La razón de cambio como parte del proceso de diseño, modelado e interpretación de gráficas en fenómenos de variación

Arturo Leandro Valdivia [1]

RESUMEN

La razón de cambio es un conocimiento inmerso en los procesos que fundamentan el cálculo, sin embargo, está relegado a un simple algoritmo. Por ello, la presente investigación tiene como objetivo dotar a la razón de cambio de un significado que contemple una dualidad entre el análisis geométrico y algebraico, integrando los distintos procesos inmersos en cada representación. Para lograrlo, se diseñó una secuencia de actividades cuya base es el análisis, diseño e interpretación gráfica de la variación en un intervalo o punto, utilizando como método el cálculo y estimación de la razón de cambio en distintas representaciones. Esta secuencia fue aplicada y valorada con las respuestas obtenidas por un grupo de estudiantes de primer y segundo semestre de nivel licenciatura.

PALABRAS CLAVE

Razón de cambio, Gráfica, Conocimientos previos, Procesos, Derivada.

[1] arturo2lv@hotmail.com
Instituto Tecnológico de Aguascalientes, México
https://orcid.org/0009-0000-3885-4632

Leandro Valdivia, A. (2024). La razón de cambio como parte del proceso de diseño, modelado e interpretación de gráficas en fenómenos de variación. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 489–500). Editorial SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-58

INTRODUCCIÓN

Stewart (2012) define a la razón de cambio como el cociente de $\Delta y = f(x_1) - f(x_2)$ entre $\Delta x = x_1 - x_2$, donde y es una función de x, tal que $y = f(x)$ con x que cambia de x_1 a x_2, eso es: .

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Además, interpreta la razón de cambio instantánea,

$$\lim_{\Delta x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta y} = \lim_{x_1 \to x_2} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

como la pendiente de la recta tangente a la curva, la velocidad instantánea, y posteriormente la reconoce como la derivada, mostrando que todas son la misma expresión analítica. Otros autores muestran una organización similar al introducir la derivada (e.g., Larson & Edwards, 2010; Purcell, et al., 2007).

La razón de cambio forma parte de la Educación Media Superior en México. En el programa de la Dirección General de Bachilleratos [DGB], (2013), su interpretación física y geométrica es una competencia para desarrollar en el tercer bloque de la asignatura de cálculo diferencial. En las notas de cuatro estudiantes de diferentes bachilleratos encontramos que el tema se trabaja en las interpretaciones de la derivada y en la regla de los 4 pasos como una fórmula matemática que permite llegar al valor deseado, sin mostrar una comprensión más allá del algoritmo numérico.

Diversas investigaciones destacan a la razón de cambio como un conocimiento que antecede al estudio formal del cálculo, y a la necesidad de su comprensión para poder asimilar algunos conceptos como la derivada (Carlson et al., 2002; Doerr & O'Neil, 2011). También expresan que existe una falta de comprensión del elemento matemático y que es percibido por la mayoría de los estudiantes sólo como un algoritmo.

En las investigaciones de Carlson et al. (2002) y Doerr y O'Neil (2011) se presentan actividades que involucran fenómenos de variación, y se modelan y analizan gráficos a partir del cambio entre variables, donde la representación física se sugiere como una valiosa herramienta en el desarrollo de razonamientos. Estos autores reportan resultados positivos al interpretar la razón de cambio cuando se proporciona información gráfica en fenómenos de movimiento. Otras investigaciones que exploran conceptos variacionales también reportan resultados favorables al trabajar con el contexto de la velocidad sobre gráficos de movimiento (Dolores-Flores et al., 2016; Nemirosky, 1994).

La literatura analizada ubica al análisis de la razón de cambio instantánea en los problemas del cálculo de la velocidad y la recta tangente como un precedente importante del estudio de la derivada. Muestra que escolarmente se profundiza más en los desarrollos algebraicos al abordar los problemas, lo que puede ser la causa de que sea percibida sólo como un algoritmo porque son las actividades que se realizan las que dan forma a los objetos (Tall, 2008; Sfard, 1994).

