Similitudes que reconocen futuros profesores entre sus razonamientos y los seguidos por estudiantes al generalizar un patrón cuadrático

Paola Carrillo Uc [1]
Eddie Aparicio-Landa [2]

RESUMEN

En este trabajo se describen las similitudes y, por ende, las diferencias que reconocen futuros profesores de matemáticas entre sus propios razonamientos seguidos al generalizar un patrón cuadrático y los realizados por estudiantes de matemáticas de bachillerato. Los datos se recolectaron por medio de una tarea de generalización y un cuestionario abierto. El análisis se basó en las descripciones dadas por los futuros profesores en relación con los tipos de razonamiento –Inductivo, Abductivo y Deductivo—, así como en el análisis de tres elementos implicados en la generalización de patrones: la estructura numérica y espacial; de relación funcional; y de proceso de reversibilidad. Las similitudes y diferencias de razonamientos se centran esencialmente en los elementos implicados en la generalización.

PALABRAS CLAVE

Razonamientos matemáticos, Generalización, Patrón cuadrático, Futuros profesores.

---

[1] carrilloucpao@gmail.com
Universidad Autónoma de Yucatán, México
https://orcid.org/0009-0007-0773-2625

[2] alanda@correo.uady.mx
Universidad Autónoma de Yucatán, México
https://orcid.org/0000-0003-4400-3919

Carrillo Uc, P., & Aparicio-Landa, E. (2024). Similitudes que reconocen futuros profesores entre sus razonamientos y los seguidos por estudiantes al generalizar un patrón cuadrático. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 437–446). Editorial SOMIDEM.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-52

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre el razonamiento matemático en futuros profesores de matemáticas (FPM) ha mostrado un amplio interés por analizar las dificultades en dicho razonamiento y la forma en que este puede desarrollarse durante la formación profesional (Barrera et al., 2009). Sin embargo, no se ha estudiado la forma en que FPM analizan sus propios razonamientos en relación con el que siguen estudiantes de matemáticas de bachillerato (EMB). Esto es importante dado que es una oportunidad para analizar sus propios conocimientos y habilidades de razonamiento previo a su práctica docente, identificando así potenciales áreas de mejora. Por tanto, la presente investigación consistió en indagar al respecto en tareas de generalización de patrones cuadráticos, ya que es el primer acercamiento de los estudiantes a un comportamiento no lineal; además, es una base conceptual para la comprensión de conceptos más avanzados de áreas como el cálculo o la probabilidad, pues permite resolver problemas de la vida diaria y modelar diversos fenómenos físicos (Huapaya, 2012).

MARCO CONCEPTUAL

En esta investigación se indagó sobre las similitudes y, por ende, las diferencias que FPM reconocen entre sus razonamientos y los seguidos por EMB al generalizar un patrón cuadrático, tomando como referentes conceptuales las caracterizaciones del razonamiento matemático que describen Reid y Knipping (2010), tomado del trabajo de Peirce (1878). Tales autores refieren tres tipos de razonamientos matemáticos: Inductivo (RI), Deductivo (RD) y Abductivo (RA), y exponen que una manera de observarlos es a través del orden en el que se usan los casos, las reglas y los resultados. El orden racional declarado para cada uno de estos tipos de razonamientos se describe a continuación. RD: Regla-Caso-Resultado, es decir, pasar de lo general a lo particular; RI: Caso-Resultado-Regla, o bien, de lo particular a lo general; y RA: Regla-Resultado-Caso, ir de una hipótesis funcional a lo general.

