

Razón de cambio y pendiente en la educación matemática

Martha Iris Rivera López ¹

Crisólogo Dolores Flores ²

RESUMEN

El concepto de razón de cambio y el de pendiente están estrechamente relacionados. Ambos son esenciales para la comprensión de otros conceptos de la matemática avanzada, así como para la interpretación de diversas situaciones de la vida cotidiana. Por ello, en el presente Grupo de Trabajo Temático se tiene como objetivo debatir y reflexionar sobre los estudios que se han realizado en la educación matemática con respecto a estos conceptos, centrando la atención en los diversos tipos de currículum: oficial, potencial, implementado y el aprendido. En particular, para esta edición se presentaron dos investigaciones, una se centró en el uso de la razón de cambio como elemento para la lectura e interpretación de gráficas en contextos de la Física, y la otra mostró una revisión de la literatura con respecto al razonamiento covariacional. Estos trabajos fueron de suma importancia porque dejaron sugerencias de futuras investigaciones.

PALABRAS CLAVE

Razón de cambio, Pendiente, Reflexión, Aplicaciones

¹ irivera@uagro.mx

Universidad Autónoma de Guerrero, México

<https://orcid.org/0000-0001-5597-0758>

² cdolores2@gmail.com

Universidad Autónoma de Guerrero, México

<https://orcid.org/0000-0002-2748-6042>

INTRODUCCIÓN

Los conceptos de pendiente y razón de cambio son fundamentales en el currículo de matemáticas de diversos países, y están presentes desde la educación secundaria hasta el nivel superior (Dolores-Flores et al., 2020; Dolores & Mosquera, 2022; Stanton & Moore-Russo, 2012). No obstante, las investigaciones han reportado que tanto profesores como estudiantes enfrentan diversas dificultades, incluyendo el reconocer y entender la conexión que se da entre estos conceptos, así como de otras ideas relacionadas (Avcu & Türker, 2022; Dolores-Flores et al, 2019; Teuscher & Reys, 2012). Esto, de alguna manera, deja ver la mínima comprensión que se tiene sobre dichos conceptos. Por tanto, el objetivo de este Grupo de Trabajo Temático (GTT) es fomentar la discusión y reflexión entre investigadores y profesores acerca de los objetivos y logros que han tenido los diversos estudios, así como de sus experiencias didácticas al enseñar y aprender estos conceptos.

La relevancia de este GTT radica en que la discusión y la reflexión proporcionarán elementos esenciales para establecer una conexión entre profesores en formación y en servicio, así como con los investigadores. Por un lado, esto permitirá que los docentes tomen conciencia del papel fundamental que desempeña su práctica educativa, así como de su propio conocimiento acerca de los conceptos en cuestión. Como puede observarse, ellos representan el primer vínculo para abordar la problemática en torno a la enseñanza de la pendiente y la razón de cambio. Por otro lado, el conocer la forma en que los profesores llevan a cabo su práctica docente proporcionará a los investigadores ideas claves para explicar los fenómenos que surgen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de estos conceptos. Además, ambas experiencias, tanto de docencia como de investigación, pueden ser de gran utilidad para el diseño de secuencias didácticas o de tareas que contribuyan a mejorar el entendimiento de estos conceptos.

La problemática principal que se trabaja en este GTT está centrada en la conexión entre el concepto de razón de cambio y pendiente, considerando diversas representaciones y contextos. Esto se analizará desde lo que se ha reportado en diferentes tipos de currículos: el oficial (el que declara la Secretaría de Educación Pública), potencial (lo que consideran los libros de texto), impartido (lo que enseña el profesor en el aula) y el aprendido (el que realmente aprende el estudiante).

¿Qué antecedentes hay respecto al estudio de los conceptos de razón de cambio y pendiente?

La experiencia docente de los coordinadores de este GTT en el nivel educativo básico, medio superior y superior ha sido fundamental para analizar los contenidos de los programas de estudio y los libros de texto de matemáticas. Esto ha permitido identificar coincidencias con lo que han reportado

