Exploración en modalidad remota de la pedagogía de la variación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas del bachillerato: El caso de la resolución general de ecuaciones diofánticas lineales

David Silva Bautista [1]

RESUMEN

El diseño de actividades que conduzcan a resultados de aprendizaje previstos es un problema de la práctica docente. La teoría de la variación fungió como rector pedagógico para diseñar y analizar tareas de aprendizaje sobre la resolución de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas del tipo $ax + by = c$. Las tareas se implementaron en modalidad remota (por el COVID-19) con estudiantes de bachillerato que pudieran experimentar el aprendizaje de las matemáticas con base en variaciones. Estas implicaron el diseño de contrastes y variaciones elegidos con la intención de proponer un modo particular de hacer y producir conocimiento. Los resultados obtenidos mostraron que aplicar patrones de variación (contraste, separación, generalización y fusión) permitió que los estudiantes lograran focalizar su atención en los aspectos y características críticas del objeto de aprendizaje matemático, en este caso, la resolución de ecuaciones diofánticas lineales.

PALABRAS CLAVE

Teoría de la variación, Modalidad remota, Diseño de tareas, Características críticas del objeto de aprendizaje.

---

[1] david@cudeoriente.edu.mx
Claustro Universitario de Oriente, Edo. de México
https://orcid.org/0009-0001-9250-6310

Silva Bautista, D. (2024). Exploración en modalidad remota de la pedagogía de la variación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas del bachillerato: El caso de la resolución general de ecuaciones diofánticas lineales. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 359–367). Editorial SOMIDEM.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-43

INTRODUCCIÓN

Uno de los retos de la educación matemática es el diseño e implementación de una enseñanza efectiva que promueva habilidades diversas y a diferentes ritmos, para que los estudiantes aprendan conceptos matemáticos con comprensión y adquieran motivación positiva e interés hacia la materia. Sin embargo, resultados de estudios nacionales e internacionales sugieren que los estudiantes alcanzan un dominio incompleto y deficiente de los principales conceptos matemáticos y que son incapaces de aplicar conocimientos relevantes previos (Lim, 2010). Asimismo, se reportan hallazgos similares en diversos países, como Finlandia, Suecia y Sudáfrica (Tossavaine et al., 2011), los cuales sugieren dificultades similares de los estudiantes para comprender, en particular, el concepto estructural de ecuación, igualdad y función.

En México, en diversas instituciones se insta a los maestros a que incorporen en su práctica diferentes enfoques de enseñanza. Sin embargo, en reportes de estudios locales (ver Rojano & Solares, 2017) se informa que la exposición y el ejercicio continúan siendo los enfoques de enseñanza más comúnmente adoptados por los maestros de matemáticas. También se señala que en México, pese a las reformas educativas en el bachillerato, al menos en las clases de matemáticas en mayor o menor medida, los enfoques antes citados son los que se siguen utilizando con frecuencia.

De acuerdo con los resultados de matemáticas de los estudiantes mexicanos en la prueba Planea 2017 (Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes), en matemáticas nivel bachillerato podemos destacar lo siguiente:

> En Matemáticas, 6 de cada 10 estudiantes se ubica en el nivel I (66 %); casi 2 de cada 10 se ubican en el nivel II (23%); en el nivel III, sólo 8 de cada 100 estudiantes (8%); en el nivel IV, casi 3 estudiantes de cada 100 (2.5%).

La mayoría de los estudiantes mexicanos de bachillerato evaluados presentan deficiencias en el aprendizaje de las matemáticas, en particular del álgebra, en la resolución de problemas que requieren el uso de ecuaciones. La enseñanza con variación presenta un gran potencial para las matemáticas, creando oportunidades para los alumnos al desarrollar una comprensión profunda de estas; en este caso, ecuaciones de primer grado con dos incógnitas (también llamadas ecuaciones diofánticas lineales, EDL) del tipo $ax + by = c$ con a, b y c pertenecientes a Z. En este documento de discusión se presenta la variación como eje rector pedagógico en el diseño e implementación de tareas de aprendizaje.