Para situar las similitudes se consideraron a tres elementos matemáticos que intervienen en la generalización de patrones tipificadas por Zapatera y Callejo (2013), los cuales son: a) estructura numérica (EN) y espacial (EE), que se refiere a la regularidad relacionada con las estructuras numéricas y espaciales al extender un patrón, es decir, a los arreglos numéricos y configuraciones visuales que pueden componerse y establecerse; b) la relación funcional (ERF), que consiste en crear una relación entre la posición y los elementos que conforman un patrón para identificar un término lejano o no especificado, o bien, la acción de determinar el número de elementos de una posición; y c) el proceso de reversibilidad (EPR), que consiste en invertir el proceso del elemento de la relación funcional para identificar la posición de un término conocido el número de elementos que lo forman, esto es, establecer la posición de determinado número de elementos. Complementario a lo anterior, se consideraron las autovaloraciones de los FPM relacionadas con sus conocimientos, competencias y experiencias sobre el razonamiento matemático. La primera autovaloración consiste en estimar en qué medida se conocen conceptos relacionados con la enseñanza y aprendizaje del razonamiento matemático, por ejemplo, la definición de razonamiento inductivo, deductivo o abductivo. La segunda radica en estimar en qué medida se tiene posibilidades de éxito al realizar una tarea de razonamiento matemático, por ejemplo, de generalización de patrones cuadráticos como la planteada en esta investigación. Por último, la tercera consiste en estimar la frecuencia de confrontación o afinidad con actividades que involucran razonamiento matemático, es decir, que el FPM estime si durante su formación ha tenido experiencias que le permitan definir qué tan experimentado es en actividades de razonamiento matemático, con el fin de dejar entrever si estas autovaloraciones se corresponden con los resultados al reconocer similitudes referidas a los tres elementos mencionados con anterioridad.

MÉTODO

El método de estudio es descriptivo. Se usó un cuestionario abierto dividido en cuatro partes en apego a los intereses de la investigación: Parte 1. Autovaloración sobre razonamiento matemático, Parte 2. Resolución de una tarea de razonamiento matemático, Parte 3. Categorización del razonamiento matemático, y Parte 4. Análisis de razonamientos matemáticos. La tarea planteada es una adaptación de la usada por Sosa et al. (2019), la cual se muestra a continuación en la Figura 1.

Figura 1

Tarea de generalización de patrón cuadrático

Las figuras siguientes representan escaleras de uno, dos y tres pisos. Cada cuadrado en las figuras está formado por cuatro palillos.

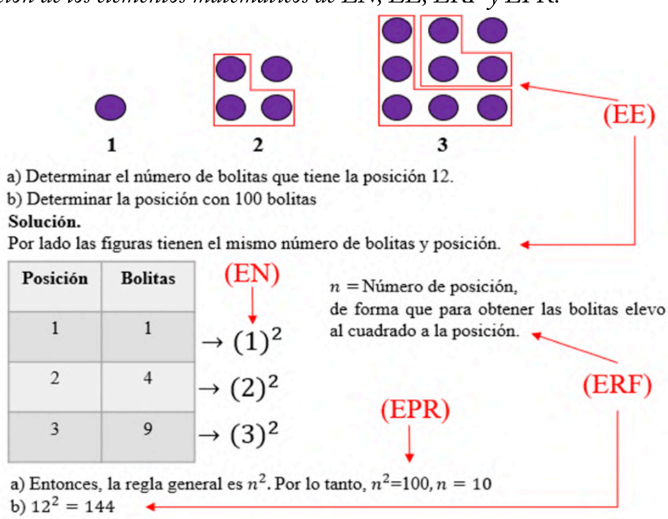
a) Determinar cuántos pisos tendría la escalera que puede construirse con 180 palillos.
b) Proponer un método general para determinar la cantidad de palillos que se requieren para construir una escalera de n pisos.

El estudio se realizó con un grupo de siete FPM, quienes se encontraban inscritos a una licenciatura en enseñanza de las matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. Los FPM cursaban el séptimo semestre (de 8 semestres), de forma que ya habían cursado asignaturas de matemáticas y didáctica correspondientes al álgebra, geometría, cálculo y probabilidad, por lo que contaban con la formación suficiente para realizar este tipo de tareas. Como dato extra, seis de los siete participantes estaban finalizando la asignatura optativa de Razonamiento y Prueba en el Aprendizaje Matemático, la cual tiene la intención de que el FPM reconozca y desarrolle procesos de construcción y validación de conocimiento matemático en situaciones escolares, con base en un conocimiento teórico-práctico de los procesos que sustentan el aprendizaje matemático, tales como la conjetura, la generalización, la abstracción, el razonamiento inductivo y el deductivo. Esta asignatura contribuye al desarrollo de la competencia docente de notar, interpretar y justificar las acciones del razonamiento matemático de los estudiantes, que son algunos de los aspectos importantes en la presente investigación. El investigador proporcionó a los FPM las resoluciones dadas por los EMB a la tarea. Cada FPM recibió un par de soluciones, una correspondiente al RI y otra al RA. Esta clasificación fue realizada previamente por el investigador.

