Razonamiento, argumentación y prueba en educación matemática

Landy Sosa-Moguel [1]
Guadalupe Cabañas Sánchez [2]

Introducción

El Grupo de Trabajo Temático Razonamiento, argumentación y prueba en la educación matemática, constituido en el marco del Congreso de la SOMIDEM-1, es un espacio de discusión entre académicos interesados en avanzar en el conocimiento y comprensión de los procesos sociocognitivos asociados al Razonamiento, Argumentación y Prueba (RAP) de la matemática escolar en los distintos niveles educativos. La importancia del RAP radica en que es un soporte para la actividad de hacer, aprender y comunicar las matemáticas (Komatsu & Jones, 2017; Stylianides, 2007).

El RAP forma parte de los estándares curriculares para la enseñanza de las matemáticas de distintas regiones del mundo, declarándose que los estudiantes de matemáticas deben ser capaces de "reconocer al razonamiento y prueba como aspectos fundamentales de la matemática, desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y pruebas" (National Council of Teacher

[1] smoguel@correo.uady.mx
Universidad Autónoma de Yucatán, México
https://orcid.org/0000-0002-8771-0800

[2] gcabanas@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, México
https://orcid.org/0000-0002-2471-0440

Sosa-Moguel, L.,& Cabañas Sánchez, G. (2024). Razonamiento, argumentación y prueba en educación matemática. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 427–435). Editorial SOMIDEM.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-51

of Mathematicas [NCTM], 2000, p. 56), así como: "razonar abstracta y cuantitativamente", y "construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros" (Common Core State Standards [CCSS], 2010, p. 6). Así, en el currículum escolar de diversos países se ha establecido desarrollar el RAP como una demanda de aprendizaje matemático (e.g., Ministerio de Educación Nacional de Colombia [MEN], 2006; Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017; 2022).

Diversas investigaciones coinciden en que promover el RAP en el aula de matemáticas es un desafío para los profesores (e.g., Smit et al., 2022; Stylianides, et al., 2013). Este resulta de factores tales como la carencia de claridad en profesores en formación y en servicio sobre cómo desarrollar una clase de matemáticas centrada en el razonamiento (e.g., Herbert et al., 2015) y sus dificultades para interpretar los razonamientos y argumentos de los estudiantes (e.g., Mata-Pereira & da Ponte, 2017; El Mouhayar & Jurdak, 2013), usar formas de retroalimentación y evaluación que den soporte a los estudiantes en el desarrollo de sus habilidades de razonamiento (e.g., Smit et al., 2022; Schoenfeld, 2015), así como para razonar sobre ideas y relaciones matemáticas en la resolución de problemas (e.g., Hallagan et al., 2009; Sosa-Moguel et al., 2020) y construir pruebas válidas (e.g., Stylianides & Stylianides, 2009). Por tanto, hace falta profundizar y ampliar la investigación del RAP en la cognición del profesor y en lo referente a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Objetivos y temáticas del grupo

Los objetivos de este GTT son:

- Generar conocimiento sobre los procesos de razonamiento, argumentación y prueba para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- Contribuir en el aprendizaje y práctica docente de las matemáticas con actividades o materiales que fomenten el razonamiento matemático, la argumentación y la construcción de pruebas matemáticas en distintos niveles educativos.
- Divulgar el conocimiento sobre razonamiento matemático, argumentación y prueba, así como su relación con la profesionalización docente en matemáticas.

Para alcanzar estos objetivos, es indispensable contar con investigaciones empíricas y teóricas, así como propuestas de enseñanza sobre el RAP. Las contribuciones desde y para este grupo pueden ser en las temáticas siguientes:

a. Papel de los procesos de razonamiento, argumentación y prueba en el aprendizaje matemático de niños y jóvenes.
b. Procesos de razonamiento, argumentación y prueba en la formación y desarrollo profesional docente en matemáticas.

c. Experiencias de razonamiento, argumentación y prueba en el aula de matemáticas, con o sin tecnología.
d. Estatus del razonamiento, la argumentación y prueba en el currículo matemático y libros de texto.

Razonamiento, argumentación y prueba

Existen distintos significados sobre razonamiento matemático, argumentación y prueba en educación matemática. La acepción que se adopte de estos conceptos dependerá, entre otras cosas, de la práctica matemática a la que se haga referencia, la perspectiva de estudio o la epistemología del investigador en el caso de la prueba, como señala Reid (2005).

Al **razonamiento matemático** se le reconoce como un concepto polisémico. Visto como proceso de comunicación o mental, consiste en hacer inferencias sobre relaciones entre objetos matemáticos a partir de proposiciones o información matemática previa (Conner et al., 2014; Jeannotte & Kieran, 2017). Según los objetos o práctica matemática a realizar, son distintas las formas de razonamiento, por ejemplo, algebraico, geométrico o aleatorio, o bien, las clásicas como el abductivo, inductivo, deductivo y por analogía.

