

Exploración sobre el desarrollo profesional en línea de maestros de matemáticas del bachillerato: Conexiones entre matemáticas avanzadas y matemáticas del bachillerato

Verónica Hoyos ¹
Victor J. Raggi ²

RESUMEN

Se explora el desarrollo profesional de maestros del bachillerato sobre el establecimiento e implementación en la práctica de conexiones entre temas de matemáticas avanzadas y matemáticas del bachillerato. Se diseñó y montó en la plataforma *moodle* un curso en línea de 16 semanas. De matemáticas avanzadas, se abordó la resolución general de ecuaciones Diofantinas, que contiene propiedades básicas de los números enteros y divisibilidad, temas de álgebra superior. Los contenidos y actividades del curso se diseñaron evitando la separación usual^[1] entre una revisión del contenido matemático y su posible incidencia en los objetivos o temas del currículo escolar. Además, interesó enfatizar en la revisión de propiedades básicas de enteros y divisibilidad, que intervienen en las soluciones generales. Entre los resultados relevantes destaca el establecimiento de conexiones en acuerdo con las matemáticas del bachillerato y avances en su implementación en la práctica.

PALABRAS CLAVE

Desarrollo profesional de docentes de bachillerato en línea, Conexiones entre matemáticas avanzadas y del nivel bachillerato, Resolución general de ecuaciones Diofantinas, Renovación pedagógica del currículum de matemáticas del bachillerato.

[1] Separación usual en la formación inicial de los docentes del bachillerato.

¹ vhoyosa@upn.mx
Universidad Pedagógica Nacional, México
<https://orcid.org/0000-0001-9316-2508>

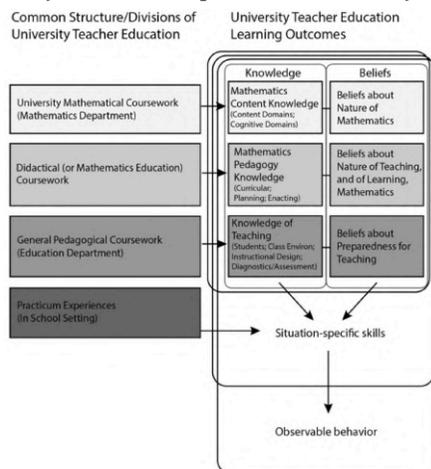
² raggi@upn.mx
Universidad Pedagógica Nacional, México

INTRODUCCIÓN

En México no existen instituciones de nivel universitario (universidades o escuelas normales) encargadas de una formación inicial para los maestros del nivel bachillerato, a diferencia de lo que sucede en los Estados Unidos de Norteamérica o en Alemania, por ejemplo. En estos países, es en las universidades en donde se prepara a los futuros maestros del nivel medio-superior (Wasserman et al, 2023; Hanke et al., 2021; Murray et al., 2017) mediante una serie de cursos que normalmente son impartidos por profesores de tres departamentos o facultades universitarias distintas, a saber: (i) los cursos de matemáticas son impartidos por profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad; (ii) los cursos de pedagogía general son impartidos por profesores del Departamento de Educación; y (iii) los cursos de didáctica específica (o educación matemática) son impartidos por el Departamento o Sección especializada en el ramo. De acuerdo con Wasserman et al. (2023), esta estructura común de funcionamiento en las universidades (ver Figura 1) se corresponde con objetivos especificados por cada uno de distintos departamentos, de manera separada o fragmentada (Hanke et al., 2021). En el trabajo de Wasserman et al. (2023) se revisa dicha estructura de funcionamiento, buscando dilucidar o encontrar respuestas a cuestionamientos existentes en cuanto a la utilidad de las matemáticas de la universidad para la enseñanza de las matemáticas escolares en el nivel medio-superior. Según estos autores, tal situación constituye un reto para la educación matemática de los maestros de este nivel educativo (p. 719).

