Proceso configural que coordinan futuros profesores de matemáticas al resolver problemas clásicos de probar en geometría

Isamar Flores-Sandoval [1]
Guadalupe Cabañas-Sánchez [2]

RESUMEN

El presente estudio describe el proceso configural que coordinan dos futuros profesores de matemáticas al resolver un problema clásico de probar en geometría. Esta coordinación está anclada a dos tipos de aprehensiones: la aprehensión discursiva y la aprehensión operativa. El análisis de los datos empíricos se apoyó del modelo cognitivo del razonamiento configural para identificar la conjetura que establecen, así como los procesos lógico-deductivos que desarrollan para probarla. Los hallazgos muestran que la coordinación entre las aprehensiones discursiva y operativa favoreció el desarrollo de procesos lógico-deductivos, lo que desembocó en el desarrollo de un proceso de truncamiento, y con ello la demostración del problema.

PALABRAS CLAVE

Proceso configural, Problema de probar, Futuro profesor de matemáticas, Truncamiento.

---

[1] isamarfloressandoval@gmail.com
Universidad Autónoma de Guerrero, México
https://orcid.org/0009-0000-2752-2579

[2] gcabanas@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, México
https://orcid.org/0000-0002-2471-0440

Flores-Sandoval, I., & Cabañas-Sánchez, G. (2024). Proceso configural que coordinan futuros profesores de matemáticas al resolver problemas clásicos de probar en geometría. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 457–466). Editorial SOMIDEM.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-54

INTRODUCCIÓN

La geometría es un área fundamental en el currículum de matemáticas de todos los niveles educativos por su contribución en el desarrollo de capacidades como la visualización, el razonamiento lógico-deductivo (Barrantes-López & Balletbo-Fernández, 2012) y la argumentación, en procesos de prueba o demostración (Jones, 2002). Se considera compleja tanto en su enseñanza como en su aprendizaje "porque demanda una actividad cognitiva más completa, ya que apela al gesto, al lenguaje y a la mirada" (Duval, 2016, p. 13). En su enseñanza, el profesor como representante legal del currículum es quien enfrenta el desafío de contribuir a que los estudiantes comprendan en qué consiste esta área de las matemáticas, además de las formas de trabajo con los objetos, relaciones y propiedades geométricas (Cabañas-Sánchez & Flores-Sandoval, 2022). A los estudiantes, por su parte, se les demanda comprender y ser capaces de usar conceptos y propiedades de los objetos geométricos.

Un aspecto importante para la comprensión de la geometría en particular y la matemática en general es la prueba matemática, que además es esencial para desarrollar, establecer y comunicar el conocimiento matemático (Kitcher, 1984, citado en Stylianides, 2007) así como en la verificación de enunciados a los que se articulan figuras geométricas (Komatsu et al., 2017). En educación matemática, los estudios sobre la prueba han contribuido al desarrollo de modelos teóricos (e.g., Duval, 1995; Stylianides, 2008; Torregrosa & Quesada, 2007) para explicar aquello que hacen o dejan de hacer sujetos, como lo es el modelo del Razonamiento Configural (Torregrosa & Quesada, 2007).

En el contexto mexicano, pocos estudios (si los hay) han documentado el proceso configural que coordinan futuros profesores de matemáticas al resolver problemas clásicos de probar en geometría. Esto corresponde al interés de esta investigación, que tiene como objetivo describir el proceso configural que coordinan futuros profesores de matemáticas al resolver un problema clásico de probar en geometría.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Proceso configural

El proceso configural es un constructo teórico que la investigación en educación matemática ha acuñado para interpretar y explicar cómo un individuo coordina dos acciones cognitivas (aprehensión discursiva y aprehensión operativa) al resolver problemas en un contexto geométrico, un problema clásico de probar, o bien, un problema empírico. El problema clásico de probar exige establecer una conjetura y probarla, apoyados de procesos lógicos deductivos. En los problemas empíricos, el desafío es determinar una magnitud, ya sea en términos numéricos o a través de variables. El proceso configural es parte del modelo cognitivo del Razonamiento Configural propuesto por Torregrosa y Quesada (2007) quienes lo estructuraron a partir del modelo cognitivo de Duval (1995) y de la teoría de los conceptos figurales de Fischbein (1993).