La **argumentación** es un proceso sociocultural que favorece la construcción de conocimiento matemático (Solar et al., 2022). Bermejo-Luque (2011) distingue al menos cuatro enfoques sobre la argumentación: el lógico, el dialéctico, el retórico y el epistémico. Uno de los enfoques más empleados en las investigaciones sobre argumentación en matemáticas es el de la lógica informal, desde la actividad individual o colectiva (e.g., Larios et al., 2018; Solar & Deulofeu, 2016).

La **prueba** es conceptualizada desde la lógica formal y los fundamentos de la matemática como un proceso de razonamiento puramente deductivo. No obstante, Lakatos (1976) reconoce que la prueba matemática es mucho más que un encadenamiento deductivo-formal, es un proceso creativo ligado a la formulación de conjeturas, la presencia del ejemplo y el contraejemplo, la falsabilidad, los procesos de prueba y la refutación. Reid y Vallejo Vargas (2019) consideran que la forma de significar a la prueba matemática por Stylianides (2007) es más flexible porque puede usarse tanto en las pruebas matemáticas profesionales como las producidas en el contexto escolar. Para este autor, la prueba es un argumento matemático, una secuencia conectada de afirmaciones a favor o en contra de una conclusión matemática.

En el campo de la investigación en educación matemática, los estudios sobre el RAP se han realizado desde diferentes enfoques y perspectivas teóricas: con enfoque en actividades individuales sustentados en modelos teóricos cognitivos (e.g., Reid & Vallejo Vargas, 2019) o en la coordinación de la actividad individual con la colectiva, que suelen articular un enfoque psicológico y la visión de que la actividad matemática es inherentemente de naturaleza sociocultural (e.g., Cetina-Vázquez et al., 2019; Saxe, 2002; Stephan & Rasmussen, 2002).

Estudios del grupo sobre razonamiento matemático y argumentación

En el GTT13 del Congreso SOMIDEM-1 se presentaron y discutieron seis trabajos de investigación durante dos sesiones en modalidad virtual y sincrónica, con diez participantes, nueve de los cuales provenían de universidades de México y uno de Colombia. En la Tabla 1 se muestra la distribución de temas, población, nivel educativo, contexto y perspectiva de los trabajos del grupo.

Tabla 1

Distribución de trabajos y temas en el GTT13 del SOMIDEM-1

Temas	Población	Nivel educativo	No. de propuestas	Contexto	Perspectiva
Razonamiento matemático	Profesores en servicio	Secundaria	1	Generalización de patrones cuadráticos	Cognitiva
	Profesores en formación	Secundaria	1	Generalización de patrones cuadráticos	Cognitiva
		Licenciatura	1		
		Licenciatura	1	Problemas clásicos de probar en geometría	
	Estudiantes de Posgrado	Maestría	1	Ecuación lineal diofántica	Sociocultural
Argumentación matemática	Estudiantes de Ingeniería	Licenciatura	1	Continuidad de una función	Cognitiva

Nota. Tabla construida con base en los reportes de investigación presentados del GTT13 del congreso SOMIDEM-1.

La discusión colectiva se organizó en torno a dos temas centrales:

Tema 1. *Razonamiento matemático.* Se presentaron cinco reportes de investigación, de los cuales cuatro estuvieron centrados en el razonamiento matemático de profesores en formación y en servicio sobre tareas que involucran contenidos de álgebra, en el marco de la generalización de patrones cuadráticos, y de geometría euclidiana en problemas clásicos de probar. Los enfoques teóricos empleados fueron cognitivos. El quinto reporte se centró en caracterizar formas normativas de razonamiento en estudiantes de posgrado desde una perspectiva sociocultural, en el marco de las ecuaciones diofánticas.

Tema 2. *Argumentación matemática*. En este tema se presentó un reporte de investigación que analizó los cambios en la argumentación de un estudiante de ingeniería en su interacción con el profesor, mientras se construye la definición de continuidad en un curso de cálculo. El enfoque en que se sustenta es de tipo cognitivo.

El contenido matemático involucrado en los estudios sobre el razonamiento y la argumentación matemática de este grupo se ubica curricularmente en programas que van del nivel básico (secundaria) al superior (posgrado). La población de una tercera parte de estos estudios son profesores de matemáticas, y el énfasis estuvo en temas del álgebra, fundamentalmente en la generalización de patrones cuadráticos. La perspectiva teórica predominante fue la cognitiva. Tres de los estudios en el tema del razonamiento matemático articulan a la argumentación en el análisis del razonamiento matemático. El modelo argumentativo de Toulmin (2003) es utilizado como herramienta teórica-metodológica para el objeto de investigación.

