Razonamiento de futuros profesores al generalizar un patrón cuadrático numérico

Jazmín Cruz Barrera [1]
Delio Yair Cimé Pool [2]
Landy Sosa-Moguel [3]

RESUMEN

En esta investigación se describe el razonamiento de trece futuros profesores de matemáticas al generalizar un patrón cuadrático en un caso numérico. Entender el proceso cognitivo al generalizar patrones es importante, pues esto permite reconocer y comprender las estructuras algebraicas. Para la recolección de datos se usa un instrumento escrito y entrevistas semiestructuradas. Posteriormente, los análisis se realizaron con base en el reconocimiento de la naturaleza del patrón presentado, el razonamiento implicado en la resolución del instrumento, y en la identificación de alguna estructura matemática subyacente a dicho patrón. Los resultados obtenidos indican que la forma de reconocer la estructura y generalizar el patrón queda determinada por el tratamiento numérico o figural que se les da a los datos y por el tipo de razonamiento, –inductivo o abductivo– implicado en la generalización.

PALABRAS CLAVE

Razonamiento, Generalización, Patrón cuadrático numérico, Profesores en formación.

---

[1] A19216351@alumnos.uady.mx
Universidad Autónoma de Yucatán, México
https://orcid.org/0009-0004-9104-0119

[2] A15001924@alumnos.uady.mx
Universidad Autónoma de Yucatán, México
https://orcid.org/0009-0002-0666-0424

[3] smoguel@correo.uady.mx
Universidad Autónoma de Yucatán, México
http://orcid.org/0000-0002-8771-0800

Cruz Barrera, J., Cimé Pool, D. Y., & Sosa-Moguel, L. (2024). Razonamiento de futuros profesores al generalizar un patrón cuadrático numérico. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 447–455). Editorial SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-53

INTRODUCCIÓN

Hoy en día es indiscutible la importancia de la generalización de patrones en el aprendizaje del álgebra, entre otras razones, porque ayuda a comprender las estructuras algebraicas (Warren, 2005). La generalización es uno de los procesos cognitivos más importantes de la actividad matemática, de tal forma que, para Mason et al. (1992), la generalización constituye el verdadero nervio de las matemáticas, siendo esta la esencia del álgebra y una de las rutas fundamentales hacia ella. De hecho, el National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], (2000) menciona que en álgebra de educación secundaria se espera que los estudiantes sean capaces de determinar expresiones simbólicas generales de relaciones numéricas y cuantificables, representadas en forma tabular, verbal y gráfica. Sin embargo, el estudio de regularidades numéricas y su generalización suele ser poco favorecido por los profesores en el aula (Ávila Sandoval et al., 2015). Aparentemente, esto podría ser ocasionado por las dificultades que, desde la formación profesional, enfrentan los profesores para reconocer un patrón y generalizarlo algebraicamente, sobre todo si es cuadrático (Hallagan et al., 2009; Zazkis & Liljedahl, 2002).

Estudios previos han reportado que los futuros profesores de matemáticas presentan dificultades para generalizar, en específico para obtener reglas generales de patrones no lineales (e.g., Alajmi Hussain, 2016; Hallagan et al., 2009; Rivera & Becker, 2007). Al respecto, Hallagan et al. (2009) sostienen que estas dificultades consisten en expresar ideas en palabras, escribir una generalización, y reconocer un patrón y su comportamiento, así como argumentar el proceso de razonamiento seguido. Sin embargo, no solo se han reportado dificultades por parte del profesor, sino que también entre los estudiantes existen problemas para expresar relaciones simples o generalizar patrones en notación algebraica (MacGregor & Stacey, 1997). Es importante investigar el razonamiento de los futuros profesores cuando generalizan patrones matemáticos, pues esta información es un referente para entender de qué manera se pueden hacer generalizaciones productivas y cómo se pueden desarrollar desde su formación profesional docente.

Diversas investigaciones se han ocupado en examinar cómo profesores de matemáticas en formación y en servicio generalizan patrones, aportando información sobre los tipos de estrategias que utilizan (e.g. Alajmi Hussain, 2016). Otros estudios han descrito las fases que los profesores siguen para generalizar patrones figurales (e.g. Nuñez-Gutiérrez & Cabañas-Sánchez, 2020). Si bien estos estudios han informado acerca de las acciones y tipos de generalización que producen los profesores, aún falta por examinar por qué lo hacen de tal o cual manera. Para contribuir en esta dirección, la presente investigación se condujo con el fin de examinar cómo profesores de matemáticas en formación razonan al generalizar patrones cuadráticos en el contexto numérico y figural. En particular, se presentan los resultados concernientes a la generalización en un patrón numérico.

