3^4)$? Al menos 12

$2^5 = (2)(2)(2)(2)(2) = 32$ $(2^5)(3^4)$

$3^4 = (3)(3)(3)(3) = 81$ $(32)(81) = 2592$

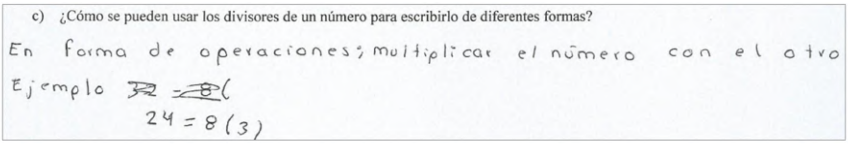
Divisores de 2592:

1, 2592, 81, 32, 16, 8, 4, 2, 3, 864, 6, 432, En la sección de planteamiento se tomó como evidencia de haber usado la habilidad 7 el que los estudiantes consideraran la expresión dada como un número específico, es decir, que no solo buscaran los divisores de (2^5) o (3^4). También se valoró que hicieran una interpretación correcta de las potencias. En la Figura 4 se muestra un ejemplo.

Algunos estudiantes, en las reflexiones finales, pusieron de manifiesto el uso de la habilidad 1 tal como se puede ver en la Figura 5.

Figura 5

Ejemplo donde se relacionan los divisores con los factores


c) ¿Cómo se pueden usar los divisores de un número para escribirlo de diferentes formas?

En forma de operaciones; multiplicar el número con el otro

Ejemplo ~~24~~ = ~~8~~(

24 = 8 (3)

Las observaciones con mayor aportación a este estudio son presentadas en la siguiente sección.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Sobre la aplicación de las actividades en el aula, se puede asegurar que lo mejor es el trabajo en grupos pequeños tal y como lo había mencionado Howden (1989), ya que favorece la discusión entre pares y permite notar la habilidad de autorregularse. Por otro lado, una actividad muy extensa, como la de *Los divisores*, puede generar desinterés en los estudiantes hacia la reflexión sobre las propiedades de los números que se están usando. Con respecto a la intervención del profesor, en caso de que tenga poca experiencia en el desarrollo del sentido numérico, se sugiere mantener una postura de observador porque puede conducir a los estudiantes a hacer operaciones o algoritmos convencionales en lugar de explorar o recurrir al uso de las habilidades presentadas en la Figura 1. Esto no debe desanimar a los docentes, al contrario, Carpenter (1989) aseguró que desarrollar juntos (profesor y alumnos) el sentido numérico favorecía la creatividad. Por otro lado, notar el uso de sentido numérico por parte de los estudiantes en las hojas de trabajo es posible, sin embargo, parece más conveniente que estas observaciones se complementen con videos de la discusión entre pares.

En las respuestas de los estudiantes que usaron calculadora, se pudo observar que esta fue una herramienta útil al explorar, interpretar y reestructurar los conocimientos que tenían sobre qué es y cómo calcular los divisores de un número. Esto coincide con Figueras et al. (2021) al sugerir que este artefacto podría ser tomado como una herramienta de aprendizaje.

Sobre el uso y promoción del desarrollo del sentido numérico acerca de los números reales, se tiene que: los indicadores no son como una lista de cotejo en la que se marca qué habilidades se han desarrollado o no, más bien son auxiliares para observar los datos y los cambios en el uso del sentido numérico por parte de los estudiantes. Además, utilizar una habilidad para resolver un problema en específico no garantiza que esta se haya desarrollado totalmente, por lo que se recomienda dar un seguimiento.

De acuerdo con Reys y Barger (1991), el desarrollo del sentido numérico es un proceso largo, gradual y constante; así que se debe continuar la implementación de actividades con las que se promueva la reflexión sobre el uso y las distintas formas de representar los números. Según la experiencia descrita, estas actividades deben llevarse a cabo en máximo 20 minutos. Incluir conocimientos y reflexiones previas para asegurarse que los estudiantes conocen las características de los números a usar, un problema que genere el uso consciente de las propiedades y diferentes formas de escribir esos números, además de reflexiones finales en las que se compartan formas flexibles y creativas de usar los números y sus operaciones.

REFERENCIAS

Beam J., Belnap J., Kuennen E., Parrot A., Seaman C., & Szydlik J. (2016). *Big Ideas in Mathematics for Future Elementary Teachers. Big Ideas in Numbers & operations.* The University of Wisconsin Oshkosh. https://bit.ly/4atHVT1

Carpenter, T. (1989). Number sense and other nonsense. En J. T. Sowder, & B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 89-91). San Diego State University Center for Research in Mathematics and Science Education.

Castañeda, Y. (2011). *Introducción de prerrequisitos de Cálculo en un curso de Geometría Analítica de Bachillerato* [Tesis de maestría, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional].

Edwards A. (1984). Computational Estimation for Numeracy. *Educational Studies in Mathematics, 15*(1), 59–73. https://www.jstor.org/stable/3482457

Figueras, O., Valenzuela, C., & Martínez, M. (2021). ¿Debemos usar calculadoras en un examen? *Revista de didáctica de las matemáticas, 92*, 45-53. https://documat.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7989194

Garrido-Adame, V., Figueras, O., & Martínez-Ortega, M. (2022). Una caracterización del sentido numérico acerca de los números reales: como notar su uso. F*ormación del profesorado e investigación en educación matemática, 14*, 43–58. https://fpiem.webs.ull.es/index.php/fpiem/article/view/196/236

Hernández O., López J. M., & Quintero A. H. (2015). Desarrollo del sentido numérico para la construcción del concepto de número real. En A. Ruíz (Ed.), *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. CIAEM.

Hope J. (1989). Promoting Number Sense in School. *The Arithmetic Teacher, 36*(6), 12–16. https://doi.org/10.1177/105345120404000010501

Howden H. (1989). Teaching Number Sense. *Arithmetic Teacher, 36*(6), 6-11. https://www.jstor.org/stable/41194455

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022). *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. Boletín Oficial del Estado del Gobierno de España.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM

Secretaría de Educación Pública (2013). *Programas de Estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas*. SEP.

Secretaría de Educación Pública (2020). *Aprendizajes clave para la educación integral*. SEP. https://bit.ly/498jU2f

Reys, B., & Barger, R. (1991). *Developing number sense in the middle grades.* National Council of Teachers of Mathematics.

Ronau, R. (1988). Number Sense. *The Mathematics Teacher, 81*(6), 437–440. https://doi.org/10.5951/MT.81.6.0437

Vega-Castro, Molina M., & Castro E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15*(2), 233–258.