Figura 1

Alineamiento entre la estructura común de impartición de cursos de formación inicial de maestros en Norteamérica, y los objetivos departamentales de esta formación



Nota. Fuente: Tomado de Wasserman et al. (2023), p. 721

En México, ¿estamos desconectados de tal problemática educativa? Creemos que no es el caso, pues a la pregunta: ¿quiénes o cuáles son las instituciones educativas encargadas de la formación inicial de los maestros de matemáticas del nivel medio-superior?, la respuesta es que, en la mayoría de los casos, la formación en matemáticas de los maestros del nivel bachillerato ¡es la que adquirieron durante sus estudios de licenciatura en la universidad! Esto es, en México es probable que suceda que el conocimiento en matemáticas de los maestros del bachillerato también ha pasado por una doble discontinuidad^[2] (Klein, 2016), término con el que Wasserman et al. (2023) identifican parte de la problemática asociada al cuestionamiento de la utilidad de las matemáticas de la universidad en/para la enseñanza de las matemáticas del nivel bachillerato.

El trabajo que aquí presentamos contribuye en la línea de investigación sobre el establecimiento de conexiones entre las matemáticas del nivel universitario con las matemáticas escolares del nivel bachillerato. Para ello llevamos a cabo una exploración sobre el desarrollo profesional de maestros de este nivel educativo, mediante el diseño y montaje en la plataforma moodle de un curso en línea de 16 semanas en el que participaron los docentes en servicio de la Escuela Preparatoria Oficial (EPO) 171, en el Estado de México. El tema de matemáticas avanzadas que elegimos abordar en el curso fue la resolución general de ecuaciones Diofantinas, lo que contiene propiedades básicas de los números enteros y divisibilidad, temas que se incluyen en cursos universitarios de álgebra superior o de teoría de números. En el diseño del curso también se incorporó una revisión pedagógica del currículum del bachillerato y la búsqueda o discusión de posibles asociaciones con temas o subtemas matemáticos del curso. Es de resaltar que en la obtención de las soluciones generales de las ecuaciones Diofantinas intervienen muchas de las propiedades básicas de los números enteros y de divisibilidad; en particular interesó hacer énfasis sobre estas propiedades durante el curso. Las preguntas que buscamos responder fueron: (a) ¿Cuáles son las posibles conexiones que establecen los docentes entre una temática específica de las matemáticas del nivel avanzado con las matemáticas del currículum del nivel bachillerato? (b) ¿Cuál sería una posible estrategia pedagógica, por parte de los docentes, para desarrollar con los estudiantes esas conexiones en la práctica? (c) ¿Cuál sería la huella en los estudiantes del desarrollo de esas conexiones en la práctica?

[2] Según Wasserman et al. (2023, p. 721), la “doble discontinuidad” estriba en lo siguiente: la primera desconexión consiste en que lo que aprendió el docente de matemáticas en la universidad tuvo poca semejanza con lo que él sabía al salir de la preparatoria o bachillerato; y la segunda desconexión se produce nuevamente en la transición de haber estudiado matemáticas en la universidad y luego regresar a enseñar las matemáticas del currículum escolar. El punto es que tiende a haber una gran brecha entre el currículum escolar de las matemáticas y las matemáticas que se aprenden en la universidad.

MARCO TEÓRICO, METODOLÓGICO Y RESULTADOS

Algunas indagaciones antecedentes sobre conexiones entre las matemáticas del nivel universitario y las del nivel bachillerato

El trabajo de Murray et al. (2017) se “centra explícitamente en las implicaciones para la enseñanza que se derivan de la comprensión de los docentes de las conexiones entre las matemáticas del bachillerato y las avanzadas” (p. 2), y se buscó indagar cómo impactan en las prácticas de enseñanza los conocimientos en matemáticas avanzadas que aprenden los docentes en las universidades.

Estas características son recientes en las indagaciones sobre desarrollo profesional de docentes, e incluso en el mismo trabajo de Murray y colegas no se llega a observar qué sucede en la práctica, en la clase de matemáticas – y/o cómo desarrolla el docente en el aula su comprensión sobre conexiones que revisó/encontró en el curso universitario implementado por Murray y colegas (curso donde tales conexiones llegaron a establecerse)—. En su trabajo, Murray et al. (2017, pp. 2-3) discuten y presentan tres categorías que ejemplifican maneras potenciales en que ciertas conexiones (entre matemáticas avanzadas y matemáticas del bachillerato) podrían influir en las prácticas de enseñanza. En síntesis, uno de los objetivos del trabajo de Murray et al. (2017) fue “entender qué conexiones impactan la instrucción, como un medio para identificar y situar el conocimiento matemático más avanzado bajo una lente del conocimiento docente basada en la práctica.” (p. 3). Finalmente, tal vez la contribución más importante de Murray y colegas fue sugerir que no se trata de “discusiones sobre las conexiones matemáticas per se, sino más bien de discusiones de formas específicas en las que el conocimiento de las conexiones matemáticas podría influir en las elecciones pedagógicas de los maestros de bachillerato en el aula.” (Murray et al., 2017, pp. 2-3)