Modelo del razonamiento configural

El modelo del Razonamiento Configural comprende dos tipos de aprehensiones: la aprehensión operativa y la aprehensión discursiva, que en Torregrosa y Quesada (2007) se entienden como:

a. Aprehensión discursiva: Es la acción cognitiva que produce una asociación entre una configuración identificada, con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas). Puede establecerse del anclaje visual al anclaje discursivo, y del anclaje discursivo al anclaje visual.

   El primer tipo de anclaje sucede, por ejemplo, cuando a un dibujo se le asocia una afirmación matemática. El segundo tipo se da cuando, ante una afirmación matemática, se tiene la capacidad para realizar el dibujo de un polígono que cumpla las características invariantes que lo determinan (Torregrosa & Quesada, 2007).

b. Aprehensión operativa: Se produce cuando el sujeto lleva a cabo alguna modificación, ya sea mental o física, sobre una configuración para resolver un problema geométrico. Puede ser de dos tipos, de aprehensión operativa de cambio figural y de aprehensión operativa de reconfiguración.

   La aprehensión operativa de cambio figural ocurre cuando a la configuración inicial se le añaden (o quitan) nuevos elementos geométricos (nuevas subconfiguraciones). Por su parte, la aprehensión operativa de reconfiguración sucede cuando las subconfiguraciones iniciales se manipulan como las piezas de un puzzle.

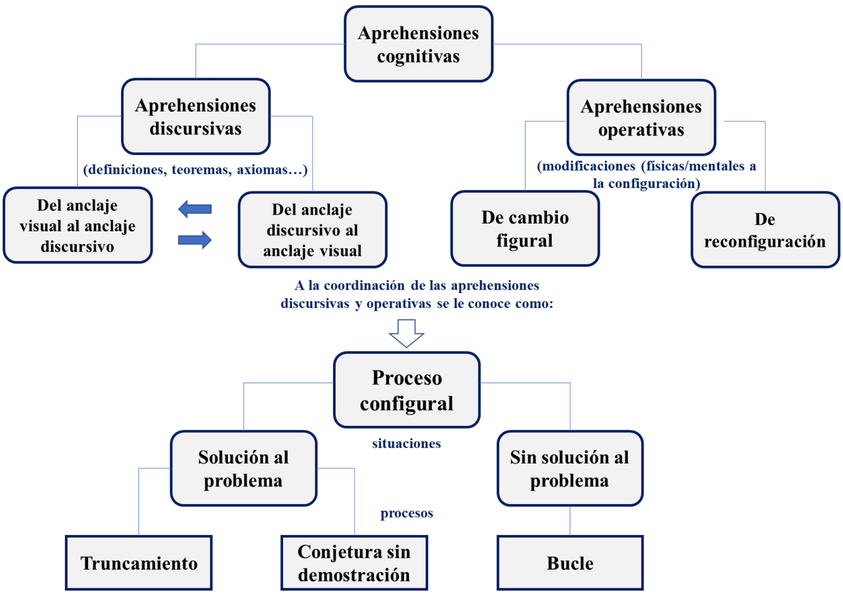
A la coordinación entre la aprehensión discursiva y aprehensión operativa se le define como proceso configural, el cual puede desembocar en dos situaciones (ver Figura 1):

1. La coordinación da una solución al problema. Torregrosa y Quesada (2007) distinguen dos clases de procesos:
   - Truncamiento: Cuando la coordinación proporciona la "idea" para resolver deductivamente el problema. Es decir, el proceso configural permite conjeturar afirmaciones que se prueban a través de procesos lógico-deductivos.
   - Conjetura sin demostración: El proceso configural permite resolver el problema aceptando las conjeturas mediante percepción simple.

2. La coordinación no consigue ninguna solución. Torregrosa y Quesada (2007) la denominan proceso bucle; consiste en una situación de bloqueo que no permite avanzar hacia la solución y, por tanto, hay un estancamiento del razonamiento producido.