El análisis de las similitudes sobre los razonamientos matemáticos seguidos por los FPM y por los EMB se hizo con base en tres fases: a) identificación previa de los tipos de razonamientos de los EMB, b) identificación de los elementos matemáticos que intervienen en la generalización de patrones que fueron referenciados en el cuestionario por los FPM, y c) correspondencia con sus autovaloraciones (expresadas mediante indicadores de autovaloración de una escala conocida y empleada por los FPM durante su formación), que cualitativamente se definen de la siguiente manera: Insuficiente, Suficiente, Satisfactorio y Sobresaliente. En la Figura 2 se ilustra el proceso de identificación de los elementos implicados en un problema de generalización de patrones, los cuales fueron referenciados en el marco conceptual.

Figura 2

Identificación de los elementos matemáticos de EN, EE, ERF y EPR.



RESULTADOS

Con el fin de respetar la identidad de los participantes en la presentación de los resultados, se usa la siguiente nomenclatura: FPM1, FPM2, …, FPM7 para hacer referencia a cada uno de los siete futuros profesores de matemáticas. Se usa E1, E2, …, para hacer referencia a cada uno de los EMB.

Autovaloración sobre razonamiento matemático y resolución de una tarea de razonamiento matemático

La Tabla 1 muestra la autovaloración que los FPM hicieron sobre sus conocimientos, competencias y experiencias entorno al razonamiento matemático

Tabla 1
Autovaloración sobre razonamiento matemático de los FPM

Cualidades	Suficiente	Satisfactorio	Total
Conocimientos sobre razonamiento matemático	1	6	7
Competencia de razonamiento matemático	5	2	7
Experiencias en actividades de razonamiento matemático	4	3	7

Parte de los resultados muestran que la autovaloración de los FPM sobre las cualidades mencionadas en la Tabla 1 y en los niveles allí referidos, se corresponden con las evidenciadas por ellos al resolver y analizar la tarea de generalización. Todos los FPM clasificaron sus razonamientos como inductivos. En la imagen siguiente se muestra el procedimiento que la mayoría utilizó para resolver la tarea.

En un caso específico, el FPM 5 parte de analizar los casos particulares hasta determinar la regla general, por tanto, se clasifica como inductivo. En la resolución mostrada en la Figura 3 se puede observar la presencia de los elementos matemáticos EN, EE, ERF, y EPR. De manera complementaria y correlacional, en las figuras 4 y 5 se muestran los razonamientos entregados al FPM 5, correspondientes al E3 y E6, así como las evidencias respecto del análisis de similitudes que reconoció el FPM5.

En la Figura 5 se identifica la presencia de algunos de los elementos matemáticos característicos del razonamiento matemático inmerso en un proceso de generalización, por ejemplo, las EN y EE, los resultados de haber realizado una ERF y EPR, así como la categorización y análisis del razonamiento que el FPM proporcionó al respecto.

Figura 3

Resolución clasificada como RI de la tarea de generalización realizada por el FPM5