Sobre las comprensiones clave en el desarrollo (KDU)

En la trayectoria conceptual que trazan Murray et al. (2017) para la concreción de su indagación, aparece el constructo teórico de *comprensiones* [que son] *clave para el desarrollo* (KDU, por sus siglas en inglés). De acuerdo con Simon (2006), las KDU son conocimientos (de contenido) matemáticos críticos necesarios para que se lleve a cabo el desarrollo matemático de los estudiantes. Según Simon (2006), las KDU implican un avance conceptual. Más aún, Murray et al. (2017) sugieren que las matemáticas avanzadas pueden ayudar a los profesores a desarrollar “conocimientos que respalden la enseñanza conceptual de un tema matemático particular” (Silverman & Thompson, 2008, p. 508. Citado en Murray et al., 2017, p. 3). Así, para que un tema de las matemáticas avanzadas les sea útil a los profesores, Murray et al. (2017) sostienen que tal tema tiene que servir como KDU para el

contenido del bachillerato. En síntesis, “no basta con conocer y comprender las conexiones. El trabajo en esta área debe considerar el impacto pedagógico de cualquier conexión entre matemáticas avanzadas y secundarias.” (Murray et al., 2017, pp. 2-9)

El diseño del taller: en línea, asincrónico, desarrollo de contenido matemático y de contenido pedagógico, búsqueda de relaciones o posibles conexiones con el tema de matemáticas avanzadas y el currículum del bachillerato

Para la exploración en torno al establecimiento de conexiones entre el tema de la resolución general de las ecuaciones Diofantinas y los temas de matemáticas del bachillerato, diseñamos un curso en línea con duración de 16 semanas para el desarrollo profesional de maestros, en el que participaron los tres maestros encargados de conducir todos los cursos de matemáticas de la Escuela Preparatoria Oficial (EPO) 171.

El curso, denominado “Propiedades de los números y resolución de ecuaciones en números enteros” (usaremos las siglas *ProN+RENE* para referirnos al curso de manera sintética), se montó en la plataforma *moodle* de la Universidad Pedagógica Nacional^[3].

Una de las ventajas del uso de una plataforma de este tipo es la posibilidad de acceso a todos los materiales y actividades del curso desde cualquier lugar y en cualquier momento. Facilidad conveniente para el desarrollo profesional de los docentes en servicio. Además de que toda la actividad de los docentes participantes en torno de la realización de las tareas queda registrada en la plataforma.

Sobre el contenido matemático del curso, el tema de la resolución general de las ecuaciones Diofantinas es un tópico del álgebra superior o de la teoría de números, el cual se aborda en la universidad y raras veces ha sido incorporado a la educación matemática de los maestros. Sin embargo, desde nuestro punto de vista tiene un potencial natural para el establecimiento de conexiones matemáticas entre las propiedades fundamentales de los números enteros y de la divisibilidad de la teoría de números con el álgebra del bachillerato, en particular con la resolución de ecuaciones lineales en dos incógnitas y con las ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas (incluidas las cónicas). Las ecuaciones Diofantinas lineales son parte de las ecuaciones de primer grado en dos incógnitas con coeficientes enteros, ecuaciones conocidas como lineales en el bachillerato y cuya gráfica es una línea recta. El problema general que plantea cualquier ecuación Diofantina, por ejemplo, $2x - y = 5$, es la de encontrar la expresión general (o fórmula) para calcular/encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación dada. Así,

[3] URL: <http://pascal.ajusco.upn.mx/mpupn/course/view.php?id=33>

en la ecuación $2x - y = 5$, una solución es $x = 3, y = 1$, pues $2(3) - 1 = 5$. Otra solución es $x=8, y=11$, pues $2(8) - 11 = 5$. Pero el problema que se plantea resolver en las ecuaciones Diofantinas es: ¿cuál es la fórmula general para todas las soluciones enteras de la ecuación?

