Razonamiento matemático de dos profesores de secundaria en el marco de la generalización de patrones figurales

Karina Nuñez-Gutierrez [1]
Guadalupe Cabañas-Sánchez [2]

RESUMEN

El objetivo de esta investigación es describir el razonamiento matemático basado en los argumentos de dos profesores de secundaria, en el marco de la generalización de patrones cuadráticos figurales. El estudio se fundamenta en una propuesta teórica-metodológica que articula definiciones de Peirce con elementos del modelo argumentativo de Toulmin para delimitar el razonamiento desde los argumentos. Los resultados evidencian que los profesores se movilizaron en el razonamiento abductivo, inductivo y deductivo, basados en acciones como el conteo estratégico, la composición y descomposición del patrón figural, formulación, verificación y validación de conjeturas.

PALABRAS CLAVE

Razonamiento matemático, Argumentos, Generalización, Patrón figural

---

[1] kgutierrez@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, México
https://orcid.org/0000-0001-7441-2719

[2] gcabanas@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, México
https://orcid.org/0000-0002-2471-0440

Nuñez-Gutierrez, K., & Cabañas-Sánchez, G. (2024). Razonamiento matemático de dos profesores de secundaria en el marco de la generalización de patrones figurales. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 467–474). Editorial SOMIDEM.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-55

INTRODUCCIÓN

El razonamiento es uno de los procesos fundamentales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Desde el currículo escolar se establece como demanda cognitiva que debe ser desarrollada en todos los niveles escolares, y se vincula con otras actividades matemáticas, como la exploración de casos particulares, formulación de conjeturas, generalización y argumentación (National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM], 2000; Secretaría de Educación Pública, [SEP], 2017). Para su desarrollo, el profesor asume un rol importante porque es él quien debe promover el razonamiento en sus estudiantes, a través de distintas experiencias y en condiciones de enseñanza (Brodie, 2010; Rapanta, 2018).

Una revisión a la literatura permite establecer que la mayoría de las investigaciones enfocadas en el razonamiento matemático se han realizado con estudiantes de distintos grados escolares y profesores en formación. Las investigaciones orientadas hacia el estudiante reportan que las tareas desafiantes son ambientes que favorecen el estudio del razonamiento matemático (Da Ponte & Quaresma, 2016), pero que no son suficientes para garantizar el desarrollo del razonamiento (Ball & Bass, 2003). En este contexto, los estudiantes han presentado dificultades al resolver tareas matemáticas, posiblemente porque el aprendizaje recibido ha sido sistemático, siendo el aprendizaje de las matemáticas un conjunto de procedimientos algorítmicos e imitación que no promueven la reflexión, el análisis o la creatividad (Lithner, 2000; Lithner, 2008; Sukirwan & Herman, 2018).

Por tanto, se considera oportuno profundizar sobre el razonamiento matemático del profesor, ya que, a través de este análisis, se podría tener un acercamiento a sus conocimientos matemáticos, cómo es su proceso de enseñanza y qué estrategias utiliza en el desarrollo del razonamiento de sus estudiantes. Thompson (2015) menciona que, generalmente, los profesores conectan su pensamiento, decisión y actuación en los procesos de resolución de tareas matemáticas con la idea del acto de "saber hacer" en los procesos pedagógicos, por lo que las investigaciones orientadas al profesor de matemáticas son favorables y convenientes para comprender cómo son sus prácticas docentes. Sin embargo, son pocas las investigaciones que exploran y explican el razonamiento del profesor en servicio, quien es el responsable de fomentar e interpretar el razonamiento matemático en sus estudiantes (Sosa-Moguel et al., 2019). Los estudios enfocados en el razonamiento del profesor reportan que este tiene pocos conocimientos sobre el razonamiento, su desarrollo dentro del aula de clases y comprensión sobre cómo es el razonamiento de sus estudiantes.