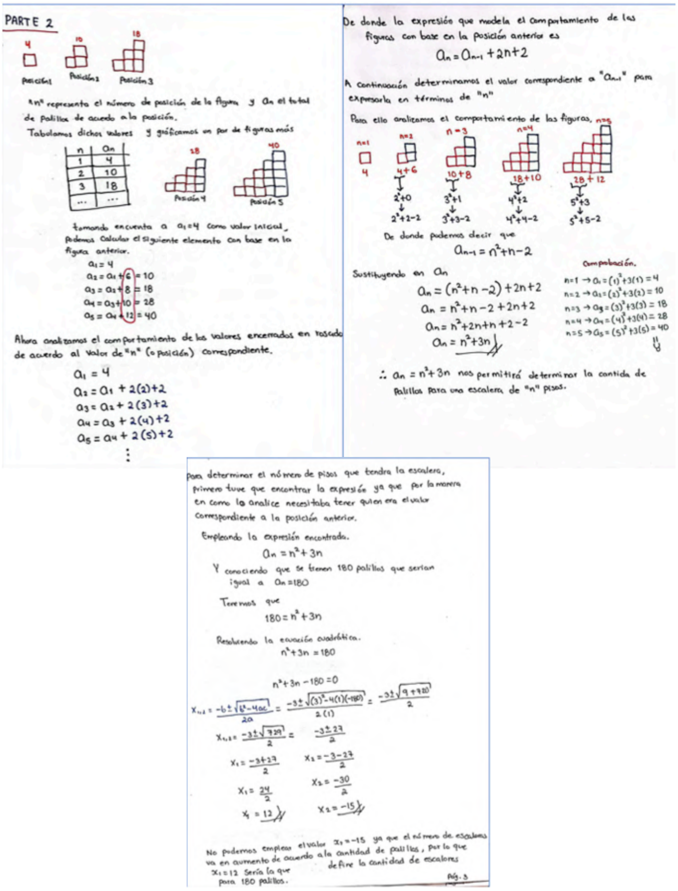


Figura 4

Resolución de E3, clasificado previamente como RI y con presencia de EN, EE, ERF y EPR

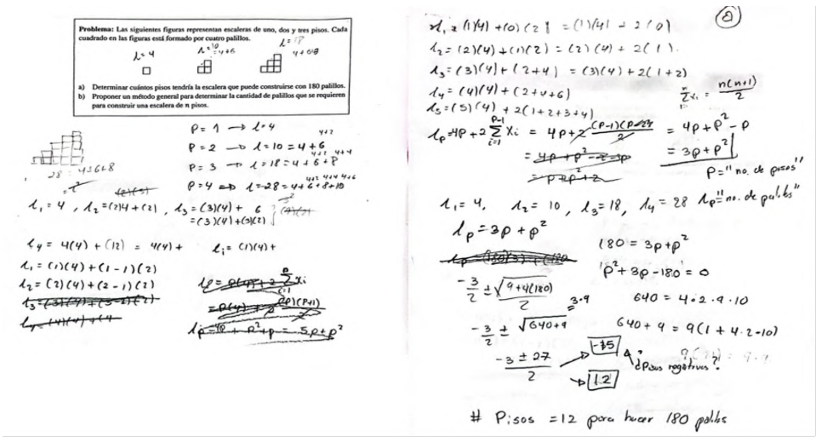
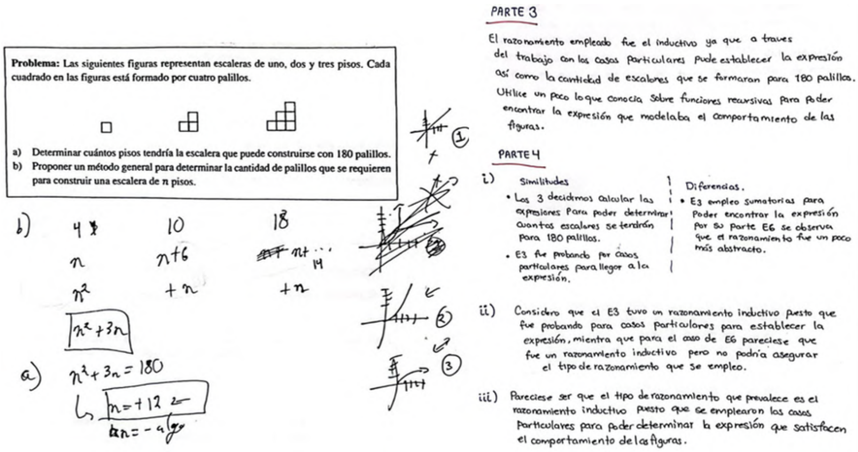


Figura 5

Resolución de E6, clasificado previamente como RA (lado izquierdo) y tipificación y análisis del razonamiento matemático por el FPM5 (lado derecho).