En el curso *ProN+ReNE*, el desarrollo del contenido matemático se abordó a partir de dos tratamientos teóricos distintos del tema, desde el álgebra superior (de manera deductiva) y desde la resolución de ecuaciones (de manera inductiva). Esto se basó en la revisión de dos textos distintos, a saber, Cárdenas et al. (1988), y Guelfond (1981), respectivamente.

La idea de revisar dos textos que presentan el desarrollo del tema de dos maneras distintas, en este caso por deducción o por inducción, lo asociamos a la cuestión de distinguir o contrastar diferencias entre pensamiento lógico y pensamiento matemático, ambos tipos de pensamiento presentes en los objetivos educativos especificados en el plan y programas de estudio del Sistema de Educación Media Superior (SEMS), sistema del bachillerato del Estado de México (ver Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017).

Por otro lado, como ya se comentó antes, el tema de las ecuaciones Diofantinas lineales conecta de manera natural con el tema de la resolución de ecuaciones lineales en dos incógnitas del currículum del álgebra del primer año del bachillerato. Aunque ciertamente en la enseñanza del bachillerato de las ecuaciones lineales no se suele hacer ningún énfasis en encontrar todas las soluciones enteras de una ecuación dada. En contraste, en las ecuaciones Diofantinas interesa la resolución del problema general de hallar todas las soluciones enteras, y esto da lugar a la revisión de propiedades básicas de números enteros y de divisibilidad.

Finalmente, es importante mencionar que el curso *ProN+ReNE* se desarrolló según la implementación de una pedagogía para el aprendizaje de los contenidos basada en el discernimiento de elementos críticos que intervienen en los diferentes subtemas propuestos. Esto lo concretamos a partir de la contrastación entre diferentes aproximaciones para presentar, revisar o desarrollar los subtemas. Esta pedagogía está basada en la teoría de la variación, teoría del aprendizaje desarrollada en occidente por Marton (2015). Sin embargo, para el desarrollo de las actividades del curso *ProN+ReNE*, nos restringimos solamente a la utilización del patrón de contrastación.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Relación entre las comprensiones clave (o KDU's) de los maestros de la EPO 171 y las conexiones entre matemáticas de la universidad y matemáticas del bachillerato

Es de destacar que los maestros participantes en el curso *ProN+ReNE* llegaron a elegir subtemas matemáticos de su preferencia, de entre los incluidos en el proceso de obtención de las soluciones generales de las

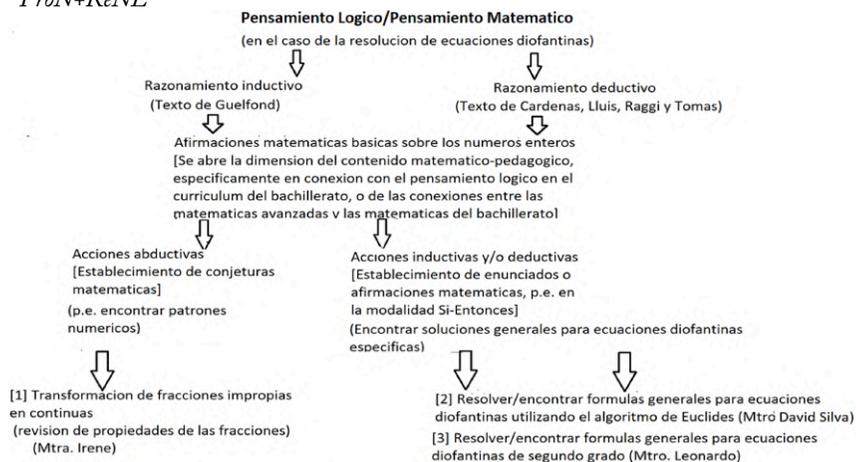
ecuaciones Diofantinas (ver Cárdenas et al, 1988; Guelfond, 1981), como susceptibles de ser desarrollados con sus alumnos en sus clases de matemáticas. Desde nuestro punto de vista, esto se logró debido a la configuración de las actividades de discernimiento (Marton, 2015) en el curso.