las investigaciones hechas sobre la manera en que se abordan estos conceptos. En este sentido, se observa que el concepto de razón de cambio se presenta con la fórmula para calcular la pendiente de una recta, donde la enseñanza y aprendizaje se enfoca en memorizarse y practicar la fórmula $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, destacando una escasa o nula atención sobre la interpretación de lo que significa el resultado en el contexto dado, u omitiendo las unidades de medida, tal como lo han reportado Nagle et al. (2013), Salgado et al. (2019) y Teuscher y Reys (2012). En la educación secundaria, para la secuencia de enseñanza de estos conceptos se sigue un patrón específico. En primer lugar, se introduce el concepto de pendiente de manera aislada y luego se relaciona con las funciones lineales. Posteriormente, se introduce el concepto de razón de cambio, haciendo referencia a la fórmula de la pendiente. Este enfoque puede llevar a la hipótesis de que algunos profesores, e incluso estudiantes, tienden a considerar que la pendiente y la razón de cambio son los mismos conceptos. En el nivel de bachillerato o educación media superior, la pendiente se aborda como un componente fundamental de la geometría analítica, y se vincula posteriormente con la ecuación de la recta. Sin embargo, al enseñar funciones lineales, el valor “*m*” a menudo se trata como un parámetro y rara vez se relaciona con la medida de la inclinación de la recta que representa la función lineal. A medida que se avanzan en otros tipos de funciones, como cuadráticas, polinomios y exponenciales, la discusión se enfoca en la forma de los gráficos en lugar de explorar la covariación entre las dos variables.

Lo anterior da elementos para tener la hipótesis de que la secuencia de enseñanza que tienen estos conceptos puede ser una de las causas que contribuyen a la confusión, tanto en estudiantes como en algunos profesores, cuando se trata de entender pendiente y razón de cambio en funciones no lineales, más aún cuando se trabaja la razón de cambio instantánea. Otra de las razones puede ser a que los profesores que están formando no tiene clara la conexión entre estos conceptos ni el conocimiento de las diferentes representaciones, tal como lo han reportado Avcu y Türker (2022), Diamond (2020) y Paolucci y Stepp (2021).

Participantes en el GTT

En esta primera edición de este GTT se recibieron dos ponencias. La primera destacó la implementación de una secuencia didáctica en la que la razón de cambio desempeñó un papel fundamental en el proceso de diseño, modelado e interpretación de gráficas en relación con fenómenos de variación. La segunda ponencia se centró en una revisión sistemática de la literatura en el campo del razonamiento covariacional en Educación Matemática. Es relevante señalar que los presentadores de estas ponencias residían en dos ubicaciones diferentes de México: uno en Aguascalientes y el otro en

Guerrero, respectivamente. Cabe mencionar que sólo el primer ponente envió artículo para su publicación.

La primera ponencia presentó aspectos relevantes de una secuencia didáctica diseñada para estudiantes de licenciatura en matemáticas, con el propósito de que se dote de significado a la fórmula algebraica de la razón de cambio. Para lograr esto, las actividades se enfocaron en el análisis e interpretación de gráficas que representan fenómenos de variación, tanto en intervalos como en puntos específicos. En la secuencia se promueve el uso de descripciones verbales y representaciones gráficas para enriquecer el significado de razón de cambio en el contexto de la física a través del cálculo y estimación de velocidades promedio e instantáneas.

Los resultados de la implementación de la secuencia fueron significativos para el GTT, ya que, a pesar de que el investigador propuso la secuencia, se identificaron dificultades en la transición de razón de cambio a razón de cambio instantánea de manera gráfica, así como para vincularlo visualmente con las pendientes de las rectas secantes y la pendiente de la recta tangente. Este proceso de pasar de la inclinación de una recta a la inclinación de una curva planteó contradicciones con las concepciones y conocimientos previos de los participantes. Durante la sesión de preguntas surgieron reflexiones importantes, especialmente en torno a cómo considerar los conocimientos previos al diseñar futuras secuencias didácticas. Esto se plantea como un camino para lograr cambios sustanciales en las concepciones de los estudiantes y de los profesores. Estudios como el de Salgado y Dolores (2021) también han identificado la resistencia a aceptar el concepto de la pendiente en un punto, ya que muchos consideran que hablar de pendiente requiere al menos dos puntos para su cálculo.

Por otro lado, la ponencia sobre la revisión sistemática, en cierto sentido, tuvo un impacto limitado en el debate que se esperaba para este GTT. No obstante, proporcionó una visión panorámica importante de diversas facetas de la investigación sobre el razonamiento covariacional. Esto incluyó la exposición de los métodos de investigación utilizados, los países en los que se han llevado a cabo estudios, los distintos niveles educativos abordados y las variadas propuestas implementadas, entre otros aspectos relevantes. Sin embargo, la pregunta que direccionó el debate se centró en la pertinencia del estudio y la contribución que este podría aportar tanto a los docentes como a los investigadores. La replica del ponente no fue suficiente, por lo que se le sugirió reflexionar sobre la pertinencia del estudio.