Figura 1

Esquema del modelo del proceso configural



METODOLOGÍA

El enfoque metodológico que se siguió fue de tipo cualitativo, ya que se busca comprender, explorar y examinar los contextos o entornos de los individuos, y la forma en cómo perciben o experimentan los fenómenos que los rodean, sin dejar de lado las interpretaciones y significados que tienen (Creswell, 2013). En particular, se realizó un estudio de caso instrumental (Stake, 1999) en el que se buscó profundizar en el proceso configural que coordinan Futuros Profesores de Matemáticas (FPM en adelante) al resolver un problema de probar en geometría.

Unidades de análisis

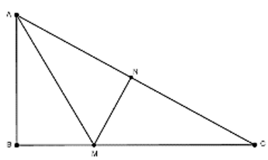
Fueron seleccionados dos de cuatro FPM como las unidades de análisis, quienes al momento del estudio se encontraban matriculados en una universidad pública de México. Su incorporación atendió tres criterios: a) haber tomado un curso de Geometría Euclidiana y experimentado con la construcción de pruebas en geometría, así como con el uso de conceptos y proposiciones geométricas; b) resolver de forma individual, problemas clásicos de probar; y c) participar en una entrevista a profundidad. Estos dos últimos criterios fueron indispensables para determinar la selección de participantes.

Problemas clásicos de probar

Los FPM resolvieron dos problemas clásicos de probar en un ambiente de papel y lápiz, que incluyeron una configuración geométrica y los desafiaron a establecer una conjetura y la prueba correspondiente a partir de procesos lógicos-deductivos. Este reporte documenta el proceso configural de los FPM al resolver el problema de probar 2 (Véase Tabla 1) en cuyo enunciado se proporciona información asociada a la configuración geométrica, y que pide demostrar la congruencia de dos segmentos correspondientes a los triángulos rectángulos ABM y ANM.

Tabla 1

Problema de probar 2 en geometría

Problema 2	Descripción/Características
P2: En la figura, $\triangle ABC$ es rectángulo en B, $\overline{AM}$ es bisectriz de $\angle BAC$, y $\overline{MN} \perp \overline{AC}$ en N. Probar que $\overline{BM} \cong \overline{MN}$. 	Retomado de Aguilar et al. (2009). La configuración geométrica está constituida de un triángulo rectángulo, que a su vez se subdivide en tres triángulos, los cuales se forman a partir de una bisectriz y una recta perpendicular.

Nota: Elaboración propia

Las posibles aprehensiones discursivas y operativas que podrían desencadenarse en el proceso de resolución se retoman de Flores-Sandoval (2022).

Aprehensiones discursivas: Triángulo, triángulo rectángulo, bisectriz, perpendicularidad, segmento, suma de los ángulos internos de un triángulo, congruencia, y el criterio de congruencia de triángulos *ALA* (ángulo, lado, ángulo).

Aprehensiones operativas: Pueden ir desde marcas sobre la configuración geométrica inicial y la identificación de dos subconfiguraciones formadas por triángulos, así como mencionar que se trata de dos triángulos rectángulos y la identificación de ángulos y lados comunes entre los triángulos.

A partir de la coordinación entre las aprehensiones discursivas-operativas, los FPM podían establecer una conjetura y, con ella, su demostración. Tomando el resultado de la conjetura como válido y/o verdadero para llegar a la prueba que se les demanda en el problema.

Análisis

El análisis del proceso configural que coordinan los FPM al resolver el problema de probar consideró tres fases:

Fase 1: Se realizó una triangulación entre las producciones escritas, las transcripciones de las entrevistas a profundidad y el modelo cognitivo del Razonamiento Configural de Torregrosa y Quesada (2007). A partir de ello, se identificó: a) Qué subconfiguraciones desencadenan el razonamiento configural de los FPM, b) El papel de la visualización en el desarrollo de los procesos deductivos que siguieron, y c) Qué conceptos y propiedades geométricas movilizaron los FPM para establecer una cadena de argumentaciones y, con ello, la tesis a probar.

Fase 2: Se registró en una tabla las aprehensiones discursivas, las aprehensiones operativas y el proceso configural que evidenciaron en su coordinación.

Fase 3: Se identificó el tipo de situaciones en que desembocó el proceso configural.