Las actividades de discernimiento estuvieron vinculadas a las sucesivas contrastaciones propuestas en el desarrollo de las unidades del curso. Las contrastaciones (ver Figura 2. Por ejemplo, entre razonamiento o procedimiento matemático deductivo vs razonamiento o procedimiento matemático inductivo. O, posteriormente, entre acciones abductivas o inductivas/deductivas, etc.) se desplegaron o emergieron a medida que se implementaban revisiones de materiales y realización de tareas, dedicadas a la revisión de subtemas matemáticos y/o subtemas pedagógicos (en acuerdo con Murray et al., 2017).

Los diferentes niveles del esquema que se presenta a continuación (ver Figura 2) muestran las contrastaciones propuestas en el curso. Nuestra hipótesis es que el trabajo/reflexión de los docentes en torno de tales contrastaciones es lo que probablemente promovió comprensiones en ellos, claves en su práctica o su enseñanza (Simon, 2006), y en el desarrollo del aprendizaje en sus clases de matemáticas.

Figura 2

Esquema de diferentes fases de discernimiento y/o de contrastación en el curso ProN+ReNE



Nota. Fuente: elaboración propia.

Los temas de matemáticas sugeridos por los maestros, con potencial para desarrollarlos en sus clases, fueron: (1) la transformación de fracciones impropias en continuas (Mtra. Irene); (2) resolver/encontrar fórmulas generales para ecuaciones Diofantinas lineales (Mtro. David); y (3) resolver/

encontrar fórmulas generales para ecuaciones Diofantinas de segundo grado (Mtro. Leonardo). En otras palabras, los subtemas de las matemáticas universitarias que se abordaron en el curso y que fueron enunciados en los puntos 1, 2, 3 son los temas que los maestros participantes vieron con potencial para incluir y, de esa forma, renovar su práctica en la enseñanza de las fracciones (Mtra. Irene), en la enseñanza de las ecuaciones lineales con dos incógnitas (Mtro. David) y en la enseñanza de las ecuaciones de curvas y/o cónicas (Mtro. Leonardo).

Potencial para una renovación pedagógica del currículum de matemáticas en el bachillerato.

Otro resultado que interesa destacar refiere a la selección, estudio y concreción de la teoría de la variación (Marton, 2015) como estrategia pedagógica general de aprendizaje; asociada, en general, a la comprensión o desarrollo del pensamiento^[4]. Recuérdese que las características del curso estuvieron centradas en el impacto pedagógico en la práctica (Murray et al., 2017) y en la aplicación de la estrategia pedagógica de la variación, y permitieron que los maestros llegaran a la identificación de conexiones entre las matemáticas avanzadas y las del bachillerato. La implementación en la práctica de la estrategia pedagógica de la variación en el salón de clase para, por ejemplo, enseñar del tema de la resolución general de las ecuaciones Diofantinas lineales, sería una prueba o evidencia de que “el conocimiento de las conexiones matemáticas [influyó] en las elecciones pedagógicas de los maestros de bachillerato en el aula” (Murray et al., pp. 2-3). Evidencia que, en efecto, es posible vincular con el desarrollo profesional de los profesores participantes en el curso *ProN+ReNE*, pues el Mtro. David (mencionado arriba, en el punto 2), quien fue participante y colaborador en el curso (tal colaboración será motivo de la escritura y publicación de otro aspecto de este trabajo), llevó a cabo en otro trabajo de investigación, y esta vez con un grupo de estudiantes del primer año de la EPO171, la aplicación de la pedagogía de la variación a la enseñanza y aprendizaje de la resolución general de las ecuaciones Diofantinas lineales. Esto dio cuenta de una renovación pedagógica de la temática de resolución de ecuaciones lineales en el bachillerato (ver Silva Bautista, 2022).

CONCLUSIONES

Las características del curso *ProN+ReNE*, centradas alrededor del impacto pedagógico de las conexiones en la práctica del docente (Murray et al., 2017) y de la aplicación de la estrategia pedagógica de la variación, hicieron

[4] En este artículo, dicha teoría se abordó de manera muy incipiente al final de la sección de metodología, inmediatamente antes de la presentación de resultados.

posible que los maestros llegaran a la identificación y comprensión de conexiones entre las matemáticas avanzadas y las del bachillerato. Así, las respuestas que obtuvimos a las preguntas de investigación que inicialmente planteamos son las siguientes.