Lo anterior lleva a plantear la pregunta: ¿Qué interpretación de la razón de cambio se genera en estudiantes universitarios al realizar problemas que implican el análisis gráfico de la velocidad global, en secciones y puntual de un objeto, con técnicas geométricas y algebraicas?

Para responder a esta pregunta, la investigación muestra una secuencia de actividades donde se estima, se interpreta y se calcula la velocidad en gráficas distancia-tiempo, con el objetivo de desarrollar un significado geométrico-analítico de la razón de cambio asociado a la variación en un punto.

MARCO TEÓRICO

Las bases teóricas que fundamentan el diseño de la secuencia se sustentan en tres pilares: la experiencia y conocimientos previos de los estudiantes, la relación proceso-objeto, y la interpretación gráfica bajo un contexto definido.

El papel de la experiencia y los conocimientos previos se basa en las investigaciones de Tall (2008) y Sfard (1994; 1998), quienes señalan que estos son indispensables e influyen en la estructura y significado que toman los nuevos conocimientos a través de los conceptos met-before y metáfora.

- La metáfora es "una asignación de un dominio conceptual en otro y su esencia es entender y experimentar un tipo de cosa en términos de otra" (Sfard, 1994, p. 46). Se establece que la experiencia es la principal fuente de comprensión y que nuestro entendimiento está relacionado directamente con la forma en que experimentamos; en consecuencia, "todas las abstracciones matemáticas están estrechamente conectadas y limitadas por la naturaleza de nuestros encuentros con una realidad física" (Sfard, 1994, p. 47).
- *Met-before* es "una estructura mental que se tiene ahora, como resultado de las experiencias previas específicas del individuo" (Tall, 2008, p. 2), las cuales surgen de manera diferente y en diversos contextos para cada individuo. Dicha diversidad genera que la comprensión individual opere de forma desigual; además, resalta la existencia de *Met-before* que benefician o perjudican a la adquisición de un nuevo conocimiento.

La relación proceso-objeto es analizada mediante dos elementos teóricos, el procept y la reificación, términos expuestos por Tall (2008) y Sfard (1991; 1994) respectivamente. Se señala que primero se debe desarrollar una familiaridad y entendimiento de los procesos inmersos en un objeto matemático para lograr su comprensión.

- La reificación consiste en una transición del pensamiento desde un modo operativo a una estructura de conocimiento (Sfard, 1994). Se obtiene con la adquisición de metáforas que parten de la familiarización con los procesos operativos inmersos en el objeto hasta el punto de interiorizarlos en una representación mental del desarrollo operativo, que posteriormente la condensa con los resultados (se establece una relación insumo producto), y finaliza con una estructura teórica que nos permite apreciar al objeto con una luz totalmente diferente.
- El *procept* es una estructura mental que dota a los signos de un significado dual, en el que se capsulan el proceso y el concepto (Gray & Tall 1994). Es el final de una secuencia que inicia con desarrollos que se aplican a nivel rutina de forma eficiente (nivel procedimental). Se desarrolla en el momento en que se logran realizar las tareas de forma flexible, al relacionar varios procedimientos y elegir el más eficiente para resolver una tarea (nivel proceso), y finaliza cuando se logra un pensamiento simbólico con un significado dual (*procept*).

La interpretación gráfica esta relacionada directamente con su representación. Esta última fomenta el desarrollo de una concepción estructural, ya que es una imagen mental, compacta e integrada de un concepto (Sfard, 1991). Además, la interpretación y comprensión de la gráfica dependen del dominio de los conceptos implicados y de la familiaridad con las situaciones que dieron origen a los datos (Roth 2003; 2004; Roth & Bowen 2001).

METODOLOGÍA

Diseño de la secuencia

Previo al diseño de la secuencia, se aplicó un cuestionario diagnóstico a 17 estudiantes que cursaban el primer semestre de la licenciatura en matemáticas, con la finalidad de reconocer los conocimientos previos y estrategias que se exteriorizan al resolver problemas que implicaban modelar, interpretar, comparar y extraer información gráfica del desplazamiento de un objeto a largo de un determinado tiempo. En los resultados se observaron diversas limitaciones asociadas a la falta de valores numéricos, pero se destacó el hecho de que la totalidad de los participantes no tuvo complicaciones al extraer los datos numéricos exteriorizados en las gráficas; es decir, una *Met-before* generalizada.

