

El razonamiento proporcional, diferencia entre la estructura aditiva y la multiplicativa

Daniel Robles Minquini ¹
Adriana Nieto Díaz ²

RESUMEN

Se identificó la necesidad de explorar los procedimientos en la resolución de problemas de proporcionalidad en docentes en formación, para analizar los aspectos de impacto en la enseñanza de dicho tópico matemático. Por ello, se diseñó una investigación de carácter cualitativo sobre la resolución de una tarea de razonamiento proporcional con futuros profesores de educación primaria. La relevancia de los sujetos del estudio se asocia con que el conocimiento del docente en formación trasciende en la construcción de conceptos, ideas y objetos matemáticos en miles de alumnos de educación básica. El hallazgo principal es que los futuros profesores priorizan el procedimiento aditivo antes que explorar una estructura multiplicativa.

PALABRAS CLAVE

Razonamiento proporcional, Estructura aditiva, Estructura multiplicativa, Docente en formación.

¹ daniel.roblesm@aefcm.gob.mx
Benemérita Escuela Nacional de Maestros, México
<https://orcid.org/0009-0009-6318-5026>

² adriana.nieto@aefcm.gob.mx
Benemérita Escuela Nacional de Maestros
<https://orcid.org/0009-0004-5752-8946>

Robles Minquini, D., & Nieto Díaz, A. (2024). El razonamiento proporcional, diferencia entre la estructura aditiva y la multiplicativa. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 201–211). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-20>

INTRODUCCIÓN

Curricularmente, la enseñanza de la multiplicación se aborda previa a la proporcionalidad, sin embargo, en la resolución de problemas aparece de forma intuitiva la noción de valor unitario, él puede ser visible cuando aumenta el nivel de complejidad en los problemas y se crea la necesidad de conocer su valor en situaciones de proporcionalidad.

En este sentido, Lamon (1999) estimó que el 90% de los adultos no razonan proporcionalmente, porque se requiere de una preparación adecuada del tema. Además, hace una crítica a los diseñadores del currículum, ya que se debe favorecer el desarrollo del Razonamiento Proporcional (RP) y se le destina poco tiempo al estudio de los números racionales.

Balbuena y Block (1991) coinciden en que los estudiantes de diferentes niveles educativos cometen errores al trabajar con estructuras tanto aditivas como multiplicativas, y que las dificultades se evidencian más en el tratamiento de las situaciones multiplicativas. Según Mochon (2012) y Escobedo Díaz y Valdemoros (2003), cuando logran diferenciar aquellas situaciones de naturaleza multiplicativa, se emplea como único método de resolución la regla de tres, lo cual limita el potencial del pensamiento variacional en especial el cualitativo.

Debido a lo anterior, se consideró relevante investigar sobre cómo el docente en formación resuelve una tarea que implica hacer uso del RP, siendo este un tema vigente en los currículums universales. Fernández (2007) lo describe “como la consolidación del conocimiento aritmético en la escuela primaria y la cimentación de conceptos posteriores en la escuela secundaria, por lo que es importante analizar los procedimientos de los normalistas, quienes al egresar reproducirán los conflictos cognitivos en la construcción y significado de la proporcionalidad” (p. 1). Para esta investigación se retomó una tarea propuesta por Brousseau (1981) con la que se buscaba identificar en qué etapa del RP (Mochón, 2012) se encuentran los saberes de los futuros profesores, saber qué movilizan y qué priorizan en sus procedimientos.

PROBLEMATIZACIÓN

Se identificó que los docentes en formación para escuela primaria tienen dificultades en la resolución de problemas de proporcionalidad, por lo que se presentó la necesidad de investigar al respecto para analizar los aspectos de impacto en la enseñanza de este tópico matemático.

Además, se detectó que los estudiantes normalistas de la Benemérita Escuela Normal de Maestros (BENM) hacen uso de la regla de tres, por lo que no favorecen el análisis de tablas o la identificación de la constante de proporcionalidad, y sólo muestran un acercamiento al balance de unidades.

Los saberes con respecto al Pensamiento Variacional de los discentes de primer semestre de la Licenciatura en Educación Primaria (LEP) debieran

favorecer su desarrollo en situaciones que implican el RP. No obstante, durante las actividades cotidianas del curso de Aritmética su Aprendizaje y Enseñanza (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2022), los estudiantes normalistas mostraron dificultades en la resolución de problemas sobre proporcionalidad directa, ya que promueven el mismo tratamiento para los de estructura aditiva que los de estructura multiplicativa. De continuar esta tendencia, el trabajo con la proporcionalidad limitará la construcción de procesos más complejos.