Teoría de la variación

La Teoría de la Variación de Marton (2015) se enfoca en las condiciones necesarias para aprender, las cuales están relacionadas con el contenido, su elección y secuenciación. Marton y Booth (1997) consideran que adquirir un conocimiento es encontrar nuevas formas de vivir una experiencia relacionada con ese conocimiento. Destacan que una persona ha aprendido un concepto o proceso cuando es capaz de enfocar, de forma simultánea y consciente, aquellos aspectos de ese concepto o proceso que son esenciales a él dentro de un contexto dado. Mencionan que el aprendizaje es una función del discernimiento, entendido como distinguir, mediante el intelecto, una cosa de otra o varias cosas entre sí, a través de la observación de lo que varía entre ellas. El objeto de aprendizaje es un término especial en la Teoría de la Variación. No es lo mismo que "objetivos de aprendizaje", que apuntan al final de este proceso, a los resultados del aprendizaje, y están predeterminados. Por el contrario, el objeto de aprendizaje apunta al principio y no al final del proceso. Parece tener vida propia porque es dinámico y puede cambiar en el curso del proceso de aprendizaje.

Los aspectos críticos del objeto de aprendizaje (lo que se aprenderá) son aquellos que permiten verlo de una manera en la que su aprendizaje sea cercano al contexto (Marton et al., 2004). Häggström (2008) menciona que la persona que discierna más aspectos críticos de un objeto y más relaciones entre ellos podrá hacer uso de ese objeto de mejores formas, comparado con quien haya discernido menos aspectos críticos. Lo (2012) señala que los estudiantes no pueden discernir de forma natural los aspectos críticos, y requieren que el profesor les provea las condiciones para hacerlo mediante la elección y organización del contenido. Los aspectos críticos toman valores (no necesariamente numéricos) que varían, llamados características críticas. Por ejemplo, para un polinomio que se va a factorizar, el número de términos (dos, tres, cuatro, ...) es un aspecto crítico. Aspectos y características críticas son inseparables y, por tanto, se disciernen de forma simultánea.

En países asiáticos se reporta que la enseñanza en la que se utiliza una estrategia pedagógica de variación ha resultado exitosa (Li, Peng & Song, 2011; Lai & Murray, 2012; Huang & Li, 2017). Sin embargo, hay pocos indicios de esta práctica en occidente (Sun, 2011b), particularmente, en América Latina y México son pocos los trabajos que se conocen al respecto (Ascencio & Eccius-Wellmann, 2019; Ramírez, 2018).

En el trabajo de investigación que aquí se presenta, la estrategia pedagógica de variación fungió como eje rector para el diseño e implementación de tareas matemáticas de aprendizaje. Esta se llevó a cabo con un grupo de 30 estudiantes (entre 15 y 17 años) conformados en parejas de la Escuela Preparatoria Oficial (EPO 171) de la zona oriente del Estado de México, en agosto-septiembre del 2021. Algunas de las actividades que se trabajaron con los estudiantes fueron realizadas por medios informáticos (enviadas a través de sus correos electrónicos personales) de manera asincrónica, otras fueron realizadas de manera presencial (en las instalaciones de la escuela), y unas más se elaboraron directamente en sus domicilios.

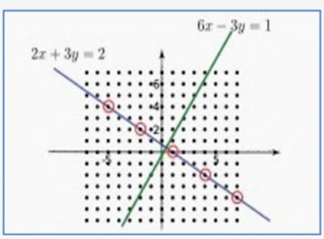
Se buscó observar y analizar un cambio efectivo en las prácticas de enseñanza de las matemáticas en el bachillerato en México y promover el desarrollo del pensamiento matemático entre los estudiantes.

Las preguntas que los estudiantes debían contestar en la tarea de aprendizaje presentada fueron las siguientes:

1. ¿Cómo son los coeficientes en una **ecuación de primer grado** con dos incógnitas?
2. ¿Cuándo una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene solución entera?
3. En caso de tener solución, ¿cómo encontrarla? (Solución particular)