Partiendo de este conocimiento generalizado, se diseñaron actividades intencionadas en generar metáforas que permitieran validar y estructurar estrategias geométricas en términos algebraicos. Además, la secuencia en las actividades tiene la intención de que a lo largo de cada tarea se refinen estrategias cada vez más eficientes, fortaleciendo un vínculo para lograr una dualidad a nivel proceso.

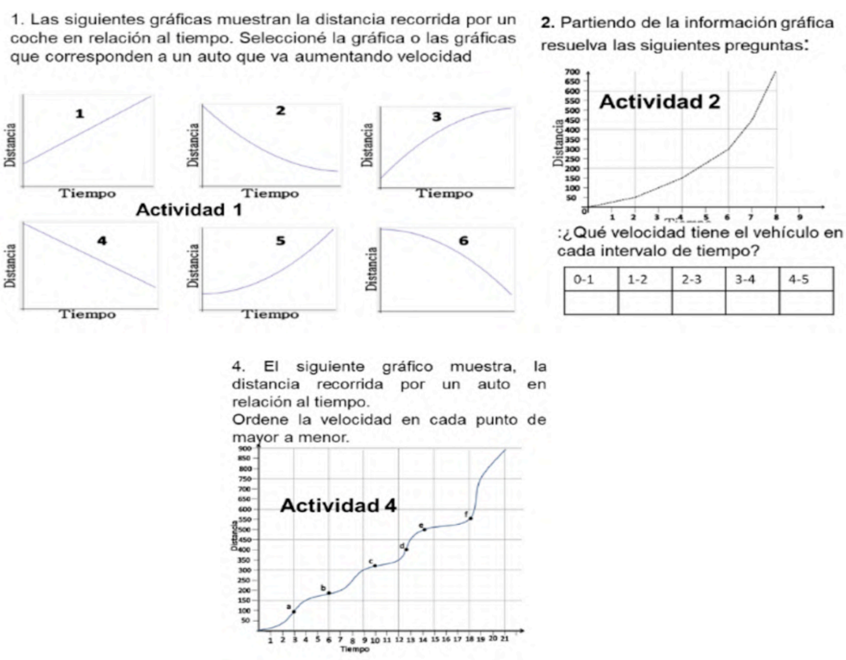
El hecho de que la velocidad se encuentre implícita en las gráficas distancia-tiempo y que sea exteriorizada por la razón de cambio –la cual puede ser obtenida al estructurar la información en procesos algebraicos o geométricos, así como la familiaridad cotidiana y escolar con el concepto de velocidad— llevó a tomar la decisión de integrarla como el eje de las preguntas y problemas que forman cada actividad dentro de la secuencia.

Desarrollo de la secuencia

La secuencia fue implementada con 7 estudiantes de licenciatura en matemáticas, 3 estaban en su primer semestre y 4 en el segundo. Esta consistió en 5 actividades (ver ejemplos en Figura 1) distribuidas en 3 sesiones de 2 horas. Durante las sesiones, los estudiantes trabajaron primero de forma individual, luego en equipos y, finalmente, se realizó una discusión grupal. Esta última guiada con intervenciones previamente diseñadas, derivadas de las limitaciones observadas en los resultados del examen diagnóstico.

Figura 1

Fragmento de las actividades aplicadas



En cada sesión se recuperaron las respuestas individuales de cada actividad, se registraron argumentos y se tomaron fotografías de los procesos exteriorizados por los equipos al justificar sus respuestas. De igual forma, se recabó la información mostrada en los debates y conclusiones del trabajo grupal.