MARCO CONCEPTUAL

Este estudio se enfoca en analizar la generalización de patrones desde el razonamiento. Por ello, se adopta la definición de generalización de Ellis et al. (2021), en la cual se concibe tanto como proceso que como producto. En su acepción como proceso, generalizar es:

> Una actividad que involucra al menos una de las siguientes acciones: (a) identificar características en común entre los casos; (b) formular resultados más amplios de casos particulares para formar relaciones generales, reglas, conceptos o conexiones, y/o; (c) extender el razonamiento de uno más allá del rango en el que se originó. (Ellis et al., 2021, p. 2)

El producto de este proceso es lo que se denomina generalización. Por su parte, un patrón matemático es entendido como aquella organización o regla que se puede predecir a partir de observar ciertas regularidades en las relaciones numéricas, figurales o lógicas entre objetos matemáticos (Mulligan & Mitchelmore, 2009). Según Radford (2008), identificar y abstraer las relaciones variantes e invariantes de un patrón es esencial para generalizar. El establecimiento de inferencias sobre tales relaciones involucra razonar matemáticamente, sea de manera inductiva, abductiva o deductiva (Conner et al., 2014). Según Rivera y Becker (2007), cada uno de estos tipos de razonamiento quedan definidos como:

- Razonamiento deductivo (RD): Se produce una inferencia o conclusión a partir de premisas verdaderas.
- Razonamiento inductivo (RI): Se infiere una conclusión o regla general a partir de la observación de casos particulares.
- Razonamiento abductivo (RA): Se generan inferencias falibles o ampliativas.

MÉTODO

La metodología de esta investigación fue cualitativa de tipo descriptivo, ya que se especifican las características del razonamiento que están detrás de las acciones de generalización de futuros profesores, al resolver una tarea que involucra un patrón cuadrático y al explicar por qué generalizan de tal manera. Participaron 11 estudiantes de un programa de formación profesional docente en matemáticas de una universidad en México; los participantes cumplían con el requisito de haber tomado los cursos de didáctica del álgebra, aritmética, álgebra intermedia y álgebra superior. Esto es, poseían conocimientos o instrucción previa sobre las estructuras cuadráticas y los procesos de generalización.

Para la recolección de datos se diseñaron dos tareas de generalización de patrones cuadráticos a partir de casos particulares numéricos y figurales. En este artículo se presentan los resultados relativos a la tarea del patrón en contexto numérico, que se muestra en la Figura 1.

Figura 1
Tarea de generalización de un patrón cuadrático numérico

Tarea 1

Instrucciones: Lee con atención la información de las tareas que se presentan a continuación y realiza lo que se solicita en cada una. Proporciona una explicación clara y detallada del razonamiento que seguiste para obtener las respuestas dadas a cada tarea.

Tarea 1. En la siguiente tabla, se muestran los valores de dos cantidades variables t y c.

t	1	2	3	4	5
c	3	15	35	63	

Determina:

a) El valor de c, para $t = 5$
b) La expresión algebraica para calcular el valor correspondiente a c, para cualquier valor de t.