Tabla 1

Bosquejo general del diseño de la tarea de aprendizaje

Actividades de enseñanza-aprendizaje	Patrones de Variación	Materiales y recursos didácticos
- Identificar los coeficientes a, b y c de las ecuaciones propuestas - Encontrar el M.C.D de (a, b) - Dividir el M.C.D de (a, b) entre c - Encontrar las soluciones (x_o, y_o) en números enteros de las ecuaciones diofánticas utilizando la representación gráfica mediante la aplicación de Goegebra, formulando sus conjeturas y probándolas - Contestar las preguntas planteadas - Determinar cuando una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene solución entera - Encontrar una solución particular - Encontrar otras soluciones enteras de las ecuaciones asignadas 	**Aspecto crítico** Tiene sol. <u>vs </u>No tiene sol **Características críticas** Ec. diofántica general y del tipo Id. de Bezout 2 ecuaciones lineales $2x + 3y = 2$ $6x - 3y = 1$ La ecuación diofántica $ax + by = c$ tiene solución si y sólo si $d \mid c$, donde $d = M.C.D.\ (a, b)$ **Contraste** Variación en los coeficientes a y c. Variación en el signo de operación (+/-) Variación en la representación; de simbólica a gráfica **Separación** Variación en la localización de puntos en el plano cartesiano (x_o, y_o) **Generalización** Localización de puntos en el plano cartesiano (x_o, y_o), como solución entera de las ecuaciones **Fusión** Variación en el $M.C.D.$ de (a, b) Variación del cociente entre $c\mid$ $M.C.D.$ (a, b) para determinar si tiene o no soluciones enteras. Encontrar otras soluciones.	Hojas de trabajo Computadora Calculadora Geogebra YouTube

En general, nuestra hipótesis de investigación fue que la estructura de las tareas que se eligió y construyó apoyaría el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos del bachillerato general, les ofrecería la oportunidad de experimentar matemáticas desafiantes (etapa de trabajo individual), y promovería la capacidad de los estudiantes para reflexionar sobre sus experiencias de aprendizaje, así como sobre su crecimiento personal (etapa de discusión reflexiva). Como parte del andamiaje en este estudio y debido al confinamiento sanitario de la pandemia por COVID-19, se aprovechó la tecnología a favor del aprendizaje, fuera de una educación convencional (presencial), a partir del uso que los jóvenes le dan al video tutorial (en YouTube) y al software Geogebra. En la tabla que se presenta a continuación se muestra un bosquejo detallado de los diferentes componentes del diseño de una de las tareas del conjunto de tareas de aprendizaje.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

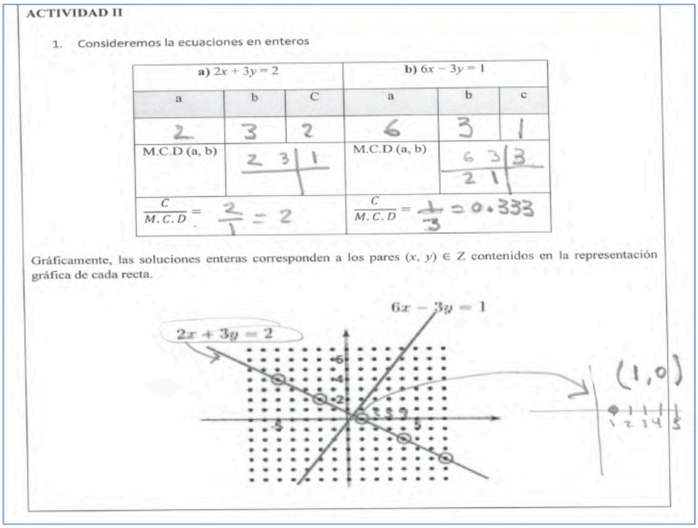
Este diseño permitió a los estudiantes observar la relación entre cantidades y gráficos, y admitir diferentes puntos de vista y representaciones del concepto matemático (Heid, 1995; Yerushalmy & Chazan, 2008). La variación en la representación ayudó en la operatoria a realizar, focalizando su atención en la ubicación de los puntos (xo, yo) como posible solución entera de las ecuaciones en sí mismas, sin que los cálculos los dispersarán.

Se obtuvo que la mayor parte de los estudiantes (las parejas denominadas E1, E4, E6, E7 y E8) presentaron dificultad al localizar en la recta los puntos (x_0, y_0), de tal manera que fueran soluciones enteras de la ecuación $6x - 3y = 1$. Por tanto, intentaron aplicar infructuosamente el método por tanteo. Sin embargo, a pesar de muchos intentos, no lograron encontrar soluciones. Ante esto, procedieron a realizar la gráfica y localizar algunos puntos con ayuda de Geogebra, pero al aumentar el zoom en los puntos que ellos consideraron eran solución, encontraron una vez más que no era el caso. Esto los hizo retroceder y revisar lo realizado anteriormente, lo que los llevó a focalizar su atención en el papel que tiene el cociente y lo que resulta de dividir el M.C.D de (a, b) entre c para determinar si la ecuación tiene o no solución entera. En este caso, el cociente del M.C.D de (a, b) de esta ecuación, a diferencia de la otra ecuación ($2x + 3y = 2$), no da como resultado un número entero. Esto sentó un precedente matemático importante para los estudiantes que sirvió para determinar si las ecuaciones de este tipo tienen o no soluciones enteras. En la Figura 1 se muestra un ejemplo de una de las respuestas de los estudiantes.