Las investigaciones sobre el razonamiento matemático y la generalización de patrones en profesores en formación y en servicio se han enfocado en el estudio de uno o dos tipos de razonamientos matemáticos, como el abductivo, inductivo y covariacional (Rivera & Becker, 2007; Sosa-Moguel et al., 2019; Wilkie, 2019). En el marco de la generalización de patrones no lineales, como los cuadráticos, se han reportado dificultades (Nuñez-Gutierrez y Cabañas-Sánchez, 2022) asociadas con la identificación de la regularidad del patrón, con el establecimiento de relaciones funcionales entre los objetos del patrón y el número de etapa, y con la representación del comportamiento identificado a través de notaciones simbólicas (aritméticas y algebraicas). Además, se reconoció que, en el análisis de los patrones, su comportamiento solo se representa de forma recursiva más que el de correspondencia.

Existe una relación indiscutible entre el razonamiento y la argumentación, debido a que si un individuo formula uno o más argumentos, entonces se genera un conjunto de razones para mostrar cómo estas tienen éxito al darle fuerza a la aserción, donde el razonamiento está inmerso en los argumentos que refieren a una serie de afirmaciones o conclusiones que resultan de inferencias sobre entidades matemáticas (Conner et al., 2014). Rapanta (2018) señala que hay una triple relación entre el razonamiento, la argumentación y el aprendizaje, la cual es proporcionada por teorías bien establecidas del razonamiento y argumentación, como la base de la justificación de un modo pedagógico de enseñanza basado en inferencias lógicas. De ahí el interés de esta investigación por describir el razonamiento matemático basado en los argumentos de dos profesores de secundaria en el contexto de la generalización de patrones cuadráticos figurales.

MARCO CONCEPTUAL

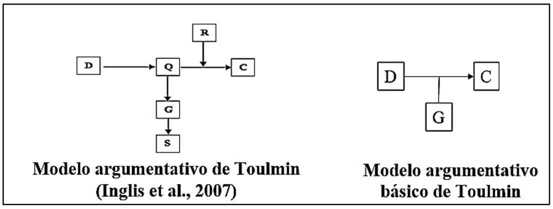
Asumimos el razonamiento matemático como un proceso del pensamiento que involucra el desarrollo y evaluación de argumentos a través de la conjeturación y la generalización (Lannin et al., 2011). Además, es un proceso que implica la manipulación y el análisis de objetos, representaciones, diagramas, símbolos o declaraciones para obtener conclusiones basadas en evidencias (Battista, 2017).

En relación con la argumentación, el razonamiento matemático agrupa un conjunto de argumentos (Toulmin et al., 1984) que, desde la comprensión de su estructura, permite la profundización del razonamiento en determinadas etapas de un proceso argumentativo. El argumento es una estructura compleja de datos (Figura 1) que involucra un movimiento, desde los datos (D) hasta establecer una conclusión (C).

El movimiento de la evidencia a la conclusión es la certeza de que la línea argumentativa se ha realizado exitosamente. Este movimiento o conexión es permitido por la garantía (G), que a su vez tiene un respaldo o soporte (S), un cualificador modal (Q) que indica el grado de fuerza o probabilidad de la conclusión, y, ocasionalmente, pueden presentarse objeciones o refutaciones (R). Para fines de esta investigación, consideramos el modelo básico de Toulmin, que refiere al núcleo del argumento (ver Figura 1).

Figura 1

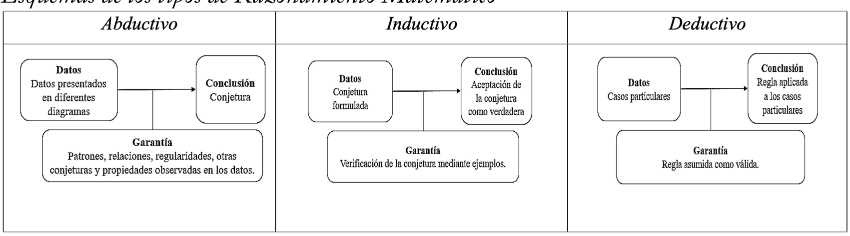
Modelo argumentativo de Toulmin



Esta estructura nos permite identificar alguno(s) de los tres tipos de razonamiento matemático: abductivo, inductivo y deductivo. La abducción y la inducción implican la formulación y verificación de conjeturas, mientras que la deducción, la validación de la conjetura para garantizar su veracidad (Polya, 1966). Para la identificación y descripción de los tipos de razonamiento matemático, nos apoyamos de la propuesta teórica-metodológica de Soler-Álvarez y Manrique (2014), mostrada en la Figura 2.