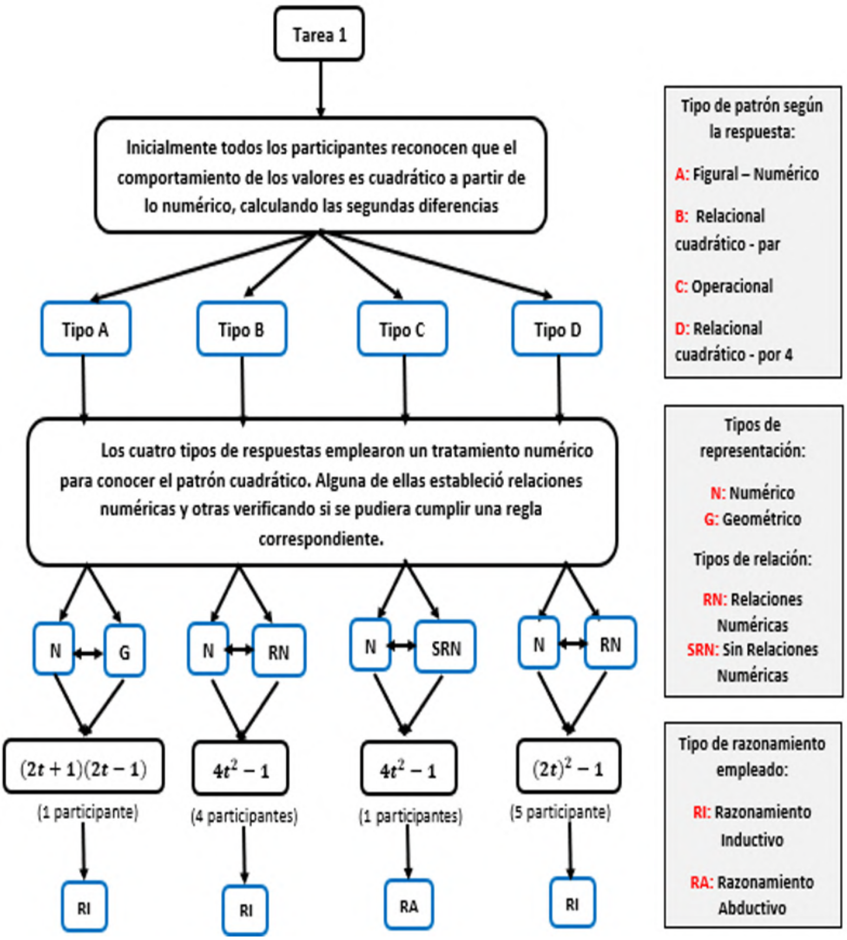
En el análisis de los datos se utilizó el método de comparación constante con el objetivo de identificar las acciones comunes de los razonamientos de los participantes –según el tipo de generalización construida– para compararlas y sistematizarlas en un esquema. Para ello se realizó una categorización de las respuestas de los participantes, en la que se observaron similitudes y diferencias en los razonamientos que emplearon al resolver la tarea y, a partir de esto, se establecieron códigos para relacionar e identificar lo común en ellos. Tras la comparación constante, se generaron categorías caracterizadas por el tipo de razonamiento seguido, el tratamiento empleado en la resolución de la tarea y la estructura subyacente al patrón cuadrático que detectaron al generalizar (Ver Figura 2).

RESULTADOS

Los hallazgos de este estudio muestran que la forma en que los participantes reconocen y generalizan un patrón cuadrático numérico está determinada por el tratamiento y razonamiento implicado al identificar la estructura matemática asociada a los valores numéricos de la tabla. Una acción inicial invariante en el razonamiento de todos los participantes al generalizar fue determinar las segundas diferencias de los valores de la variable c, correspondientes a valores consecutivos de t, esto para reconocer que el patrón numérico era cuadrático. Este proceder puede explicarse por la familiaridad de los participantes con la estrategia de diferencias recursivas en el análisis de la variación de datos en tablas numéricas, como medio para reconocer que el comportamiento de los datos numéricos era cuadrático. En general, se identificaron tres tipos de tratamientos: relacional numérico, numérico operacional y figural numérico. El razonamiento fue inductivo en la mayoría de los tratamientos, excepto en el numérico operacional, donde se detectó el razonamiento abductivo al generalizar.

Figura 2

Categorías asociadas al tipo de razonamiento, tratamiento y estructura subyacentes al patrón cuadrático



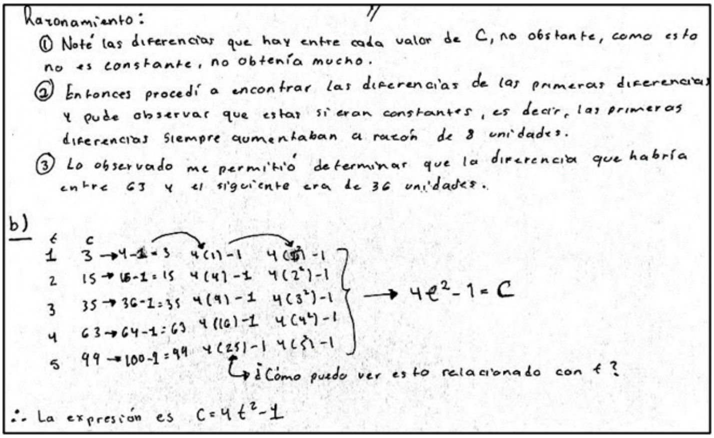
A continuación, se describen los razonamientos de los participantes (P) al generalizar según el tratamiento dado a los datos de la tarea.