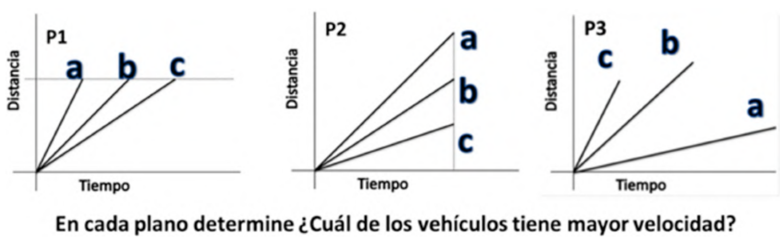
Sesión 1. Comprende las actividades 1 y 2, las cuales requieren relacionar fenómenos de variación con su gráfica correspondiente, basándose únicamente en una descripción verbal para, posteriormente, contrastarlos con una actividad similar a la que se le añaden datos numéricos para describir cada evento. En las respuestas de los participantes se observó lo siguiente:

- Cinco estudiantes relacionaron una gráfica ascendente con un aumento en la velocidad y sólo uno asoció correctamente el comportamiento de la velocidad con su gráfica correspondiente.
- Un equipo consideró el trazo de tangentes, ya que éstas representan la velocidad.
- Con la inclusión de la graduación, se calculó la velocidad promedio por secciones, lo que permitió llegar a las respuestas correctas. Con estos resultados, aquellos que no estaban convencidos con el argumento de las tangentes corrigieron sus respuestas de la actividad 1.

Antes de la discusión grupal, se intervino con una secuencia de problemas (Figura 2) que generaron los siguientes argumentos: si la distancia es la misma, el vehículo con menor tiempo tiene mayor velocidad; si los tiempos son iguales, el vehículo con mayor distancia tiene mayor velocidad; si se establece un valor común en una variable, se puede determinar el vehículo con mayor velocidad.

Figura 2

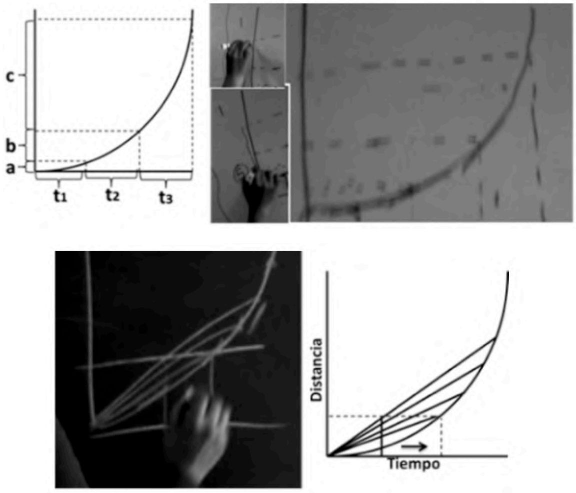
Problemas realizados en la intervención



En la discusión grupal se solicitó que elaboraran un procedimiento justificado para resolver la actividad 1. Como resultado, se desarrollaron dos estrategias. La primera estrategia consistió en generar intervalos de tiempo iguales y posteriormente comparar las distancias correspondientes en cada intervalo. La segunda consistió en fijar la distancia, trazar varias secantes del origen a diversos puntos en la curva y observar el cambio en el tiempo. Ambas estrategias se basan en comparar las razones de cambio al fijar una diferencia constante, por lo que se observó que se asocia el valor da la velocidad con el incremento de una de las variables. La Figura 3 ilustra los desarrollos realizados.

Figura 3

Procesos y justificaciones dadas por los estudiantes



Sesión 2. Se realizaron las actividades 3 y 4, las cuales requieren comparar y analizar la variación en distintas secciones y puntos sobre una curva, sin disponer de una escala numérica y tras agregar valores a cada eje. En las respuestas de los participantes se observó lo siguiente:

- En un principio, sus respuestas se basaron en la forma e inclinación de las curvas; cuando la apreciación no fue suficiente, recurrieron a las estrategias aprendidas en la sesión anterior.
- Los desafíos surgieron en la actividad 4, ya que la gráfica mostraba numerosas variaciones en su forma. Esto llevó a que las estrategias aplicadas generaran diferentes conclusiones al comparar la velocidad. La Tabla 1 muestra las técnicas utilizadas por cada participante.