El RP está implícito en las pruebas del Plan Nacional de Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA) y del Programa Internacional para la Evaluación de los Alumnos (PISA). Los resultados obtenidos por estudiantes mexicanos muestran un rezago, al respecto, Moreno (2018) afirmó:

En lectura, matemáticas y ciencias, los estudiantes mexicanos obtuvieron puntajes más bajos que el promedio de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), 35% de los estudiantes mexicanos de 15 años no obtuvo el nivel mínimo de competencias necesarias para matemáticas, lectura y ciencias (p. 1).

En relación a reactivos con estrategias de pensamiento variacional, la comparación, la seriación, la anticipación y la predicción donde está inmerso el RP (Cabrera-Chim et al., 2018), los estudiantes se ubican en un nivel de logro II, considerado como un mínimo deseable. Los formadores de docentes deben interesarse por estas cuestiones, ya que cuando los normalistas egresen y se encuentren frente a un grupo como profesores de matemáticas deberán promover en sus estudiantes resultados más alentadores en pruebas estandarizadas. Por esa razón, es importante investigar sobre sus conocimientos matemáticos.

Pregunta de investigación

¿Cuál es el proceso de desarrollo del razonamiento proporcional de los docentes en formación para educación primaria?

Objetivo

Identificar los procesos de resolución de tareas de proporcionalidad en futuros docentes de primaria para reconocer los aspectos de impacto en el aprendizaje de sus estudiantes.

MARCO TEÓRICO

Según Mochón (2012) y Block et al. (2019), se considera al RP como una de las ideas fundamentales de la matemática. Sin embargo, el trabajo en el aula de este tema es sustituido rápidamente por la regla de tres. Desde investigaciones como las de Piaget y Inhelder (1958), Noeiting (1980) y Karplus et al. (1983) se ha hecho referencia a las etapas de desarrollo de la

proporcionalidad. En esta investigación se retomó la propuesta de Mochón (2012) con las siguientes etapas de desarrollo de la proporcionalidad:

- A. Incompleta. Ignora parte de los datos o da una respuesta ilógica.
- B. Cualitativa. Toma en cuenta todos los datos, pero solo con consideraciones cualitativas (“necesita más”, “necesita menos”, etcétera).
- C. Estrategia incorrecta en la que se hace uso de diferencias en parte o todo el razonamiento en vez de una relación multiplicativa.
- D. Pre-proporcional. Uso de factores multiplicativos para relacionar cantidades.
- E. Proporcional. Uso directo de razones y su equivalencia o no equivalencia (Mochón 2012, p. 38).

Con base en estas etapas se propuso la situación del rompecabezas, planteada por Brousseau (1981), para la construcción de la proporcionalidad aplicada en geometría, la cual se asocia a la enseñanza de los números racionales y decimales. En este estudio se centró la atención en la relación entre ampliación (o reducción) geométrica y proporcionalidad de las longitudes, lo que permitió identificar los procesos de resolución de los normalistas. Para el análisis se coincide con Houdement (2008), quien recomienda:

... pensar las matemáticas en el aula como una dialéctica entre dos dimensiones. La dimensión experimental de las matemáticas permite que los alumnos hagan su propia experimentación y la dimensión de prueba la posibilidad de validar sus procedimientos, para constatar que algunos de sus procedimientos no son válidos o son insuficientes (p.5)

En este sentido, la actividad que se propuso es pertinente y retoma los avances de los 90 que, en palabras de Obando et al. (2014), se genera un nuevo tratamiento en las investigaciones sobre el RP, además de las variables de orden cognitivo y de contexto entran otras de orden epistémico relativas a la estructura, organización y naturaleza del conocimiento matemático en cuestión. Se distinguen dos tipos de razones con base en la relación entre las cantidades; por una parte, cuando se construye la relación multiplicativa entre dos elementos de la misma magnitud se denominan razón interna o escalar, y cuando se forman entre cantidades de magnitudes diferentes se denominan razones externas o funcionales.

En cuanto al campo conceptual de las estructuras multiplicativas, Vergnaud (1997) identifica tres tipos de problemas multiplicativos; para esta investigación solo se retomó el isomorfismo de medidas, cuya estructura consiste en una proporción simple y directa entre dos espacios de medidas M_1 y M_2 . En los problemas de isomorfismo de medidas existe una relación entre cuatro cantidades, esta relación cuaternaria y su esquema propician un vínculo con la proporcionalidad. Rivas et al. (2012) señalan que la proporcionalidad es un elemento integrador que conecta temas matemáticos.

Además, el RP es muy útil en la interpretación de fenómenos reales debido a que diversos aspectos de nuestra vida operan de acuerdo con esta estructura.