Estudios sobre razonamiento matemático en la generalización de patrones cuadráticos

Tras el proceso de arbitraje para la publicación de los capítulos de este libro, fueron aceptados cinco trabajos, todos en el tema del razonamiento matemático. Estos se describen a continuación.

En el capítulo de Cruz, Cimé y Sosa-Moguel se reporta cómo profesores de matemáticas en formación razonan al generalizar patrones cuadráticos en una tarea en contexto numérico. Los autores documentan que la forma en que profesores en formación reconocen la estructura y generalizan un patrón cuadrático numérico está determinada por el tratamiento numérico o geométrico que se les da a los datos de la tarea y por el el tipo de razonamiento, ya sea inductivo, abductivo o ambos, implicado en la generalización. Los resultados de su estudio aportan información para entender por qué futuros profesores razonan de una u otra manera al generalizar patrones cuadráticos numéricos.

El capítulo de Nuñez-Gutiérrez y Cabañas Sánchez describe las formas clásicas de razonamiento matemático que subyacen en las formas de razonar de dos profesores de secundaria al generalizar patrones cuadráticos figurales. Se sustentan del análisis de los argumentos que evidencian los profesores en dos momentos: en su proceso de solución escrito y en una entrevista a profundidad. Las autoras delimitaron las formas de razonar que subyacen en el proceso de resolución de la tarea, por profesor. Documentaron tres formas de razonar: la abductiva, la inductiva y la deductiva, en las que identificaron acciones basadas en el conteo estratégico, la composición y descomposición del patrón figural, formulación, verificación y validación de conjeturas.

El capítulo de Carrillo y Aparicio-Landa también concierne a la generalización de un patrón cuadrático figural, y la investigación es conducida con futuros profesores de matemáticas. Una característica que lo distingue de los trabajos antes referidos es que se enfoca en estudiar cómo los futuros profesores interpretan su propio razonamiento y el de estudiantes al generalizar este tipo de patrones, más que centrarse en el razonamiento en sí. De modo que abordan un tópico con cada vez mayor atención en las investigaciones que están en la línea de los procesos de formación y desarrollo profesional docente, a saber: el *noticing*. Los autores encontraron que los participantes reconocieron similitudes y diferencias entre sus razonamientos y los seguidos por estudiantes de matemáticas de bachillerato al generalizar un patrón cuadrático en algunos elementos implicados en la generalización, tales como la estructura (numérica o espacial) subyacente al patrón, la relación funcional identificada y el proceso de reversibilidad, así como en la distinción de razonamientos inductivos y abductivos.

Estudio sobre razonamiento matemático en problemas clásicos de probar

El capítulo de Flores-Sandoval y Cabañas-Sánchez describe el proceso configural que coordinan profesores de matemáticas en formación al resolver un problema clásico de probar en geometría. Se sustentan de un modelo teórico cognitivo que articula dos tipos de aprehensiones, la operativa y la discursiva. En un proceso configural se reconocen dos procesos, el de truncamiento y el de conjetura sin demostración. El estudio documenta que la coordinación entre las aprehensiones discursiva-operativa favoreció el desarrollo de procesos lógico-deductivos, lo que derivó en el desarrollo de un proceso de truncamiento y, con ello, la demostración del problema.

Estudio sobre razonamiento matemático en el marco de las ecuaciones lineales diofánticas

El capítulo de Rada-Olivero y Cabañas-Sánchez caracteriza formas normativas de razonamiento, que soportan el progreso matemático en una comunidad de aula de posgrado. Se estudian a partir del razonamiento matemático que los estudiantes evidencian tanto en lo individual como en lo colectivo, mientras interpretan y explican una situación semirreal en el marco de las ecuaciones lineales diofánticas. Se sustentan de un marco analítico articulado a una perspectiva sociocultural. El análisis de los datos toma como base la reconstrucción de la argumentación suscitada desde la interacción con la situación y dos criterios que sustentan un marco analítico para delimitarlas. Documentaron dos formas normativas de razonamiento: 1) Elección del método de las ELD y 2) Elección de la ecuación lineal diofántica, que emergen al interpretar y explicar la situación semirreal.

Preguntas abiertas y visión prospectiva

Hay dos cuestiones centrales de interés en este grupo de trabajo, las cuales siguen abiertas para tratar y discutir en próximos encuentros: ¿Cómo examinar y desarrollar procesos de razonamiento, argumentación y prueba en estudiantes y profesores de matemáticas? ¿Cómo contribuir en el aprendizaje y práctica docente de las matemáticas mediante el diseño de actividades o materiales didácticos que fomenten la argumentación, el razonamiento matemático y la construcción de pruebas matemáticas en distintos niveles educativos?