RESULTADOS

Una primera acción de los FPM al interactuar con el problema de probar 2 fue leer el enunciado, distinguiendo así condiciones iniciales y exigencias que se expresan en términos de hipótesis y tesis, respectivamente. La coordinación entre las aprehensiones discursivas-operativas que pusieron en juego los FPM, contribuyeron a que se identificaran elementos geométricos claves para establecer una conjetura (situación de truncamiento), y con base en ello iniciasen procesos lógico-deductivos para probarla. El análisis de los datos se presenta por cada FPM.

a. Futuro Profesor de Matemáticas 1

Con base en la lectura del problema, el FPM1 distingue qué elementos matemáticos corresponden a las condiciones (o hipótesis) y cuál a la exigencia (o tesis). Enseguida identifica estos elementos matemáticos sobre la configuración geométrica inicial (aprehensión discursiva). Al analizar la configuración, identifica dos subconfiguraciones como relevantes: los triángulos rectángulos $\triangle ABM\ y\ \triangle ANM$ (aprehensión discursiva) esto es, ve a la configuración inicial como compuesta por partes (aprehensión operativa). Los conocimientos previos favorecen la coordinación entre la aprehensión discursiva y la aprehensión operativa por parte del FPM1, y con ello el planteamiento de una conjetura (situación de truncamiento) que consiste en probar que $\triangle ABM \cong \triangle ANM$. Situado en los triángulos rectángulos $\triangle ABM\ y\ \triangle ANM$, el *FPM*1 detona procesos lógico-deductivos con la finalidad de probar la conjetura. En ese contexto, estableció relaciones de congruencia entre los dos pares $\angle BAM \cong \angle MAN\ y\ \angle AMB \cong \angle NMA$. Asimismo, reconoció que $\overline{AM}$ es lado común de ambos triángulos. A partir de ello, utilizó el criterio de congruencia de triángulos *ALA* (ángulo-lado-ángulo) para afirmar que: $\triangle ABM \cong \triangle ANM$. . Con base en el proceso de prueba, se validó la conjetura y se concluyó que $\overline{BM} \cong \overline{MN}$, lo que se pidió demostrar.

La Tabla 2 resume las aprehensiones operativas, las aprehensiones discursivas y el proceso configural que coordinó el FPM1.

Tabla 2

Acciones del proceso configural del FPM1

Acciones del FPM2	Aprehensiones discursivas	Aprehensiones operativas	Proceso configural
Identifica la hipótesis en el enunciado del problema. **FPM1:** *Para iniciar detecto las hipótesis "tenemos que: $\overline{MN} \perp \overline{AC}$ y también que $\overline{AM}$ es bisectriz del $\angle BAC$".*	Conceptos y propiedades: Segmentos Perpendicularidad Segmentos perpendiculares Bisectriz Ángulo	Modifica mentalmente y razona sobre la configuración geométrica inicial, y decide las etapas a seguir para la resolución del problema.	Contribuye a tener un referente visual más amplio del problema de probar, que favorece la delimitación de una posible estrategia de solución.
En la configuración geométrica inicial "reconoció" dos subconfiguraciones ambos triángulos rectángulos. **FPM1**: *Para ambos triángulos $\triangle ABM$ y $\triangle ANM$.*	Conceptos y propiedades: Triángulo Triángulo rectángulo Ángulo	Mediante su reconocimiento identifica dos subconfiguraciones en la configuración geométrica inicial, y con ello sus elementos.	Contribuyó a tener dos subconfiguraciones geométricas como referente, en las cuales guio su proceso de prueba.
Asocia los elementos de la subconfiguración geométrica con la propiedad de congruencia mediante el criterio ALA. FPM1: *Por hipótesis tenemos que: $\overline{AM}$ es bisectriz del $\angle BAC$, por esta razón divide al ángulo en dos. ángulos iguales, el $\angle BAM = \angle MAN$ (por la definición de bisectriz).* *Por propiedades del triángulo sabemos que sus ángulos internos suman 180º, entonces $\angle BAM + \angle AMB +. \angle MBA = 180°$ y $\angle MAN + \angle NMA + \angle ANM = 180°$ (los cuales son los ángulos del $\triangle ANM$). Sabemos que: $\triangle ABM$ es rectángulo en B , entonces $\angle MBA = \angle ANM = 90°$ y que $\angle BAM = \angle MAN$* *sustituyendo el valor de estos tenemos que:* *$\angle AMB = \angle NMA$* *por el criterio Ángulo-Lado-Ángulo, los triángulos son congruentes…* *Por lo que: $\overline{BM} \cong \overline{MN}$, que era lo que se quería demostrar.*	Conceptos y propiedades: Triángulo rectángulo Ángulos Suma de ángulos internos de un triángulo Criterio de congruencia *A.L.A*	Relaciona elementos de la subconfiguración geométrica. Ángulo: $\angle BAM$ Lado: $\overline{AM}$ Ángulo: $\angle AMB$ (para el $\triangle ABM$) y Ángulo: $\angle MAN$ Lado: $\overline{AM}$ Ángulo: $\angle NMA$ (para el $\triangle ANM$).	La coordinación *aprehensión discursiva-aprehensión operativa* propicia probar que los segmentos son congruentes.