Prospectiva del GTT

La participación en esta primera edición del GTT fue reducida, aunque de gran relevancia para aquellos interesados en la temática, en especial para quienes están iniciando su exploración en el tema. Se tenía la expectativa de

contar con una mayor cantidad de trabajos de investigación, con el fin de fomentar una reflexión más exhaustiva sobre el estado actual de la conexión entre la pendiente y la razón de cambio, y lo que se ha encontrado en el campo de la investigación. A partir del análisis y debate, se buscaba formular propuestas de investigación o diseñar tareas que permitan continuar estudiando la problemática existente y contribuir a su mejora. A pesar de la participación reducida, los participantes pudieron llevarse ideas sobre posibles direcciones futuras de investigación y considerar aspectos clave para proyectos posteriores.

Para la próxima edición sería sumamente enriquecedor abordar la discusión y reflexión sobre cómo los profesores están enfrentando el desafío de enseñar estos conceptos en el contexto de la implementación del nuevo modelo educativo en México. Así mismo, sería valioso explorar las propuestas y enfoques que los investigadores en matemática educativa están desarrollando para adaptarse al enfoque de la Nueva Escuela Mexicana. La relevancia de continuar en esta línea de investigación radica en la aplicabilidad de estos conceptos en la vida cotidiana y en una variedad de disciplinas, incluyendo la física, la economía, la biología, la ingeniería y la estadística. Estos conceptos son fundamentales para analizar y resolver problemas del mundo real, como en el ámbito de la economía y la estadística, donde su comprensión es esencial para tomar decisiones informadas en cuestiones financieras y empresariales.

Dado que la educación desempeña un papel crítico en la preparación de los estudiantes para enfrentar los desafíos del mundo real, un enfoque en la enseñanza efectiva de la pendiente y la razón de cambio en el nuevo modelo educativo es de gran importancia. En este sentido, la próxima edición del GTT podría proporcionar un espacio valioso para discutir, reflexionar y compartir experiencias sobre la implementación de estos conceptos en el aula, así como para explorar las investigaciones más recientes y las estrategias pedagógicas que promuevan una comprensión sólida de la pendiente y la razón de cambio en un contexto de aprendizaje dinámico y cambiante.

Para alcanzar las expectativas, los coordinadores de este GTT están comprometidos a realizar mayor difusión y divulgación del grupo, además de extender la invitación a profesores en servicio de diferentes niveles educativos.

REFERENCIAS

- Avcu, S., & Türker, B. (2022). Prospective middle school mathematics teachers' conceptualizations of slope. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(11), 3115–3137.
<https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2073478>

- Diamond, J. M. (2020). Mathematical knowledge for teaching slope: Leveraging an intrinsic approach. *Investigations in Mathematics Learning*, 12(3), 163–178. <https://doi.org/10.1080/19477503.2020.1754091>
- Dolores, C., & Mosquera, G. A. (2022). Conceptualizaciones de la pendiente en el currículum colombiano de matemáticas. *Educación Matemática*, 34(2), 217–244. <https://doi.org/10.24844/em3402.08>
- Dolores-Flores, C., Rivera-López, M. I., & García-García, J. (2019). Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(3), 369–389. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1507050>
- Dolores-Flores, C., Rivera-López, M. I., & Moore-Russo, D. (2020). Conceptualizations of slope in Mexican intended curriculum. *School Science and Mathematics*, 120(2), 104–115. <https://doi.org/10.1111/ssm.12389>
- Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J., & Martin, K. (2013). Calculus students' and instructors' conceptualizations of slope: A comparison across academic levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11(6), 1491–1515. <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9411-2>
- Paolucci, C., & Stepp, Z. A. (2021). Examining preservice teachers' understanding of slope through posing problems and embedding learning in real-world contexts. *Teaching and Teacher Education*, 107(1), 103476. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2021.103476>
- Salgado, G., Rivera, M. I., & Dolores, C. (2019). Conceptualizaciones de pendiente: Contenido que enseñan los profesores del bachillerato. *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 15(57), 41–56. <https://bit.ly/4auiTCT>
- Salgado, G., & Dolores, C. (2021). Imagen del concepto de pendiente evocado por profesores del bachillerato. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 109(1), 89–109. <https://bit.ly/49hMy1d>
- Stanton, M., & Moore-Russo, D. (2012). Conceptualizations of slope: A review of state standards. *School Science and Mathematics*, 112(5), 270–277. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00135.x>
- Teuscher, D., & Reys, R. E. (2012). Rate of change: AP calculus students' understandings and misconceptions after completing different curricular paths. *School Science and Mathematics*, 112(6), 359–376. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00150.x>