Tabla 1

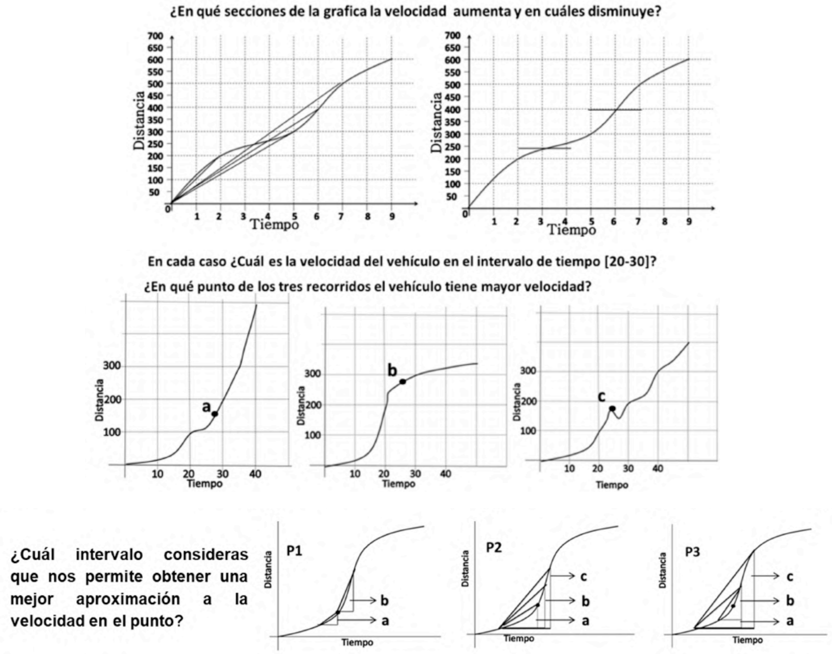
Intervalos utilizados y Técnicas para comparar velocidades

Alumno	Tipo de intervalo tomado	Elemento para comparar las velocidades
A1 y A4	Intervalos que van de un punto a otro	Calcula velocidad promedio
A2	Intervalos que van del origen al punto	Pendientes de las secantes
A3	Intervalos que van del origen al punto	Calcula la velocidad promedio
A5	Intervalos iguales a la izquierda de cada punto	Distancia recorrida en cada intervalo
A7 y A6	Intervalos iguales a la izquierda de cada punto	Pendientes de las rectas secantes

La intervención de esta sesión (Figura 4) ayudó a que los alumnos se percataran de las inconsistencias que pueden surgir al utilizar las estrategias desarrolladas en la sesión 1, lo que disminuyó la certeza de las respuestas dadas en la actividad 1. En la discusión grupal concluyeron que lo más conveniente es generar intervalos pequeños que contengan al punto y donde la curva no tuviera formas irregulares.

Figura 4

Procesos y justificaciones dadas por los estudiantes



El grupo observó que la razón de cambio en dos intervalos que incluyen a un mismo punto puede ser muy diferente y, a su vez, puntos dentro de un mismo intervalo llegan a representar distintas variaciones. Además, la tabla muestra que el proceso de calcular la razón de cambio y el acto de observar la inclinación de las secantes en los mismos intervalos son dos estrategias utilizadas por los estudiantes cuando comparan velocidades en diferentes momentos, las cuales refinaron después de las intervenciones al aplicarlas sobre secciones regulares que contenían al punto.

Sesión 3. Se pidió a los alumnos que calcularan la velocidad en varios puntos de una curva, utilizando tanto su representación gráfica como analítica para encontrar la mejor aproximación. De esta actividad, los estudiantes concluyeron que, al utilizar la representación analítica, se pueden obtener aproximaciones más precisas de la velocidad de un vehículo en un momento dado. Esto se debe a que con esta representación pueden seleccionar intervalos tan pequeños como deseen, aunque el resultado será siempre una aproximación. Esta última afirmación dio al siguiente diálogo:

> Observador: *¿Por qué sólo podemos aproximarnos al valor de la velocidad en el punto?*
> Alumno 7: *Porque no se puede crear un intervalo tan pequeño donde sólo este el punto*
> Observador: *¿Y sí tomamos el punto como el intervalo?*
> Alumno 1: *Eso no se puede porque la distancia recorrida y el tiempo serían cero*
> Alumno 5: *No se puede, necesitas compararlo con otro punto*
> Alumno 1: *Sí, sino cómo analizamos la velocidad*
> Observador: *Entonces ¿no se puede calcular la velocidad?*
> Alumno 7: *No, porque un punto no tiene distancia ni tampoco tiempo, es solo un punto todo está igual*
> Alumno 1: *Sí, nada cambia. No se pueden hacer comparaciones*

Se infiere que los estudiantes tienen dificultades para comprender la transición del cálculo de la velocidad promedio (razón de cambio) al cálculo de la velocidad instantánea (derivada), ya que consideran indispensable la existencia de dos puntos fijos. Esto proviene, probablemente, de los procedimientos seguidos en las sesiones anteriores, donde esta estrategia validó sus ideas y enfoques.

Para guiar al grupo hacia una mejor comprensión del concepto derivada como límite de la razón de cambio, la discusión se centró en el análisis gráfico. Se les preguntó ¿Cómo se obtiene la pendiente de una recta?, a lo que la mayoría respondió correctamente, y se mostró que las rectas secantes convergen hacia la recta tangente en un punto dado. Sin embargo, este resultado no se articuló con el valor de la velocidad instantánea ni con el valor de la velocidad promedio.

De esta intervención, se observó que los alumnos trataban el cálculo de la pendiente y la velocidad promedio como procesos aislados dentro del mismo fenómeno, a pesar de que ambos les habían permitido resolver las tareas propuestas en cada problema. Este hecho dificultó guiar la discusión desde el enfoque gráfico hacia la comprensión de la expresión analítica de la derivada.

RESULTADOS

A partir del análisis cualitativo de las respuestas, debates y conclusiones exteriorizadas por los estudiantes durante cada sesión, se observó que:

- Al inicio del estudio, la mayoría de los participantes exploraban la velocidad en un punto utilizando intervalos que tuvieran como extremo derecho al punto, y asociaban el crecimiento en la gráfica con un incremento en la velocidad.
- Existen experiencias y conocimientos previos que pueden contradecirse en la práctica. Sólo cuando se confrontan en una misma situación y

con una herramienta de validación se pueden reformular para permitir el desarrollo de un nuevo conocimiento.

- Al corregir concepciones erróneas, los procesos de validación y las estrategias compatibles se incorporaron al contexto en el que se desarrollaron, lo que creó un nuevo modelo de pensamiento.
- El contexto y los gráficos fueron la principal fuente de debates. En cada intervención orientaron los desarrollos y estrategias de los estudiantes, lo que ayudó a consolidar las ideas que persistían y organizarlas con las nuevas nociones que emergían en cada sesión.
- Desde una perspectiva algebraica, las estrategias desarrolladas a lo largo de las distintas sesiones se vincularon firmemente con métodos que requerían la existencia de dos puntos para el calculó y el análisis de la velocidad promedio e instantánea.
- Los procesos geométricos no se conciben como equivalentes a los algebraicos, a pesar de que ambos proporcionan y validan las mismas conclusiones.
- En las sesiones finales, la exploración algebraica de velocidad en un punto se realizó considerando intervalos que contuvieran al punto en secciones regulares de la gráfica. En el aspecto geométrico, se tomaron estas mismas secciones para trazar rectas secantes a la curva y relacionar su inclinación directamente con el valor de la velocidad.

En este sentido, la inclusión de graduaciones ayudó a modificar las ideas iniciales al permitir realizar un trabajo algorítmico que validara las conjeturas geométricas. De los procedimientos derivados de cada estrategia geométrica –como fijar una variable, trabajar sobre intervalos iguales y utilizar regiones regulares— resultó una noción que incorporaba a la recta secante y su inclinación a su comprensión variacional. Las gráficas distancia-tiempo ayudaron a que se estructuraran mutuamente dos rutas para analizar la velocidad: la geométrica (estimar la inclinación de la recta secante) y la algebraica (calcular de la razón de cambio en un intervalo). Sin embargo, la ausencia de conexiones directas entre ambas y su estructura centrada en la toma de dos puntos obstaculizó avanzar a un pensamiento variacional que permitiera interpretar la velocidad instantánea.