MARCO METODOLÓGICO

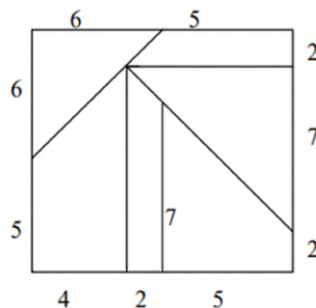
El estudio fue de carácter cualitativo y se llevó a cabo en una escuela normal pública de la Ciudad de México, donde se forman los futuros docentes de educación primaria; en particular, se trabajó con los que estaban cursando el segundo semestre del Plan de Estudios 2022. Dichos profesores en formación han concluido el curso Aritmética, su aprendizaje y enseñanza, por lo que sus conocimientos asociados al RP son “Estructura decimal y operaciones con el número natural” y “Propiedades y operaciones aritméticas del número natural”, los cuales constituyen una parte de sus antecedentes.

Los instrumentos de investigación fueron tareas que implicaban el uso del significado de la proporcionalidad. La toma de datos se realizó a través del diario de campo y de los procedimientos de resolución en el registro de diálogos entre el docente formador y los estudiantes normalistas.

Inicialmente se les asignó una tarea individual denominada rompecabezas, la cual fue propuesta por Brousseau (1981) y consiste en construir un rompecabezas semejante al de la Figura 1, de manera que el segmento que mide 4 deberá medir 7 en el nuevo rompecabezas. Se decidió que la tarea se llevara a cabo individualmente para ver el proceso de cada estudiante.

Figura 1

Rompecabezas original



Se solicitó a los futuros docentes que para realizar dicha actividad hicieran sus notas con bolígrafo y evitaran borrar sus procedimientos, aún y las que consideraran erróneas. Asimismo, se les pidió que no tacharan y qué, en determinado caso, solo indicaran que ese procedimiento no fue tomado en cuenta.

Las producciones de los profesores en formación se analizaron para identificar en cuál de las categorías que propone Mochón (2012) se encuentran sus saberes. La participación del docente investigador no respondió ciertos

cuestionamientos y planteó preguntas para propiciar la generación de ideas y reflexiones por parte de los estudiantes normalistas.

Supuestos

Los futuros docentes de educación primaria que cursan el segundo semestre no reconocen las relaciones internas y externas en problemas de proporcionalidad, ya que utilizan la regla de tres como única herramienta.

Los profesores en formación de segundo semestre emplean estrategias aditivas en lugar de multiplicativas al resolver tareas de proporcionalidad.

RESULTADOS

El análisis de los datos se realizó mediante una primera selección, que consistió en intentos fallidos y exitosos. Este criterio mostró que solo un estudiante de 30 logró establecer el uso de una razón externa al multiplicar por el equivalente en valor decimal de $\frac{7}{4}$, de manera que este alumno se encuentra en la etapa *D. Pre-proporcional*.

En relación al uso de factores multiplicativos para relacionar cantidades (Mochón, 2012), el resto de los trabajos fueron considerados fallidos, sin embargo, los diversos procedimientos permitirían tener elementos para clasificarlos en las diferentes etapas del desarrollo del RP.

Al analizar la tarea de cada estudiante se identificaron coincidencias o similitudes en los procedimientos, además, se hicieron anotaciones que permitieron formular conjeturas sobre lo que realizó cada uno de ellos. Algunos docentes en formación se rindieron y no lograron utilizar la razón adecuada para construir el rompecabezas, otros se conformaron con sus hallazgos, convencidos de lo que hicieron, aunque se observaron contradicciones al establecer que un cuadrado es lo mismo que un rectángulo o que las medidas de un cuadrado pueden ser diferentes con tal de compensar y justificar su procedimiento (ver Figura 2).

Como se muestra en las Figuras 3 y 4, algunos estudiantes normalistas se clasificaron en la etapa *A. Incompleta* porque ignoraron parte de los datos o dieron una respuesta ilógica; por ejemplo, reprodujeron el rompecabezas con formas diferentes a las del original y otros intentaron compensar las nuevas medidas y eliminaron una pieza.

Al analizar los procedimientos de los futuros profesores en la tarea del rompecabezas, se identificó el uso de esquemas aditivos aún y cuando están cursando la licenciatura en educación primaria.

Al construir el otro rompecabezas, los estudiantes realizaron procedimientos acordes con la etapa B. Cualitativa, ya que reconocieron que todas las medidas deben aumentar, pero solo en términos cualitativos, pues no advirtieron el crecimiento cuantitativo de las medidas y lo que se deriva en un proceso aditivo sin mayor análisis. Este tipo de alumnos construyeron las piezas de mayor tamaño, pero sin considerar la proporcionalidad.