1. Tratamiento relacional numérico-Razonamiento inductivo

El P4 empleó el razonamiento inductivo, ya que identificó lo variante y lo invariante de la situación a partir del análisis y observación de casos particulares (ver Figura 3).

Figura 3

Tratamiento numérico y razonamiento de P4


Razonamiento:
① Noté las diferencias que hay entre cada valor de C, no obstante, como esto no es constante, no obtenía mucho.
② Entonces procedí a encontrar las diferencias de las primeras diferencias y pude observar que estas sí eran constantes, es decir, las primeras diferencias siempre aumentaban a razón de 8 unidades.
③ Lo observado me permitió determinar que la diferencia que habría entre 63 y el siguiente era de 36 unidades.

b)

t	c			
1	3 → 4 − 1 = 3	4(1) − 1	$4(1^2) - 1$	
2	15 → 16 − 1 = 15	4(4) − 1	$4(2^2) - 1$	
3	35 → 36 − 1 = 35	4(9) − 1	$4(3^2) - 1$	→ $4t^2 - 1 = C$
4	63 → 64 − 1 = 63	4(16) − 1	$4(4^2) - 1$	
5	99 → 100 − 1 = 99	4(25) − 1	$4(5^2) - 1$	

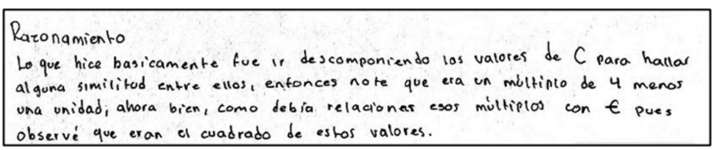
→ ¿Cómo puedo ver esto relacionado con t?

∴ La expresión es $C = 4t^2 - 1$

Posteriormente, a partir del análisis realizado por casos y con base en el establecimiento de relaciones multiplicativas y la sustracción de un cuadrado (mediante una reconfiguración de valores), P4 obtuvo la siguiente estructura subyacente al patrón: $4t^2 - 1$, mediante el razonamiento descrito en la Figura 4.

Figura 4

Reconocimiento de la estructura algebraica por P4


Razonamiento
Lo que hice básicamente fue ir descomponiendo los valores de C para hallar alguna similitud entre ellos, entonces noté que era un múltiplo de 4 menos una unidad; ahora bien, como debía relacionar esos múltiplos con t pues observé que eran el cuadrado de estos valores.

2. Tratamiento figural numérico-Razonamiento inductivo

El P1 presentó un tratamiento numérico figural que condujo a la estructura de la forma $(2t + 1)(2t - 1)$, siguiendo un razonamiento inductivo, esto es, analizó los datos caso por caso para así lograr identificar alguna característica invariante en ellos (ver Figura 5).

Además, se observa que el tratamiento que predominó en esta respuesta fue de tipo figural numérico, es decir, a partir de la reconfiguración de figuras geométricas, se estableció una relación con el cálculo de sus áreas, lo que condujo a encontrar una expresión de producto de factores lineales. Esto se muestra en la Figura 6.

Figura 5

Tratamiento figural y razonamiento de P1

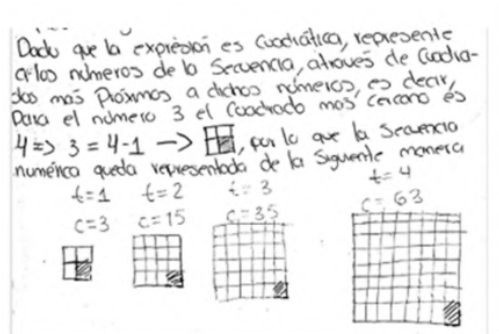
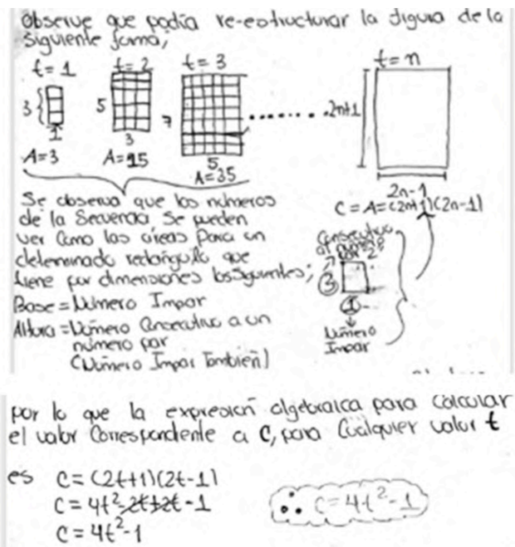