CONCLUSIONES

Los resultados finales muestran que la interpretación de la razón de cambio contextualizada en la velocidad y dirigida al análisis puntual se concibió en los participantes como el valor de la variación en una sección gráfica de forma regular que contiene al punto, que puede ser aproximado mediante el cálculo algebraico de la razón de cambio en dicha sección y es directamente proporcional a la inclinación de su recta secante. Sin embargo, ambas valoraciones no se consideran equivalentes.

Comparando los resultados con los obtenidos por Dolores-Flores et al. (2016) al trabajar con 6 estudiantes que iniciaban sus estudios de posgrado en Docencia de la Matemática, encontramos que en ambos trabajos, los estudiantes muestran las siguientes similitudes al iniciar la secuencia: privilegian las técnicas algebraicas sobre las geométricas, existen argumentos que se justifican en la dirección de la gráfica, se seleccionan intervalos con el punto como extremo derecho y el uso de objetos matemáticos sin argumentación. Lo anterior son estructuras mentales exteriorizadas al enfrentar problemas similares, es decir, "Met-Before" compartidas entre dos grupos diferentes de individuos que no comparten experiencias y, a pesar de ello, manifiestan las mismas estructuras mentales para experimentar, entender y afrontar retos de características similares.

Para futuras investigaciones se sugiere incluir actividades que muestren la equivalencia entre las técnicas geométricas y algebraicas. Además, se recomienda reproducir las actividades en otras carreras en las que se imparta la asignatura de cálculo diferencial, esto con el objetivo de observar y comprar las experiencias previas y técnicas que evocan grupos con diferentes características.

REFERENCIAS

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352–378. https://doi.org/10.2307/4149958

Dirección General de Bachillerato (2013). P*rograma de estudios. Calculo diferencial.* SEP.

Doerr, H. M., & O'Neil, M. H. (2011). A modelling approach to developing an understanding of average rate of change. En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the seventh congress of the european society for research in mathematics education* (pp. 937–946). University of Rzeszñw, Poland-CERME.

Dolores-Flores, C., Rivera-López, M. I., & Tejada-Mayo, Y. (2016). Una experiencia didáctica con incidencia en la interpretación de gráficas cinemáticas. R*evista de la Escuela de Ciencias de la Educación, 2*(11), 129–154. https://doi.org/10.35305/rece.v2i11.264

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116–140. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.25.2.0116

Larson, R., & Edwards, B. H. (2010). *Cálculo 1 de una variable* (9ª ed). McGrawHill

Nemirovsky, R. (1994). On Ways of Symbolizing: The case of Laura and velocity sign. *The Journal of Mathematical Behavior, 13*(4), 389-422. https://doi.org/10.1016/0732-3123(94)90002-7

Purcell, E., Varberg, D., & Rigdon, S. (2007). *Cálculo diferencial e integral* (9ª ed.). Pearson.

Roth, W. M. (2003). Competent workplace mathematics: How signs become transparent in use. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 8*(2), 161–189. https://doi.org/10.1023/B:IJCO.0000003873.36183.2d

Roth, W. M. (2004). Emergence of graphing practices in scientific research. *Journal of Cognition and Culture, 4*(1), 595–627. https://doi.org/10.1163/1568537042484940

Roth, W. M., & Bowen, G. M. (2001). Professionals read graphs: A semiotic analysis. *The Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 159–194. https://doi.org/10.2307/749672

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1–36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Sfard, A. (1994). Reification as a birth of a metaphor. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 44–55. https://bit.ly/3xujlTv

Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher, 27*(2), 4–13. https://doi.org/10.3102/0013189X027002004

Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas* (7.ª ed.). Cengage Learning.

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 20*(2), 5–24. https://doi.org/10.1007/BF03217474