Figura 2

Esquemas de los tipos de Razonamiento Matemático



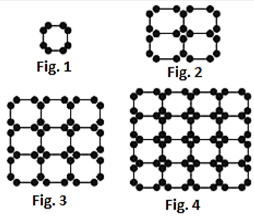
Nota. Fuente: Soler-Álvarez y Manríque (2014)

Ahora bien, la generalización de patrones es el proceso de identificación de un comportamiento regular de los casos particulares de una sucesión o secuencia, con el propósito de extender esa regularidad identificada y construir una expresión o regla general que represente y relacione todos los términos de la sucesión (Radford, 2008). Además, es uno de los objetivos claves en el aprendizaje de las matemáticas porque promueve la formulación y justificación de conjeturas a través del estudio de patrones matemáticos.

METODOLOGÍA

Es una investigación de tipo cualitativa (Cohen et al., 2018) implementada a través de un curso-taller en modalidad virtual, en el que participaron dieciséis profesores de matemáticas de secundaria de tres países de Latinoamérica. Dos de los profesores (P1 y P2) fueron seleccionados para el análisis según los criterios siguientes: a) participación voluntaria en la investigación, b) resolver las tareas de generalización de patrones cuadrático, y c) participar en una entrevista semiestructurada. Para objetivos de este artículo, el análisis lo centramos en la tarea presentada en la Tabla 1.

Tabla 1
Tarea de generalización de patrones figurales cuadráticos

Tarea de los puntos y lados	
Teniendo en cuenta las figuras, responde las siguientes interrogantes y argumente ampliamente su respuesta. a. Encuentre una regla general para el número total de puntos en cualquier figura. b. Encuentre una regla general para el número total de lados en cualquier figura.	

Fuente: Adaptada de Rivera (2010)

RESULTADOS

Los resultados evidenciaron tres tipos de razonamiento matemático en los profesores de matemáticas durante la resolución de la tarea, la cual les demandó la construcción de dos reglas generales, una asociada con la variable punto y otra con la variable lados.

Razonamiento abductivo

En la formulación de la conjetura asociada con la variable puntos, ambos profesores realizaron inicialmente una descomposición del patrón figural; identificaron su comportamiento y establecieron una relación de correspondencia entre el número de puntos y el número de figura. El comportamiento que identificaron los profesores fue representado a través de expresiones algebraicas, donde el número de figura es presentado en términos de n (ver Tabla 2).

En relación con la variable lados, P1 argumentó que se basó en el método de diferencias para identificar el comportamiento del patrón, que consistió en determinar los coeficientes de la sucesión cuadrática. P2 siguió la ruta de la composición y descomposición de la figura para establecer la relación de correspondencia entre el número de lados y el número de figura. Ambos profesores representaron las relaciones en términos de n.

Este tipo de razonamiento se reconoce en los profesores en el momento en que evalúan las conjeturas que formularon a través de un razonamiento abductivo con relación a las variables puntos y lados del patrón figural. Los profesores se apoyaron en una tabla de doble entrada para el registro del total de puntos y lados por figura. La evaluación consistió en la sustitución en las conjeturas formuladas del total de número de puntos y de lados de las tres primeras figuras.

Tabla 2

Tarea de generalización de patrones figurales cuadráticos

	Puntos	Lados
P1	$8 + 3\,[4\,(n - 1)]{+}4\,(n - 1)^2$	$2\,[n\,(n{+}1)]$
P2	$2\,[\,2\,(n\,(n + 1)]$	$2n^2 + 2n$

Nota. Fuente: Elaboración propia

Razonamiento inductivo

Este tipo de razonamiento se reconoce en los profesores en el momento en que evalúan las conjeturas que formularon a través de un razonamiento abductivo con relación a las variables puntos y lados del patrón figural. Los profesores se apoyaron en una tabla de doble entrada para el registro del total de puntos y lados por figura. La evaluación consistió en la sustitución en las conjeturas formuladas del total de número de puntos y de lados de las tres primeras figuras.