Si bien el razonamiento matemático, argumentación y prueba están interrelacionados, se espera que en próximos encuentros de este GTT se presenten trabajos en los temas de la argumentación y prueba matemática, además de que continúe el interés por entender y fomentar el razonamiento matemático. De igual manera, sería relevante conocer sobre el estatus del RAP en los libros de texto y en la práctica en el aula de matemáticas para contribuir a los objetivos del grupo.

REFERENCIAS

Bermejo-Luke, L. (2011). *Giving Reasons. A Linguistic-Pragmatic Approach to Argumentation Theory*. Springer.

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(3), 181–200. https://doi.org/10.1080/10986065.2014.921131

Cetina-Vázquez, M., Cabañas-Sánchez, G., & Sosa-Moguel, L. (2019). Collective mathematical progress in an introductory calculus course during the treatment of the quadratic function. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 7*(2), 155–169. https://ijemst.net/index.php/ijemst/article/view/553

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. National Governors Association.

El Mouhayar, R., & Jurdak, M. E. (2013). Teachers' ability to identify and explain students' actions in near and far figural pattern generalization tasks. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 379–396. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9434-6

Hallagan, J. E., Rule, A. C., & Carlson, L. F. (2009). Elementary school pre-service teachers' understandings of algebraic generalizations. *The Mathematics Enthusiast, 6*(1), 201–206. https://scholarworks.umt.edu/tme/vol6/iss1/16/

Herbert, S., Vale, C., Bragg, L. A., Loong, E., & Widjaja, W. (2015). A framework for primary teachers' perceptions of mathematical reasoning. *International Journal of Educational Research, 74*, 26–37. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2015.09.005

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Komatsu, K., & Jones, K. (2017). Proofs and refutations in school mathematics: A task design in dynamic geometry environments. En T. Dooley, & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME10* (pp. 187–194). DCU Institute of Education of Ireland-ERME. https://bit.ly/3vnXzjD

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press.

Larios, V., Arellano, C., & Gonzalez, N. (2018). Análisis de argumentos producidos por alumnos de bachillerato al resolver problemas de geometría. *REDIMAT, Journal of Research in Mathematics Education, 7*(3), 280–310. https://doi.org/10.17583/redimat.2018.2343

Mata-Pereira, J., & da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 169–186. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9773-4

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencia y ciudadanas. MEN Colombia. https://bit.ly/3PxxPIw

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* NCTM.

Reid, D. (2005). The meaning of proof in mathematics education. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 458–468). FUNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull. https://bit.ly/3x4PAs2

Reid, D., & Vallejo Vargas, (2019). Evidence and argument in a proof based teaching theory. *ZDM, 51*(5). 807–823. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01027-x

Saxe, G. B. (2002). Children's developing mathematics in collective practices: A framework for analysis. *Journal of the Learning Sciences, 11*(2-3), 275–300. https://doi.org/10.1080/10508406.2002.9672140

Schoenfeld, A. H. (2015). Summative and formative assessments in mathematics supporting the goals of the common core standards. *Theory into Practice, 54*(3), 183–194. https://doi.org/10.1080/00405841.2015.1044346

Secretaría de Educación Pública. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica*. SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2022). *Plan de estudios de la educación básica.* SEP.

Smit, R., Dober, H., Hess, K., Bachmann, P., & Birri, T. (2023). Supporting primary students' mathematical reasoning practice: the effects of formative feedback and the mediating role of self-efficacy. *Research in Mathematics Education, 25*(3), 277–300. https://doi.org/10.1080/14794802.2022.2062780

Solar, H., & Deulofeu, J. (2016) Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema, 30*(56), 1092–1112. https://bit.ly/3TvNjO9

Solar, H., Goizueta, M., & Montaner, S. H. (2022). Emergencia de patrones de interacción al promover la argumentación en el aula de matemáticas. *Educación Matemática, 34*(3), 132–162. https://doi.org/10.24844/EM3403.05

Sosa-Moguel, L., Aparicio, E., & Cabañas-Sánchez, G. (2020). Fases del razonamiento inductivo que presentan profesores de matemáticas al resolver un problema de generalización. *PNA, 14*(2), 118–140. https://doi.org/10.30827/pna.v14i2.9118

Stephan, M., & Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 459–490. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00145-1

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289–321. https://doi.org/10.2307/30034869

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics, 72*(2), 237–253. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9191-3

Stylianides, G. J., Stylianides, A.J., & Shilling-Traina, L. (2013). Prospective teachers' challenges in teaching reasoning-and-proving. *International Journal of Science and Mathematics Education, 11*(6), 1463–1490. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9409-9

Toulmin, S. (2003). *The use of argument* (Original publicado en 1958). Cambridge University Press.