Figura 2

Las medidas de los lados del cuadrado son diferentes

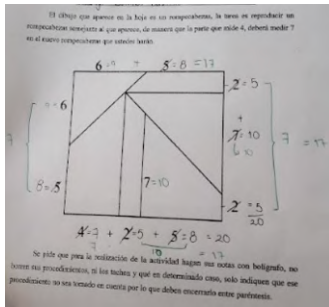


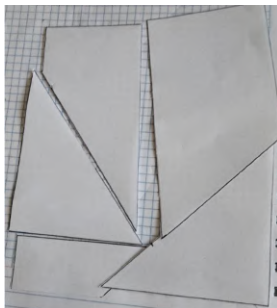
Figura 3

Construcción de una pieza que no forma parte del rompecabezas original



Figura 4

Reproducción del rompecabezas eliminando una pieza



Al verificar los procedimientos que llevaron a cabo, ciertos estudiantes hicieron referencia a que después de adicionar 3 sospechaban que no iba a quedar o no iba a salir.

Tutor: *¿Por qué no sale?*

Estudiante: *Se percibe que no van a embonar*

Tutor: *¿Entonces, qué sugieres?*

Estudiante: *Aún no sé, pero no va a salir con solo sumar tres al lado de cada figura*

En el primer ensayo, solo un estudiante logró encontrar las medidas correctas del rompecabezas nuevo, los demás siguieron con sus intentos; además, solo cuatro docentes en formación, después de aplicar diversas estrategias y solicitar más hojas, lograron obtener el otro rompecabezas con el empleo de la regla de tres sobre el tiempo límite (60 minutos). En este sentido, el uso del algoritmo es aplicado, pero no es comprendido porque su análisis en las aulas es sustituido.

La etapa *C. Aditiva*, está asociada con una estrategia incorrecta en la que se hace uso de diferencias en parte o todo el razonamiento en vez de una relación multiplicativa. Los estudiantes intentaron hacer compensaciones aditivas. Su primera idea fue sumar 3 a las medidas de la base, obteniendo como resultado que el valor de uno de los lados era 20, por lo que ya no tomaron en cuenta que los números de arriba eran distintos, es decir, solo compensaron para obtener 20.

Cabe señalar que los estudiantes normalistas no reconocieron las relaciones internas y externas en problemas de proporcionalidad y no plantearon la regla de tres. Asimismo, ningún docente en formación ha alcanzado la etapa *E. Proporcional*, ya que no operaron con la fracción $\frac{7}{4}$ que daba respuesta directa.

CONCLUSIONES

Los resultados muestran que los futuros docentes de primaria tienen un limitado conocimiento especializado sobre el razonamiento proporcional. Se identificó una dificultad en desarrollar formas de pensamiento en relación a la construcción de la unidad y el manejo del significado multiplicativo asociado con la idea de operador.

Los estudiantes normalistas no reconocen las relaciones internas ni las externas en el problema propuesto de proporcionalidad, por lo que llevaron a cabo estrategias erróneas en situaciones multiplicativas. Priorizaron el razonamiento aditivo y no identificaron las siguientes propiedades del RP:

- Existencia e identificación de factores internos. Se les complicó porque la propiedad según la cual las razones internas se conservan no era tan intuitiva por tratarse de una fracción, por lo que se deben tener elementos para conocer otros procedimientos.
- Existencia e identificación de factores externos. Solo un estudiante tuvo el acercamiento para encontrar un factor de proporcionalidad, sin embargo, lo operó como número decimal y no con la fracción $\frac{7}{4}$.
- La propiedad aditiva en tablas de proporcionalidad. Ningún estudiante intentó construir una tabla para ver la variación de las medidas del rompecabezas original con respecto al nuevo.
- No incluyen el cálculo del valor unitario. No se observó que algún estudiante obtuviera el valor unitario.

Vale la pena mencionar que el problema implica el uso de factores internos y externos no enteros, lo cual puede ser una variante que haya detonado el uso de estrategias erróneas como la aditiva. Para aquellos casos en que los factores internos y/o externos no son enteros, Block et al. (2010) señaló que con frecuencia los alumnos de primaria y secundaria piensan que no existe y entonces “sin darse cuenta, cambian de estrategia: buscan el número que sumado a 4 que dé 7. Así, suman 3 cm a todas las medidas en lugar de multiplicarlas por $\frac{3}{4}$ o 1.75 con lo cual por supuesto se equivocan” (p.58).