- (a) ¿Cuáles son las posibles conexiones que establecen los docentes entre una temática específica de las matemáticas del nivel avanzado con las matemáticas del currículum del nivel bachillerato?

La respuesta que obtuvimos es que los docentes participantes establecieron tres conexiones diferentes entre el tema de la resolución general de las ecuaciones Diofantinas y los temas de matemáticas del bachillerato, a saber: 1) Conexión entre transformar fracciones impropias a continuas, con la revisión de fracciones situada en el primer semestre del bachillerato; 2) Conexión entre la obtención de la fórmula general de las ecuaciones Diofantinas lineales, con la resolución de ecuaciones con dos incógnitas situada en el segundo semestre del bachillerato; 3) Conexión entre la obtención de la fórmula general para resolver ecuaciones Diofantinas de segundo grado, con la revisión de la resolución de ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas, incluidas las ecuaciones de las cónicas, situada en el tercer semestre del bachillerato, en geometría analítica.

- (b) ¿Cuál sería una posible estrategia pedagógica, por parte de los docentes, para desarrollar con los estudiantes esas conexiones en la práctica?

La respuesta en la que aquí se avanzó de manera esquemática es que la estrategia pedagógica que en la práctica se implementó fue la que resulta de aplicar la teoría de la variación a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Una exposición detallada sobre el asunto aparece en un capítulo de este libro, el elaborado por el profesor David Silva Bautista, y también en un reporte de investigación presentado en el CNIE 2023.

- (c) ¿Cuál sería la huella en los estudiantes del desarrollo de esas conexiones en la práctica?

En el trabajo de investigación del profesor Silva Bautista (2022) se exponen con todo detalle las diferentes trayectorias de aprendizaje de los estudiantes para llegar a la fórmula general de las ecuaciones Diofantinas lineales. Entre ellas, tal vez la trayectoria más relevante es la del equipo de estudiantes que lograron llegar a la fórmula general utilizando las propiedades de la división y del algoritmo de Euclides.

Con esta última respuesta cerramos este capítulo, pues el docente utilizó propiedades de la división y del algoritmo de Euclides para la enseñanza de la resolución de ecuaciones, i.e. implementó una enseñanza con comprensiones clave para el desarrollo (Simon, 2006), lo que implica una enseñanza conceptual del tema (ver Silverman & Thompson, 2008, citado en Murray et al. 2017). Por otro lado, la utilización por parte de los estudiantes de las

propiedades de los enteros (propiedades numéricas) es una muestra de desarrollo de pensamiento matemático, según se establece en el currículum de matemáticas del bachillerato (SEP, pp. 25 y 197).

REFERENCIAS

- Cárdenas, H., Lluís, E., Raggi, F., & Tomás, F. (1988). *Álgebra superior*. Trillas
- Klein, F. (2016). *Elementary mathematics from a higher standpoint. Volume I: Arithmetic, algebra, analysis*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-49442-4>
- Gelfond, A. O. (1981). *Solving Equations in Integers*. MIR Publishers.
- Hanke, E., Hehner, S., & Bikner-Ahsbahs, A. (2021). Reducing fragmentation in university pre-service teacher education—Conditions and strategies. *EDeR Educational Design Research*, 5(2), 1–32. <https://doi.org/10.15460/eder.5.2.1613>
- Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge.
- Murray, E., Baldinger, E., Wasserman, N., Broderick, S., & White, D. (2017). Connecting advanced and secondary mathematics. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, 1. <https://bit.ly/3xvC0hC>
- Secretaría de Educación Pública. (2017). *Planes de estudio de referencia del componente básico del marco curricular común de la educación media superior*. SEP.
- Silva Bautista, D. (2022). *Exploración en modalidad remota sobre la aplicación de la teoría de variación a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas del bachillerato: El caso de la resolución general de ecuaciones diofánticas lineales*. [Tesis de Doctorado en Educación. México: Universidad Pedagógica Nacional].
- Simon, M. A. (2006). Key developmental understandings in mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(4), 359–371. http://doi.org/10.1207/s15327833mtl0804_1
- Wasserman, N., Buchbinder, O., & Buchholtz, N. (2023). Making university mathematics matter for secondary teacher preparation. *ZDM*, 55(4), 719–736. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01484-5>