Los equipos E2, E3 y E5 también se esforzaron en tratar de encontrar una solución por tanteo sin lograrlo. Dejaron en segundo plano la representación gráfica y el cociente que resulta de dividir el M.C.D de (a, b) entre c. Esta situación confirma, de acuerdo con Panizza et. Al., (1999), que cualquiera que haya sido el trabajo realizado alrededor de las representaciones gráficas de la recta, esto no parece ser suficiente para que los alumnos puedan establecer una relación entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación correspondiente (ver Figura 2).

Figura 1

Ejemplo del trabajo elaborado por los estudiantes



ACTIVIDAD II

1. Consideremos la ecuaciones en enteros

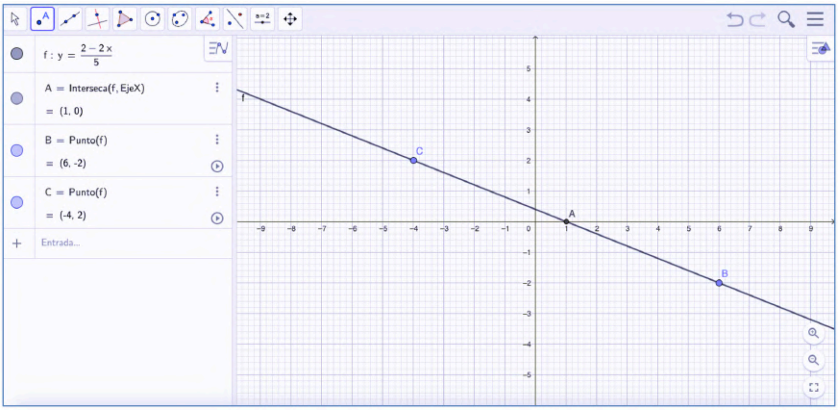
a) $2x + 3y = 2$			b) $6x - 3y = 1$		
a	b	C	a	b	c
2	3	2	6	3	1
M.C.D (a, b)	2 3 | 1		M.C.D (a, b)	6 3 | 3 2 1 |	
$\frac{C}{M.C.D} = \frac{2}{1} = 2$			$\frac{C}{M.C.D} = \frac{1}{3} = 0.333$		

Gráficamente, las soluciones enteras corresponden a los pares $(x, y) \in Z$ contenidos en la representación gráfica de cada recta.

Destaca el uso del video tutorial como herramienta de enseñanza-aprendizaje (ver: https://bit.ly/3VHwfYm, https://bit.ly/4awX9qg), pues este sirvió para continuar con el trabajo empírico con los estudiantes pese al confinamiento sanitario por la pandemia del COVID-19. El video ayudó a los estudiantes de los equipos E1, E4, E6, E7 y E8 a tener la posibilidad de reforzar su proceso de aprendizaje, pues lograron, primero, observar de una manera simple la utilización de geogebra para elaborar la gráfica de las ecuaciones y ubicar posibles puntos que fueran solución. Segundo, gracias al uso del vídeo tutorial presentaron la regla aritmética ($x_0 + a$) y (y_0 +/- b) para encontrar otras soluciones enteras, sin la necesidad de realizar manipulaciones algebraicas complicadas. Así, se abrió una nueva dimensión de variación.

En general, la idea, con respecto a la dinámica de trabajo a seguir en este estudio dada las condiciones de la pandemia por COVID-19, fue dejar a los jóvenes estudiantes experimentar, permitirles descubrir por ellos mismos, y ver qué encontraban de interesante en las tareas que se les proponían mientras se trataba, tanto como fuera posible, de que expresaran lo que aprendían y discernían de dichas tareas. Lo anterior solo con la guía de los video tutoriales propuestos y la aplicación de Geogebra.