Razonamiento deductivo

Este tipo de razonamiento se evidenció sólo en el P1 cuando validó la conjetura asociada a la variable puntos. El profesor justificó la expresión matemática por medio de la comparación de la regla general sobre la variable puntos, construida a través del método de diferencias. Esta expresión matemática es de la forma $4n^2 + 4n$, y es igual a la conjetura formulada por abducción y verificada por inducción. Con respecto a la variable de los lados, P1 y P2 no evidenciaron el razonamiento deductivo.

REFLEXIONES FINALES

En el razonamiento matemático de los dos profesores de matemáticas de secundaria se destacaron acciones abductivas, inductivas y deductivas. En ellas prevalecieron el conteo estratégico, la composición y descomposición del patrón figural, la formulación, verificación y validación de las conjeturas, según la variable puntos y lados de la figura.

REFERENCIAS

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematical reasonable in school. En J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Ed.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27–44). National Council of Teachers Mathematics.

Battista, M. T. (2017). Mathematical reasoning and sense making. En M. T. Battista, J. M. Baek, K. Cramer, & M. Blanton (Eds.), *Reasoning and Sense Making in the Mathematics Classroom: Grades 3–5, 105* (pp. 1–19). National Council of Teachers of Mathematics.

Brodie , K. (2010). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09742-8

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education. Routledge*. https://doi.org/10.4324/9781315456539

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(3), 181–200. https://doi.org/10.1080/10986065.2014.921131

Da Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics, 93*(1), 51–66. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9681-z

Lannin, J., Ellis, A. B., Elliott, R., & Zbiek, R. M. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. National Council of Teachers of Mathematics.

Lithner, J. (2000). Mathematical Reasoning in School Tasks. *Educational Studies in Mathematics, 41*(2), 165–190. https://doi.org/10.1023/A:1003956417456

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in mathematics, 67*(3), 255–276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NTCM.

Nuñez-Gutierrez, K., & Cabañas-Sánchez, G. (2022). Types of mathematical reasoning evidenced by a middle school teacher in pattern generalization. En Lischka, A. E., Dyer, E. B., Jones, R. S., Lovett, J., Strayer, J., & Drown, S. (Eds.), *Proceedings of the forty-fourth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (694–701). Middle Tennessee State University.

Polya, G. (1966). *Matemática y razonamiento plausible*. Technos.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM, 40*(1), 83–96. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0

Rapanta, C. (2018). Teaching as Abductive Reasoning: The Role of Argumentation. *Informal Logic, 38*(2), 293–311. https://doi.org/10.22329/il.v38i2.4849

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2007). Abduction–induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 26*(2), 140–155. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.05.001

Secretaría de Educación Pública. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica.* SEP.

Soler-Álvarez, M., & Manrique, V. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las ciencias, 2*(32), 191–219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1026

Sosa-Moguel, L., Aparicio, E., & Cabañas, G. (2019). Characterization of inductive reasoning in middle school mathematics teachers in a generalization task. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 14*(3), 563–581. https://doi.org/10.29333/iejme/5769

Sukirwan, D., & Herman, T. (2018). Analysis of students' mathematical reasoning. *Journal of Physics: Conference Series, 948*(1), 1–7. https://doi.org/10.1088/1742-6596/948/1/012036

Thompson, P. W. (2015). Researching Mathematical Meanings for Teaching1, 2. En L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 435–461). Routledge.

Toulmin, S. E., Rieke, R. D., & Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning.* Macmillan Publishers.

Wilkie, K. (2019). Investigating secondary students' generalization, graphing, and construction of figural patterns for making sense of quadratic functions. *Journal of Mathematical Behavior, 54*(17), 1–17. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.005