Los futuros profesores de primaria aún no han consolidado el uso de la regla de tres, por lo que el gran reto de los formadores de docentes se relaciona con el desarrollo del RP y sus propiedades.

Habiendo adquirido diversos procedimientos de valor faltante, más adelante se favorecerá la enseñanza de relaciones de proporcionalidad, es decir, aunque deberíamos de partir de la reflexión de procedimientos que ya dominen los docentes en formación para el análisis de la enseñanza de este contenido y de sus posibles variantes metodológicas, el punto de partida está más atrás, ya que implica el desarrollo del RP y la reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Atender lo antes descrito tiene una desventaja porque la inversión de tiempo es mayor que el esperado, no obstante, el tener tan cercano este desarrollo de las nociones de la proporcionalidad permite una reflexión inmediata, más nutrida sobre la enseñanza de este tópico que tradicionalmente se aborda en los programas en cuarto de primaria. Sin embargo, en grados inferiores existen nociones previas que no se evidencian en el trabajo con el Pensamiento Variacional porque no se observó el empleo de las tablas de covariación. Se pone de manifiesto la falta de trabajo en la compensación multiplicativa, precursora del RP, para promover una estructura cognitiva del pensamiento multiplicativo.

En problemas de valor faltante que implican una relación de proporcionalidad entre dos conjuntos de cantidades, los estudiantes de segundo semestre de la BENM recurren con mayor frecuencia a procesos aditivos que a los multiplicativos, y desarrollan estrategias erróneas en situaciones multiplicativas.

Según Obando et al. (2014), en los procedimientos se invisibiliza la importancia de la coordinación de los procesos de variación entre espacios de medida (a partir de los procedimientos escalares o funcionales) para el desarrollo de los conceptos propios de la proporcionalidad directa.

A decir de Rivas et al. (2012), los resultados de sus investigaciones sobre las dificultades que tienen los estudiantes para identificar correctamente las relaciones entre las cantidades son afines. El análisis de respuestas (erróneas o correctas) dadas a un problema matemático coloca a los normalistas en una situación de aprendizaje en la que adquiere relevancia el reconocimiento

de errores asociados al uso de un razonamiento aditivo, lo que parece no ser suficiente para gestionar la promoción del razonamiento proporcional de los niños.

REFERENCIAS

- Balbuena, H., & Block, D. (1991). ¿Qué significa multiplicar por $7/4$? Reflexiones sobre lo que sucedió en una clase de matemáticas para maestros. *Cero en Conducta*, 25, 23–45.
- Block, D., Mendoza, T., & Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. SM Ediciones.
- Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches Didactique Des Mathématiques*, 2(1), 37–127. <https://bit.ly/3PUoRFk>
- Cabrera-Chim, L., Valdés-Parra, M., & Flores-Álvarez, O. (2018). Lo que nos dicen los resultados de la evaluación educativa sobre el desarrollo del pensamiento variacional en México. En Serna, L. Arturo & Páges, Daniela (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 631–638). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Fernández, J. A. (2007). La enseñanza de la multiplicación aritmética: una barrera epistemológica. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 119–130. <https://rieoei.org/historico/documentos/RIE43A06.pdf>
- Houdement, C. (2008). Experimentación y prueba: Dos Dimensiones de las Matemáticas desde la Escuela Primaria. *Paradigma*, 29(2), 173–185. <http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/419>
- Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. En R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45–90). Academic Press.
- Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I—Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11(2), 217–253. <https://doi.org/10.1007/BF00304357>
- Mochón, S., (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática*, 24(1), 133–157. <https://bit.ly/49v6vl0>
- Moreno, T. (2019, diciembre 3) *México, reprobado en ciencias, matemáticas y lectura*. El Universal. <https://bit.ly/49xslEC>
- Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(1), 59–82. <https://relime.org/index.php/relime/article/view/211>

- Piaget, J., & Inhelder, B. (1958). *The growth of logical thinking: From childhood to adolescence* (A. Parsons & S. Milgram, Trans.). Basic Books.
<https://doi.org/10.1037/10034-000>
- Rivas, M. A., Godino, J. D., & Castro, W. F. (2012). Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria. *Boletim de Educação Matemática*, 26 (42), 559–588.
<https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200008>
- Secretaría de Educación Pública, (2022). *Aritmética. Su aprendizaje y enseñanza*. SEP. <https://bit.ly/3xpGAhB>
- Escobedo Díaz, M., & Valdemoros, M. (2003). La Construcción de Significados de la Multiplicación y de la División: Estudio de Casos. En J. R. Delgado Rubí, (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 16) (pp. 226–230). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.
- Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. En T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 5–28). Psychology Press/Erlbaum-Taylor & Francis.