Figura 2
Ejemplo de la utilización de Geogebra por parte de los estudiantes



De manera concreta podemos decir que uno de los resultados más importantes encontrados en la observación empírica de este trabajo de investigación fue que los estudiantes lograron focalizar mejor los aspectos y características críticas del objeto de aprendizaje acorde al diseño de las tareas. Sin embargo, los estudiantes llegan y transitan el bachillerato con un bajo nivel acerca del entendimiento de la estructura de las ecuaciones y con un sentido estructural poco desarrollado; los estudiantes tienen como concepción primaria que las ecuaciones sólo tienen una solución, y prevalece en ellos lo aritmético antes que lo algebraico, y lo simbólico antes que lo gráfico.

La variación, como medio, puede ser una forma poderosa de ayudar a los estudiantes a desarrollar el pensamiento matemático, independientemente de cómo el contenido y el problema sean "variados" por el profesor. También muestra que, para llevar a cabo mejor la enseñanza del álgebra con variación, las lecciones deben estar bien estructuradas y la variación debe ser elegida cuidadosamente. Este trabajo ha demostrado que la teoría de la variación es compatible con muchos principios de enseñanza que se promueven comúnmente. El uso de la Teoría de la Variación como principio rector del diseño pedagógico asegura que los docentes empleen una estrategia de enseñanza eficaz y recurran a tareas que se centren en el objeto de aprendizaje y en sus aspectos críticos.

AGRADECIMIENTOS
Quiero agradecer muy especialmente a mi asesora y directora de tesis, la Dra. Verónica Hoyos Aguilar, por la acertada orientación, el soporte y discusión crítica que me permitió un buen aprovechamiento en el trabajo realizado, y que esta investigación llegara a buen término.

REFERENCIAS

Ascencio Gonzalez, R., & Eccius-Wellmann, C. (2019). Desarrollo del sentido estructural en alumnos universitarios mediante el uso de la teoría de la variación en el manejo de expresiones algebraicas racionales. *Educación matemática, 31*(2), 161–194. https://doi.org/10.24844/em3102.07

Häggström, J. (2008). *Teaching systems of linear equations in Sweden and China: What is made possible to learn?* [Tesis Doctoral, University of Gothenburg, Göteborg]. https://gupea.ub.gu.se/handle/2077/17286

Heid, M. K. (1995). *Algebra in a Technological World. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics Addenda Series, Grades 9-12*. National Council of Teachers of Mathematics.

Huang, R. & Li, Y. (Eds.). (2017). *Teaching and learning mathematics through variation. Confusian heritage meets western theories*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-782-5

Lai, M. Y., & Murray, S. (2012). Teaching with procedural variation: a chinese way of promoting deep understanding of mathematics. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 1–25. https://bit.ly/4ampCPK

Li, J., Peng, A., & Song, N. (2011). Teaching algebraic equations with variation in chinese classroom. En J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization. A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 529–556). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_27

Lim, C. S. (2007). Characteristics of mathematics teaching in Shanghai, China: through the lens of a malaysian. *Mathematics Education Research Journal, 19*(1), 77–88. https://doi.org/10.1007/BF03217450

Lo, M. L. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Goteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis. https://bit.ly/3xy2uPs

Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness.* Lawrence Erlbaum.

Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A.B.M. (2004). The space of learning. En F. Marton, & A.B.M. Tsui (Eds), *Classroom Discourse and the Space of Learning* (pp. 3–40). Lawrence Erlbaum Associates.

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge.

Panizza, M., Sadovsky, P. & Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(3). https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21603

Ramírez, L. (2018). *La enseñanza de las ecuaciones lineales desde la variación* [Tesis de maestría, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Unidad Legaria] https://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/ramirez_2018.pdf

Rojano Ceballos, M. T., & Solares Rojas, A. (Coords.) (2017). *Estudio comparativo de la propuesta curricular de matemáticas en la educación obligatoria en México y otros países.* INEE-CINVESTAV.

Sun, X. (2011b). An insider´s perspective: “variation problems” knowledge of equivalence of equations. *Journal of Mathematics Education, 4* (1), 101-114. https://bit.ly/3VNsws4

Tossavainen, T., Attorps, I & Väisänen, P. (2011). On mathematics students' understanding of the equation concept. *Far East Journal of Mathematical Education, 6*(2),127-147. https://www.pphmj.com/abstract/5845.htm

Yerushalmy, M., & Chazan, D. (2008). Technology and curriculum design: The ordering of discontinuities in school algebra. En L. D. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 806–837). Routledge.