Nota: Elaboración propia

Tabla 3
Acciones del proceso configural del FPM2

Acciones del FPM1	Aprehensiones discursivas	Aprehensiones operativas	Proceso configural
En el enunciado identifica las hipótesis y tesis, posteriormente las representa. **FPM2**: *…tengo por hipótesis;* *1) que él: $\triangle ABC$ es rectángulo en B,* *2) que $\overline{AM}$ es bisectriz del $\angle BAC$, y* *3) $\overline{MN} \perp \overline{AC}$ en N. Y la tesis a probar es $\overline{BM} \cong \overline{MN}$.*	Conceptos y propiedades: Triángulo Triángulo rectángulo Segmentos Perpendicularidad Segmentos perpendiculares Bisectriz Ángulo	Modifica mentalmente y razona sobre la configuración geométrica inicial, y decide las etapas a seguir para la resolución del problema.	Contribuye a tener un referente visual más amplio del problema de probar, que favorece la delimitación de una posible estrategia de solución.
De la configuración geométrica inicial "reconoció" dos subconfiguraciones formadas por dos triángulos. **FPM2**: *Ubiqué los triángulos ($\triangle ABM$ y $\triangle ANM$).*	Conceptos y propiedades: Triángulo Triángulo rectángulo Ángulo	Reconoce e identifica dos subconfiguraciones en la configuración geométrica inicial, y con ello sus elementos.	La coordinación *aprehensión discursiva-aprehensión operativa* contribuyó a tener dos subconfiguraciones geométricas como referente.
Utiliza el criterio de congruencia AAL (erróneo) y asocia los elementos de la subconfiguración geométrica. **FPM2**: *….aplico el criterio de congruencia Ángulo, Ángulo, Lado. Incluso marque los ángulos y el lado.* *Ángulo 1: ($\angle \cong \angle ANM$) por propiedades y de las hipótesis 1 y 3…* *Ángulo 2: ($\angle BAM \cong \angle NAM$) por propiedades y de la hipótesis 2…* *Lado: ($AM \cong \angle AM$) y por el criterio (A-A-L) aseguro que los triángulos son congruentes ($\triangle ABM \cong \triangle ANM$), por lo tanto, concluyo que $\overline{BM} \cong \overline{MN}$.*	Conceptos y propiedades: Triángulo rectángulo Ángulo Criterio de congruencia (erróneo) L-L-A	Relaciona los elementos a la subconfiguración geométrica. Ángulo1: $\angle MBA$ Ángulo2: $\angle BAM$ Lado: $\overline{AM}$ (para el $\triangle ABM$) y Ángulo 1:$\angle MAN$ Ángulo 2:$\angle NMA$ Lado: $\overline{AM}$ (para el $\triangle ABM$)	La coordinación *aprehensión operativa-aprehensión discursiva* propicia una prueba errónea, en la que argumenta que los triángulos $\triangle ABM \cong \triangle ANM$ son congruentes, y con ello $\overline{AM} \cong \overline{MN}$

Nota: Elaboración propia

b. Futuro Profesor de Matemáticas 2

La lectura del problema contribuye a que el FPM2 identifique elementos matemáticos (aprehensión discursiva) que asocia a la hipótesis y con la tesis.