Figura 6

Reconocimiento de la estructura algebraica por P1

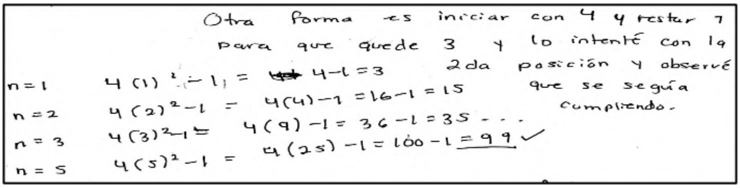


3. Tratamiento numérico operacional-Razonamiento abductivo

Un tratamiento numérico operacional –no relacional– condujo a encontrar la estructura: $4t^2$ -1, ya que la participante lo resolvió siguiendo un razonamiento abductivo, porque, a partir de una regla que ella misma determinó para un caso, lo generalizó para todos los casos, llegando a una expresión algebraica de la forma . En la Figura, se presenta el proceso de generalización que siguió P5.

Figura 7

Tratamiento numérico y razonamiento de P5



CONCLUSIÓN

Analizar el razonamiento que siguen futuros profesores al generalizar patrones, con atención en la relación proceso-producto de generalización, provee una forma de predecir por qué generalizan de cierta manera. Este estudio muestra cómo determinada forma de razonamiento al generalizar suscita el reconocimiento de una estructura algebraica específica del patrón. En la mayoría de los tratamientos, el razonamiento fue inductivo, y en un caso fue abductivo. Por otra parte, hubo ausencia total del razonamiento deductivo.

Adicionalmente, se detectó que algunas acciones llevadas a cabo por los futuros profesores coinciden con las acciones de generalización desde el razonamiento identificadas en estudiantes (Ellis et al., 2021). Entre tales acciones se encuentra relacionar (conectar lo pasado) e indagar si un mismo procedimiento sigue siendo válido en otros casos para reconocer la estructura del patrón. Sería interesante conocer con mayor profundidad las posibles similitudes y diferencias entre los razonamientos de profesores y estudiantes al generalizar, lo cual se podría investigar a futuro.

REFERENCIAS

Alajmi Hussain, A. (2016). Algebraic generalization strategies used by Kuwaiti pre-service teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(8), 1517–1534. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9657-y

Ávila Sandoval, M. S., López Ruvalcaba, C., & Luna González, J. (2015). La generalización de patrones cuadráticos: Un estudio con alumnos de licenciatura en matemáticas. *Cultura Científica y Tecnológica, 41*(7), 34–40. https://erevistas.uacj.mx/ojs/index.php/culcyt/article/view/275

Conner, A., Singletary, L., Smith, Ryan., Wagner, A., & Francisco, R. (2014). Identifying kinds of reasoning in collective argumentation. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(3), 181–200. https://doi.org/10.1080/10986065.2014.921131

Ellis, A., Lockwood, E., Tillema, E., & Moore, K. (2021). Generalization Across Multiple Mathematical Domains: Relating, Forming and Extending. *Cognition and Instruction, 40*(3), 351–384. https://doi.org/10.1080/07370008.2021.2000989

Hallagan, J. E., Rule, A. C., & Carlson, L. F. (2009). Elementary school pre-service teacher's understandings of algebraic generalizations, *The Mathematics Enthusiast, 6*(1), 201–206. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1144

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Building foundations for algebra. *Mathematics teaching in the middle school, 2*(4), 252-260. https://doi.org/10.5951/MTMS.2.4.0252

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente.* Editorial Labor.

Mulligan J., & Mitchellmore M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33–49. https://doi.org/10.1007/BF03217544

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.

Nuñez-Gutierrez, K., & Cabañas-Sánchez, G. (2020). Inductive reasoning in mathematics teachers when resolving generalization tasks. En Sacristán, A.I., Cortés-Zavala, J.C., & Ruiz-Arias, P.M. (Eds.), *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 790-802). Cinvestav-AMIUTEM-PME-NA. https://doi.org/10.51272/pmena.42.2020

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM 40*(1), 83–96. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0

Rivera, F., & Becker, J. (2007). Abduction–induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 26*(2), 140–155. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.05.001

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En H. Chick, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 305–312). PME. https://bit.ly/3TO4gVw

Zazkis R., & Liljedahl P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 379–402. https://doi.org/10.1023/A:1020291317178