Categorización del razonamiento matemático

Los FPM argumentaron que asociaron el razonamiento inductivo a la resolución de la tarea debido a que se inició con el análisis de los casos particulares para determinar la regla general, la observación de regularidades y el establecimiento de la regla que norma la relación entre las cantidades. No obstante, al interpretar el tipo de razonamiento de los EMB que correspondían al RA y RI, los FPM presentaron dificultades, pues aun cuando clasificaron los razonamientos de su autoría de forma correcta, no todos fueron capaces de reconocer el RA en los EMB. Solo algunos identificaron características que describieron como "tanteo" o reconocimiento del uso de una hipótesis funcional a lo general.

En contraste, con la clasificación de los RI, tres FPM presentaron inconsistencias al clasificar a los RA. Dos FPM argumentaron que, de la misma forma que para los RI, también se partió de los casos particulares en los RA, aunque no explican cómo se efectuó el análisis de estos casos ni que se den las soluciones de manera "inmediata" como uno de ellos argumentó. Un tercer participante que no logró clasificar al RA mencionó que no era claro ni preciso el razonamiento del estudiante, por lo que no asignó una clasificación. En la Figura 6 se presentan los resultados, en donde 0 (cero) significa que el FPM no categorizó el razonamiento, ya sea por no reconocerlo o por no asignarle el razonamiento correcto (aun identificando características correctas). Uno de los resultados relevantes es que los FPM identificaron similitudes en sus razonamientos y los realizados por los EMB, en particular, con algunas de las estructuras implicadas en la generalización de patrones (EN, EE, ERF y EPR).

Figura 6

Tipos de razonamiento identificados por los FPM

	FP1	FP2	FP3	FP4	FP5	FP6	FP7
Inductivo	1	1	1	1	2	1	2
Abductivo	1	1	1	1	0	0	0

Inductivo Abductivo

Análisis de los razonamientos matemáticos: similitudes y diferencias

Seis FPM identificaron similitudes en las EN, EE, y ERF, sin embargo, esto no significa que notaron a todas las estructuras mencionadas, sino solo algunas de ellas; por ejemplo, identifican EN, pero no las EE o viceversa, o bien, a la EN y la ERF, entre otras posibles. Cabe mencionar que uno de los FPM no identificó similitudes entre su razonamiento y el de los EMB. Tres FPM identificaron similitudes en las EN en los RI de los EMB; entre sus argumentos para caracterizarlo mencionaron que el estudiante realiza de manera similar el análisis de la cantidad de palillos, ya sea en su totalidad, o de forma vertical y horizontal. Por otra parte, un FPM identificó EN similares en el RA que se le asignó, ya que el estudiante, al igual que él, determinó las diferencias en los cambios de cantidad de los palillos, así como la cantidad de palillos totales para cada nivel de piso. Dos FPM identificaron similitudes en la EE en los EMB de RI, referidos a la observación de cada una de las figuras. Por otro lado, ningún FPM proporcionó alguna similitud en la EE para el RA. Ningún FPM logró identificar la ERF en las similitudes de algún razonamiento.

Los FPM identificaron diferencias en los razonamientos en las EN y EE, sin embargo, no todos notaron ambas estructuras, ya que algunos sólo centraron su atención en las EN, pero no en las EE o viceversa. Cabe mencionar que un FPM no identificó diferencias entre su razonamiento y el de los EMB. Cuatro del total de FPM identificaron diferencias en las EN del RI asignado, entre ellas se encuentra que los EMB observaron configuraciones en los números, o bien, utilizaron métodos como la suma de los primeros números naturales a diferencia del razonamiento de su autoría. Por otra parte, ningún FPM identificó las EN en el RA. En relación con la EE, seis FPM identificaron diferencias en los RI, referidas a la configuración figural que se utilizó para notar las regularidades, por ejemplo, si se analizan las figuras en forma diagonal, horizontal o vertical, en columnas o filas. Por otro lado, tres del total de participantes proporcionaron algunas diferencias en los RA, las cuales aluden a que se utilizó algún apoyo gráfico, por ejemplo, el bosquejo de una parábola, o que se relacionó un patrón cuadrático por la observación de figuras cuadradas. En contraste con las similitudes, un FPM evidenció una diferencia en cuanto a la ERF en el RA.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El análisis se hizo a partir de a) la identificación previa de los tipos de razonamientos de los EMB, b) identificación de los elementos matemáticos que intervienen en la generalización de patrones (EN, EE, ERF y EPR), que fueron referenciados en el cuestionario por los FPM, y c) la correspondencia con sus autovaloraciones de los FPM sobre su conocimiento, competencia y experiencia en el razonamiento matemático en relación con lo que muestran en sus argumentos para identificar e interpretar los tipos de razonamiento analizados (RI y RA).