Al analizar la configuración inicial, visualiza dos subconfiguraciones, los triángulos rectángulos $\triangle ABM$ y $\triangle ANM$ (aprehensión operativa) que se forman a partir de la bisectriz $\overline{AM}$. La coordinación de las aprehensiones discursivas-operativas le resultó útil para establecer una conjetura (situación de truncamiento), que consistió en que era suficiente probar la relación $\triangle ABM \cong \triangle ANM$. La prueba de la conjetura dio lugar a procesos lógico-deductivos por parte del FPM2. Es así que, al analizar los triángulos rectángulos $\triangle ABM$ y $\triangle ANM$, identificó relaciones de congruencia entre dos pares de ángulos ($\angle MBA \cong \angle ANM$ y $\angle BAM \cong \angle NAM$. Asimismo, que $\overline{AM}$ es lado común de ambos triángulos. Prueba la conjetura mediante un criterio que resultó erróneo (conjetura sin demostración), al considerar dos ángulos y un lado al que denominó AAL (ángulo-ángulo-lado). Así, afirma que: $\triangle ABM \cong \triangle ANM$ Con base en esta prueba, el FPM2 concluye que $\overline{BM} \cong \overline{MN}$, lo que se le pidió demostrar.

La Tabla 3 resume las aprehensiones operativas, las aprehensiones discursivas y el proceso configural, que coordinó el FPM2.

REFLEXIONES FINALES

A partir de la lectura al problema de probar, los FPM distinguieron condiciones iniciales y exigencias, que nombraron hipótesis y tesis, respectivamente. En el proceso de resolución, los aspectos visuales y los conocimientos previos desempeñaron un papel fundamental en la identificación de una subconfiguración relevante y en las transformaciones que realizaron. La coordinación entre las aprehensiones discursivas-operativas favoreció que los FPM identificaran elementos geométricos claves para establecer la conjetura (situación de truncamiento), y con base en ello iniciar procesos lógico-deductivos para probarla. Las transformaciones que realizaron inicialmente fueron mentales (aprehensión operativa) las cuales evidenciaron durante la entrevista a profundidad. Identificaron una subconfiguración útil: los triángulos rectángulos. Este hecho favoreció el planteamiento de una conjetura y su prueba, que fue una prueba sin demostración establecida por el FPM2. En ella utilizaron de manera errónea propiedades geométricas, como el hecho de expresar que un criterio de congruencia se establece por la relación entre ángulo-ángulo-lado.

REFERENCIAS

Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Villegas, M., & Figueroa, R. (2009). *Geometría y trigonometría*. Pearson.

Barrantes-López, M., & Balletbo-Fernández, I. (2012). Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria. *Revista internacional de investigación en ciencias sociales, 8*(1), 25–42. http://revistacientifica.uaa.edu.py/index.php/riics/article/view/12

Cabañas-Sánchez, G., & Flores-Sandoval, I. (2022). Razonamiento configural en futuros profesores de matemáticas al resolver problemas de probar en geometría. En A. Rosas Mendoza (Ed.), *Avances en Matemática Educativa. El profesor factor importante en el aula* (pp. 69–84). Editorial Lectorum.

Creswell, J.W. (2013). *Qualitative inquiry research design. Choosing among five approaches.* Sage.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processes. En R. Sutherland, & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagenery with Computers in Mathematical Education* (pp. 142–157). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0_10

Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En R. Duval & A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas Énfasis* (pp. 13–60). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. https://bit.ly/3vtdn4B

Fischbein, E. (1993). The theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139–162. https://doi.org/10.1007/BF01273689

Flores-Sandoval, I. (2022). *Razonamiento configural en futuros profesores de matemáticas en procesos de prueba en contexto geométrico* [Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero].

Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. En L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics. Perspectives on practice* (pp. 121-139). Routledge.

Komatsu, K., Jones, K., Ikeda, T., & Narazaki, A. (2017). Proof validation and modification in secondary school geometry. *Journal of Mathematical Behavior, 47*(1), 1–15. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.05.002

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.

Stylianides, A. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321. https://doi.org/10.2307/30034869

Stylianides, A. (2008). An analytical framework of reasoning-and-proving. *For the learning of mathematics, 28*(1), 9–16. http://www.jstor.org/stable/30034869

Torregrosa, G., & Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(2), 275–300. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33500205