No se encontró evidencia de que los FPM vayan más allá de las EN y EE, y aunque ninguno tuvo dificultades para la resolución y auto asignación en el tipo de razonamiento seguido –y reportaron tener experiencia con este tipo de tareas—, los resultados muestran que necesitan reforzar su conocimiento sobre razonamiento matemático, ya que existieron incoherencias teóricas entre lo que identificaron y argumentaron sobre los razonamientos de los EMB, mostrando poca sensibilidad sobre los tipos de razonamiento a reconocer en la tarea de generalización. En ese sentido, las similitudes y diferencias reportadas por algunos de los FPM estuvieron limitadas a describir los razonamientos de los EMB, y no fueron (vieron) más que las respuestas escritas de forma literal. Por esa razón, no asociaron ningún elemento matemático de la generalización de patrones, como es el caso del FPM 5 que se ejemplificó en el presente trabajo, pese a que, en sus autovaloraciones, según la escala cualitativa de su modelo educativo, se clasificó entre Suficiente y Satisfactorio. Cabe mencionar que no se consideró una entrevista en esta investigación, ya que el instrumento fue diseñado para que los FPM escribieran los argumentos para las respuestas escritas que proporcionaban respecto de la identificación e interpretación de los razonamientos de los EMB, de forma que, al reportar una similitud, y por ende una diferencia, se justificara el porqué de estas.

A diferencia de este estudio en el que los FPM no tuvieron dificultades para razonar y resolver la tarea, en Sosa et al. (2020) se reporta que profesores de secundaria sí tuvieron dificultades para razonar inductivamente y resolver este tipo de tareas. Lo anterior puede deberse a (como los mismos autores precisan), la existencia de mayor posibilidad de establecer un patrón cuadrático cuando hay un referente visual que soporte la identificación de relaciones entre las variables. Por otro lado, el que en este estudio los FPM no reconocieran similitudes y, por ende, diferencias significativas en los elementos involucrados en la generalización del patrón, o bien, aun reconociendo algunos, no interpretaran adecuadamente el razonamiento de los EMB, sugiere incorporar más experiencias y conocimientos al respecto en programas de formación de profesores de matemáticas.

REFERENCIAS

Barrera, V., Castro, E., & Cañadas, M. (2009). Evolución del uso del razonamiento inductivo en un grupo de maestros en formación. *Escuela abierta: revista de Investigación Educativa, 12*(12), 33–45. https://bit.ly/3vyyrXh

Huapaya, E. (2012). *Modelación usando función cuadrática experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria.* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. https://bit.ly/3xefF8o

Peirce, C. (1878). Illustrations of the logic science. Deduction, Induction and Hypothesis. *The Popular Science Monthly, 13*(6), 470–482. https://bit.ly/3ISgLsP

Reid, D., & Knipping, C. (2010). Types of reasoning. En D. Reid, & C. Knipping (Eds.), *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching* (pp. 83–127). Brill.

Sosa, L., Aparicio, E., & Cabañas-Sánchez, G. (2019). Characterization of Inductive Reasoning in Middle School Mathematics Teachers in a Generalization Task. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 3*(14), 563–58. https://doi.org/10.29333/iejme/5769

Sosa, L., Aparicio, E., & Cabañas-Sánchez, G. (2020). Fases del razonamiento inductivo que presentan profesores de matemáticas al resolver un problema de generalización. *PNA, 14*(2), 118–140. https://doi.org/10.30827/pna.v14i2.9118

Zapatera, A., & Callejo, M. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535–544). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. https://bit.ly/3vt2hfY